Université Ibn Khaldoune Tiaret | **Faculté Math & Informatique** | **Département de l'Informatique**

Master GL 1 + RT 1 Module : Math Appliquées

Gradient d'une fonction

Exercices corrigés

Le gradient d'une fonction est la généralisation de la notion de dérivée à des fonctions à plusieurs variables.

Définition : Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle différentielle. Le gradient de f en un point $x \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{\nabla} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\vec{e_1} + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\vec{e_n} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout vecteur $\vec{V} = (V_1, V_2, \cdots, V_n)$, on a alors

$$\partial_{\vec{V}} f\left(\vec{X}\right) = V_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\vec{X}\right) + \cdots + V_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\vec{X}\right)$$

$$= \left\langle \vec{\nabla} f(X), \vec{V} \right\rangle$$

Quand on effectue les dérivées partielles par rapport à une variable, les autres variables sont considérées comme des constantes. Le gradient est un vecteur dont les coordonnées sont les dérivées partielles par rapport à chaque variable.

<u>Remarque</u> : * Le gradient de f est donc une fonction vectorielle.

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$x \to \vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Le symbole ∇ se lit « nabla »

Le gradient indique la direction où la dérivée de f est la plus élevée. Le gradient indique toujours la direction de la pente la plus élevée.

<u>Exercice N° 1</u> : Calculer le gradient des fonctions suivantes :

1° $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2(x_2-x_3^3)$.

$$\vec{\nabla} f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\end{cases}=\begin{cases}4x_1(x_2-x_3^3)\\ 2x_1^2\\ -6x_1^2x_3^2\end{cases}$$

En particulier : $\vec{\nabla} f(1,2,1)=\begin{pmatrix}4\\2\\-24\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{\nabla} f(0,2,3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{\nabla} f(2,0,3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=-216$

2° $f(x_1,x_2)=\sin(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2$

$$\vec{\nabla} f=\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{cases}=\begin{cases}2x_1\cos(x_1^2+x_2^2)+x_2\\ 2x_2\cos(x_1^2+x_2^2)+x_1\end{cases}$$

3° $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\sin(x_1x_2)$

$$\vec{\nabla} f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\end{cases}=\begin{cases}x_2x_3\sin(x_1x_2)+x_1x_2^2x_3\cos(x_1x_2)\\ x_1x_3\sin(x_1x_2)+x_1^2x_2x_3\cos(x_1x_2)\\ x_1x_2\sin(x_1x_2)\end{cases}$$

<u>Exercice N° 2</u> :

$Soit\quad f:R^n\to R$ une fonction *différentielle* de deux variables .

Le gradient $\vec{\nabla} f(X)$ est orthogonal à la ligne de niveau $\mathrm{L}_a(f)$ avec $a=f(X)$.

IL indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f.

Soit $B_0(1)\subset R^2\to R$ donné par $f(x_1,x_2)=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$.

Les lignes de niveaux $\mathrm{L}_a(f)$ de f sont des cercles de rayon $\sqrt{1-a^2}$ avec $a \in]0,1]$. La ligne de niveau $\mathrm{L}_1(f)$ est réduite à un point. La ligne de niveau $\mathrm{L}_0(f)$ est vide car f est définie sur la boule ouverte $B_0(1)$.

f est différentiable sur $B_0(1)$ et on a : $\vec{\nabla} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x_1}{\sqrt{1-x_1-x_2}} \\ \dfrac{-x_2}{\sqrt{1-x_1-x_2}} \end{pmatrix}$