Cours 7

Algorithme du simplexe

Méthode des deux phases

Sommaire :

Objectifs :

1. **INTRODUCTION**
2. **AJOUT DES VARIABLES ARTIFICIELLES**
3. **L'ALGORITHME DU SIMPLEXE EN DEUX PHASES**
4. **APPLICATION DE LA METHODE EN DEUX PHASES**

1. INTRODUCTION

L'algorithme du simplexe débute avec une solution de base réalisable.
Si le point origine appartient à l'ensemble réalisable, la solution de base réalisable est facile ; mais si le point origine n'appartient pas l'ensemble réalisable, il existe au moins une contrainte du type

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad ou \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

Nous devons toujours transformer les inéquations en équations. Pour cela on doit **ajouter** ou **soustraire** des variables d'écart ;

L'étape suivante est d'ajouter des **variables artificielles** pour les équations dans lesquelles on a soustrait des variables d'écart.

2. AJOUT DES VARIABLES ARTIFICIELLES

Considérons le modèle de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Minimiser\ Z = 3x_1 + 4x_2 \\ s.c. \qquad 5x_1 - 5x_2 \leq 60 \\ \qquad x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ \qquad x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ \qquad x_1 \geq 6 \\ \qquad x_2 \leq 8 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Introduction des variables d'écart

Ecrivons le modèle sous sa forme standard ; on doit **ajouter** une variable d'écart dans les contraintes de type $\leq$ et **soustraire** une variable d'écart dans les contraintes de type $\geq$.

On obtient :

$$\begin{cases} Minimiser\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ s.c. \quad 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 60 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\ x_1 - x_6 = 6 \\ x_2 + x_7 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons $n = 7 \ et \ m = 5$; on doit annuler $(n - m) = 7 - 5 = 2$ variables pour espérer avoir une solution réalisable.Si on annule $x_1 \ et \ x_2$, on obtient : $x_3 = 60, x_4 = -12, x_5 = -2, x_6 = -6, \ x_7 = 8$

Les variables $x_4, x_5, x_6.$ étant négatives.

b) **Introduction des variables artificielles**

Dans le cas de contraintes du type $\geq$ ou du type $=$, en devra, en plus de soustraire une variable d'écart pour les contraintes de type $\geq$ ou du type $=$, ajouter une variable artificielle dans ces contraintes respectives.

$$\begin{cases} \textbf{Min}\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \\ S.C. \quad 5x_1 - 5x_2 + x_3 = 60 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_8 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_9 = 2 \\ x_1 - x_6 + x_{10} = 6 \\ x_2 + x_7 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \geq 0 \end{cases}$$

On peut obtenir alors une solution de départ en annulant (10 - 5) = 5 variables, soit les deux variables de décision x_1, x_2 et x_4, x_5, x_6 (celles qui ont été soustraites). La solution de base est alors :

$$x_3 = 60,\ x_8 = 12,\ x_9 = 2,\ x_{10} = 6,\ \ x_7 = 8 \qquad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

Nous pouvons appliquer l'algorithme du simplexe ; toutefois nous avons modifié de façon importante le problème original en ajoutant les variables artificielles.

Pour obtenir une solution réalisable de base au problème original, il faut que les **variables artificielles soient réduites à zéro.**

Comme nous l'avons déjà mentionné, deux méthodes sont employées pour éliminer éventuellement les variables artificielles de la base soit la **méthode en deux phases** et la **méthode des pénalités.**

Remarque : Les variables artificielles, contrairement aux variables d'écart, n'ont aucune interprétation physique. Les variables artificielles, ne sont pas Les variables légitimes comme le sont les variables de décision et les variables d'écart. Elles jouent seulement un rôle utilitaire pour obtenir une solution de départ. Elles doivent être réduites à zéro pour espérer obtenir une solution de base réalisable au modèle de programmation linéaire.

3. L'ALGORITHME DU SIMPLEXE EN DEUX PHASES :

La méthode des deux phases consiste à segmenter l'algorithme du simplexe en deux étapes. La première étape, dite **Phase 1**consiste à éliminer les variables artificielles de la base (ou au moins à les rendre nulles). Si tel est le cas, la phase II débute avec le dernier tableau de la phase I. L'algorithme se poursuit en examinant des solutions réalisables de base au problème original selon les critères usuels de l'algorithme du simplexe.

