1. Cours 9: Matrices.

1.1. Ensembles des matrices.

Définitions: *Soit K un corps commutatif*

On appelle matrice à coefficients dans K tout tableau réctangulaire ou carré de la forme $\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$

où les $A_{i,j}$ sont des éléments de K.

Si on note $(A_{i,j})$ cette matrice, alors:
** Les $A_{i,j}$ sont appelés coefficients ou termes de la matrice $(A_{i,j})$.*
** La matrice $(A_{i,j})$ est dite de type (m,n) si, elle est à m lignes et à n colonnes.*
L'ensemble des matrices de type (m,n) à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

Remarques:
1) Les indices i et j sont, respectivement, le numéro de la ligne et le numéro de la colonne où se trouve l'élément $A_{i,j}$.
2) Deux matrices $(A_{i,j})$ et $(B_{i,j})$ sont égales si, elles sont du même type et elles ont les mêmes coefficients.

C.à.d: $(A_{i,j}) = (B_{i,j}) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,m\}, \forall j \in \{1,...,n\} : A_{i,j} = B_{i,j}$.

3) Chaque élément A de K est identifié à une matrice de type $(1,1)$, alors $\mathcal{M}_{(1,1)}(K) \simeq K$

Exemples :

* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(3,4)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Si on note cette matrice $(A_{i,j})$, alors $A_{1,1} = 1$, $A_{2,3} = -2$, $A_{2,4} = 0$, et $A_{3,3} = 2$.

* $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ (avec $i^2 = -1$), est une matrice de $M_{(2,2)}(\mathbb{C})$.

Si on note cette matrice $(B_{k,l})$, alors $B_{1,2} = 0$, et $A_{2,1} = -2i$.

Matrices particulières

** Une matrice est appelée matrice nulle et est notée 0, si pour tout i et j on a: $A_{i,j} = 0$.*
** Une matrice est appelée matrice ligne d'ordre n si, elle est de type $(1,n)$.*
** Une matrice est appelée matrice colonne d'ordre m si, elle est de type $(m,1)$.*
** Une matrice est appelée matrice carrée d'ordre n si, elle est de type (n,n).*

* *Une matrice est appelée matrice triangulaire supérieure d'ordre n si, elle est de type (n,n) et $A_{i,j}=0$ pour $i>j$.*
* *Une matrice est appelée matrice triangulaire inférieure d'ordre n si,elle est de type (n,n) et $A_{i,j}=0$ pour $i<j$.*
* *Une matrice est appelée matrice diagonale d'ordre n si, elle est de type (n,n), et $A_{i,j}=0$ pour $i\neq j$.*
* *Une matrice est appelée matrice identité d'ordre n et est noté I_n si, elle est de type (n,n), et $A_{i,i}=1$ pour tout i et $A_{i,j}=0$ pour $i\neq j$.*

Exemples:

* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et sont les matrices nulles de types, respectifs, $(3,2)$ et $(2,2)$.

* $(1,6,-2,0,1)$ et $(0,1)$ sont des matrices lignes d'ordres respectifs: 4 et 2.

* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes d'ordres respectifs: 2 et 3.

* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées d'ordres, respectifs: 3 et 2.

* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires supérieures d'ordres, respectifs: 3, et 2.

* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires inférieures d'ordres, respectifs: 4 et 3.

* $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales d'ordres, respectifs : 3, et 2.

* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont respectivement les matrices identités I_3 et I_2, d'ordres, respectifs: 3 et 2.

Remarque: Le coefficient $(I_n)_{i,j}$ de la matrice identité I_n est souvent noté $\delta_{i,j}$ et est appelé symbole de **Kronecker**.($\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$)

Transposée d'une matrice: *On appelle transposée de la matrice A de $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$, la matrice de $\mathcal{M}_{(n,m)}(K)$ notée ${}^tA$ et définie par $({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}$.*

Remarques:
1) ${}^tA$ est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A.
2) ${}^t({}^tA) = A$
3) Si ${}^tA = A$, la matrice A est dite symétrique.

Exemples:

1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ d'où A est symétrique.

