Table des matières

Chapitre 1

Fonctions réelles limites et continuité

1.1 Généralitée

Définition 1 *Une partie V de $\mathbb{R}$ est dite voisinage du point $x \in \mathbb{R}$, s'il existe un intervalle ouvert I qui vérifie*

$$x \in I \subset V$$

Définition 2 *Une partie V de $\mathbb{R}$ est dite voisinage de $+\infty$(resp. de $-\infty$), s'il existe un intervalle ouvert du type $]a, +\infty[$ (resp. du type $]-\infty, a[$)*

Définition 3 *Une fonction numérique f d'une variable réel d'une partie I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une coréspondence ou une application qui à tout élèment x de I associée un réel et un seule noté $f(x)$.*
On note I par D ou bien par D_f est appellé l'ensemble de définition de f et on note

$$f : \begin{array}{c} I \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{array}$$

On note l'ensemble des fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ par $\mathbb{F}(I, K)$ K désigne l'un des coprs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 4 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ *fonction d'une varible définie sur $I = \mathbb{R} \backslash \{1\}$*

1.2 Graphe d'une fonction

Soit $f \in \mathbb{F}(I, K)$.L'ensemble

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x) \backslash x \in I\}$$

est appellé le graphe de f

1.3 Fonctions remarquables

1.3.1 Fonctions paires, impaires

Soit $f \in \mathbb{F}(I, K)$
On dit que f est paire (resp. impaire) si :

1. I est symétrique par rapport à l'origine
2. $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$)

Exemple 5 $f(x) = x^2, g(x) = \cos x$ *sont paires sur $\mathbb{R}$ et $[0, \pi]$ respectivement*
$f(x) = x^3, g(x) = \tan x$ *sont des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*

Remarque 6
1. *Si f est paire, alors les points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ sont symétrique par rapport a l'axe des ordonnées (yy')*
2. *Si f est impaire, alors les points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ sont symétrique par rapport a l'origine*

1.3.2 Fonctions périodiques

Soit $f \in \mathbb{F}(I, \Bbbk)$
On dit que f est périodique de période $T > 0$ si

$$\forall x \in I, x + T \in I / f(x+T) = f(x)$$

Exemple 7 *Soit* $f(x) = x - E(x), x \in \mathbb{R}$
f *est périodique de période* $T = 1$. *En effet* $x+1 \in \mathbb{R}$ *et* $f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x+1-(E(x)+1) = x - E(x)$

1.3.3 Fonctions injective, surjective,bijective

Soit $f \in \mathbb{F}(I, \Bbbk)$
On dit que f est injective si

$$\forall (x,y) \in I \times I / f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

On dit que f est surjective si

$$\forall y \in \Bbbk, \exists x, \in I / f(x) = y$$

On dit que f est bijective si elles injective et surjective

1.3.4 Variation d'une fonction

Soit $f \in \mathbb{F}(I, \Bbbk)$. On dit que f est

1. Croissante si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou bien $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0$
2. décroissante si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou bien $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0$
3. Canstante si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ou bien $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0$

1.3.5 Fonction bornées

Soit $f \in \mathbb{F}(I, \Bbbk)$.On pose $\sup f = \{f(x), x \in I\}$ et $\inf f = \{f(x), x \in I\}$ .On dit que f est

1. Majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$. Ou bien $\sup f < +\infty$
2. Minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$. Ou bien $\inf f > -\infty$
3. Bornée si $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$. ou bien $\exists A > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq A$. Ou bien $\sup f < +\infty$ et $\inf f > -\infty$

1.3.6 Comparaison des fonctions

Soit $f \in \mathbb{F}(I, E), g \in \mathbb{F}(E, \mathbb{R})$. On définit $g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in I$

1. Si f et g de même nature, alors la composée est croissante.
2. Si f et g de nature différentes, alors la composée est décroissante.
3. La composée de deux fonctions injectives est injective.
4. La composée de deux fonctions surjective est surjective.
5. La composée de deux fonctions bijectives est bijective et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
6. On dit que f est majorée par g si on a $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x)$.Avec f et g admettant même ensemble de définition

1.3.7 Opération algèbrique sur les fonctions

Soit $f, g \in \mathbb{F}(I, \mathbb{k})$

1. La somme $f+g$ est par définition est $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. Pout tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit λf par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
3. Le produit $f.g$ est par définition est $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

Remarque 8 *1. L'ensemble $(\mathbb{F}(I, \mathbb{k}), +, .)$ n'est pas un corps, car les fonctions définit de I dans $\mathbb{R}$ qui admet un oposé, seul les fonctions qui vérifie $f(x) \neq 0, \forall x \in I$*

2. La composition de deux fonctions n'est pas commutatif, c'est-à-dire

$$f \circ g \neq g \circ f$$

1.4 Limite d'une fonction

Soit $f \in \mathbb{F}(I, \mathbb{k})$ définit au voisinage de $x_0 \in I$.
On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On ecrit $\lim\limits_{x \to x_0} = l$

Exemple 9 *Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} 3x - 2 = 1$*
$\lim\limits_{x \to 1} 3x - 2 = 1 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Longleftrightarrow |f(x) - l| = |3x - 2 - 1|$
$= |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon \Longrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ *alors* $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Exemple 10 *Monter que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$*

Proposition 11 *Unicité de la limite*
Soit $f \in \mathbb{F}(I, \mathbb{k})$. Si f admet une limite, alors elle est unique.

Preuve. Soit $f \in \mathbb{F}(I, \mathbb{k})$ admet deux limites l et l' avec $l \neq l'$ au voisinage de x_0.
$\lim\limits_{x \to x_0} = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et
$\lim\limits_{x \to x_0} = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$
Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2), |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |l' - f(x)| = \varepsilon$ par conséquent $l = l'$ ■

1.4.1 Limite à droite et à gauche

Soit $f \in \mathbb{F}(I, \mathbb{k})$.On dit que f admet une limite à droite (resp. à gauche) en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I / x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

resp

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I / x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$)

Remarque 12 *Pour qu'une fonction admet une limite au voisinage de x_0 il faut et il suffit vérifier*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

1.5 Limite d'une fonction si $x \to |\infty|$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I/x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I/x < -A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Exemple 13 *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *Domaine de définition est* $I = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*/x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Longrightarrow x \geq \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow A = \frac{1}{\varepsilon}$

1.6 Limite non bornée d'une fonction

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ on a

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A$
3. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/x - x_0 < \delta \Longrightarrow f(x) > A$
4. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) > A$
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/x - x_0 < \delta \Longrightarrow f(x) < -A$
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) < -A$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I/x > B \Longrightarrow f(x) > A$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I/x > B \Longrightarrow f(x) < -A$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I/x < -B \Longrightarrow f(x) > A$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I/x < -B \Longrightarrow f(x) < -A$

Exemple 14 *Soit f une fonction définie par $f(x) = E(x)$. Calculer* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Si $x \in [x_0, x_0 + 1] \Longrightarrow f(x) = x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = x_0$

Si $x \in [x_0 - 1, x_0] \Longrightarrow f(x) = x_0 - 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = x_0 - 1$ *par conséquent f n'admet pas une limite au voisinage de x_0.*

Exemple 15 $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}/f(x) = \frac{1}{1-x}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I/1 - x < \delta \Longrightarrow f(x) > A \Longrightarrow \frac{1}{1-x} > A$

$\Longrightarrow 1 - x < \frac{1}{A} \Longrightarrow \delta = \frac{1}{A}$.

Exemple 16 $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}/f(x) = \frac{1+x^2}{x}$. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I/x > B \Longrightarrow f(x) > A$

$f(x) > A \Longrightarrow \frac{1+x^2}{x} > A \Longrightarrow 1 + x^2 > Ax \Longrightarrow 1 + x^2 - Ax > 0$ *Calculons* Δ

$\Delta = A^2 - 4$

Si $A = 2$ alors $\Delta = 0$ on a $1 + x^2 + Ax = 1 + x^2 - 2x = (1 - x)^2 > 0$ et $x = \frac{A}{2}$ est la solution double, alors on peut prendre $B = \frac{A}{2}$

Si $A > 2$ on a deux solutions $x_1 = \frac{A+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $x_1 = \frac{A-\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ alors on peut prendre $B = \frac{A+\sqrt{\Delta}}{2}$

Si $\Delta < 0$ alors $1 + x^2 - Ax > 0$ est vérifier quelque soit les caleurs de x

Proposition 17 *Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{k})$ au voisinage de x_0. Si $\lim\limits_{x\to x_0}$ existe alors f est localement bornée*

Preuve. Soit $f \in \mathbb{F}(I, \Bbbk)$ et $x_0 \in I$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
$|f(x) - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \Longrightarrow |f(x)| < \min(|l - \varepsilon|, |l + \varepsilon|)$ d'autre part
$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ alors notre fonction est bornée sur l'intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ■

