Table des matières

1 Suites numériques **3**

1.1 Généralites . . . 3

1.2 Quelques caracteres des suites . . . 3

1.2.1 Suites monotones . . . 3

1.2.2 Suites bornées . . . 4

1.2.3 Nature d'une suite . . . 4

1.2.4 Théorèmes fondamentaux . . . 5

1.3 Sous suites ou suite extraites . . . 7

1.4 Limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 9

1.5 Suites adjacents . . . 10

1.5.1 Comparaison des suites . . . 11

1.6 Suites de Cauchy . . . 11

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Généralites

$\Bbbk$ désigne l'un des coprs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1 *On appelle suite d'éléments de $\Bbbk$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\Bbbk$.*

$$U: \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \Bbbk \\ n \to U(n) = U_n \end{array}$$

On désigne une suite, en évrivant se termes successifs $U_0, U_1, ...$ dans l'ordre ; ou sous forme $U = (U)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(U)_n$ ou en donnant son terme générale $U_n \in \Bbbk$.

L'ensemble des suites d'éléments de $\Bbbk$ est notée $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \Bbbk)$.

Suites récurrentes

Etant donné une fonction numérique f, on peut définir une suite $(U)_n$ en se donnant le premier terme U_0 et la relation de récurrence $U_n = f(U_{n-1})$ pour tout entier n non nul .

On montre que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \Bbbk)$ muni de l'addition :$(U_n) + (V_n) = (U_n + V_n)$ et la multiplication $(U_n).(V_n) = (U_n.V_n)$ est un anneau commutatif unitaire.

Remarque 2 $(U_n) = (V_n) \Longrightarrow U_n = V_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dans tous ce qui suit le coprs $\Bbbk$ désigne $\mathbb{R}$

1.2 Quelques caracteres des suites

1.2.1 Suites monotones

1)Une suite (U_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \le U_{n+1}$ ou pour tout entier $m < n \Longrightarrow U_m \le U_n$.

Elle est ctrictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n < U_{n+1}$ ou pour tout entier $m < n \Longrightarrow U_m < U_n$.

2)Une suite (U_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \ge U_{n+1}$ ou pour tout entier $m < n \Longrightarrow U_m \ge U_n$.

Elle est ctrictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n > U_{n+1}$ ou pour tout entier $m < n \Longrightarrow U_m > U_n$.

3)On dit qu'une suite suite (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

4)Une suite (U_n) est stationnaire ou constante si pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k > n$, on a

$$U_k = U_{k+1}$$

1.2.2 Suites bornées

Définition 3 *1) Une suite est majorée s'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que* $U_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}$
2) Une suite est minorée s'il existe $B \in \mathbb{R}$ *tel que* $U_n \geq B, \forall n \in \mathbb{N}$
3) Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée autrement dit s'il existe deux nombres réels A, B *telq que* $A \leq U_n \leq B$

Remarque 4 *1)Une suite bornée équivalente à montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists A > 0, |U_n| \leq A$$

Exemple 5 *On* $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin n| \leq 1$

On désigne par $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}$
On vérifie que $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et que la suite $U_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ appartienne à $B(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

1.2.3 Nature d'une suite

Suite convergente

Une suite (U_n) est dite convergente dans $\mathbb{R}$ s'il existe un élément l dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$

On dit que la suite (U_n) tend vers l ou on ecrit

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

avec l finie

Exemple 6 *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$
Soit ε *positive.* $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Il suffit de prendre $N_\varepsilon = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$

Limite infinie

Une suite (U_n) tend vers $+\infty$, si

$$\forall A > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq A \Longrightarrow U_n > A$$

Une suite (U_n) tend vers $-\infty$, si

$$\forall A < 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq A \Longrightarrow U_n < A$$

1.2.4 Théorèmes fondamentaux

Théorème 7 *Toute suite convergente sa limite est unique*

Preuve. Par l'absurde. On suppose qu'il existe 2 limites notée l et l' avec $l \neq l'(l < l')$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon$ et
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l' \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l'| < \varepsilon$
On pose $\varepsilon = \frac{l'-l}{4}$
$|l - l'| = |l - l' + U_n - U_n| = |(l - U_n) + (U_n - l')| \leq |U_n - l| + |U_n - l'| \leq 2\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$ une contradiction
d'ou la limite est unique ■