1.2. Opérations sur les matrices

Addition des matrices et multiplication par scalaire:
Soient $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$, $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ et $\alpha \in K$
On définit la somme $A + B$ et le produit par scalaire $\alpha \bullet A$ par:

$$A + B = \left((A+B)_{i,j}\right) \text{ avec } (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

et $$\alpha \bullet A = \left((\alpha \bullet A)_{i,j}\right) \text{ avec } (\alpha \bullet A)_{i,j} = \alpha \bullet A_{i,j}$$

Remarque: La somme de matrices est définie si, les matrices sont du même type.

Exemple:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $3 \bullet \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & 0 & 18 \end{pmatrix}$,

La somme $A + M$ n'est pas définie, car $A \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_{(3,4)}(\mathbb{R})$.

Multiplication des matrices:
Soient $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ et $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,k)}(K)$.
On définit le produit $A.B$ par:

$$A.B = \Big((A.B)_{i,j}\Big) \ avec \ (A.B)_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} A_{i,p}.B_{p,j}$$

Remarques:

1) Le produit de matrices est défini si, le nombre des colonnes de la première matrice est égal au nombre des lignes de la deuxième matrice.

2) Les coefficients de la matrice produit $A.B$, sont:

$$\begin{aligned}(AB)_{i,j} &= \sum_{p=1}^{n} A_{i,p}.B_{p,j} = A_{i,1}.B_{1,j} + A_{i,2}.B_{2,j} + ... + A_{i,n}.B_{n,j} \\ &= \underbrace{(A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,n})}_{i^{ème} \text{ ligne de } A}. \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1,j} \\ B_{2,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix}}_{j^{ème} \text{ colonne de } B}\end{aligned}$$

Exemples:

1) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$A.B = \Big((AB)_{i,j}\Big)$ est une matrice du type $(2,4)$ avec

$$(AB)_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 3 \times (-1) = -3$$

$$(AB)_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 2 + 6 \times (-1) = -5$$

$$(AB)_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + (-1) \times 3 + 3 \times 0 = 5$$

$$(AB)_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 0 \times 3 + 6 \times 0 = 4$$

$$(AB)_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times (-2) = -3$$

$$(AB)_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 6 \times (-2) = -10$$

$$(AB)_{1,4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times (-1) + (-1) \times 0 + 3 \times 2 = 4$$

$$(AB)_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 6 \times 2 = 11$$

C.à.d: $A.B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 & 4 \\ -5 & 4 & -10 & 11 \end{pmatrix}$

Le produit $B.A$ n'est pas défini, car $B \in \mathcal{M}_{(3,4)}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$.

Propriétés : *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$; $C, D \in \mathcal{M}_{(n,k)}(K)$ *et* $Q \in \mathcal{M}_{(k,s)}(K)$, *alors:*

1) $I_m.A = A = A.I_n$

2) $(A+B).C = A.C + B.C$ *et* $A.(C+D) = A.C + A.D$

3) $A.(C.Q) = (A.C).Q$

4) $\alpha \bullet (A.C) = (\alpha \bullet A).C = A.(\alpha \bullet C)$ *où* $\alpha \in K$.

5) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ *et* ${}^t(\alpha \bullet A) = \alpha \bullet {}^tA$ *où* $\alpha \in K$.

6) ${}^t(A.C) = {}^tC.{}^tA$

7) $A.0 = 0$ *et* $0.A = 0$ *où* 0 *désigne les matrices nulles convenables.*

8) On peut avoir $A.C = 0$, *avec* $A \neq 0$ *et* $C \neq 0$.

Théorème: *L'ensemble* $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$, *muni de l'addition des matrices et la multiplication par scalaire, est un* K*-espace vectoriel de dimension* $m \times n$.

Exemple: $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})\right) = 6$ et les matrices suivantes forment une base de $\mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$

$E^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E^{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices inversibles: *On dit qu'une matrice carée* $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *est inversible s'il existe une matrice* B *telle que* $A.B = I_n = B.A$.

La matrice inverse B, *si elle existe, est notée* A^{-1}

Exemples:

Cherchons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

C.à.d, cherchons $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ telle que $A.B = I_2 = B.A$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B_{1,1} - 2B_{2,1} = 1 \\ -B_{1,1} + 3B_{2,1} = 0 \\ B_{1,2} - 2B_{2,2} = 0 \\ -B_{1,2} + 3B_{2,2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_{2,1} = 1 \\ B_{1,1} = 3 \\ B_{1,2} = 2 \\ B_{2,2} = 1 \end{cases}$$

donc $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

et puisque $B.A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$

2) Cherchons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

C.à.d, cherchons $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2 = BA$.

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B_{1,1} - 2B_{2,1} = 1 \\ -B_{1,1} + B_{2,1} = 0 \\ 2B_{1,2} - 2B_{2,2} = 0 \\ -B_{1,2} + B_{2,2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ B_{1,1} = B_{2,1} \\ 2B_{1,2} - 2B_{2,2} = 0 \\ -B_{1,2} + 1B_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solutions, donc B n'existe pas et A n'est pas inversible.

Proposition: *Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$, alors:*
1) *A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2) *$A.B$ est inversible et $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.*

1.3. Matrices et applications linéaires

Définition: *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies de bases respectives $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B_F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$.*

On appelle matrice associée à f relativement aux bases B_E et B_F, et on note $Mat_f(B_E, B_F)$, la matrice:

$$Mat_f(B_E, B_F) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \vdots \\ \leftarrow f_m \end{array}$$

Où $A_{i,j}$ sont tels que $f(e_j) = A_{1,j}f_1 + A_{2,j}f_2 + ... + A_{m,j}f_m$.

Remarques:

1) Chaque colonne de $Mat_f(B_E, B_F)$ est formée des composantes de l'image d'un élément de la base B_E dans la base $B_{F.}$

2) $Mat_f(B_E, B_F)$ dépend des bases choisies.

Exemples:

1) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, x+z)$, et soient $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(0,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On a: $\begin{cases} f(1,0,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1) \\ f(0,1,0) = (3,0) = 3(1,0) + 0(0,1) \\ f(0,0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) \end{cases}$ donc $Mat_f(B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, x+z)$, et soient $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$ et $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(-1,0),(2,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On a: $\begin{cases} f(1,1,0) = (5,1) = \alpha(-1,0) + \beta(2,1) \\ f(0,1,1) = (2,1) = \alpha'(-1,0) + \beta'(2,1) \\ f(2,1,0) = (7,2) = \alpha''(-1,0) + \beta''(2,1) \end{cases}$ ce qui entaîne $\begin{cases} \alpha = -3 \text{ et } \beta = 1 \\ \alpha' = 0 \text{ et } \beta' = 1 \\ \alpha'' = -3 \text{ et } \beta'' = 2 \end{cases}$

donc $Mat_f\left(B'_{\mathbb{R}^3}, B'_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = (X^2+X+4)P''$, où $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace des polynômes de degré au plus 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$, qui admet $B_{\mathbb{R}_3[X]} = \{1, X, X^2, X^3\}$ comme base.

On a: $\begin{cases} h(1) = 0 \\ h(X) = 0 \\ h(X^2) = 8 + 2X + 2X^2 \\ h(X^3) = 24X + 6X^2 + 6X^3 \end{cases}$ donc $Mat_h\left(B_{\mathbb{R}_3[X]}, B_{\mathbb{R}_3[X]}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition: *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de bases respectives B_E , B_F et B_G et soient $f_1 : E \to E, f : E \to F$, $g : E \to F$ et $h : F \to G$ des applications linéaires, et $\alpha \in K$. Alors:*

1) $Mat_{f+g}(B_E, B_F) = Mat_f(B_E, B_F) + Mat_g(B_E, B_F)$

2) $Mat_{\alpha \bullet f}(B_E, B_F) = \alpha \bullet Mat_f(B_E, B_F)$

3) $Mat_{h \circ f}(B_E, B_G) = Mat_h(B_F, B_G).Mat_f(B_E, B_F)$

4) $f_1 = Id_E \Leftrightarrow Mat_{f'}(B_E, B_E) = I_n$ (où Id_E est l'application identique de E).

5) Si f est un isomorphisme $\Leftrightarrow Mat_f(B_E, B_F)$ est inversible.

