Cours PL

Chapitre 8

DUALITE

Sommaire :

Objectifs :

1. INTRODUCTION

Un aspect important de la programmation linéaire est la notion de **dualité.** En effet, à tout modèle de **programmation linéaire primal** correspond un autre modèle de **programmation linéaire dual**.
La relation qui existe entre un programme primal et son dual est très importante pour plusieurs raisons :

Importante de la notion de dualité en programmation linéaire

1. La résolution du primal permet d'obtenir non seulement l'utilisation optimal des ressources mais également l'attribution de valeurs monétaires à ces mêmes ressources (interprétation économique des variables duales).

2. La dualité qui existe entre le primal et le programme dual permet :

   a) en résolvant le problème primal, d'obtenir également d'un tableau optimal, la ***solution optimale au problème dual*** et inversement ;
   b) d'améliorer éventuellement le processus itératif de résolution en résolvant l'un ou l'autre des problèmes, selon la structure du primal ou du dual.
3. La théorie de la dualité permet d'établir d'autres algorithmes de résolution comme **l'algorithme du dual simplexe** que nous traitons dans ce chapitre.
4. La notion de dualité est fondamentale dans l'analyse de sensibilité de la solution optimale et de la post-optimisation.

2. FORMULATION DU DUAL D'UN PROGRAMME LINEAIRE

Il existe deux formes importantes de la dualité entre les deux programmes linéaires, la **forme canonique** de la dualité et la **forme standard** de la dualité.

Forme canonique de la dualité

a) La **forme canonique** d'un programme primal consiste en un modèle de programmation linéaire dont l'optimisation en est une de maximisation avec des contraintes du type $\leq$ et des variables toutes non négatives :

$$
\begin{cases}
\text{Maximiser } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
s.c. \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_2 \\
\qquad \vdots \\
\qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \\
\qquad \vdots \\
\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
\qquad x_1, x_2, \ldots., x_n \ge 0
\end{cases}
$$

Programme

Primal

A partir de la forme canonique du primal, on lui associe **la forme canonique du dual** donc l'optimisation en est une de **minimisation** avec des contraintes du type $\geq$ et des variables toutes non négatives.

$$
\begin{cases}
Minimiser\ W = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \\
s.c. \qquad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{i1}y_i + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1 \\
\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{i2}y_i + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2 \\
\qquad \vdots \\
\qquad a_{1n}x_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{in}y_i + \ldots + a_{mn}y_n \le c_n \\
\qquad y_1, y_2, \ldots., y_m \ge 0
\end{cases}
$$

Programme

dual

La symétrie de ces deux programmes est mise en évidence dans le tableau ci-après :

programme primal	Progrmmme dual
$Maximiser\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$Minimiser\ \ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$s.c.$	$s.c.$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots,\mathrm{m}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\ldots,\mathrm{n}$
$x_j \ge 0, \qquad j = 1,\ldots,\mathrm{n}$	$y_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,\mathrm{m}$

On constate que les deux programmes comportent les mêmes éléments, mais arrangés de manière différente. Les relations suivantes existent entre les deux programmes.

Relations entre le primal et le dual Forme canonique

1. Si la fonction objectif du primal doit être maximisée, celle du dual doit être minimisée (et inversement).
2. Les coefficients de la fonction objectif du primal deviennent les second membres des contraintes du dual alors que les seconds membres des contraintes du primal deviennent les coefficients des variables duales dans la fonction objectif.
3. Les coefficients des variables dans les contraintes du dual sont ceux du primal mais transposés (les coefficients de la ligne ***i=k*** du primal deviennent les coefficients de la colonne ***j=k*** du dual).
4. A chaque **contrainte** du primal $\leq$, lui correspond une **variable** duale de signe ≥ 0.
5. A chaque variable de décision non négative dans le primal, lui correspond une contrainte de $\geq$ dans le dual.
6. La dualité est une notion **symétrique**. L'un des programmes au choix est appelé le **programme primal** et l'autre le **programme dual**.
7. Le dual du dual est le primal.

