1. Cours 10: Systèmes algébriques linéaires

1.1. Notion de système algébrique linéaire

Définitions: *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle système linéaire à m *équations et* n *inconnues à coefficients dans un corps commutatif* K *tout système d'équations de la forme*

$$\left\{\begin{array}{c} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + ... + A_{1,n}x_n = b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + ... + A_{2,n}x_n = b_2 \\ .... \\ A_{m,1}x_1 + A_{m,2}x_2 + ... + A_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right.$$

où $(A_{i,j}) \in M_{(m,n)}(K)$ *et* $(b_i) \in M_{(m,1)}(K)$
Si on note (S) *ce système, alors:*
** Les* $A_{i,j}$ *sont appelés coefficients, les* x_j *inconnues et les* b_i *seconds membres du système* (S).
** La matrice* $A = (A_{i,j})$ *est appelée matrice du système* (S) *et son rang est appelé rang du système* (S).
** Si les seconds membres* b_i *sont tous nuls, le système* (S) *est dit homogène.*

Remarques:
1) Le système linéaire (S) de matrice A peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.
2) Le n-uplet ${}^tU = (u_1, u_2, ..., u_n) \in K^n$ est une solution du système (S), s'il vérifie $AU = B$.
La résolution d'un système est la détermination de l'ensemble de ses solutions.
3) Deux systèmes (S) et (S') sont dits équivalents s'ils ont les mêmes ensembles de solutions.

Exemple:
Le système $\left\{\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right.$ est un système linéaire à 2 équations et 3 inconnues à coefficients réels et de matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
${}^t\left(\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)$ est une solution du système, par contre ${}^t(0, 0, 0)$ n'est pas une solution du système

Système de Cramer: *Un système algébrique linéaire $AX = B$ est dit de Cramer si sa matrice A est carrée et de déterminant non nul.*

Formules de Cramer: *Si un système algébrique linéaire $AX = B$ est de Cramer, alors il admet une solution unique ${}^tX = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donnée par les formules:*

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \left(\underset{A_{\bullet,j} \leftarrow B}{A} \right)$$

où $\underset{A_{\bullet,j} \leftarrow B}{A}$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ème colonne $A_{\bullet,j}$ par la colonne $B = {}^t(b_1, b_2, ..., b_m)$
C.à.d:

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j-1} & b_1 & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,j-1} & b_2 & A_{2,j+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,j-1} & b_m & A_{m,j+1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Preuve: Le système s'écrit aussi, $x_1 A_{\bullet,1} + x_2 A_{\bullet,2} + ... + x_n A_{\bullet,n} = B$, alors

$$\begin{aligned} \det \left(\underset{A_{\bullet,j} \leftarrow B}{A} \right) &= \det \left(A_{\bullet,1}, ..., A_{\bullet,j-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k A_{\bullet,k}, A_{\bullet,j+1}, ..., A_{\bullet,n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det \left(A_{\bullet,1}, ..., A_{\bullet,j-1}, A_{\bullet,k}, A_{\bullet,j+1}, ..., A_{\bullet,n} \right) \\ &= x_j \det \left(A_{\bullet,1}, ..., A_{\bullet,j-1}, A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j+1}, ..., A_{\bullet,n} \right) = x_j \det A \end{aligned}$$

et comme $\det A \neq 0$, alors la solution est unique et $x_j = \frac{1}{\det A} \det \left(\underset{A_{\bullet,j} \leftarrow B}{A} \right)$

Exemple: Soit (S) le système $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à (S).

$\det A = 3$, alors le système (S) est de Cramer et sa solution unique est:

$x_1 = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1, \qquad x_2 = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-10}{3}$

$x_3 = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$

Définition: *Soient $A = (A_{i,j}) \in M_{(m,n)}(K)$ et $p \in \{1, 2, ..., \min(m,n)\}$*
On appelle matrice carrée d'ordre p extraite de A toute matrice obtenue à partir de A en supprimant $m - p$ lignes et $n - p$ colonnes.