De plus $Mat_{f^{-1}}(B_F, B_E) = (Mat_f(B_E, B_F))^{-1}$

Théorème: (Changements de bases et matrices)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies et soient $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $B'_E = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ deux bases de E et $B_F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$, $B'_F = \{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ deux bases de F, alors:

$$Mat_f\left(B'_E, B'_F\right) = \left(Mat_{Id_F}\left(B'_F, B_F\right)\right)^{-1}.Mat_f\left(B_E, B_F\right).Mat_{Id_E}\left(B'_E, B_E\right).$$

Définition: *Soient B_E et B'_E deux bases d'un K-espace vectoriel E.*
On appelle matrice de passage de la base B_E à la base B'_E, la matrice

$$P = Mat_{Id_E}\left(B'_E, B_E\right).$$

(P a comme coefficients les composantes des vecteurs de la base B'_E dans la base B_E).

Remarque: Si, $P = Mat_{Id_E}\left(B'_E, B_E\right)$, alors $P^{-1} = Mat_{Id_E}\left(B_E, B'_E\right)$

Exemple : Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x + z)$, et soient $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ et $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0), (0,1,1), (2,1,0)\}$ des bases de $\mathbb{R}^3$; et $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0), (0,1)\}$ et $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(-1,0), (2,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$A = Mat_f\left(B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = Mat_{Id_{\mathbb{R}^3}}\left(B'_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

On a $\begin{cases} (1,0) = \alpha(-1,0) + \beta(2,1) \\ (0,1) = \alpha'(-1,0) + \beta'(2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \text{ et } \beta = 0 \\ \alpha' = 2 \text{ et } \beta' = 1 \end{cases}$,

d'où $Q^{-1} = Mat_{Id_{\mathbb{R}^2}}\left(B_{\mathbb{R}^2}, B'_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

alors $A' = Mat_f\left(B'_{\mathbb{R}^3}, B'_{\mathbb{R}^2}\right) = Q^{-1}.A.P$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4. Rang d'une matrice

Définition: *Le rang d'une matrice $A = (A_{i,j})$ est le nombre maximum de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants.*

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie facilement que $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ n'est pas libre et que $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est libre. Alors $rg\,(A) = 2$.

Proposition: *Une matrice* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *est inversible, ssi,* $rg\,(A) = n$.

1.5. Déterminant d'une matrice

Définition:(Par récurrence) *Soit* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$.
On appelle déterminant de A *et on note* $\det A$, *le scalaire de* K *défini par:*
* *Pour* $n = 1$, $\det A = A_{1,1}$.
* *Pour* $n > 1$,
$\det A = A_{1,1}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{1})}{A} - A_{1,2}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{2})}{A} + .. + (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{j})}{A} + .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{n})}{A}$
Où $\underset{(\cancel{i},\cancel{j})}{A}$ *est la matrice obtenue à partir de* A *en supprimant* $A_{i,\bullet}$ *(la* $i-$*ème ligne) et* $A_{\bullet,j}$ *(la* $j-$*ème colonne).*

Cas n = 2:
$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = A_{1,1}.\det(A_{2,2}) - A_{1,2}.\det(A_{2,1}) = A_{1,1}.A_{2,2} - A_{1,2}.A_{2,1}$$

Cas n = 3:
$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} &= A_{1,1}.\det \begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} - A_{1,2}.\det \begin{pmatrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{pmatrix} \\ &\quad + A_{1,3}\det \begin{pmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{pmatrix} \\ &= A_{1,1}(A_{2,2}A_{3,3} - A_{3,2}A_{2,3}) - A_{1,2}(A_{2,1}A_{3,3} - A_{3,1}A_{2,3}) \\ &\quad + A_{1,3}(A_{2,1}A_{3,2} - A_{3,1}A_{2,2}) \end{aligned}$$

Remarques:
1) $\det A$ est parfois noté $|A|$.
2) Le déterminant $\det \underset{(\cancel{i},\cancel{j})}{A}$ est appelé déterminant mineur d'indices i et j de A.

Exemple:
$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= 2.\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 1.\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times (-7) - 1 \times 1 + 0 \times 3 = -15 \end{aligned}$$

Propriétés fondamentales des déterminants: *Soit* $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *et* $\lambda \in K$.
On a les propriétés suivantes:
D1: $\det I_n = 1$
D2: $\det A$ *est linéaire par rapport à chaque colonne de* A.
D3: $\det A = 0$, *si* A *a deux colonnes identiques.*
D4: $\det A$ *change de signe lorsqu'on échange deux colonnes.*
D5: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
D6: $\det A = 0$, *si une colonne de* A *est nulle.*
D7: $\det A$ *ne change pas si on ajoute à une colonne de* A *une combinaison linéaire des autres colonnes de* A.

