CHAPITRE 4

Approximation linéaire, le gradient et les dérivées directionnelles.

Soit $y = f(x)$, une fonction réelle d'une seule variable. La dérivée de f au point $x = c$ est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_c = \left.\frac{df}{dx}\right|_c = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

et ceci peut être récrit

$$\Delta y = \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_c\right) h + \epsilon h,$$

où $\Delta y = f(c+h) - f(c)$ et ϵ (dépendant de h et de c) est tel que $\lim_{h\to 0} \epsilon = 0$.

Cette dernière formule nous fournit une approximation linéaire de $y = f(x)$, c'est - à - dire que

$$f(c+h) \approx f(c) + \left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_c\right) h$$

si h est approximativement nul. Graphiquement nous avons représenté ceci pour $f(x) = \sin(x)$ à $c = \pi/4$ dans la figure 4.1 . Dans ce cas, $f'(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

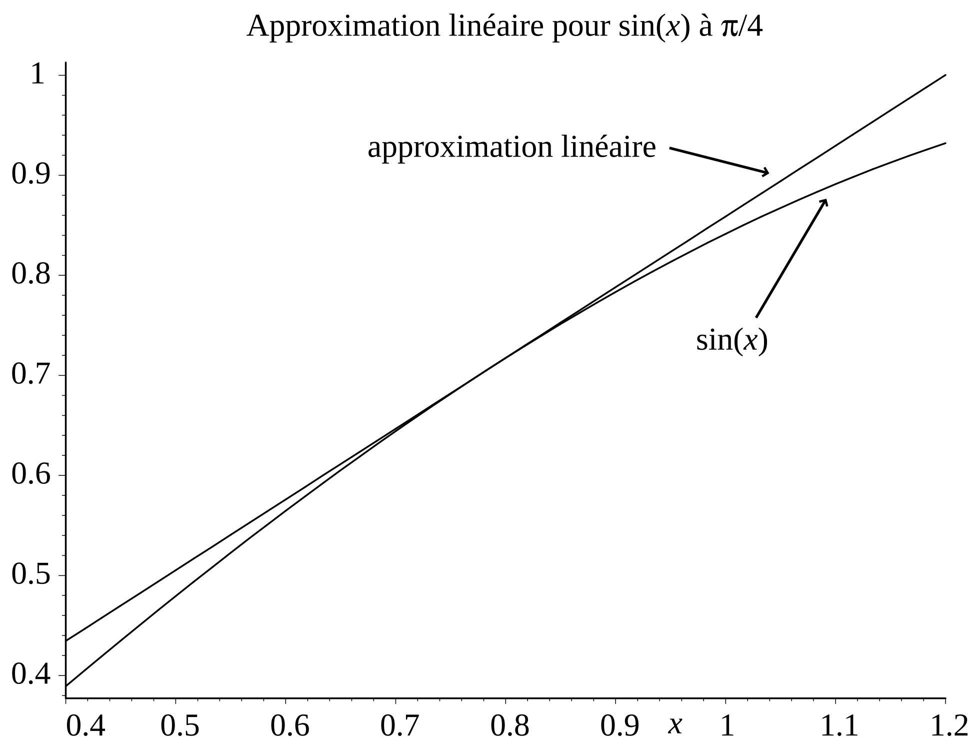

figure 4.1

Nous voulons premièrement décrire un résultat similaire d'approximation linéaire pour les fonctions de deux variables, ensuite pour celles de trois variables et finalement pour celles de n variables. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous définirons le gradient et les dérivées directionnelles d'une fonction de plusieurs variables et finalement nous décrirons la relation entre ces deux notions.

Avant de poursuivre plus en avant notre discussion, nous aurons besoin du théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction réelle $f(x)$ d'une seule variable. Nous le rappellons ci-dessous.

Théorème 4.1 (de la valeur intermédiaire):
Soit une fonction $f(x)$ une fonction réelle ayant une dérivée à chacun des points de l'intervalle ouvert (a,b) et supposons aussi que f est continue aux points a et b. Alors il existe un nombre $c \in (a,b)$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Nous avons illustré ce théorème à la figure 4.2. Noter que $(f(b)-f(a))/(b-a)$ est la pente de la droite L passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. L'énoncé dit qu'il existe une tangente au graphe de $f(x)$ dont la pente est celle de L.

