Université Ibn Khaldoun Tiaret
Département d'informatique

Année universitaire 2022/2023
1^{ere} année Maths,Info,MI

Fiche de TD 02 analyse 01

Exercice 01

1. Vérifier si les suites suivantes sont bornées
   $1)u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2} - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 2)u_n = \dfrac{n+1}{n} cos^2\dfrac{n\pi}{4}$ $\quad 3)u_n = n + (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
   $4)u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$
2. Etudier la monotonie des suites suivantes
   $1)\ u_n = 3 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 2)u_n = \dfrac{7n-1}{2n+3}$ $\quad 3)u_n = -n^2(1-\dfrac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 4)u_n = n^n - n!$

Exercice 02

En appliquant la définition de la limite d'une suite, démontrer que chacune des suites $(u_n)_n$ converge vers la limte l indiquer.

$1)\ u_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, l = 0$ $\quad 2)\ u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*, l = 0$ $\quad 3)u_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, l = 2$
$4)u_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-1}, l = \dfrac{5}{7}$ $\quad 5)u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}, l = 1$ $\quad 6)u_n = \dfrac{n^2-n+1}{3n^2+2n-4}, l = \dfrac{1}{3}$
$7)u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}, l = 0$ $\quad 8)u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k (|a| < 1), l = \dfrac{1}{1-a}$
$9)\ u_n = ln(lnn)), l = +\infty$ $\quad 10)u_n = 2^{\sqrt{n}}, l = +\infty$ $\quad 11)\ u_n = \sqrt[n]{a}(a > 1), l = 1$

Exercice 03

Calculer la limite des suites suivantes
$u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1} - \dfrac{3n^2+1}{6n+1}$ $\quad 2)u_n = \sqrt{n^2+2n+5} - n$ $\quad 3)u_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}$

$4)u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ $\quad 5)u_n = \dfrac{(-1)^n + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2} - (-1)^n}$ $\quad 6)\ u_n = \dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}, (|a| < 1, |b| < 1)$

$7)\ u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ $\quad 8)u_n = \dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$

Exercice 04

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que $\forall, n \in \mathbb{N} u_n > 1$.
3.)Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Déduire qu'elle converge, et déduire sa limite.
5. On considère l'ensemble $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, déterminer les bornes $\sup U, \inf U, \max U, minU$

Exercice 05

Soit les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, v^n = u^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

Démontrer que les deux suites sont adjacentes.

Exercice 06

Montrer que la suite définies par

1. $u_n = cos\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

est une suites de Cauchy.

Exercice 07

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que $(u_n)_n$ ne converge pas, que cette suite est bornée
2. Peut-on extraire une sous suite convergent ?