C.à.d:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\left(A_{\bullet,1},..,\alpha A_{\bullet,j}+\beta A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) = \alpha \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) + \beta \det\left(A_{\bullet,1},..,A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$$

$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right) = 0$ *si* $A_{\bullet,j} = A_{\bullet,j'}$ *pour* $j \neq j'$

$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right) = -\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$

$\det\left(\lambda\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)\right) = \lambda^n \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$

$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,..,A_{\bullet,n}\right) = 0$ *si* $A_{\bullet,j} = 0$

$$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j}+\sum_{p\neq j}\alpha_p A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right) = \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$$

où $A_{\bullet,1}$, $A_{\bullet,2}$,...,$A_{\bullet,n}$ *sont les colonnes de* A *et* α_p, α, β *des scalaires de* K.

Preuve: Raisonnons par récurrence sur n.
D1): *Pour $n = 1$, on a $\det I_1 = \det(1) = 1$
*Supposons la propriété D1) vraie pour toute matrice I_p d'ordre $p \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \det I_n &= 1.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{1})}{I_n} - 0.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{2})}{I_n} + .. + 0.(-1)^{1+j}\det \underset{(\cancel{1},\cancel{j})}{I_n} + .. + (-1)^{1+n}\,0.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{n})}{I_n} \\ &= \det \underset{(\cancel{1},\cancel{1})}{I_n} = \det I_{n-1} = 1 \end{aligned}$$

car, par hypothèse de récurrence, $\det I_{n-1} = 1$.
D2): Posons $A'' = \left(A_{\bullet,1},..,\alpha A_{\bullet,j}+\beta A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
$A = \left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$, $\quad A' = \left(A_{\bullet,1},..,A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
*Pour $n = 1$, on a $\det(A'') = \det(\alpha A + \beta A') = \alpha A + \beta A' = \alpha \det A + \beta \det A'$
*Supposons la propriété D2) vraie pour toute matrice d'ordre $p \leq n-1$.

$$\det A'' = A''_{1,1}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{1})}{A''} - A''_{1,2}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{2})}{A''} + .. + (-1)^{1+j} A''_{1,j}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{j})}{A''} + .. + (-1)^{1+n} A''_{1,n}.\det \underset{(\cancel{1},\cancel{n})}{A''}$$

Or $A''_{1,k} = A_{1,k} = A'_{1,k}$ pour tout $k \neq j$ et $A''_{1,j} = \alpha A_{1,j} + \beta A'_{1,j}$.
$\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A''} = \det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} = \det \underset{(\not{1},\not{j})}{A'}$ et par hypothèse de récurrence,
on a: $\det \underset{(\not{1},\not{k})}{A''} = \alpha \det \underset{(\not{1},\not{k})}{A} + \beta \det \underset{(\not{1},\not{k})}{A'}$, car $\underset{(\not{1},\not{k})}{A''}$ est d'ordre $n-1$, pour tout $k \neq j$.
Alors

$$
\begin{aligned}
\det A'' &= A_{1,1}.\left(\alpha \det \underset{(\not{1},\not{1})}{A} + \beta \det \underset{(\not{1},\not{1})}{A'}\right) - A_{1,2}.\left(\alpha \det \underset{(\not{1},\not{2})}{A} + \beta \det \underset{(\not{1},\not{2})}{A'}\right) + .. \\
&\quad .. + (-1)^{1+j}\left(\alpha A_{1,j} + \beta A'_{1,j}\right).\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} + .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\left(\alpha \det \underset{(\not{1},\not{n})}{A} + \beta \det \underset{(\not{1},\not{n})}{A'}\right) \\
&= \alpha\left(A_{1,1}.\det \underset{(\not{1},\not{1})}{A} - A_{1,2}.\det \underset{(\not{1},\not{2})}{A} + .. + (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} + .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\det \underset{(\not{1},\not{n})}{A}\right) \\
&\quad + \beta\left(A_{1,1}.\det \underset{(\not{1},\not{1})}{A'} - A_{1,2}.\det \underset{(\not{1},\not{2})}{A'} .. + (-1)^{1+j} A'_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} + .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\det \underset{(\not{1},\not{n})}{A'}\right) \\
&= \alpha\left(A_{1,1}.\det \underset{(\not{1},\not{1})}{A} - A_{1,2}.\det \underset{(\not{1},\not{2})}{A} + .. + (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} + .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\det \underset{(\not{1},\not{n})}{A}\right) \\
&\quad + \beta\left(A'_{1,1}.\det \underset{(\not{1},\not{1})}{A'} - A'_{1,2}.\det \underset{(\not{1},\not{2})}{A'} .. + (-1)^{1+j} A'_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A'} + .. + (-1)^{1+n} A'_{1,n}.\det \underset{(\not{1},\not{n})}{A'}\right) \\
&= \alpha \det A + \beta \det A'
\end{aligned}
$$

