Université Ibn Khaldoun Tiaret
Département d'informatique
Module Analyse 01

Année universitaire 2021/2022
Licence $1^{ère}$ année Math,info, MI

Fiche de TD 3

Exercice 01

En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :

1. $\lim\limits_{x\to 1} 7x+2 = 9$ 2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{3}{5}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ 4) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{4x+9} = 5$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+x+1} = 1$
   6) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ 7) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x+8}{x-4} = +\infty$
2. Montrer que toute fonction majorée et croissante admet une limite finie en $+\infty$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. 1) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right)+x}{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} (n,m) \in (\mathbb{N})^2$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$
   7) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
2. Démontrer que les fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \cos(\ln|x|) \quad g(x) = \sin(\ln|x|)$$

   n'ont pas de limite au point 0.

Exercice 03

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ determiner $\delta > 0$ tel que $(x \neq \frac{1}{3}, |x| < \delta \Rightarrow |f(x)+3| < \varepsilon)$
2. Que peut-on conclure ?

Exercice 04

Etudier la continuité des fonctions suivantes

1. 1) $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x \text{ si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si} & x = 0 \end{cases}$
   4) $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ x^2\ln(\frac{x+1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 5) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a+x & x \geq 0 \end{cases}$ 6) $f(x) = x - E(x)$ 7) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & |x| \leq 1 \\ |x-1| & |x| > 1 \end{cases}$
   8) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si $(x \neq -1)$ $f(-1)$ arbitraire 9) $f(x) = \begin{cases} x\ln x^2, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$
2. Etudier la continuité des fonctions $f(g(x))$ et $g(f(x))$ si

$$\begin{aligned} f(x) &= sgnx \quad g(x) = 1+x^2 \\ f(x) &= sgnx \quad g(x) = 1+x-E(x) \end{aligned}$$

   Avec la fonction sgn est définie par $sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
3. Etudier les points de discontinuités des fonctions suivantes
   $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ $f(x) = \cos^2\frac{1}{x}$

Exercice 05

Déterminer $f(0)$ pour que les fonctions suivantes soient prolongeable par continuité

$f(x) = \frac{\tan 2x}{x}$ $f(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}$ $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $f(x) = x\ln^2 x$ $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x^2}}$

Fiche dérivabilité

Exercice 01

1. *Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes*
   $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
   $h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & |x| \leq 1 \\ |x| - 1 & |x| > 1 \end{cases}$ $\quad k(x) = \ln(e^{x^2} + 1)$
2. Déterminer $(a, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour que la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & x \in]0, x_0[\\ x^2 + 12 & x \in]x_0, +\infty[\end{cases}$ soit de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
3. Pour quelles conditions la fonction
   $$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
   (a) est continue au point $x = 0$?
   (b) est dérivable au point $x = 0$?
   (c) A une dérivée continue au point $x = 0$?

Exercice 02

1. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes*
   $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$ $\quad g(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1 - e^{-x}}$ $\quad k(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$
2. Calculer la dérivée n *ième* des fonctions suivantes
   $f(x) = x^2 \sin x$ $\quad g(x) = x^{n-1} \ln(1+x)$

Exercice 03 Démontrer les inégalités suivantes

1. $\sin x \leq x$ si $x \geq 0$
2. $\ln(1+x) \leq x$ si $x \geq 0$
3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ on a $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$

Exercice 04
Calculer la limite à l'aide de la règle d'Hsopitale
$\lim\limits_{x \to 0} = \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ $\quad \lim\limits_{x \to 1} = \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$ $\quad \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1}{(x-1)^2}$

Exercice Bonus

1. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$
2. On pose $u_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + ... + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que
   $$\ln(2n+1) - \ln(1+n) < u_n < \ln(2n) - \ln n$$
3. En déduire que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite