Fiche de TD n° 01

EXERCICE 01 :

Montrer que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \boxplus, \boxdot)$ est un espace vectoriel réel pour les lois $\boxplus$ et $\boxdot$ suivantes:
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$(x,y) \boxplus (x',y') = (x+x', yy') \qquad \text{et} \qquad \lambda \boxdot (x,y) = \left(\lambda x, y^{\lambda}\right).$$

EXERCICE 02 : (supplémentaire)

Est-ce- que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel réel pour les lois $\oplus$ et $\odot$ suivantes:
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$(x,y) \oplus (x',y') = (xx', yy') \qquad \text{et} \qquad \alpha \odot (x,y) = (1, y^{\alpha}).$$

Vérifier toutes les étapes.

EXERCICE 03 :

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
Dans le cas affirmatif, trouver des bases.
$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; x+y-2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\right\}$, $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; xy = \frac{z}{\pi} \right\}$

EXERCICE 04 :

Soit $A = \{u, v\} \subset \mathbb{R}^4$ telle que $u = (1,2,3,4)$ et $v = (1,-2,3,-4)$.

1) Montrer que A est une partie libre de $\mathbb{R}^4$.
2) Peut-on déterminer x et y pour que $w = (x,1,1,y) \in Gr(A)$?
3) Compléter A pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE 05 :

Soit F le sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ tel que : $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \; x + 3y + 4t = 0 \right\}$.

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, puis donner une base de F.

2) Soit $G = \langle a \rangle$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $a = (1,3,0,4)$.
Montrer que $F \; et \; G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3) Soit E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ tel que :

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \quad x+y+z+t = 0, \; y - 2z = 0 \quad et \quad z + t = 0 \}.$$

Est-ce-que $F \; et \; E$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?