Université Ibn Khaldoun – Tiaret
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de l'Informatique
Module : Algèbre 02 (1ère Année LMD 2022-2023)

Fiche de TD n° 02

EXERCICE 01 :

Soit l'application f définie par : $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+z\ ,\ 2x+y+z)$$

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Déterminer $Kerf$ et Imf et calculer leurs dimensions.
3. f est-elle injective ? est-elle surjective ? (Justifier)

EXERCICE 02 :

Soit $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par : $f(x,y,z,t) = (x-y+z\ ,0\ ,\ x+y-z+t\ ,t)$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $Kerf$ et sa dimension.
3. Donner la dimension de Imf et dire si f est surjective ?
4. Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ /\ x+y-z+t = 0\}$ un s.e.v de $\mathbb{R}^4$.
   E et $Kerf$ sont-ils supplémentaires ?

EXERCICE 03 :

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$h(e_1) = -e_1+2e_2+2e_3\ ,\ \ h(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3\ \ et\ \ h(e_3) = 2e_1+2e_2-e_3.$$

1. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3\ /\ h(u) = -3u\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^3\ /\ h(u) = 3u\}$.
   Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $\{\ e_2 - e_1\ , e_3 - e_1\}$ est une base de F.
2. On admet que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $\{\ e_1\ + e_2 + e_3\}$ est une base de G.
   A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?

EXERCICE 04 (supplémentaire) :

Soient $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires telles que

$$T(0,1) = -2\ ,\ \ T(1,1) = 3\ ,\ \ S(1,0) = (-1,1,-2)\ \ \text{et}\ \ S(0,1) = (1,0,1).$$

- Déterminer $T(x,y)$ et $S(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 05 (supplémentaire) :

Soit $f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ l'application définie par : $f(z_1, z_2) = (\overline{z_1} + iz_2\ ,\ \overline{z_1} - z_2\ )$.

1. Montrer que f n'est pas linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel complexe et que f est linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel réel.
2. Déterminer $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^2$, $dim_{\mathbb{R}}(Kerf)$ et $dim_{\mathbb{R}}(Imf)$. En déduire si f est injective ou surjective.