Chapitre 2 : Méthodes Directes de Résolution des Systèmes d'Equations Linéaires

1. Remarques sur la Résolution des Systèmes Triangulaires :

1.1. Méthode de Cramer :

On appelle système d'équations indépendantes linéaires d'ordre *n > 1,* (*n* ∈N), une expression de la forme

$$AX = b,$$ et plus concrètement $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

si *A* est inversible, la solution du système *AX = b* est donnée par la formule de ***Cramer*** :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

. Posons maintenant : *det(A) = |A|*

Sachant que A_i est une matrice obtenue à partir de *A* en remplaçant la i éme colonne de *A* par le vecteur colonne *b*. et $|A| \neq 0$.

Et selon la formule de ***Leibnitz*** et la règle de ***Sarrus*** on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i;j}(-1)^{i+j} \det(A_{i,j}).$$

Exemple :

Résolution d'un système à trois inconnues (de dimension 03) :

$$\begin{cases} x + 3y + 4z & = & 50 \\ 3x + 5y - 4z & = & 2 \\ 4x + 7y - 2z & = & 31 \end{cases}$$

donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

D'où :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

Ainsi les solutions se dressent comme suit :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ 31 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-24}{-8} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 31 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-40}{-8} = 5 \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 50 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 31 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8$$

Remarque importante :

Le problème de cette méthode se réside dans le calcule des déterminants. Si on essaye de calculer le déterminant d'une matrice carrée de taille *n* ; on aura besoin de *n(n !)* opérations se qui rend cette tache trop difficile lorsque n est grand sachant que le calcule du déterminant se fait d'une manière récursive.

1.2. Méthode par L'inverse :

Si la matrice carrée A admet une matrice inverse A^{-1}. alors Le système sous la forme matricielle $AX = b$ peut être pré-multiplié par A^{-1} afin d'obtenir la solution :

$AX= b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX=A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}B.$

Avec : $$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|}$$

Sachant que : *com(A)* est une matrice carrée de même dimension que la matrice *A* et elle est composée des éléments suivants : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ avec $|M_{ij}|$ est le déterminant de la sous matrice de dimension inférieur composée de touts les éléments de *A* sauf la i éme ligne et la j éme colonne.

Exemple :

Reprenons le même système de 1.1 donc on aura :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 1 \\ 34 & -18 & 5 \\ -32 & 16 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{com}(A)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}{-8}$$

Et enfin : $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & 34 & -32 \\ -10 & -18 & 16 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -24 \\ -40 \\ -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Remarque Importante 1 : Un système de *AX = 0* est appelé un système homogène or touts ces systèmes admettent au moins une solution nulle ou trivial : $X = (0, 0, \ldots\ldots, 0)^t$.

Remarque Importante 2 : Soit un système d'équations linéaires indépendantes *AX=b* à *n* inconnues. Il existe alors :

- Aucune solution lorsque le nombre d'équations est strictement supérieur à *n*.
- Une unique solution lorsque le nombre d'équations est égal à n et $|A| \neq 0$.
- Une infinité de solutions lorsque le nombre d'équations est strictement inférieur à *n*.

2. Méthode Directes par Pivot ou Elimination de Gauss :

2.1. Remarque :

Si la matrice *A* est triangulaire supérieure ou inferieure alors la résolution du système *AX = b* se réduit en la substitution des solutions respectivement en remontée par descendance ou en ascendance selon la triangulation. Donc une matrice triangulaire supérieure se dresse comme suit :

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Donc la matrice *A* est triangulaire supérieure si et seulement si : $\forall i>j \quad a_{ij} = 0$. ou inferieure si : $\forall\ i<j \quad a_{ij} = 0$.

2.2. Algorithme Général :

Soit le système à résoudre le système *AX=b*. Avec *A* matrice carrée inversible de dimension *n*. L'algorithme se résume comme suit :

- Triangulation de la matrice *A* (matrice $A^{(n)}$ échelonnée triangulaire équivalente à *A* à l'étape n).