Théorème de la valeur intermédiaire

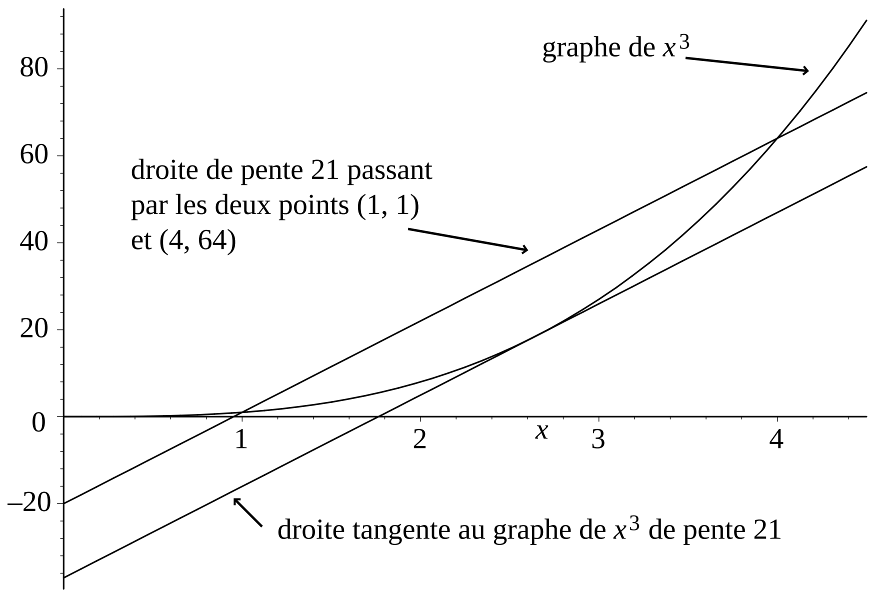

figure 4.2

L'énoncé du théorème d'approximation linéaire pour les fonctions de plusieurs variables est légèrement plus complexe que celui des fonctions d'une variable. Il faut ajouter des hypothèses supplémentaires sur la continuité des dérivées partielles.

Théorème 4.2 (d'approximation linéaire):
Soient $z = f(x,y)$, une fonction réelle de deux variables réelles x, y et (a,b) un point de $\mathbf{R}^2$. Supposons que les dérivées partielles f_x et f_y sont continues dans un rectangle R dont l'intérieur contient le point (a,b). Pour tout point $(a+h, b+k)$ à l'intérieur de R, nous avons alors

$$\Delta z = f(a+h, b+k) - f(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} h + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

où ϵ_1 et ϵ_2 (dépendants de $(a,b), h$ et k) sont tels que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_2 = 0.$$

Preuve: Posons $\Delta z_1 = f(a+h,b) - f(a,b)$ et $\Delta z_2 = f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$. Alors $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$. Parce que la dérivée partielle f_x est continue sur R, nous obtenons en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire au cas de la fonction d'une variable: $x \mapsto f(x,b)$ définie sur l'intervalle I ayant pour extremités a et $a+h$ que

$$\Delta z_1 = f(a+h, b) - f(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(c,b)} h$$

où $c \in I$. De façon analogue, nous avons en considérant cette fois la fonction d'une variable: $y \mapsto f(a+h, y)$ définie sur l'intervalle J ayant comme extrémités b et $b+k$ que

$$\Delta z_2 = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a+h,d)} k$$

où $d \in J$. Parce que les dérivées partielles f_x et f_y sont continues sur R, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(c,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} + \epsilon_1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a+h,d)} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} + \epsilon_2$$

avec

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_1 = 0 \text{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_2 = 0.$$

Conséquemment nous obtenons après substitution,

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(c,d)}\Big)h + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a+h,d)}\Big)k = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}\Big)h + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}\Big)k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème d'approximation linéaire nous permet d'écrire

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}\Big)h + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}\Big)k$$

lorsque h et k sont presque nuls. Ceci peut être utilisé pour estimer numériquement la valeur de $f(a+h, b+k)$ lorsque $f(a,b), f_x(a,b)$ et $f_y(a,b)$ sont connus. Nous allons illustrer ceci en estimant la valeur $f(1.01, 2.05)$ dans le cas de la fonction $f(x,y) = \sqrt[3]{8x^2 + 2y^3 + 3}$. Nous obtenons facilement que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (8x^2 + 2y^3 + 3)^{(-2/3)}(16x/3) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (8x^2 + 2y^3 + 3)^{(-2/3)}(2y^2).$$

Donc nous avons $f(1,2) = \sqrt[3]{8+16+3} = 3$, $f_x(1,2) = 16/27$ et $f_y(1,2) = 24/27$. En utilisant le théorème d'approximation linéaire, nous pouvons estimer $f(1.01, 2.05) \approx f(1,2) + f_x(1,2)(0.01) + f_y(1,2)(0.05) = 3 + (16/27)(0.01) + (24/27)(0.05) = 3.050370371$. La valeur exacte de $f(1.01, 2.05)$ à 9 décimales près est 3.050660074. Comme nous l'avons vu auparavant, le théorème d'approximation linéaire pour une fonction $f(x)$ d'une seule variable au point c est obtenu graphiquement au moyen de la droite tangente au graphe de f à ce point. Il est aussi possible de visualiser l'approximation linéaire pour une fonction $f(x,y)$ de deux variables au point (a,b) comme étant obtenue graphiquement en utilisant le plan tangent au graphe de $z = f(x,y)$ au point (a,b). Le plan tangent au graphe de la fonction $z = f(x,y)$ au point (a,b) est le plan dont l'équation est

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}(y-b) \quad \text{avec} \quad c = f(a,b).$$

Nous avons illustré ceci dans la figure 4.3.