Théorème 8 *Toute suite convergente est bornée*

Preuve. Montrons qu'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longleftrightarrow U_n$ bornée $\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists A \geq 0, |U_n| < A$
Si $l = 0$ alors on $|U_n - l| = |U_n| < \varepsilon$ en particulier si $\varepsilon = 1$ on obtient $-1 < U_n < 1$
Si $l \neq 0$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < 1 \Longrightarrow l - 1 < U_n < l + 1 \Longrightarrow |U_n| < \max\{|l-1|, |l+1|\}$ c'est-à-dire si $n \in \{N_\varepsilon, N_\varepsilon + 1, ...\}$ on a dirertement la suite (U_n) est bornée
Maintenant le cas si $n \in \{0, 1, 2, ..., N_\varepsilon - 1\}$ on a

$$M = \max\{U_0, U_1, ..., U_{N_\varepsilon-1}, |l+1|\} \quad \text{et } m = \min\{U_0, U_1, ..., U_{N_\varepsilon-1}, |l-1|\}$$

alors on trouve $\forall n \in \{0, 1, 2, ..., N_\varepsilon - 1\}, m \leq U_n \leq M \Longrightarrow (U_n)$ est bornée ■

Remarque 9 *La réciproque du théorème précédent est en généralement fausse*

Contre exemple 10 *On considère la suite* $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n = (-1)^n = \left\{\begin{array}{c} 1 \text{ si } n \text{ paire} \\ -1 \text{ si } n \text{ impaire} \end{array}\right\}$
on constate qu'elle a 2 limites différente mais elle est bornée

Théorème 11 *Soient* $(U_n), (V_n)$ *deux suites d'éléments de* $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l, l' *deux nombres réels.*
1) Si (U_n) *converge vers* 0 *et* (V_n) *bornée, alors* (U_nV_n) *converge vers* 0.
2)Si (U_n) *converge vers* l *et* (V_n) *converge vers* l', *alors les suites* $(U_n + V_n)$, $(U_n).(V_n)$ *et* $(-U_n)$ *convergent vers* $l + l'$, $l.l'$ *et* $(-l)$ *respevtivement.*

Preuve. Montrons 1)

$$(U_n)\text{converge vers } 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n| < \varepsilon \tag{1}$$

$$(V_n)\text{bornée} \Longleftrightarrow \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |V_n| < A \tag{2}$$

Montrons (U_nV_n) converge vers 0 c'est-à-dire on montre que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_nV_n| < \varepsilon \tag{3}$$

Pour avoir la relation (3) on multiplie les relations (1) et (2) mais on trouve un petit problème que on va avoir εA, alors pour résoudre ce probléme on retourne vers (1) et on peut avoir

$$(U_n)\text{converge vers } 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n| < \frac{\varepsilon}{A} \tag{4}$$

Par conséquent les relations (4) et (2) donnent pour tout $\varepsilon > 0$

$$|U_nV_n| = |U_n|\,|V_n| < \frac{\varepsilon}{A}A = \varepsilon$$

Montrons 2) Si (U_n) converge vers l et (V_n) converge vers l', alors $(U_n + V_n)$ converge vers $l + l'$

(U_n)converge vers $l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

(V_n)converge vers $l' \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|U_n + V_n - l - l'| = |(U_n - l) + (l, - V_n)| \leq |U_n - l| + |V_n - l'| < \varepsilon$ de plus on a $n \geq N_\varepsilon$ et $n \geq N'_\varepsilon$ alors pour avoir les deux rend au même temps, en prend $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$

Montrons maintenant si (U_n) converge vers l et (V_n) converge vers l', alors $(U_n.V_n)$ converge vers $l.l'$

*i)*La suite (lV_n) converge vers (ll') En effet on a l une suite constante, alors elle est bornée. De plus la suite $(V_n - l')$ converge vers 0, alors on $l(V_n - l')$ converge vers 0.

