Table des matières

Chapitre 1

Notation

.L'ensemble vide $\emptyset$ (ou $\{\}$)
.L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
.L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
.L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.
.L'ensemble des nombres décimaux $D = \left\{\frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
.L'ensemble des nombres irationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.
.L'ensembles des nombres complexes $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
.Une proposition on la note par p ou q.
.La négation $\bar{p}$ (ou $\neg p$) : non p
.La conjonction, $p \wedge q$: p et q.
.La disjonction $p \vee q$: p ou q.
.L'implication, $p \Rightarrow q$: p implique q ($\bar{p}$ ou q)
.L'équivalente, $p \Longleftrightarrow q$ (p si et seulement si q).
.Le quantificateur $\forall$: pour tout
.Le quentificateur $\exists$: il existe ($\exists!$ il existe un unique).
.L'inclusion $A \subseteq B$: $x \in A \Longrightarrow x \in B$.
.L'égalité $A = B$: $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$
.L'intersection $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
.La réunion $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Chapitre 2

Propriétes des nombres réels

2.1 Définition axiomatique de $\mathbb{R}$

2.1.1 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.Il existe deux applications de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notées $+$ (resprctivement $\cdot$)

$$+ \begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x + y \end{array} \qquad \cdot \begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x \cdot y \end{array}$$

appellées addition dans $\mathbb{R}$ (respectivement multiplication dans $\mathbb{R}$) vérifiants les neufs axiomes suivants

1.$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

2.$\exists 0 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 + x = x + 0 = x$

0 est appelé élément neutre de $\mathbb{R}$ pour la loi $+$.

3.$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y = y + x = 0$

$y = -x$ est appelé élément symétrique de x dans $\mathbb{R}$ pour la loi $+$.

4.$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$

5.$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

6.$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

$x + (y \cdot z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

7.$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x$

8.$\exists 1 \in \mathbb{R} \quad 1 \neq 0$ tel que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

1 est appelé élément neutre de $\mathbb{R}$ pour la loi $\cdot$

9.$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot y = y \cdot x = 1$

$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ est l'élément inverse de x dans $\mathbb{R}$ pour la loi $\cdot$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ muni des axiomes 1 à 9 est un corps commutatif.

2.1.2 $\mathbb{R}$ est ordonné

Il existe une relation notée $\leq$, vérifiant les axiomes

10.$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$

11.$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y$ et $y \leq x) \Longrightarrow (x = z$

12.$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y$ et $y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$

La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre

13.$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z$ Compatibilité de la relation $\leq$ avec la loi $+$.

14.$\forall x, y \in \mathbb{R}, (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \cdot y$

15.$\forall x, y \in \mathbb{R},$ on a : soit $x \leq y$, soit $y \leq x$

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

Les 15 axiomes précités dont de $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ un corps ordonné.

Propriétés 1 *Pour tout élément* x, y, z *de* $\mathbb{R}$ *on a :*

$$
\begin{aligned}
&1. x + y = x + z \Longrightarrow y = z \\
&2. x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \\
&3. x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y \\
&4. x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0
\end{aligned}
$$

Preuve. On démontre 2

$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = (x \cdot 0) + (x \cdot 0)$

On ajoute $-x \cdot 0$ à gauche et à droite

$-x \cdot 0 + x + \cdot 0 = -x \cdot 0 + (x \cdot 0 + x \cdot 0) \Longleftrightarrow 0 = x \cdot 0$ ■

2.1.3 Les intervalles dans $\mathbb{R}$

Définition 2 *Soit* I *une partie dans* $\mathbb{R}$.

I est un intervalle dans $\mathbb{R}$ s'il vérifié la propriété suivante :

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \text{ alors } z \in I$$

Théorème 3 *L'intersection de deux intervalles dans* $\mathbb{R}$ $I \cap J$ *est un intervalle dans* $\mathbb{R}$

Preuve. Soit I, J deux intervalles dans $\mathbb{R}$. Montrons que $I \cap J$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in I \cap J$ tels que $x < y$ et soit z tel que $x < z < y$.

Montrons que $z \in I \cap J$.