D3) et D4): Commençons par une matrice ayant deux colonnes voisines identiques, soit $A = \begin{pmatrix} A_{\bullet,1} & ,.., & A_{\bullet,j} & , A_{\bullet,j+1} & ,.., & A_{\bullet,n} \end{pmatrix}$ .avec $A_{\bullet,j} = A_{\bullet,j+1}$
*Pour $n = 1$, nous n'avons qu'une seule colonne, et les propriété D3) et D4) n'ont pas de sens.
*Pour $n = 2$, on a: $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,1} \\ A_{2,1} & A_{2,1} \end{pmatrix} = A_{1,1}A_{2,1} - A_{2,1}A_{1,1} = 0$
*Supposons la propriété vraie pour toute matrice d'ordre $p \leq n-1$.

$$
\begin{aligned}
\det A &= A_{1,1}.\det \underset{(\not{1},\not{1})}{A} - .. + (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} + (-1)^{1+j+1} A_{1,j+1}.\ \det \underset{(\not{1},\not{j+1})}{A} + \\
&\qquad .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\det \underset{(\not{1},\not{n})}{A}
\end{aligned}
$$

or $\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} = \det \underset{(\not{1},\not{j+1})}{A}$ car $\underset{(\not{1},\not{j})}{A} = \underset{(\not{1},\not{j+1})}{A}$.
et par hypothèse de récurrence, $\det \underset{(\not{1},\not{k})}{A} = 0$ pour tout $k \neq j$ et $k \neq j+1$ car les matrices $\underset{(\not{1},\not{k})}{A}$ d'ordere $n-1$ contiennent deux colonnes identiques.

$$
\begin{aligned}
\text{Alors} \quad \det A &= (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} + (-1)^{1+j+1} A_{1,j+1}.\ \det \underset{(\not{1},\not{j+1})}{A} \\
&= (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} - (-1)^{j+1} A_{1,j+1}.\det \underset{(\not{1},\not{j})}{A} = 0
\end{aligned}
$$

** En utilisant la linéarité du déterminant par rapport aux colonnes , on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j}+A_{\bullet,j+1},A_{\bullet,j+1}+A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},A_{\bullet,j+1},..,A_{\bullet,n}\right)+\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &\qquad +\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j+1},A_{\bullet,j+1},..,A_{\bullet,n}\right)+\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j+1},A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},A_{\bullet,j+1},..,A_{\bullet,n}\right)+\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j+1},A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \end{aligned}$$

d'où l'égalité:

$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},A_{\bullet,j+1},..,A_{\bullet,n}\right)=-\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j+1},A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$

Pour montrer D3) dans le cas général, on déplace $A_{\bullet,j}$ à $A_{\bullet,j'}$ et on tenant compte du fait que $A_{\bullet,j}=A_{\bullet,j'}$ pour $j<j'$, on obtient:

$$\begin{aligned} \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right) &= (-1)^{j'-j-1}\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &= (-1)^{j'-j-1}\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)=0 \text{ d'où D4).} \end{aligned}$$

Concernant D4) dans le cas général, on procède comme dans le cas particulier précédent:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j}+A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j'}+A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right)+\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &\qquad +\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)+\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \\ &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right)+\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \end{aligned}$$

d'où l'égalité:

$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right)=-\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$

D5) En appliquant n fois D2) , on obtient:

