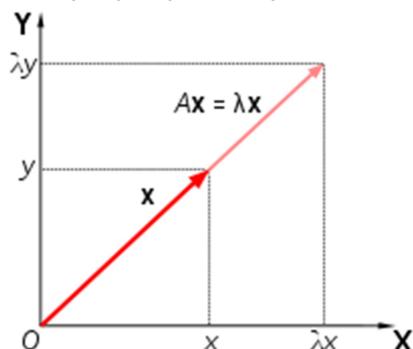


## Chapitre 4 : Calcul de valeurs et de vecteurs propres

### 1. Notions de Bases :

Si  $x$  est un vecteur propre de  $A$  alors ce dernier étire le vecteur  $x$  sans changer sa direction.  $x$  est dit alors un vecteur propre pour  $A$ , pour une valeur propre  $\lambda$  donnée.



**Remarque :** Pour plus d'explication sur les formules algébriques des valeurs propres et vecteurs propres, consulter la **section 1 du chapitre 3**.

#### Exemple explicatif :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  une matrice carrée :

Alors le spectre de  $A$  est donnée comme suit :  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (2, 1)$

En plus les vecteurs propres associés sont donnés par  $X$  :

$$X = \begin{pmatrix} 0.8944272 & 2.236068 \\ 0.4472136 & 2.236068 \end{pmatrix}$$

Ce qui résulte que  $A \cdot X(:, 1)$  est multiple par 2 de  $X(:, 1)$ .

Et encore  $A \cdot X(:, 2) = 1 \cdot X(:, 2)$

**Exercice :** Interpréter ces résultats graphiquement.

### 2. Localisation des valeurs propres

Le théorème de **Gershgorin** permet, étant donnée une matrice carrée  $A$ , de construire un domaine contenant toutes les valeurs propres de  $A$ .

**Théorème de Gershgorin :** Soit  $A=(a_{i,j})$  une matrice complexe de taille  $n$ . On appelle disques de **Gershgorin** associés à  $A$  les  $n$  disques  $(D_1, D_2, \dots, D_n)$  de  $\mathbb{C}$  (ensemble des complexe) définis par :

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

D'où  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Remarque :** Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , alors elle appartient à un des disques de **Gershgorin** de  $A$ .

**- Démonstration :**

Prenons en effet  $x$  un vecteur propre (non nul) associé à la valeur propre  $\lambda$ , et soit  $i$  tel que  $|x_i|$  soit le maximum. Puisque  $x$  est vecteur propre pour  $\lambda$ , alors si on a  $Ax = \lambda x$  ou encore :

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j.$$

en isolant le terme  $a_{i,i} x_i$

On divise ensuite par  $x_i$  (qui n'est pas nul car  $x$  est non nul), on prend le module et on utilise l'inégalité triangulaire. On obtient donc :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_i|}.$$

qui donne le résultat précédent, puisque :  $|x_j| / |x_i| \leq 1$

C'est un résultat très intéressant, car la recherche de valeurs propres est en général un problème compliqué (il faut trouver les racines d'un polynôme). Le théorème de Gershgorin donne des informations précieuses sur leur localisation.

**- Résultat Intéressant :**

De manière équivalente, ce théorème précise que le spectre de  $A$ , noté  $\rho(A)$ , est globalement inclus dans la réunion des disques de **Gershgorin**, ce qui permet d'exclure la région du plan complexe qui est extérieure à cette réunion :

$$\rho(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$D_i$  : correspond au  $i$  ième disque.

- **Exemple** : Soit la matrice A défini comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Est à diagonale dominante stricte car chaque élément diagonal dépasse strictement la somme (des valeurs absolues) des éléments extra-diagonaux de la même ligne. En construisant les disques de **Gershgorin**,

$$D_1 : \text{disque de centre } 4 \text{ de rayon } 2+1=3$$

$$D_2 : \text{disque de centre } 5 \text{ de rayon } 1+3=4$$

$$D_3 : \text{disque de centre } 7 \text{ de rayon } 2+4=6$$

On constate ici que  $D_1 \subset D_2 \subset D_3$ . Par conséquent,  $\rho(A) \subset D_3$  et en particulier  $\lambda = 0$  n'est pas une valeur propre de A. La matrice A est donc inversible.

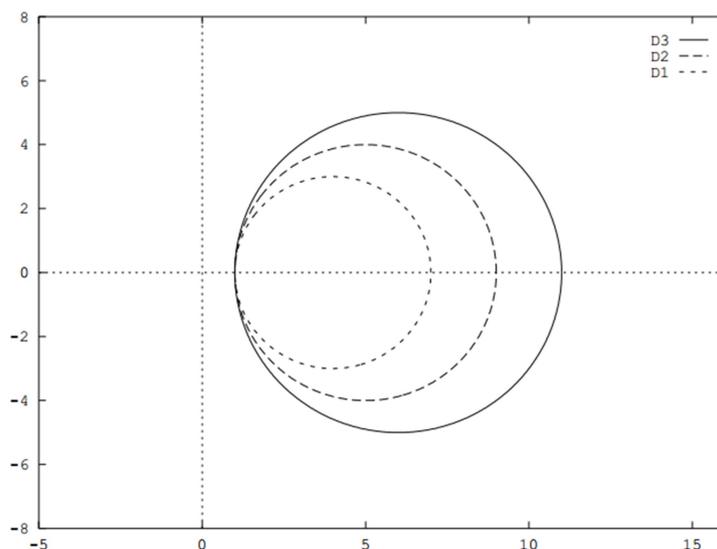
$$X_1 = \begin{pmatrix} -0.2923541 \\ -0.5140478 \\ -0.8064019 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -0.8944272 \\ 0.4472136 \\ 1.160D - 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0.7824344 \\ -0.5933245 \\ 0.1891099 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (10.274917, 3, 2.7250828)$$

**Remarque** : les calculs ont été obtenus par la fonction Scilab « **spec** ».

$\rho(A) = 10.274917 \in D_3$  ; Ci-après une illustration graphique des trois disques :



## 1. Méthode de la puissance

**Rappel :** Une matrice  $A$  est dite diagonalisable s'il existe une matrice  $P$  de même taille inversible telle que  $P^{-1}.A.P$  soit diagonal.

