

## Chapitre 3 : Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires

### 1- Généralités les méthodes itératives :

#### 1.1. Valeurs Propres :

Soit A une matrice carrée de taille n alors Le scalaire x est valeur propre de A si et seulement si la matrice  $(A - (x \cdot Id_n))$  n'est pas inversible. Autrement dit si et seulement si  $\det(A - (x \cdot Id_n)) = 0$ .

Sachant que  $P(A) = \det(A - (x \cdot Id_n))$  est le polynôme caractéristique de A.

#### 1.2. Vecteur Propre :

Pour toute matrice carrée A de taille n, à toute valeur propre x donnée lui associé un vecteur propre v si :  $A \cdot v = x \cdot v \Leftrightarrow (A - (x \cdot Id_n)) \cdot v = 0$

#### 1.3. Rayon Spectral :

Soit A une matrice carrée de taille n alors le rayon spectral de  $\rho(A)$  de A est la valeur maximale des valeurs propres  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de A. Donc :  $\rho(A) = \max |x_i|$  avec  $i=1..n$ .

**Exemple :** Soit a matrice M de taille 2 :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

à pour polynôme caractéristique :  $P(M) = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$ .

Les racines de  $P(M) = 0$  sont trouvés par le calcul  $P(M)=0 \Leftrightarrow x=-1$  ou  $x=5$  . Les valeurs propres de la matrice M sont donc -1 et 5.

Ainsi les vecteurs propres associés sont : pour 5 le vecteur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  pour -1

Et de ce fait le rayon spectral  $\rho(M) = \max(|-1|, |5|) = 5$ .

#### 1.4. Normes Matricielles :

**Théorème :** On note  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_2$  les trois normes matricielles subordonnées de la matrice A carrée de taille n. Alors ces normes sont données par les formules suivantes :

- 1)  $\|A\|_1 = \max_j (\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|)$
- 2)  $\|A\|_\infty = \max_i (\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|)$
- 3)  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t \cdot A)}$

**Exercice :** reprendre la matrice M précédente pour calculer ces trois normes subordonnées.

## 2. L'idée Générale des Méthode itératives :

L'idée des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs  $x^{(k)}$  qui converge vers le vecteur  $x$ , solution du système  $Ax = b$ . avec A matrice carrée de taille n et inversible.

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}.$$

L'intérêt des méthodes itératives, comparées aux méthodes directes, est d'être simple à programmer et de nécessiter moins de place en mémoire. En revanche le temps de calcul est souvent plus long. Une stratégie est de considérer la relation de récurrence linéaire suivante :

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g,$$

où B est la matrice d'itération de la méthode itérative (dépendant de A) et g est un vecteur (dépendant de b), tels que  $x = Bx + g$ .

## 3. Méthodes de Jacobi :

Dans cet algorithme si les éléments diagonaux de A sont non nuls, le système linéaire  $Ax = b$  est équivalent à :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Pour une donnée initiale  $x^{(0)}$  choisie, on calcule  $x^{(k+1)}$  en fonction de  $x^{(k)}$  par :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Cela permet d'identifier la décomposition suivante pour A :  $A = D - E - F$  . Tels que :

- D : diagonale de A avec  $a_{i,i} \neq 0, i=1..n$ .
- E : triangulaire inférieure changée de signe avec des 0 sur la diagonale à partir de A.
- F : triangulaire supérieure changée de signe avec des 0 sur la diagonale à partir de A.

- La matrice d'itération de la méthode de Jacobi est donnée par :

$$B_j = D^{-1} (E + F)$$

$$g_j = D^{-1} b$$

**Exemple :**

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ avec } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a déjà :  $\rho(B_j) = 0.568579$  ;

Pour  $\varepsilon=10^{-2}$  on aura

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (0.3333333 ; 0.5 ; 0.25). \\ x^{(2)} &= (0.25 ; 0.3333333 ; 0.2083333) \\ &\vdots \\ x^{(5)} &= (0.2916667 ; 0.3576389 ; 0.2326389). \end{aligned}$$

