Maths Appliquées T.D. N° 7

Dérivées en chaines

Rappels du cours :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions dérivables.
Ecrivons $f \circ g$. D'après la règle des fonctions composées, nous avons :

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

La fonction $f \circ g$ est une fonction de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
Sa dérivée est donc un vecteur ligne à p colonnes,
la transposée de son gradient :

$$h'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial h}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

La fonction g est une fonction de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Sa matrice est $n \times p$ composée des vecteurs transposés des gradients des coordonnées de g.

Si $g(x) = \left(g_1(x), g_2(x), \cdots g_n(x)\right)^T$, la dérivée de g, s'écrit :

$$g'(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{array}$$

Notons $g = \left(g_1, g_2, \cdots g_n\right)$ c'est un point de $\mathbb{R}^n$.
g ne désigne pas ici la fonction $g(x)$ mais un point de $\mathbb{R}^n$.

La dérivée de f en un point g est donnée par la transposée de son gradient : $f^{'}(g) = \left(\frac{\partial f}{\partial g_1} \ \frac{\partial f}{\partial g_2} \ \cdots \frac{\partial f}{\partial g_n} \right)$

L'égalité matricielle $h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(\mathrm{g}(x)).\mathrm{g}'(x)$

signifie donc : $h^{'}(x) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \ \frac{\partial h}{\partial x_2} \ \cdots \frac{\partial h}{\partial x_p} \right)$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial g_1} \ \frac{\partial f}{\partial g_2} \ \cdots \frac{\partial f}{\partial g_n} \right) \left| \begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_p} \end{array} \right|$$

Attention !

Quand g_k apparait au le dénominateur cela signifie seulement que l'on prend la dérivée de f par rapport à sa k^{eme} variable.

Car il s'agit du vecteur g.

Quand g_k apparait au le numérateur,il désigne la k^{eme} coordonnée de g; car il s'agit de la fonction $g(x)$.

Exemple :

Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par :

$f(x, y, z) = 2xy - 3(x + z),$

$g(\mathrm{x}, y) = (x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y).$

Calculer les dérivées partielles de la fonction à 2 variables $h = f \circ g$.
Pour se ramener à la formule générale et éviter des erreurs,
il est préférable de changer les variables de la fonction f

$$f(g_1, g_2, g_3) = 2g_1 g_2 - 3(g_1 + g_3).$$

La formule de dérivation en chaîne donne alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial g_1}\left(\dfrac{\partial\left(x+y^4\right)}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial g_2}\left(\dfrac{\partial\left(y-3x^2\right)}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial g_3}\left(\dfrac{\partial\left(2x^2+3y\right)}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial g_1}\left(\dfrac{\partial\left(x+y^4\right)}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial g_2}\left(\dfrac{\partial\left(y-3x^2\right)}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial g_3}\left(\dfrac{\partial\left(2x^2+3y\right)}{\partial y}\right) \end{cases}$$

pour $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(2g_2 - 3\right).1 + 2g_1.(-6x) + (-3).4x$$

quand on l'exprime en fonction de x et y cette dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2y - 6x^2 - 3 - 12x\left(x + y^4\right) - 12x = -12xy^4 - 18x^2 + 2y - 12x - 3.$$

Exercice :

1° calculer $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ de la même manière qu'on a calculé $\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

2° Une autre manière de faire ces calculs est :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\left(x+y^4\right)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\left(y-3x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\left(2x^2-3y\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\left(x+y^4\right)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\left(y-3x^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\left(2x^2-3y\right)}{\partial y}$$