- Résolution ascendante ou descendante par substitution selon la triangulation.

2.3. Algorithme de triangulation :

Soit le système *AX=b* donc on cherche une forme $A^{(n)}X=b^{(n)}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Pour passer du k-ième système au k + 1-ième système, les formules sont :

$$\begin{aligned} l_i^k &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} && \text{pour } i = k+1, ..., n \\ a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - l_i^k a_{kj}^{(k)} && \text{pour } i, j = k+1, ..., n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - l_i^k b_k^{(k)} && \text{pour } i = k+1, ..., n \end{aligned}$$

Remarque Importante 1 :

Les termes $a_{kk}^{(k)}$ sont appelés pivots et doivent être évidemment non nuls. Si ce terme diagonal est nul, il faut choisir un autre élément non nul de la colonne k pour calculer le multiplicateur l_i^k.

Remarque Importante 2:

Pour effectuer l'élimination de Gauss d'un système de l'ordre de *n* (*n* équations et *n* inconnus), il faut effectuer de l'ordre de n^3 opérations ce qui veut dire qu'un système de l'ordre 3 exigera 27 opérations.

Exemple :

Soit le système suivant et sa triangulation supérieure :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} x + 3y + 4z &=& 50 & (L_1) \\ 3x + 5y - 4z &=& 2 & (L_2) \\ 4x + 7y - 2z &=& 31 & (L_3) \end{array} \right.$$

Elimination de x dans (L_2) et (L_3)

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} x + 3y + 4z &=& 50 & (L_1) \\ y + 4z &=& 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 5y + 18z &=& 169 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 4(L_1) \end{array} \right.$$

Elimination de y dans (L3)

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcll} x + 3y + 4z &=& 50 & (L_1) \\ y + 4z &=& 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 2z &=& 16 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_2) \end{array} \right.$$

Et enfin par substitution ascendante on aura les solutions : $x = 3 \; ; \; y = 5 \; ; \; z = 8$.

Remarque Importante 1 : Pour un système linéaire supérieure ; les solutions peuvent être calculées par l'algorithme suivant :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$
$$\textbf{pour} \ \ i = n-1 \ \textbf{à} \ \ 1$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

Remarque Importante 2 : Si on ne fait pas attention au choix du pivot, le procédé de Gauss peut conduire à des résultats désastreux en arithmétique flottante, par exemple, si un pivot est voisin de zéro. Voici une principale stratégie.

On notera $A_k = (a_{ij}^k)$ la matrice obtenue au début de la k-iéme étape ($A_1 = A$) ; donc à la k – iéme étape, on choisira comme pivot l'el´élément a_{ik}^k vérifiant : $|a_{ik}^k| = \max_{k \le p \le n} |a_{pk}^k|$

Remarque Importante 2 : Il faut adapter cet algorithme de Gauss (y compris les indices) pour effectuer une.

Propriété Importante : Si A est une matrice triangulaire inferieure ou supérieure carrée de taille n alors :

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} A(k,k)$$

Exercice :

1- Développer la version de Gauss pour la résolution par triangulation inférieure.
2- En déduire le déterminant de la matrice triangulaire échelonnée $A^{[n]}$ de A.

3. La factorisation LU :

Théorème

Soit une matrice A carrée de taille n, la factorisation LU de A avec $l_{ii}=1$ (i=1,…,n) existe et unique si et seulement si les sous matrices principales A_i (i=1,…,n-1) sont inversibles.