*ii)*D'autre part la suite $V_n(U_n - l)$ converge vers 0 En effet la suite (V_n) converge donc bornée et $(U_n - l)$ converge vers 0.

iii) Maintenant voyons la convergence de la suite $(U_n.V_n)$

$U_n.V_n = U_n.V_n - lV_n + lV_n = V_n(U_n - l) + lV_n$ par passage à la limite, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} U_n.V_n = \lim_{n\to+\infty} V_n(U_n - l) + lV_n = l.l'$$

Montrons que si (U_n) converge vers l alors $(-U_n)$ converge vers $(-l)$

(U_n) converge vers $l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon$

$(-U_n)$ converge vers $(-l) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |(-U_n) - (-l)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$, $|(-U_n) - (-l)| = |l - U_n| = |U_n - l| < \varepsilon$ ■

Remarque 12 *Soit (U_n) une suite convergente vers l et $k \in \mathbb{R}$, alors la suite (kU_n) converge vers kl*

Théorème 13 *Si (U_n) converge vers l et si $U_n \geq 0$, alors $l \geq 0$.*

Preuve. Par l'absurde, on suppose que $l < 0$ et on pose $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ on a $l + \varepsilon = l + \frac{|l|}{2} < 0$ car $l < \frac{|l|}{2}$

Puisque (U_n) converge vers $l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon < U_n < l + \varepsilon < 0$ une contradiction avec le fait que $U_n \geq 0$ ■

Théorème 14 *Si (U_n) converge vers l et si $U_n > 0$, alors $\frac{1}{U_n}$ converge vers $\frac{1}{l}$.*

Preuve. Comme (U_n) converge vers $l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon = \frac{l}{2}$(d'après le théorème précédent)

$|U_n - l| < \varepsilon = \frac{l}{2} \Longrightarrow U_n > l - \varepsilon = \frac{l}{2} \Longrightarrow \frac{1}{U_n} < \frac{2}{l}$ alors la suite $(\frac{1}{U_n})$ majorée par 0 et minorée par $\frac{2}{l}$ cela veut dire qu'elle est bornée. De plus $(\frac{1}{U_n})(U_n - l)$ converge vers 0 alors, $(\frac{1}{U_n})(U_n - l) = 1 - \frac{l}{U_n}$ par conséquenton $\frac{1}{U_n}$ converge vers $\frac{1}{l}$. ■

Corollaire 15 *Soit (U_n) une suite de nembres réels*

Si $(U_n) \to +\infty \Longrightarrow \left(\frac{1}{U_n}\right) \to 0$

Si $(U_n) \to 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{U_n}\right) \to +\infty$

Théorème 16 *Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites de nombres réels qui converges vers l, l' respectivement*

On suppose que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leq l'$

Preuve. On montre par l'absurde. On suppose $(U_n), (V_n)$ deux suites de nombres réels qui converges vers l, l' respectivement et on suppose que $l > l'$. On pose $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}/n \geq k, U_n \leq V_n$

$$(U_n) \text{ converge vers } l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon \tag{1}$$

$$(V_n) \text{ converge vers } l' \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'_\varepsilon \Longrightarrow |V_n - l'| < \varepsilon \tag{2}$$

De (1) on a $U_n > l - \varepsilon$ et de (2) on a $V_n < l' + \varepsilon$

$\left\{ \begin{array}{c} U_n > l - \varepsilon \\ V_n < l' + \varepsilon \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} U_n > l - \frac{l-l'}{2} > \frac{l+l'}{2} \\ V_n < l' + \frac{l-l'}{2} < \frac{l+l'}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow U_n > V_n$ contradiction avec le fait $U_n \leq V_n$. ■

Corollaire 17 *Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites de nombres réels.*

1) Si $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

2)Si $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Théorème 18 *(des Gendarme)(Théorème des trois suites) (théorème de l'étau),(théorème d'encadrement), (théorème du sandwich)*

Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites de nombres réels qui converges vers la même la limite l, et (W_n) une suite.

S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$U_n \leq W_n \leq V_n \text{ ou bien } U_n < W_n < V_n$$

alors la suite (W_n) et sa limite est l.