$x, y \in I \cap J \Longrightarrow x, y \in I$ et $x, y \in J$

$x, y \in I$ et $x < z < y$ et I un intervalle, alors $z \in I$

$x, y \in J$ et $x < z < y$ et J un intervalle, alors $z \in J$

Par conséquant $z \in I \cap J$ ■

Remarque 4 *La réunion de deux intervalles n'est pas toujour un intevalle*

Contre exemple 5 *On considère* $I = [1, 2]$ *et* $J = [4, 5]$

$I \cup J = [1, 2] \cup [4, 5]$

On prend $x = 2$ *et* $y = 4$, $x, y \in I \cup J$ *mais si* $y = 3$ *on a* $2 < 3 < 4$ *mais* $3 \notin I \cup J$.

$\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle

`Type d'intervalles`

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$

$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

$]a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$

$] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$

$] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$

$\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$

2.1.4 Valeur Absolue

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = [0, +\infty[$
$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} = [-\infty, 0[$
$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ et $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$

Définition 6 *On appelle valeur absolue et on la note par* $|.|$ *toute application*

$$|.| = \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to |x| = \begin{array}{c} x \ si\ x \geq 0 \\ -x \ si\ x \leq 0 \end{array} \end{array}$$

Remarque 7 *D'après la définition ;* $\forall x \in \mathbb{R}; -|x| \leq x \leq |x|$

Déduiser $|x| \leq a \Longleftrightarrow ?$

2.1.5 Partie entière

La partie entière d'un nombre réel x noté $[x]$ ou bien $E(x)$ est une application

$$[] : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \to [x] \end{array}$$

vérifiant : Si $n \leq x < n + 1 \Longrightarrow [x] = n$

Exemple 8 $x = 3.1 \Longrightarrow [x] = 3$
$x = -2.4 \Longrightarrow [x] = -3$

Graphe de la fonction partie entière est
$f(x) = \lfloor x \rfloor$

Propriétés 9 $\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x < [x] + 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x$

2.2 Borne supérieure et inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$

Considérons $\mathbb{R}$ muni de la relation usuel $\leq$, et X une partie non vide de $\mathbb{R}$

Définition 10 *On dit que* X *est majorée s'il existe* $M \in \mathbb{R} = \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in X, x \leq M$$

M s'appelle un majorant de X

Exemple 11 $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ $\forall x \in \mathbb{R}_-; x \leq 0$ *donc* 0 *est un majorant*

Remarque 12 *L'ensemble des majorants est un ensemble infinie noté par* $M(X)$

Exemple 13 $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ *cette ensemble est majorée par l'ensemble* $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

Définition 14 *La borne supérieure de* X *notée par* $\sup X$ *est par définition le plus petit des majorants de* X*.*

Exemple 15 $X =]-1;5]$ *l'ensemble des majorants* $M(X) = [5;+\infty[$, *alors* $\sup X = 5$

Définition 16 *Si* $\sup X \in X$, *alors* X *admet un plus grand element noté par* $\max X = \sup X$
Si $\sup X \notin X$, *alors* X *n'admet pas un plus grand element*

Remarque 17 *Si le* $\max X$ *existe alors le* $\sup X$ *existe le contraire n'est pas toujour vraie*

Définition 18 *On dit que* X *est minorée s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in X, x \geq M$$

M *s'appelle un minorant de* X.

Exemple 19 $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}_-; x \geq 0$ *donc* 0 *est un minorant.*

L'ensemble des minorants est un ensemble infini, on le note par $m(X)$.

Définition 20 *La borne inférieure de* X *notée par* $\inf X$ *est par définition le plus grand des minorants de* X.

Exemple 21 $X =]-5, -1], m(X) =]-\infty, -5]$, *alors* $\inf X = -5$.

Si $\inf X \in X$, alors X admet un plus petit élèment noté $\min X = \inf X$.
Si $\inf X \notin X$, alors X n'admet pas un plus petit élèment.