D'autre part, si la phase I se termine avec au moins une variable artificielle dans la base à une valeur positive, on ne peut déterminer de solution admissible au programme linéaire, il n'existe pas de solution réalisable.

- **La méthode en deux phases**

  Phase I. Le but de la phase I est de déterminer une solution de base réalisable au problème original en éliminant les variables artificielles du système de contraintes.

  Il s’agit d’abord d’introduire les variables artificielles nécessaires dans le système de contraintes. Par la suite, on peut appliquer les critères associés à un problème de maximisation en optimisant la fonction objectif :

  $$Z^* = -x_{a_1} - x_{a_2} - ..... - x_{a_n} .$$

  Si nous avons introduit ***r*** variables artificielles dans le système de contraintes ou encore en minimisant la somme des variables artificielles, avec les critères appropriés pour le choix de la variable entrante dans l’application de l’algorithme :

  $$Min\ Z^* = x_{a_1} + x_{a_2} ..... + x_{a_n}$$

Si le critère d’optimalité est satisfait et que $Z^* < 0$, alors il y’a au moins une variable artificielle dans la base ; le programme linéaire n’admet pas de solution réalisable.

Si $Z^* = 0$, le programme linéaire admet des solutions réalisables, la

Phase II. Le but de la phase II est de déterminer une solution optimale finie au problème original.

La phase II consiste à optimiser la fonction objectif comportant que des variables légitimes, en appliquant l’algorithme du simplexe.

Dans le cas où les variables artificielles ont été éliminées de la base (phase I), on débute la phase II avec un tableau réduit, éliminant les colonnes associées aux variables artificielles.

Si d’autre part, on a terminé la phase I avec $Z^* = 0$ et qu’il existe une ou plusieurs variables artificielles dans la base, on débute la phase II en optimisant la fonction objectif originale et en associant un coefficient économique nul pour les variables artificielles restées dans la base à une valeur nulle.

phase I est terminée (il n'est pas nécessaire de satisfaire au critère d'optimalité). On passe à la phase II.

4. APPLICATION DE LA METHODE EN DEUX PHASES

$$\begin{cases} Minimiser\ \ Z = 3x_1 + 4x_2 \\ s.c. \quad 5x_1 - 5x_2 \le 60 \\ \quad x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ \quad x_1 - 2x_2 \ge 2 \\ \quad x_1 \ge 6 \\ \quad x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

L'introduction des variables d'écart et des variables artificielles nous conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Minimiser\ \ Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} \\ s.c. \quad 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 60 \\ \quad x_1 + 3x_2 - x_4 + x_8 = 12 \\ \quad x_1 + 2x_2 - x_5 + x_9 = 2 \\ \quad x_1 - x_6 + x_{10} = 6 \\ \quad x_2 + x_7 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \ge 0 \end{cases}$$

Les variables artificielles sont x_8, x_9, x_{10}.

Phase I : Minimiser $Z^* = x_8 + x_9 + x_{10}$

Tableau 1 : Phase I

c_j	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B **Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	**Solution de base**
0 x_3	5	-5	1	0	0	0	0	0	0	0	60
1 x_8	1	3	0	-1	0	0	0	-1	0	0	12
1 x_9	1	-2	0	0	-1	0	0	0	1	0	2
1 x_{10}	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	6
0 x_7	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8
$z_j = C'_B x_J$	3	1	0	-1	-1	-1	0	1	1	1	$Z^* = 20$
$c_j - z_j$	-3	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	

Les variables hors base sont : x_1, x_2, x_4, x_5, x_6. Puisque nous minimisons, le choix de la variable entrante s'effectue selon le critère suivant :

$$\min\{c_j - z_j,\ c_j - z_j < 0\} \min\{-3, -1\} = -3 = c_1 - z_1$$

Variable **entrante** : $x_1 = 2$ Variable **sortante** : x_9 **Pivot** : $a_{31} = 1$

Tableau 1 : Phase I

c_j	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B **Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	**Solution de base**
0 x_3	0	5	1	0	5	0	0	0	-5	0	50
1 x_8	0	5	0	-1	1	0	0	1	-1	0	10
0 x_1	1	-2	0	0	-1	0	0	0	1	0	2
1 x_{10}	0	2	0	0	1	-1	0	0	-1	1	4
0 x_7	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8
$z_j = C'_B x_J$	0	7	0	-1	2	-1	0	1	-2	1	$Z^* = 14$
$c_j - z_j$	0	-7	0	1	-2	1	0	0	3	0	