Exemple: Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées d'orde 2 extraites de A.

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & -1 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées d'orde 3 extraites de A.

Résolution d'un système algébrique linéaire par la méthode de Cramer

Soit (S) le système algébrique linéaire $AX=B$, d'inconnue $X={}^t(x_1,x_2,...,x_n)$, de second membre $B={}^t(b_1,b_2,...,b_m)$ et de matrice $A=(A_{i,j})\in M_{(m,n)}(K)$.

Soit $A'=\begin{pmatrix} A_{i_1,j_1} & A_{i_1,j_2} & \cdots & A_{i_1,j_r} \\ A_{i_2,j_1} & A_{i_2,j_2} & \cdots & A_{i_2,j_r} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{i_r,j_1} & A_{i_r,j_2} & \cdots & A_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$ une des matrices carrées extraites de A de déterminant non nul et d'ordre le plus grand.

* Les inconnues $x_{j_1},x_{j_2},...,x_{j_r}$ deviennent des inconnues principales et les inconnues $x_{j_{r+1}},x_{j_{r+2}},...,x_{j_n}$ deviennent des paramètres.

* Le système (S') défini par

$$\left\{\begin{array}{l} A_{i_1,j_1}x_{j_1}+\cdots+A_{i_1,j_r}x_{j_r}=b_{i_1}-\left(A_{i_1,j_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+A_{i_1,j_n}x_{j_n}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{i_r,j_1}x_{j_1}+\cdots+A_{i_r,j_r}x_{j_r}=b_{i_r}-\left(A_{i_r,j_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+A_{i_r,j_n}x_{j_n}\right) \end{array}\right.$$ de matrice A'

est de Cramer, alors il admet une solution unique $X'={}^t(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_r})$ donnée en fonction des paramètres $x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n}$.

* Si la solution de (S') vérifie les $m-r$ équations

$$\left\{\begin{array}{l} A_{i_{r+1},j_1}x_{j_1}+\cdots+A_{i_{r+1},j_r}x_{j_r}=b_{i_{r+1}}-\left(A_{i_{r+1},j_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+A_{i_{r+1},j_n}x_{j_n}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{i_n,j_1}x_{j_1}+\cdots+A_{i_n,j_r}x_{j_r}=b_{i_n}-\left(A_{i_n,j_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+A_{i_n,j_n}x_{j_n}\right) \end{array}\right.$$ qui restent

de (S), alors ${}^tX=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ sont les solutions de (S).

et si l'une des $m-r$ équations n'est pas vérifieé par la solution de (S'), alors le système (S) n'a pas de solution.

Exemples:

1) Soit le système (S_1) : $\left\{\begin{array}{l} x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-x_3=1 \end{array}\right.$

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice du système (S_1)

$A_1' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A_1 de déterminant non nul et d'ordre le plus grand, alors le système (S_1') : $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 + x_3 \end{cases}$ est de Cramer et il admet la solution (x_1, x_2) telle que:

$x_1 = \frac{1}{\det A_1'} \det \begin{pmatrix} -2x_3 & -3 \\ 1 + x_3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} (-5x_3 + 3)$

$x_2 = \frac{1}{\det A_1'} \det \begin{pmatrix} 1 & -2x_3 \\ 2 & 1 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} (5x_3 + 1)$

Par suite $\left(\frac{1}{10} (-5x_3 + 3), \frac{1}{10} (5x_3 + 1), x_3\right)$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$ sont les solutions de (S_1).

2) Soit le système (S_2) : $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, est la matrice du système (S_2)

$A_2' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A_2 de déterminant non nul et d'ordre 3 , alors le système (S_2') : $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ est de Cramer et il admet la solution (x_1, x_2, x_3) telle que:

$x_1 = \frac{1}{\det A_2'} \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{\det A_2'} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}$

$x_2 = \frac{1}{\det A_2'} \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

La solution $(x_1, x_2, x_2) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$, ne vérifie pas l'équation $3x_1 + x_2 + x_3 = 2$ qui reste, par suite le système (S) n'a pas de solutions.