Université Ibn Khaldoune Tiaret Master **GL 1 + RT 1** Module : **Math Appliquées**

Faculté Math & Informatique

Département de l'Informatique

Dérivées Directionnelles

Exercices corrigés

Exercice N° 1 :

$$Soit \quad f : R^2 \to R \text{ définie par } \quad f(x_1,x_2) = 2x_1^3 x_2 + 3x_1 x_2^2$$

Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 6x_1^2 x_2 + 3x_2^2 \qquad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2x_1^3 + 6x_1^3 x_2$$

Les dérivées partielles de f au point $(2,1)$ seront :

$$f_x(1,2) = 6\times 4\times 1 + 3 = 27 \qquad et \qquad f_y(1,2) = 2\times 8 + 12 = 28$$

Donc la dérivée directionnelle de f au point $(2,1)$ dans la direction de

$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ sera : $\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\ddot{u},(2,1)} = 27\times\frac{1}{\sqrt{5}} + 28\times\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{83}{\sqrt{5}}$

Rappels **:**

1° Quelle est la relation entre le gradient d'une fonction f et la dérivée directionnelle de f en un point (a,b) dans la direction d'un vecteur $\vec{u}$?

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\ddot{u},(a,b)} = \nabla f\big|_{(a,b)} \bullet u$$

Donc, la dérivée directionnelle de f au point (a,b) dans la direction de u est le produit scalaire de $\nabla f\big|_{(a,b)}$ par u .

2° Les dérivées partielles $f_x(a,b)$ et $f_y(a,b)$ sont des <u>cas particuliers</u> des dérivées directionnelles.

En effet, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\ddot{a},b)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial s}\right|_{(0,1)(\ddot{a},b)}$ et $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\ddot{a},b)} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial s}\right|_{(0,1)(\ddot{a},b)}$

<u>Exercice N° 2</u> :

Soit la fonction $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4x^3y^2-y^3-2x^7}{2y^4+3x^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Soit $\vec{u}=(u_1,\mathrm{u}_2)$ un vecteur unitaire du plan.

Déterminer la dérivée directionnelle, si elle existe, à l'aide de sa définition dans la direction $\vec{u}$ au point $(0,0)$.

Rappelons la définition de la dérivée directionnelle :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\ddot{u},(a_1,\cdots,a_n)} = f'\left(u,(a_1,\cdots,a_n)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a_1+hu_1,a_2+hu_2,\cdots,a_n+hu_n\right)-f\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)}{h}$$

On a donc $f'\left((u_1,u_2),(0,0)\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(0+hu_1,0+hu_2\right)-f\left(0,0\right)}{h}$.

$(u_1,u_2)\neq(0,0)$ car c'est un vecteur unitaire ; pour $h\neq 0,\ (hu_1,hu_2)\neq 0$ et on peut utiliser la première ligne de la définition de f :

$$f\left(hu_1,hu_2\right)=\frac{4h^3u_1^3h^2u_2^2-h^5u_2^5-2h^7u_1^7}{3h^4u_1^4+2h^4u_2^4}=\frac{h\left(4u_1^3u_2^2-u_2^5-2h^2u_1^7\right)}{3u_1^4+2u_2^4}$$

D'autre part $f(0,0)=0$ donc :

$$
\begin{aligned}
f'\left(\left(u_1, u_2\right), (0,0)\right) &= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(hu_1, hu_2\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4u_1^3 u_2^2 - u_2^5 - 2h^2 u_1^7}{3u_1^4 + 2u_2^4} \\
&= \frac{4u_1^3 u_2^2 - u_2^5}{3u_1^4 + 2u_2^4}.
\end{aligned}
$$