$\det\left(\lambda\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)\right)=\det\left(\lambda A_{\bullet,1},..,\lambda A_{\bullet,j},..,\lambda A_{\bullet,n}\right)=\lambda^n\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$

D6) Si $A_{\bullet,j}=0$, alors $A_{\bullet,j}=0.A_{\bullet,j}$, et par application de D2) , on obtient: $\det\left(A_{\bullet,1},..,0.A_{\bullet,j},..,..,A_{\bullet,n}\right)=0\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,..,A_{\bullet,n}\right)=0.$

D7) Par application de D2) et D3) , on obtient:

$$\begin{aligned} \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j}+\sum_{p\neq j}\alpha_p A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right) &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,..,A_{\bullet,n}\right) \\ &\quad +\sum_{p\neq j}\alpha_p\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right) \\ &= \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) \end{aligned}$$

Car $\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right)$ contient la colonne $A_{\bullet,p}$ deux fois ■

Remarque: Les propriétés que nous venons de montrer permettent de ramener le calcul du déterminant d'une matrice A au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.

Exemples:

$$1)\ \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$ (En ajoutant la $1^{ère}$colonne à la $3^{ème}$colonne)

$$= \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{5}{3} & 2 \\ 4 & -\frac{10}{3} & 3 \end{pmatrix}$$ (En ajoutant la $1^{ère}$colonne multipliée par $-\frac{1}{3}$ à la $2^{ème}$ colonne)

$$= 3\det\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{10}{3} & 3 \end{pmatrix} = 3 \times \left(\frac{15}{3} + \frac{20}{3}\right) = 35$$

$$2)\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ (En soustrayant la $1^{ère}$colonne de la $3^{ème}$colonne)

$$= 0$$ (car la $2^{ème}$colonne et la $3^{ème}$ colonne sont identiques)

Proposition: *Soit* $A = (A_{i,j})$ *et* $B = (B_{i,j})$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$. *On a:*

$$\det(BA) = \det B \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1} ... A_{\sigma(j),j} ... A_{\sigma(n),n}$$

où S_n *est l'ensemble des permutations de* $\{1, 2, ..., n\}$ *et* $\epsilon(\sigma)$ *est la signature de la permutation* σ *de* S_n.

Corollaire: *Soit* $A = (A_{i,j})$, $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$. *On a:*
1) $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1} ... A_{\sigma(j),j} ... A_{\sigma(n),n}$.
2) $\det(BA) = \det B . \det A$
3) A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
De plus, si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Preuve:

1) $\det A = \det(I_n A) = \det I_n \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1} ... A_{\sigma(j),j} ... A_{\sigma(n),n}$
$= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1} ... A_{\sigma(j),j} ... A_{\sigma(n),n}$

2) $\det(BA) = \det B \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1} ... A_{\sigma(j),j} ... A_{\sigma(n),n} = \det B . \det A$

3.1) Si A est inversible, alors il existe une matrice $B \in M_{(n,n)}(K)$ vérifiant: $BA = I_n$
d'où $\det B . \det A = \det(BA) = \det I_n = 1$, alors $\det A \neq 0$.
3.2) Pour la réciproque, raisonnons par contraposée.

Si A n'est pas inversible, alors $rg\,(A) \neq n$, ainsi les vecteurs colonnes $A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, ..., A_{\bullet,n}$ de A, sont linéairement dépendantes, c'est à dire, il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_j, ..., \lambda_n$ non tous nuls vérifiants $\lambda_1 A_{\bullet,1} + .. + \lambda_j A_{\bullet,j} + ... + \lambda_n A_{\bullet,n} = 0$, alors pour un $\lambda_j \neq 0$, on peut écrire $\frac{\lambda_1}{\lambda_j} A_{\bullet,1} + .. + \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} A_{\bullet,j-1} + A_{\bullet,j} + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} A_{\bullet,j+1} + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_j} A_{\bullet,n} = 0$, et d'après les propriétés **D7** et **D6**, on conclut que

$$\det A = \det \left(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n} \frac{\lambda_p}{\lambda_j} A_{\bullet,p}, ..., A_{\bullet,n} \right) = \det\,(A_{\bullet,1}, .., 0, ..., A_{\bullet,n}) = 0$$

3.3) Enfin, si A est inversible, on a:
$\det\,(A^{-1}) \det\,(A) = \det\,(A^{-1}A) = \det I_n = 1$, alors $\det\,(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ ■