- La méthode de la puissance est un algorithme permettant de calculer la valeur propre de plus grand module et un vecteur propre associé d'une matrice  $A$ . L'idée est que, si on définit une suite  $(X_n)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  par la relation :  $X_{n+1} = A.X_n / ||A.X_n||$

Dans ce cas les vecteurs  $x_n$  vont converger vers les vecteurs propres associés à la plus grande des valeurs propres.

**Théorème :** Soit  $A$  une matrice carrée réel diagonalisable de dimension  $n$ , et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres, et on suppose que  $|\lambda_1| > \max(|\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$ . Soit aussi un vecteur propre  $x$  associé à  $\lambda_1$ . Alors :

Si  $x_0$  est un vecteur **initial** non orthogonal à  $x$ , et si  $X_n$  est définie par la relation de récurrence  $X_{n+1} = A.X_n / ||A.X_n||$ , alors  $X_n$  converge vers le vecteur propre  $x$  quand  $n$  tend vers l'infini. Et  $||A.x_n||$  tend vers  $|\lambda_1|$ .

**Remarque1 :**  $x_0$  est choisit au hasard puisqu'il n'a aucune chance d'être orthogonal à  $x$ . tel que  $||x_0|| \leq 1$ .

**Remarque 2 :** On arrête les calculs dès que ça dépasse un nombre d'itérations (exple : 500)

ou bien quand  $||X_{n+1} - X_n|| \leq \varepsilon$ .

**Remarque 3 :** Cette méthode n'est appliquée que si :

- La matrice A admet des valeurs et vecteurs propres réels.
- $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$  ; autrement la méthode diverge ou peut encore altérer ou donner des valeurs complexes.

**Remarque 4 :** Cette méthode ne donne que la valeur propre maximale en module et son vecteur propre associé. Donc il est recommandé d'appliquer une phase de déflation pour calculer les autres valeurs propres.

## 2. Méthode de la puissance avec Déflation :

Nous savons que A et A<sup>t</sup> (transposé de A) ont les mêmes valeurs propres, et si on applique la méthode de la puissance itérée à A<sup>t</sup>, on trouve un vecteur propre w de A<sup>t</sup> associé à  $\lambda_1$  par la méthode de la puissance. Puis on calcule :

$$A_1 = A - \lambda_1 \frac{x \cdot w^t}{w^t \cdot x}$$

- Enfin on calcule la valeur propre et le vecteur propre de la matrice A<sub>1</sub> qui représente lui-même la deuxième valeur propre  $\lambda_2$  de la matrice A.
- On réitère le procédé précédent de la même manière en considérant maintenant la matrice A<sub>1</sub>.

**Exemple :**

Soit la matrice A défini comme suit sachant la norme utilisée est la norme 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc on aura la matrice X des vecteurs propres donnés par de la puissance et déflation comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} 0.8880738 & 1.212D - 16 & -0.4597008 \\ -0.3250576 & -0.7071068 & -0.627963 \\ 0.3250576 & -0.7071068 & 0.627963 \end{bmatrix}; \text{ et } \lambda = \begin{bmatrix} 2.7320508 \\ -0.7320508 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sachant que X(:,1), X(:,2) et X(:,3) sont calculés après 10000.

**Remarque importante :**

Remarquons bien que :  $\text{diag}(\lambda) = X^{-1} \cdot A \cdot X$  est diagonale de valeurs propres  $\lambda$  en diagonal.

$$X^{-1}.A.X = \begin{bmatrix} 2.7320508 & -1.174D-17 & -3.427D-16 \\ 4.340D-17 & 2. & 5.991D-16 \\ 1.437D-16 & -7.293D-17 & -0.7320508 \end{bmatrix}$$

**Conséquence :** pour calculer la n ième puissance  $A^n$  d'une matrice A diagonalisable. on procède comme suit :

Si :  $\text{diag}(\lambda) = X^{-1}.A.X$  alors on aura :  $A = X.\text{diag}(\lambda).X^{-1}$

Et de ce fait on aura :

$$A^n = X.\text{diag}(\lambda).X^{-1}.X.\text{diag}(\lambda).X^{-1} \dots X.\text{diag}(\lambda).X^{-1} \quad : \quad (n \text{ fois } : X.\text{diag}(\lambda).X^{-1})$$

$$A^n = X.\text{diag}(\lambda)^n.X^{-1}$$

**Exemple :**

$$A^5 = A.A.A.A.A = \begin{bmatrix} 120 & -44 & 44 \\ -44 & 32 & 0 \\ 44 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad \text{Ou encore : } A^5 = X.\text{diag}(\lambda)^5.X^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 120 & -44 & 44 \\ -44 & 32 & 0 \\ 44 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad \text{Sachant que :}$$

$$\text{diag}(\lambda)^5 = \begin{bmatrix} 2.7320508 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7320508 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 2.7320508^5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7320508^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 152.21024 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2102355 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$