Exemple 22 $X =]-5, -1], m(X) =]-\infty, -5], \inf X = -5$ *mais puisque* $\inf X \notin X$, *alors* $\min X$ *n'existe pas*

Théorème 23 *La borne supérieure et la borne inférieure s'elles existent elles sont uniques.*

Théorème 24 *(Axiome de la borne sup et inf)Bolzano 1817*
Toute partie de $\mathbb{R}$, *non vide et majorée admet une borne supérieure.*
Toute partie de $\mathbb{R}$, *non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Exemple 25 *Soit l'ensemble*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, x = \frac{2n+1}{2n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Montrez que $\sup A$ *et* $\inf A$ *existent*

Preuve. On a A non vide car si $n = 0, x = \frac{1}{2}$
$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$ donc $\exists M = 1 \in \mathbb{R}$ tel que A soit majorée, par conséquent A admet une borne supérieure
D'autre part on a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+1}{2n+2} > 0$ donc il existe $m = 0 \in \mathbb{R}$ tel que A soit minorée, par conséquent A admet une borne inférieure ■

Définition 26 *Une partie* A *est dite bornée si elle est majorée et minorée c'est-à-dire*

$$\forall x \in A, \exists M, m \in \mathbb{R}; m \leq x \leq M$$

On a une définition équivalente

$$\text{A est bornée} \Longleftrightarrow \forall x \in A, \inf A \leq x \leq \sup A$$

2.2.1 Corps Archémedien

$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$ny > x$$

On dit que $\mathbb{R}$ est un corps Archemedien

Proposition 27 *L'axiome d'Archimede est une conséquence de l'axiome de la borne supérieure*

2.3 Caractérisation bornes supérieures et inférieures

Théorème 28 *On a l'équivalence suivantes*

$$\sup A = M_0 \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \forall x \in A; x \leq M_0 \ (M_0 \textit{ est un majorant}) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A; x_0 > M_0 - \varepsilon \end{array}$$

M_0 est le plus petit des majorants

Exemple 29 *Pour* $A = \left\{x \in \mathbb{R}, x = \frac{2n+1}{2n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *on a montrer que* $\forall x \in A, x \leq 1$
Montrons maintenent que $\sup A = M = 1$
On utilise la caractérisation de la borne supérieure
Soit $\varepsilon > 0, \exists ? x_0 \in A, x_0 > M - \varepsilon$
$x_0 \in A \Longrightarrow x_0 = \frac{2n_0+1}{2n_0+2}$, *alors on va trouver une valeure de* n_0 *qui vérifie* $x_0 > M - \varepsilon$
$x_0 > M - \varepsilon \Longrightarrow \frac{2n_0+1}{2n_0+2} > 1 - \varepsilon \Longrightarrow 2n_0 + 1 > (2n_0 + 2)(1 - \varepsilon) \Longrightarrow 2n_0\varepsilon > 2(1 - \varepsilon) \Longrightarrow n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0$
n_0 *existe car* $\mathbb{R}$ *est archemedien et de plus* $n_0 = [\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}] + 1$

Théorème 30 *On a l'équivalence suivantes*

$$\inf A = m_0 \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \forall x \in A; x \geq M_0 \ (m_0 \textit{ est un minorant}) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A; x_0 < m_0 + \varepsilon \end{array}$$

m_0 est le plus grand des minorants

Exemple 31 *Pour* $A = \left\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \leq 1 = M$ *un majorant, et d'autre part* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} > 0 = m$ *donc* 0 *un minorant*
Montrons que $\inf A = 0$
$x_0 < m_0 + \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon \Longrightarrow n_0^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ *donc il suffit de prendre* $n_0 = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}] + 1$

2.3.1 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Etant donnés des réels x et y vérifiant $x < y$, il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x < q < y$$

On dit que $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, et on écrit $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

2.4 Quelques notions de topologie de $\mathbb{R}$

2.4.1 Adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}$

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Un réel x est adhérent à A si tous intervalle ouvert I_x contenant x rencontre A.

On dit que x appartient à l'adherence de A, et on écrit $x \in \overline{A}$.