Preuve.

$$(U_n) \text{ converge vers } l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon \tag{1}$$

$$(V_n) \text{ converge vers } l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |V_n - l| < \varepsilon \tag{2}$$

de (1) et (2) et $U_n \leq W_n \leq V_n$, pour tout $n \geq n_0$ on a $\left\{ \begin{array}{c} l - \varepsilon < U_n \\ U_n < W_n < V_n \\ V_n < l + \varepsilon \end{array} \right.$

On obtient $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |W_n - l| < \varepsilon$ ■

Théorème 19 *Toute suite croissante et majorée converge vers* $\sup(U_n)$

Toute suite décroissante et minorée converge vers $\inf(U_n)$

Preuve. Pour étudiant ■

1.3 Sous suites ou suite extraites

Une sous-suite ou suite extraite de (U_n) est une suite de la forme $(U_{f(\varphi)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante

Exemple 20 *On considère la suite* $U_n = (-1)^n = \left\{ \begin{array}{c} 1 \textit{ si } n \textit{ paire} \\ -1 \textit{ si } n \textit{ impaire} \end{array} \right.$

On peut extraire 2 sous-suites de la suite (U_n)

On pose $\varphi_1(n) = 2n$ on tire $V_n = (U_{f(\varphi)}) = (U_{2n}) = 1$

$\varphi_2(n) = 2n + 1$ on tire $W_n = (U_{f(\varphi)}) = (U_{2n+1}) = -1$

On ait 2 sous-suites convergents

Proposition 21 *Soit $(U_n)_n$ une suite de nombres réels convergente, et $(V_n)_n = U_{\varphi(n)}$ une sous-suite de la suite $(U_n)_n$, alors la suite $(V_n)_n$ est ausi convergente et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} V_n = l$$

Preuve. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors on va montrer d'abord que

$$\varphi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$$

En utilise le raisonnement par récurrence. A cet effet on a pour $n = 0$, $\varphi(0) > 0$(car l'ensemble d'arrivée de l'application φ est $\mathbb{N}$)

On suppose maintenant que $\varphi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ et on montre que $\varphi(n+1) \geq n+1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, n+1 > n$ et puisque φ est strictement croissante, alors on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) > n$ de plus et par définition de φ on a $\varphi(n+1) \geq n+1$ (l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{N}$)

D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon$

Montrons que $U_{\varphi(n)}$ est convergente vers l, pour cela on montre que $\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \left|U_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon$ et puisque $\varphi(n) \geq n$, alors $\varphi(n) \geq n \geq N_\varepsilon$ donc on a immédiatement $\left|U_{\varphi(n)} - l\right| < \varepsilon$ ■

Exemple 22 *On pose la suite $U_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ et on considère l'application $\varphi(n) = 2n+1$ on obtient $V_n = \frac{1}{2n+1}$ sous-suite de $(U_n)_n$ de plus puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$*

Problème 23 *La réciproque est-elle vraie toujour ?*

Contre exemple 24 *On a $V_{2n} = 1$ une sous-suite de $U_n = (-1)^n$ mais $(V_{2n})_n$ converge car une suite constante alors que $(U_n)_n$ n'admet pas une limite.*

Proposition 25 *1)S'ils existent 2 sous-suites de la suite $(U_n)_n$ qui ont des limites différentes, alors la suite $(U_n)_n$ est divergent*

2)S'ils existent 2 sous-suites de la suite $(U_n)_n$ qui convergent vers la même limites l alors la suite $(U_n)_n$ est convergente vers la même limite l.

Exemple 26 *Soit $(U_n)_n$ une suite réel avec $(U_{2n})_n, (U_{2n+1})_n, (U_{3n})_n$ des sous-suites convergentent.*

Montrer que $(U_n)_n$ converge aussi

Solution 27 *On considère que les sous-suites $(U_{2n})_n, (U_{2n+1})_n, (U_{3n})_n$ convergent respectivement vers l_1, l_2, l_3*

Montrons que $l_1 = l_2 = l_3$

On considère la suite $(U_{6n})_n$ sous-suite de $(U_{2n})_n$ et $(U_{3n})_n$, alors on a $\begin{cases} U_{6n} \to l_1 \\ U_{6n} \to l_3 \end{cases}$ or la limite est unique, alors $l_1 = l_3$