Corollaire: *Soit* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}\,(K)$. *Alors:*
1) $\det\,({}^tA) = \det A$
2) Toute propriété vérifiée par $\det A$ *par rapport aux colonnes de* A *est aussi vérifiée par* $\det A$ *par rapport aux lignes de* A.
(*En particulier les propriétés* **D1)**, **D2)**, **D3)**, **D4)**, **D5)**, **D6)** *et* **D7)**)

Preuve

1) $$\begin{aligned} \det\,({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon\,(\sigma)\,({}^tA)_{\sigma(1),1} \cdots ({}^tA)_{\sigma(j),j} \cdots ({}^tA)_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon\,(\sigma)\,A_{1,\sigma(1)} ... A_{j,\sigma(j)} ... A_{n,\sigma(n)} \end{aligned}$$

et en remarquant que $A_{j,\sigma(j)} = A_{\sigma^{-1}(j'),j'}$ (c.à.d $\sigma\,(j) = j'$), on peut réarranger le produit $A_{1,\sigma(1)} ... A_{j,\sigma(j)} ... A_{n,\sigma(n)}$ suivant l'ordre croissant des $\sigma\,(j)$, pour qu'il devienne $A_{\sigma^{-1}(1),1} ... A_{\sigma^{-1}(j'),j'} ... A_{\sigma^{-1}(n),n}$.

Alors $$\begin{aligned} \det\,({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon\,(\sigma)\,A_{\sigma^{-1}(1),1} ... A_{\sigma^{-1}(j'),j'} ... A_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \epsilon\,(\sigma^{-1})\,A_{\sigma^{-1}(1),1} ... A_{\sigma^{-1}(j'),j'} ... A_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma'\in S_n} \epsilon\,(\sigma')\,A_{\sigma'(1),1} ... A_{\sigma'(j'),j'} ... A_{\sigma'(n),n} \\ &= \det A \end{aligned}$$

car $\epsilon\,(\sigma^{-1}) = \epsilon\,(\sigma)$ et σ^{-1} parcourt S_n si, et seulement si σ parcourt S_n.
2) On a $\det\,({}^tA) = \det A$, alors toute propriété vérifiée par $\det\,({}^tA)$ par rapport aux colonnes de ${}^tA$, devient vérifiée par $\det A$ par rapport aux lignes de A. ■

Définitions: *Soit* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}\,(K)$
1) On appelle cofacteur d'indices i *et* j *de* A *et on note* $(cof A)_{i,j}$ *le scalaire défini par* $(cof A)_{i,j} = (-1)^{i+j} . \det \underset{(\not{i},\not{j})}{A}$
2) On appelle matrice des cofacteurs ou comatrice de A *et on note* $cof A$ *la matrice*

de $\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *dont les coefficients sont les cofacteurs de* A.
C.à.d: $cofA = \left((cofA)_{i,j}\right)$.
Où $\underset{(i\!\!/,j\!\!/)}{A}$ *est la matrice obtenue à partir de* A *en supprimant* $A_{i,\bullet}$ *(la* $i-$*ème ligne)* *et* $A_{\bullet,j}$ *(la* $j-$*ème colonne).*

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(cofA)_{1,1} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 6$, $(cofA)_{1,3} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -3$

$(cofA)_{2,1} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $(cofA)_{2,3} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -4$

Développement d'un déterminant suivant une ligne et suivant une colonne:
Soit $A = (A_{i,j})$ *une matrice de* $M_{(n,n)}(K)$. *Alors:*

1) $\det A = A_{i,1}.(cofA)_{i,1} + ... + A_{i,j}.(cofA)_{i,j} + ... + A_{i,n}.(cofA)_{i,n}$

2) $\det A = A_{1,j}.(cofA)_{1,j} + ... + A_{i,j}.(cofA)_{i,j} + ... + A_{n,j}.(cofA)_{n,j}$

Théorème: *Soit* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$, *alors, l'inverse de* A *est donné par* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left({}^t cofA\right)$.
Où $cofA$ *est la matrice des cofacteurs de* A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det A = 1 \times 6 + (-1) \times (-1) + 0 \times (-3) = 7$

$cofA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left({}^t cofA\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$