Les variables hors base sont : x_2, x_4, x_5, x_6, x_9 Puisque nous minimisons, le choix de la variable entrante s'effectue selon le critère suivant :

$$\min\{c_j - z_j ,\ c_j - z_j < 0\} \min\{-7, -2\} = -7 = c_2 - z_2$$

Variable **entrante** : $x_2 = 2$ Variable **sortante** : x_8 **Pivot** : $a_{22} = 5$

Tableau 3 : Phase I

c_j		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	**Variables de base**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	**Solution de base**
0	x_3	0	0	1	14	0	0	-1	-4	0		40
0	x_2	0	1	0	-1/5	1/5	0	0	1/5	-1/5	0	2
0	x_1	1	0	0	-2/5	-3/5	0	0	2/5	3/5	0	6
1	x_{10}	0	0	0	2/5	3/5	-1	0	-2/5	-3/5	1	0
0	x_7	0	0	0	1/5	-1/5	0	1	-1/5	1/5	0	6
$z_j = C'_B x_J$		0	0	0	2/5	3/5	-1	0	-2/5	-3/5	1	$Z^* = 0$
$c_j - z_j$		0	0	0	-2/5	-3/5	1	0	7/5	8/5	0	

Bien que le critère d'optimalité pour un problème de minimisation n'est pas satisfait, la valeur minimale que peut prendre Z^* est atteinte : $Z^* = 0$.

La phase I est terminée et il existe des solutions réalisables au programme linéaire.

On a toutefois une variable artificielle dans la base à une valeur 0 : $x_{10} = 0.$

Eliminons du tableau 3 – phase I – les deux colonnes associées aux variables artificielles x_8 *et* x_9.

Débutons la phase II en optimisant cette fois la fonction objectif du modèle original en affectant un coefficient économique 0 à la variable artificielle x_{10}.

Phase II minimiser $Z = 3x_1 + 4x_2$

Tableau 1 : Phase II

c_j	3 40 0 0 0 0 0	
C_B **Variables de base**	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_{10}	**Solution de base**
0 x_3 4 x_2 3 x_1 0 x_{10} 0 x_7	0 0 1 1 4 0 0 0 0 1 0 -1/5 1/5 0 0 0 1 0 0 -2/5 -3/5 0 0 0 0 0 0 2/5 3/5 -1 0 1 0 0 0 1/5 -1/5 0 1 0	40 2 6 0 6
$z_j = C'_B x_J$ $c_j - z_j$	3 4 0-2 -1 0 0 0 0 0 0 2 1 0 0 0	$Z^* = 26$

On constate que, pour les variables hors base, tous les $c_j - z_j \geq 0$. Le tableau 1 de la phase II est optimal.

On peut remplacer la variable artificielle x_{10} par une variable légitime, soit x_4 ,soit x_5,puisque $a_{44} = 2/5 \ \ et \ \ a_{45} = 3/5$, nous ignorons par la suite la colonne associée à la variable artificielle.

Introduisant la variable x_5; la variable sortante est x_{10} et le pivot est $a_{45} = 3/5$.

La variable entrante est: $x_5 = 0$. En pivotant sur 3/5, on obtient le tableau suivant :