Proposition 18 *Relation avec les limites de suites*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$
Les deux propositions suivantes sont équivalentes

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
2. *Pour tout suite $(x_n)_n$ de $[a, b]$ avec $x_0 \neq x_n$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ (avec l finie ou infinie)*

Preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) en prend l finie
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 \iff \forall \varepsilon' > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon'$ alors on prend $\varepsilon' = \delta$ d'ou $|f(x_n) - l| < \varepsilon$.
2) $\Longrightarrow$ 1) On suppose que 2) vraie et 1) est fausse. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que dans chaqu'un des intervalle

$$\left[x_0 - \frac{1}{2^n}, x_0 + \frac{1}{2^n}\right], n = 0, 1, 2, ...,$$

On peut trouver alors un point $x_n \in [a, b]$ tel que $x_n \neq x_0$

$$\forall n : |f(x_n) - l| \geq \varepsilon$$

car on a supposé que 1) est fausse.Par conséquent la suite $(x_n)_n$ converge mais la suite $(f(x_n))_n$ diverge et est une contradiction avec 2) d'ou 1) est vraie. ■

1.7 Opérations algébriques sur les limites

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (eventuellement $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$).
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$, alors

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l + l'$ (sauf si $l = +\infty, l' = -\infty$ ou $l = -\infty, l' = +\infty$)
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x).\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l.l'$(sauf si $l = 0, l' = |\infty|$ ou $l = |\infty|, l' = 0$)
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (a.f)(x) = a.\lim\limits_{x\to x_0}(g)(x) = a.l, \forall a \in \mathbb{R}$
4. Si f est bornée sur I et $\lim\limits_{x\to x_0} (f)(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f.g)(x) = 0$
5. Si $f(x) \neq 0, \forall x \in I$ et $l = |\infty|$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
6. Si $g(x) \neq 0, \forall x \in I$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'} : / l' \neq 0$
7. Si $f(x) \leq g(x)$ alors $l \leq l'$

Proposition 19 *Soient I, J deux parties de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in J$ on a $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = l$ alors si $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = l$*

Preuve. On a $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in J / |y - y_0| < \delta \Longrightarrow |g(y) - l'| < \varepsilon$
D'autre part $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I / |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon'$
Puisque $f(x) \in J$ et $l \in J$ alors pour $\delta = \varepsilon'$ on a
$\forall x \in I / |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |g(f(x)) - g(l)| = |(g \circ f)(x) - l'| < \varepsilon$ ■

Remarque 20 *La condition $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = l$ est necessaire sinon la proposition précédente est fausse*

Exemple 21 *On pose* $f(x) = 0$ *et* $g(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y = 0 \\ 0 = \lim\limits_{y\to 0} g(y) \text{ si } y \neq 0 \end{cases}$ *On a* $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ *mais* $\lim\limits_{x\to 0}(g \circ f)(x) = g(0) = 1$

Proposition 22 *Soient* f, g, h *trois fonctions définies sur* I *et* $x_0 \in I$*. Si on a* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ *et* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$.

Preuve. Comme le théorème des trois suites ■

Proposition 23 *Soit* $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ *alors*

1. Si f est croissante et non bornée, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$
2. Si f est croissante et majorée, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Preuve. voir TD ■

1.8 Comparaison des fonctions

Définition 24 *Soient* $f, g \in \mathbb{F}(I, \mathbb{R}), x_0 \in I$

1. *On dit que* f *est équivalente à* g *au voisinage de* x_0 *si* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$*. On écrit* $f \sim g$
2. *On dit* f *est nègligeable devant* g *au voisinage de* x_0 *si* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$*. On écrit* $f = o(g)$
3. *On dit* f *est dominée par* g *au voisinage de* x_0 *si* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *est bornée au voisinage de* x_0*. On écrit* $f = O(g)$

Exemple 25 $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad \ln(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad \ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$ $\forall \alpha \neq 0, (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ $\quad \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$ $\quad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad 1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} x$

1. La relation $\sim$ est compatible avec la multiplication. C'est-à-dire que si $f \sim g$ et $g \sim h$ alors $f \sim h$
2. Si $f \sim g$ et f et g ne s'annules pas dans un voisinage de x_0, alors $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$
3. La relation o est transitive. C'est-à-dire si $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$
4. La relation o est compatible avec la multiplivation. C'est-à-dire si $f = o(g)$, alors $fh = o(gh)$