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall I_x \text{ intervalle ouvert contenant } x,\ I_x \cap A \neq \emptyset$$

Remarque 32 *1)* $A \subset \overline{A}$

2) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$

Exemple 33 $A =]0, 1[$ $\qquad$ $\overline{A} = [0, 1]$

$1 \in \overline{A} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\cap]0, 1[\neq \emptyset$ *on va envisager deux cas possibles*
Si $1 - \varepsilon \geq 0,$ *alors* $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\cap]0, 1[=]1 - \varepsilon, 1[$
Si $1 - \varepsilon \leq 0,$ *alors* $]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\cap]0, 1[=]0, 1[$

Exemple 34 $A = \{1\} \cup [4, 6[$ $\qquad$ $\overline{A} = \{1\} \cup [4, 6]$

$1 \in \overline{A}$ *car* $1 \in A$ *de plus il existe un intervalle ouvert* I_1 *contenant* 1 *tel que* $I_1 \cap A \neq \emptyset$ *en peut prendre par exemple* $I_1 =]-1, 3[$

2.4.2 Point d'accumulation

Un réel x est un point d'accumulation de A si tout intervalle ouvert I_x contenant x rencontre A en un point au moins autre que x.

Un point d'accumulation de A est aussi un point limite de A.

Remarque 35 *un point* x *est un point d'accumulation de* A *si et seulement s'il est adhérent à* $A \backslash \{x\}$.

Exemple 36 *Tout nombre réel est un point d'accumulation de* $\mathbb{Q}$

Exemple 37 $A =]0, 1[$, 1 *est un point accumulation de* A.

2.4.3 Point isolé

Un point x de A qui n'est pas un point d'accumulation de A est dit isolé. Autrement dit un point x de A est un point isolé de A s'il existe un intervalle ouvert I_x contenant x qui ne rencontre A qy'au point x.

Théorème 38 *Bolzano-Weierstrass*

Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ *admet au moins un point d'accumulation.*

Chapitre 3

Techniques de raisonnement

Soit p et q deux propositions

3.1 Rasonnement directe

Pour monter que $p \Longrightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et on démontre que q est vraie

Exemple 39 *Montrer que si* $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a+b \in \mathbb{Q}$

$\begin{array}{c} a \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a = \frac{x}{y} \\ b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow b = \frac{z}{t} \end{array} \Longrightarrow a+b = \frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt+zy}{ty} \in \mathbb{Q}$, $\quad x, z \in \mathbb{Z}, y, t \in \mathbb{Z}^*$ *et* $xt+zy \in \mathbb{Z}, ty \in \mathbb{Z}^*$

3.2 Raisonnement cas par cas

Pour vérifier une assertion $p(x)$ pour tous les x dans E, on montre l'assertion pour les x d'une partie A de E puis les x qui n'appartienne pas à A.

Exemple 40 *Monter que* $|x-1| \leq x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Si $x-1>0 \Longrightarrow x>1 \Longrightarrow |x-1| = x-1$ *alors* $x^2-x+1-x+1 = x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 0$

Si $x-1<0 \Longrightarrow x<1 \Longrightarrow |x-1| = 1-x$ *alors* $x^2-x+1+x-1 = x^2 = x^2 \geq 0$

3.2.1 Raisonnement par contrat possé

$p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ Montrer que $p \Longrightarrow q$ est vraie, on suppose $\bar{q}$ est vraie et on montre que $\bar{p}$ est vraie

Exemple 41 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *montrer que si* n^2 *est paire, alors* n *est paire*

Supposons n *est impaire, alors* $n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ *donc* n^2 *est impaire*

3.2.2 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que $p \Longrightarrow q$ est vraie, on suppose que p est vraie et q est fausse à la fois et on cherche une contradiction

Exemple 42 *Montrer que si* $a, b \geq 0$, $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b$

On peut pas appliquer les méthodes précédentes, pour cela on applique la démonstration par l'absurde

On suppose que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *et* $a \neq b$

$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a(1+a) = b(1+b) \Longrightarrow a+a^2 = b+b^2 \Longrightarrow a^2-b^2 = b-a \Longrightarrow (a-b)(a+b) = b-a$ *on peut diviser les deux membres par* $(a-b)$ *car* $a \neq b$, *on trouve*

$(a-b)(a+b) = b-a \Longrightarrow a+b = -1$ *et c'est une contradiction avec* $a, b \geq 0$, *alors* $a, b \geq 0$, $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b$

3.2.3 Raisonnement par récurrence

Ce type de raisonnement est connue, on vaira des exemples dans les travaux dirrigées