Tableau 2 - Phase II

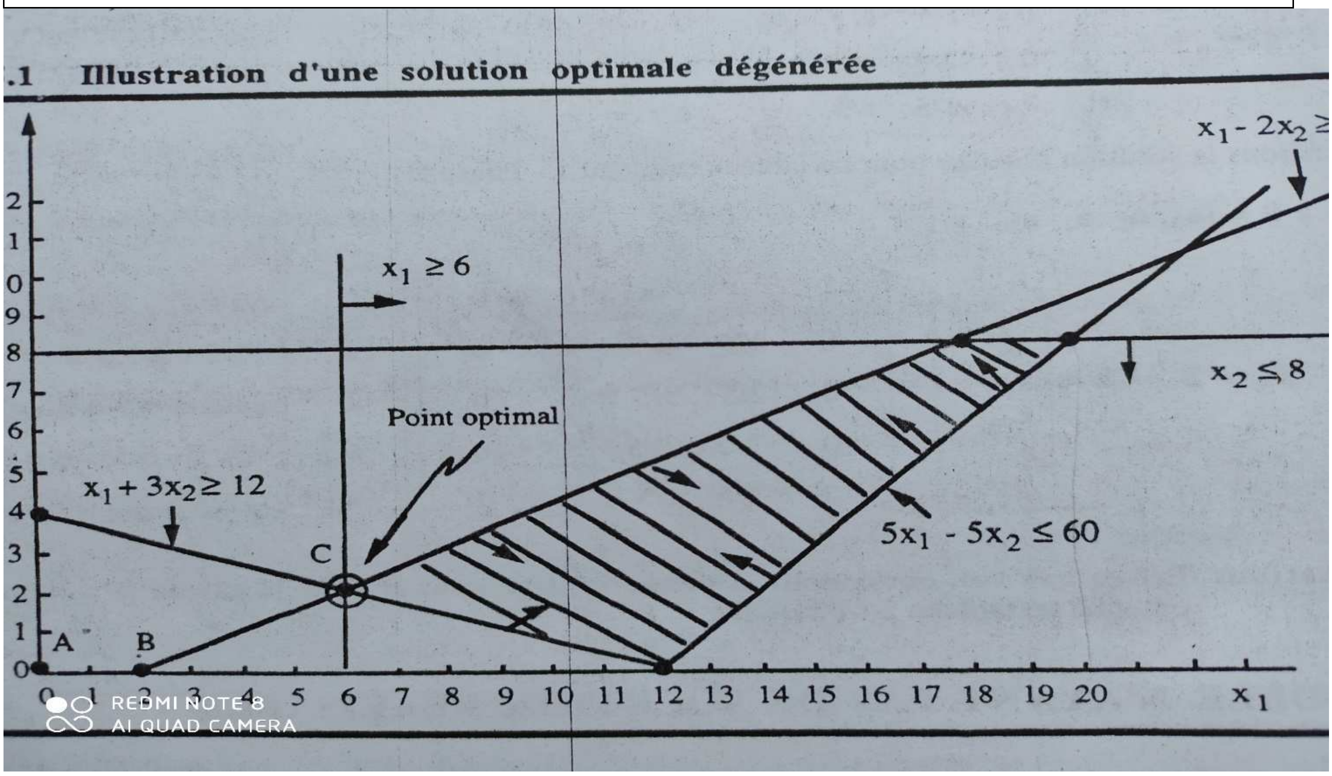
c_j	3 4 0 0 0 0 0	
C_B **Variables de base**	x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7	**Solution de base**
0 x_3 4 x_2 3 x_1 0 x_5 0 x_7	0 0 1 -5/30 0 0 0 1 0 -1/3 0 0 0 1 0 0 0 00 0 0 0 0 2/3 2/3 1 0 0 0 0 1/30 0 1	40 2 6 0 6
$z_j = C_B^{'} x_J$ $c_j - z_j$	3 4 0 -4/3 0 -5/3 0 0 0 0 4/3 0 5/3 0	$Z^* = 26$

Dans ce cas, la base est constituée de variables légitimes :

$$B = [x_3, x_2, x_1, x_5, x_7]$$

La solution optimale est une solution réalisable de base dégénérée :

$$\boxed{x_1 = 6,\ x_2 = 2,\ x_3 = 40,\ x_5 = 0,\ x_7 = 6,\quad x_4 = x_6 = 0 \quad et \quad Z^* = 26.}$$



Remarques :

a) Sur la figure précédente, on ne constate que le point $A\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ correspondà la solution de base de départ tableau 1 de la phase I ; $B\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ correspondà la solution de base obtenue au tableau 2 de la phase I et finalement le point $C\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ correspondà la solution de base obtenue au tableau 3 de la phase I ; ce point donne une solution réalisable de base au programme linéaire original et comme on l'a constaté au tableau 1 de la phase II, il est optimal.

b) Si l'optimisation en avait été une de maximisation, deux autres tableaux auraient été requis dans la phase II pour obtenir la solution optimale au point dont les coordonnées sont $\begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = 8 \end{cases}$.