Université Ibn Khaldoun Tiaret
Département d'informatique

Année universitaire 2022/2023
1^{ere} année Maths,Inf,MI

Fiche de Td 01 Analyse 1

Exercice 1 *Soient a, b, c des nombres réels. Montrer que*
1)Si $a \leq b$ et $b < c$ alors $a < c$
2)Si $a \leq b$ et $c > 0$ (respectivement $c < 0$) alors $ac \leq bc$ respectivement $ac \geq bc$) et si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$

Exercice 2 *Soient $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, y_{1,}y_2, y_3, ..., y_n$ des nombres réels tels que*

$$x_i \leq y_i, i = 1, 2, 3, ..., n$$

1)Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$
2)Montrer que si $0 \leq x_i, i = 1, 2, 3, .., n$, et $x_i \leq y_i$ alors

$$0 \leq x_1.x_2...x_n \leq y_1.y_2...y_n$$

Exercice 3 *Soient a, b des nombres réels tels que pour tout nombre réel x vérifiant $x > b$, on ait $a \leq x$. Montrer que $a \leq b$*

Exercice 4 *Soient x, y deux nombres réels. Montrer*
1)$|x + y| \leq |x| + |y|$
2)$||x| - |y|| \leq |x + y|$
3)$||x| - |y|| \leq |x - y|$

Exercice 5 *Montrer que :*
1)$\forall x \in \mathbb{Z}, E(x)+ E(-x) = 0.$
2)$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, E(x)+ E(-x) = -1.$
3)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* E(x + n) = E(x) + n.$
4)$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* E(nx) \geq nE(x).$

Exercice 6 *Déterminer la borne supérieure, inférieure, le plus grand respectivement le plus petit élèment des parties de $\mathbb{R}$ suivantes s'ils existent*
$A =]0, 2]$ $B = [0, 1]\cup]2, 3]$ $C = \left\{\frac{1}{x}/1 \leq x \leq 2\right\}$ $D = \left\{-\frac{1}{x}/1 \leq x \leq 2\right\}$ $E = \left\{u_n/u_n = \sup\left\{\frac{1+n}{n}, \pi + \frac{1}{n}\right\}\right\}$
$F = \left\{a \in \mathbb{R}/a = \frac{1}{1-x}, x \in]0, \frac{1}{2}], n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 7 *Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, telle que $A \subset B$.*
Montrer que
1)Si B est majorée alors $\sup A$ existe et $\sup A \leq \sup B$
2)Si B est minorée alors $\inf A$ existe et $\inf A \geq \inf B$
3)Montrer que si A et B sont bornées, alors $A \cup B$ est bornée et on a

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \sup(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cup B) &= \inf(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

4)Montrer que si A et B sont bornées, alors $A \cap B$ est bornée et si $A \cap B \neq \emptyset$ on a

$$\begin{aligned} \sup(A \cap B) &\leq \min(\sup A, \sup B) \\ \inf(A \cap B) &\geq \max(\inf A, \inf B) \end{aligned}$$

5)Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B = \{a + b/a \in A, b \in B\}$ est bornée et on a

$$\begin{aligned} \sup(A + B) &= \sup A + \sup B \\ \inf(A + B) &= \inf A + \inf B \end{aligned}$$

Exercice 8 *Soient* A, B *deux parties de* $\mathbb{R}$ *non vides bornées*
Montrer que si $a \in A, b \in B$ *tel que* $a \leq b$, *alors*

$$\sup A \leq \inf B$$

Exercice 9 *Montrer que les ensembles des nombres réels de la formes*

$$A = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad B = \left\{ \frac{n-1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

sont bornées, et déterminer leurs bornes supérieures et inférieures.
Le plus grand et petit élèment existent-ils ?Justifier les réponses