On considère la suite $(U_{4n+2})_n$ sous-suite de $(U_{2n+1})_n$ et $(U_{2n})_n$, alors on a $\begin{cases} U_{4n+2} \to l_2 \\ U_{4n+2} \to l_1 \end{cases}$ or la limite est unique, alors $l_1 = l_2$ et par conséquent on a $l_1 = l_2 = l_3$ et $(U_n)_n \to l_1 = l_2 = l_3$

Théorème 28 *(Bolzano-Weiestrass)*

Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente

Preuve. On considère une suite bornée $(S_n)_n$ et on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq S_n \leq b, a, b \in \mathbb{R}$, alors on a deux intervalles $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ qui contiennes une infinité de valeurs de la suite $(S_n)_n$. sinon si chaque sous-intervalle contient une finis d'élèments, alors la réunion contienne finie de termes de la suite $(S_n)_n$ ce qui est absurde. On le note par l'intervalle $[a_1, b_1]$ avec $\frac{a+b}{2}$ est le centre d'intervalle $[a, b]$. On recommence le même raisonnement avec l'intervalle $[a_1, b_1]$, on définit une suite d'intervalles emboitées $I_n = [a_n, b_n]$, contienne une infinités d'élèments de $(S_n)_n$, avec $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ car $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ et $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ etc.

Par conséquent on a $(I_n)_n$ une suite décroissante car $I_{n+1} \subset I_n$ et de plus et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ alors $\cap I_n = \{l\}$ et l la limite commune des deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

Maintenant cherchons la valeur de l ?

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante avec $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{\varphi(n)} = l$

On pose pour cela $\varphi(0) = 0$(d'après la définition de l'applicaion φ) de plus on a $S_{\varphi(0)} \in I_0$

Il faut montrer que $\varphi(1) < \varphi(2) < ....$

Supposons qu'il existe $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n-1)$ tels que $\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < ... < \varphi(n-1)$ et $S_{\varphi(p)} \in I_p / p \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$

Comme l'ensemble des entiers naturels$\{p \in \mathbb{N}\}$, $S_p \in I_n$ un ensemble infinie, alors il n'admet pas un maximum, sinon il sera une partie de $\mathbb{N}$ qu'elles est majorée ce qui est absurde, alors il existe un nombre naturel qu'ont notera par $p = \varphi(n) > \varphi(n-1)$ et puisque $S_{\varphi(p)} \in I_p$, alors $a_n < S_{\varphi(n)} < b_n$ et par le théorème des trois suites, on forcement l est la limite de $S_{\varphi(n)}$. ■

Exemple 29 *Soit la suite définie par* $U_n = \cos(n\pi)$ *suite bornée*

Considérons l'application $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/\varphi(n) = 2n$ *alors* $V_n = U_{\varphi(n)} = \cos(2n\pi) = 1$ *suite convergente vers* 1.

Considérons l'application $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/\varphi(n) = 2n+1$ *alors* $V_n = U_{\varphi(n)} = \cos((2n+1)\pi) = -1$ *suite convergente vers* -1.

1.4 Limite dans $\overline{\mathbb{R}}$

On définit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

Toute suite qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = |\infty|$, alors $(U_n)_n$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 30 *Soit* $(U_n)_n$ *une suite d'élèments de* $\mathbb{R}$. *Notons* $Ad\{U_n\}$ *l'ensemble de ses valeurs d'adhérences dans* $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle limite supérieure (resp. inférieure) de $(U_n)_n$ *la borne supérieure (resp.inférieure) de* $Ad\{U_n\}$

On notera

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to+\infty}} U_n &= \sup Ad\{U_n\} \\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} U_n &= \inf Ad\{U_n\} \end{aligned}$$

Remarque 31 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n$ *et* $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n$ *existent toujours dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *quelle que soit la suite* $(U_n)_n$

De plus pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *existe il faut et il suffit que* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exemple 32 *La suite* $U_n = (-1)^n$ *n'admet pas une limite, les valeurs adherents de* $(-1)^n$ *sont* 1 *et* -1 *alors on a*

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to+\infty}} U_n &= 1 \\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} U_n &= -1 \end{aligned}$$