3. EXEMPLE

Soit le programme primal

$$(P)=\begin{cases} Min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.c. \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ \quad x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ \quad x_1 - x_2 \geq 0 \\ \quad x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Ecrivez le programme dual (D) du programme primal (P).

b) Quelle est la solution optimale du programme dual (D).
c) Quelle est la solution optimale du programme primal (P).

Programme **Primal**	Programme **Dual**
Max Z (ou W)	Min W (ou Z)
Nbre de **contraintes** à la contrainte i ▶ à la contrainte de type $\leq$ ▶ de type $\geq$ ▶ de type $=$ ▶	Nbre de **variables** duales Correspond la variable y_i $y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ y_i sans restriction de signe
Nbre de **variables de décision** $\mathbf{x_j \geq 0}$ $\mathbf{x_j \leq 0}$ $\mathbf{x_j}$ sans restriction de signe	Nbre de **contraintes** Contrainte de type $\geq$ Contrainte de type $\leq$ Contrainte de type $=$
Coefficient $\mathbf{c_j}$ dans la fonction objectif	Second membre pour la $\mathbf{j^{\text{ème}}}$ **contrainte**
Second membre $\mathbf{b_i}$ de la $\mathbf{i^{\text{ème}}}$ **contrainte**	Coefficient de la **variable** $\mathbf{y_i}$ dans la fonction objectif **w**
Coefficient, dans la **contrainte i**, de la **variable** $\mathbf{x_j}$ ($\mathbf{a_{ij}}$)	Coefficient, dans la **contrainte j**, de la variable $\mathbf{y_i}$ ($\mathbf{a_{ji}}$)

Son problème dual (D) est :

$$\begin{cases} Max \quad w = 30\, y_1 + 10\, y_2 \\ s.c. \quad 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ \quad 3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3 \\ \quad y_1 \leq 0 \\ \quad y_2 ,\ y_3 \geq 0 \\ \quad x_1 ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution du problème dual qui est une Maximisation.

<u>Tableau 1</u>

1	y_4	2	1	1	1	0	0	2
2	y_5	3	2	-1	0	1	0	3

3	y_6	1	0	0	0	0	1	0

Cj - Zj	30	10	0	0	0	0	0

****************** W = 0

k = 3 r = 1

Tableau 2

1	y_4	0	1	1	1	0	-2	2
2	y_5	0	**2**	-1	0	1	-3	3
3	y_1	1	0	0	0	0	1	0
Cj - Zj		0	10	0	0	0	-30	0

------------ ---

****************** W = 0

k = 2

r = 2

Tableau 3

1	y_4	0	0	**1.5**	1	-0.5	-0.5	0.5
2	y_2	0	1	-0.5	0	0.5	-1.5	1.5
3	y_1	1	0	0	0	0	1	0

Cj- Zj 0 0 5 0 -5 -15 0*** W = 15

k = 1 r = 3

Tableau 4

1	y_3	0	0	1	0.66667	-0.33333	-0.33333	0.33333
2	y_2	0	1	0	0.33333	0.33333	-1.6667	1.6667
3	y_1	1	0	0	0	0	1	0

Cj - Zj   0   0   0   -3.33333   -3.33333   -13.3333 0

****   W = 16.6667

Solution duale ***y* = (0 1.6667 0.33333)*** ***w* = 16.6667***

La solution de notre problème se lit sous les variables d'écart dans la dernière ligne :

Solution primale x* = *(* 3.33333 3.33333 13.3333***)*** ***Z* = 16.6667***

On peut vérifier que :

CX* = Y*b   b=(30 10 0)   c= (2 3)

(2 3 0)*(3.33333 3.33333 13.3333***)'***

= ***(0 1.6667 0.33333)**** (30 10 0)'

16.6667 **=** ***16.6667***