Tel que $A_1 = A(1,1)$; $A_2=A(1:2\ ,\ 1:2)$; $A_3=A(1:3\ ,\ 1:3)$…….$A_n = A$ sont inversible. Avec :

$$\prod_{i=1}^{n} u_{ii} \neq 0\,.$$

Basée sur ce théorème la méthode de factorisation LU s'écrit : A=LU tel que L est une matrice triangulaire inférieure avec $l_{ii}=1$ (i=1,…,n) et U une matrice triangulaire supérieure c.à.d :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} ; L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} ; U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Et voici l'algorithme utilisée pour la factorisation :

$U = O_n$, $L = I_n$
pour $i = 1$ **à** $n-1$
  Appliquer les permutations à A, L et U pour que $a_{ii} \neq 0$.
  pour $j = i+1$ **à** n
    $l_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$
  pour $j = i$ **à** n
    $u_{ij} = a_{ij}$
  pour $j = i+1$ **à** n
    pour $k = i+1$ **à** n
      $a_{jk} = a_{jk} - l_{ji} \cdot u_{ik}$
$u_{nn} = a_{nn}$

Après factorisation on résout le système LY=B puis après on résout le système UX=Y.

Remarque Importante 1 : A travers l'algorithme ci-dessus on remarque bien qu'à chaque itération i on applique une permutation de lignes dans le cas où a(i,i)=0. Ceci est bien dans le cas d'un système AX=B ; alors dans ce cas on doit appliquer les permutations même sur le vecteur colonne B.

Remarque Importante 2 : Pour calculer le déterminant d'une matrice A on utilise

$$\det(A) = \det(LU) = \prod_{k=1}^{n} U(k,k)$$

Remarque Importante 3 : Cet algorithme a été conclu en développant le produit LU puis en estimant les valeurs des L_{ij} et U_{ij} d'une façon récursive.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors après factorisation on aura :

$$A = LU \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Exercice : utiliser l'algorithme ci-dessus pour compléter et effectuer les détails des calculs. Enfin résoudre AX=B. tel que B=[1 1 1]' ;

Cas Particulier : Si la matrice A est une matrice symétrique et définie positive carrée de taille n, c'est à dire que touts les déterminants des ses sous matrices principales sont strictement positives.

Alors on peut écrire dans ce cas mettre : $A = L.L^t$ sachant que L est une matrice triangulaire inferieure de taille n. Et c'est se qu'on appelle la méthode de **Cholesky**.

Exercice : faite une recherche bibliographique sur cette méthode et la programmer sous l'environnement Scilab. En se basant sur la factorisation LU.

4. Méthode de Gauss-Jordan :

Soit le système AX=B telle que la matrice A est de taille carrée d'ordre n et inversible alors on peut ramener ce système vers un système équivalent $A^{[n]}X=B^{[n]}$ tel que $A^{[n]} = I_n$ est la matrice Identité de taille n.

Algorithme Générale :

1- Diagonalisation de A : se fait dans le même principe de la méthode de triangulation de GAUSS sauf que dans ce cas la triangulation se fait en supérieure et en inferieure simultanément. Avec a(i, :) = a(i, :) /a(i,i) pour i = 1..n à chaque itération pour avoir une diagonale identité.

2- Solution Directe : $x_i = b_i^{[n]}$ pour i=1..n

Exemple :

Soit le système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

alors

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \boxed{\text{ligne 1 /2}} \\ \text{ligne 2 - 3 * ligne 1} \\ \text{ligne 3 - 4 * ligne 1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{ligne 2 / } \tfrac{3}{2}}$$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \boxed{\text{ligne 1 - } \frac{1}{2} * \text{ligne 2}} \\ \\ \text{ligne 3 - 3} * \text{ligne 2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{ligne 3 / 4}}$$

$$\boxed{\text{ligne 3 / 4}}$$

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \boxed{\text{ligne 1 } + \frac{7}{3} * \text{ligne 3}} \\ \boxed{\text{ligne 2 - } \frac{2}{3} * \text{ ligne 3}} \end{array}$$

On a directement les racines dans la 4^e colonne.

Exercice : Remplacer la 4 éme colonne par I_3 (Identité de taille 3x3) puis refaire les calcules pour avoir la matrice Inverse.