Remarque 33 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n$ *et* $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n$ *sont souvent notées par* $\lim\sup U_n$ *et* $\lim\inf U_n$ *et on a*

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to+\infty}} U_n &= \lim_{n\to+\infty} (\sup_{k\geq n} U_k)) \\ \underline{\lim_{n\to+\infty}} U_n &= \lim_{n\to+\infty} (\inf_{k\geq n}(U_k))\end{aligned}$$

Les propriétès des limites des suites convergentes dans $\mathbb{R}$ *sont inéxactes pour* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n$ *et* $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n$ *par exemple* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(U_n+V_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} U_n + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} V_n$

Exemple 34 $0 = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}((-1)^n + (-1)^{n+1}) < \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(-1)^n + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(-1)^{n+1} = 1+1$

Proposition 35 *Soit* $(U_n)_n$ *une suite d'èlèments de* $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{k\geq n} U_k)) \geq \lim\limits_{n\to+\infty} (\inf\limits_{k\geq n}(U_k))$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{k\geq n} -U_k)) = -\lim\limits_{n\to+\infty} (\inf\limits_{k\geq n}(U_k))$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (\inf\limits_{k\geq n} -U_k)) = -\lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{k\geq n}(U_k))$
Si $U_n \leq V_n$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{k\geq n} U_k)) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} (\sup\limits_{k\geq n} V_k))$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\inf\limits_{k\geq n}(U_k)) \geq \lim\limits_{n\to+\infty} (\inf\limits_{k\geq n}(V_k))$

1.5 Suites adjacents

Définition 36 *Deux suites l'une* $(U_n)_n$ *croissante et l'autre* $(V_n)_n$ *décroissante sont dites adjacents si*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$$

Exemple 37 *On considère les deux suites*

$$U_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \qquad V_n = U_n + \frac{1}{n!}, \forall n \geq 1$$

ces deux suites sont adjacents en effet
$U_{n+1} - U_n = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ *alors la suite est croissante*
$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-1-n}{(n+1)!} < 0$ *on a une suite décroissante*
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$

Théorème 38 *Deux suites adjacents sont convergentes et admettent la même limite*

Preuve. Puisque la suite $(U_n - V_n)_n$ converge vers 0, alors $(U_n - V_n)$ est majorée par 0, par conséquent $U_n - V_n \leq 0 \Longrightarrow U_n \leq V_n$ d'ou

$$U_1 < U_2 < U_3 < \ldots . U_n < V_n \leq V_{n-1} < V_{n-2} < \ldots < V_1$$

La suite $(U_n)_n$ est croissante et majorée par V_1,alors elle est convergente
La suite $(V_n)_n$ est décroissante et minorée par U_1,alors elle est convergente
On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l'$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$ alors $l - l' = 0 \Longrightarrow l = l'$ ■

Problème 39 *SQi on a deux suites de sorte que* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$, *alors les suites sont-ils adjacents ?. La réponse est non*

Contre exemple 40 *On considère les suites* $U_n = 1+2+3+....+n$ *et* $V_n = U_n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+2+3+....+n - U_n - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$
Mais $U_{n+1} - U_n = n+1 > 0$ *alors croissante*
$V_{n+1} - V_n = n+1+\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} > 0$ *alors la suite est aussi croissante*

1.5.1 Comparaison des suites

Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites de nombres réels
On dit que $(U_n)_n$ est équivalente à $(V_n)_n$ si $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_n$ tend vers 1, on note $U_n \approx V_n$
On dit que $(U_n)_n$ est négligeable par $(V_n)_n$ si $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_n$ tend vers 0, on note $U_n = o(V_n)$
On dit que $(U_n)_n$ est dominée par $(V_n)_n$ si $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_n$ est bornée, on note $U_n = O(V_n)$

Exemple 41 *On a* $\sin n \approx n$ *au voisinage de* 0, $e^n - 1 \approx n$ *au voisinage de* 0

1.6 Suites de Cauchy

Proposition 42 *Toute suite* $(U_n)_n$ *convergente possède la propriété suivante*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ entier tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} \ p \text{ et } q \text{ supérieure à } N \text{ on a } |U_p - U_q| < \varepsilon$$