**4. Gauss Seidel :**

La méthode de Gauss Seidel est une méthode itérative initialisée par le choix d'un  $x^{(0)}$  arbitraire, et où chaque itération consiste à déterminer  $x^{(k+1)}$  à l'aide de  $x^{(k)}$  qui le suit dans l'indice et  $x^{(k+1)}$  qui le précède dans l'indice selon la formule suivante :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Il s'écrit aussi :  $x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} (b + F x^{(k)})$

$$B_s = (D - E)^{-1} F$$

$$g_s = (D - E)^{-1} b$$

**Exemple :**

Reprenons l'exemple de Jacobi alors :  $\rho(B_s) = 0.2916667$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (0.3333333 ; 0.3333333 ; 0.25). \\ x^{(2)} &= (0.3055556 ; 0.3472222 ; 0.2395833) \end{aligned}$$

$$x^{(3)} = (0.2974537 ; 0.3512731 ; 0.2365451).$$

### 5. Méthodes de Surrelaxation Successive :

La méthode de surrelaxation successive est une méthode itérative initialisée par le choix d'un  $x^{(0)}$  arbitraire, et où chaque itération consiste à déterminer  $x^{(k+1)}$  à l'aide de  $x^{(k)}$  et  $x^{(k+1)}$  comme Gauss Seidel et par relaxation comme deuxième étape selon la formule suivante :

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ceci revient à calculer la valeur fournie par l'algorithme de Gauss-Seidel et de faire une combinaison linéaire de cette valeur avec l'itéré précédent, ce qui constitue l'étape de relaxation.

- Ainsi les matrices itératives de cette méthode s'écrivent comme suit :

$$B_{GS} = \left( \frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} \left( F + \frac{1-\omega}{\omega} D \right)$$

$$g_{GS} = \left( \frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} b$$

Exemple :

Reprenons toujours l'exemple de Jacobi alors pour  $\omega = 0,9$  :

$$x^{(1)} = (0.3 ; 0.315 ; 0.221625).$$

$$x^{(2)} = (0.3019875 ; 0.3456056 ; 0.2373484) ;$$

$$x^{(3)} = (0.2977216 ; 0.3505858 ; 0.2368404) ;$$

**Exercice :** Calculer la convergence de cette méthode  $\rho(B_{GS}) = ?$

### 6. Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel et Surrelaxation :

Soit A une matrice carrée de taille n inversible et x le vecteur solution associé au système d'équations  $Ax=b$ .

- Pour étudier la convergence de ce genre d'algorithme itérative, il suffit de considérer la suite des erreurs  $e_k = x^{(k)} - x$  avec  $e_0 = x^{(0)} - x$

et de prouver que : 
$$e_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

- On a le résultat suivant comme critère fondamental de convergence :

### **Théorème :**

Les énoncés suivants sont équivalents :

1. La méthode itérative  $\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{g}$  converge pour tous les  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .
2. Le rayon spectral de B est inférieur à un :  $\rho(B) < 1$ ,
3. Pour au moins une norme matricielle subordonnée, on a :  $\|B\| < 1$ .

### **Remarque Importante sur la Surrelaxation :**

Le choix du facteur de relaxation  $\omega$  n'est pas trivial et dépend des coefficients de la matrice. Pour une matrice définie positive, on peut démontrer que l'algorithme est convergent pour tout  $\omega \in ]0, 2[$ . Toutefois, on veut une convergence aussi rapide que possible. Notons que pour un facteur de relaxation de 1, on tombe sur la méthode de Gauss-Seidel.

### **Remarque Importante sur Jacobi :**

Si la matrice A est une matrice carrée de taille n et que A est à diagonale dominante alors la méthode de Jacobi appliquée sur le système  $AX=b$  est convergente.

C'est-à-dire :

$$\forall i \in [1, n], |a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

### **Remarque Importante sur le test d'arrêt :**

Dans un procédé itérative matriciel on arrête les calculs si :  $\|e_k\| = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$  étant donné que  $\varepsilon$  soit le plus petit possible sinon on arrête les calculs au maximum d'itérations. Sachant que  $\|e_k\|$  est une norme vectorielle usuelle sur  $e_k$ .

## **7. Conditionnement :**

Soit  $AX=b$  un système d'équations sachant que A est une matrice carrée de taille n et inversible. Il arrive parfois qu'une petite variation sur b entraîne une grande variation sur X. On dit dans ce cas que la matrice, ou le problème, est **mal conditionnée**.

**Exemple :** On souhaite résoudre le système linéaire  $AX=b$  où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et                      alors :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Mais si :

alors :

Autrement dit, de très petites variations sur  $\mathbf{b}$  ont conduit à de grandes variations sur  $X$ . Et de façon plus précise, si  $A$  est une matrice, son **conditionnement** est :

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

De ce fait dans l'exemple précédent, on trouve ;  $\text{Cond}(A)=4488$ , où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme infinie sur  $\mathbb{R}^4$ .

Ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement  $\mathbf{b}$ . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de  $X$ .

**Exercice** : Recalculer ce conditionnement sur la console Scilab. Puis recalculer les solutions par Jacobi et Gauss si possible.