Preuve. Soit l la limite de $(U_n)_n$, on a $|U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq |U_p - l| + |U_q - l|$
La suite $(U_n)_n$ à pour limite l à tout ε, on peut associée un entier N avec $p > N$ on a $|U_p - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\forall \varepsilon > 0, q > N$ on a $|U_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\forall (p,q) \in \mathbb{N}, p \geq N, q \geq N, |U_p - U_q| < \varepsilon$
■

Définition 43 *On dit q'une suite* $(U_n)_n$ *est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq q \geq N \Longrightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$$

Exemple 44 *La suite* $(U_n)_n$ *définie par* $U_n = \frac{n}{2n+1}$ *est de Cauchy. En effet*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq q \geq N \Longrightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$
$|U_p - U_q| = \left|\frac{p}{2p+1} - \frac{q}{2q+1}\right| = \left|\frac{p-q}{(2p+1)(2q+1)}\right| = \frac{p-q}{(2p+1)(2q+1)}$ *car* $p \geq q$
$|U_p - U_q| \leq \frac{p}{(2p+1)(2q+1)} + \frac{q}{(2p+1)(2q+1)}$ *or* $(2p+1)(2q+1) = 4pq + 2q + 2p + 1 \geq 4pq$ *alors on a*
$|U_p - U_q| \leq \frac{p}{4pq} + \frac{q}{4pq} \leq \frac{1}{4q} + \frac{1}{4p} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow p \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ *et* $q \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ *alors il suffit de prendre* $N = E(\frac{1}{2\varepsilon}) + 1$

Proposition 45 *Toute suite de Cauchy est bornée*

Preuve. On montre que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq q \geq N \Longrightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon \Longrightarrow \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| < A$
Pour ε fixé, $, p \geq q \geq N \Longrightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon$
$|U_n| = |U_n - U_N + U_N| \leq |U_n - U_N| + |U_N| \leq \varepsilon + |U_N|$ alors la suite est bornée si $p \geq q \geq N$
Maintenant on pose $M = \sup\{|U_0|, |U_1|, ..., |U_N| + \varepsilon\}$ pour $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$ alors $\forall n \in \{0, 1, ..., N-1\}, |U_n| \leq M$par conséquent notre suite est bornée par tout ■

Théorème 46 *(Critère de Cauchy)*
Une suite réel est convergente si et seulement si elle est de Cauchy

Preuve. Soit $(U_n)_n$ une suite convergente. Montrons qu'elle est de Cauchy

Notons l la limite de $(U_n)_n$, alors on a

$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, p \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_p - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, q \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

On a $|U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq |U_p - l| + |U_q - l| \leq \varepsilon$, donc $\forall\varepsilon > 0, \forall p > q > N_\varepsilon, |U_p - U_q| < \varepsilon$

Supposons maintenant que $(U_n)_n$ est de Cauchy, et montrons qu'elle est convergente

$(U_n)_n$ est de Cauchy, alors $(U_n)_n$ est bornée et par le théorème de Bolzano-Weistress, on peut trouver une sous-suite $V_n = U_{\varphi(n)}/\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ convergente.

Posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et montrons que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$l = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Longrightarrow |V_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$(U_n)_n$ est de Cauchy$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q > N_1 \Longrightarrow |U_p - U_q| < \frac{\varepsilon}{2}$

Calculons $|U_p - l| = |U_p - V_p + V_p - l| \leq |U_p - V_p| + |V_p - l| \leq |U_p - V_p| + \frac{\varepsilon}{2}$

Or $V_p = U_{\varphi(p)}$ et $\varphi(p) > p \geq N_0$, alors $|U_p - V_p| = \left|U_p - U_{\varphi(p)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ par conséquent $|U_p - l| < \varepsilon$ alors on a

$\forall\varepsilon > 0, \exists N_2 = \max(N_0, N_1) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Longrightarrow |U_p - l| < \varepsilon$ ce qui montre que la suite $(U_n)_n$ est convergente. ■

Théorème 47 *Toute suite de Cauchy de nombre réels est convergente vers un nombre réel*

On dit que $\mathbb{R}$ est complet

Remarque 48 *ce théorème n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$*