Interprétation graphique de l'approximation linéaire

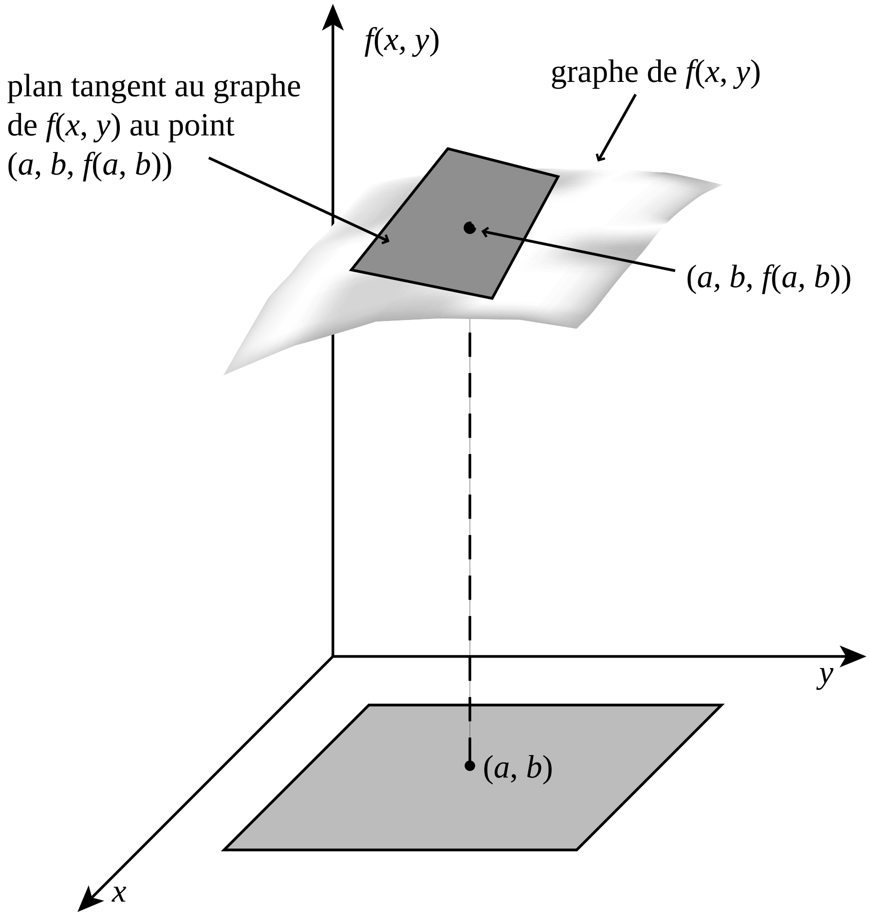

figure 4.3

Nous allons maintenant énoncer le théorème d'approximation linéaire pour les fonctions réelles de trois variables.

Théorème 4.2' (d'approximation linéaire):
Soient $w = f(x, y, z)$, une fonction réelle de trois variables réelles x, y, z et (a, b, c) un point de $\mathbf{R}^3$. Supposons que les dérivées partielles f_x, f_y et f_z sont continues dans un parallélipipède rectangle R dont l'intérieur contient le point (a, b, c). Pour tout point $(a + r, b + s, c + t) \in R$, nous avons

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(a + r, b + s, c + t) - f(a, b, c)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b,c)} r + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b,c)} s + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(a,b,c)} t + \epsilon_1 r + \epsilon_2 s + \epsilon_3 t\end{aligned}$$

où ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 (dépendants de $(a, b, c), r, s,$ et t) sont tels que

$$\lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)} \epsilon_1 = 0, \lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)} \epsilon_2 = 0, \text{ et } \lim_{(r,s,t)\to(0,0,0)} \epsilon_3 = 0.$$

La preuve est similaire à celle présentée dans le cas des fonctions de deux variables. De ce théorème, nous pouvons écrire

$$f(a + r, b + s, c + t) \approx f(a, b, c) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b,c)} r + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b,c)} s + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(a,b,c)} t$$

lorsque r, s, t sont presque nuls. Tout comme pour les fonctions réelles de deux variables, nous pouvons utiliser cette dernière formule pour estimer numériquement la valeur de $f(a + r, b + s, c + t)$ lorsque les valeurs $f(a, b, c), f_x(a, b, c), f_y(a, b, c)$ et $f_z(a, b, c)$ sont connues. Finalement nous énoncerons le théorème d'approximation linéaire pour les fonctions réelles de n variables.

Théorème 4.2" (d'approximation linéaire):
Soient $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction réelle de n variables et $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Supposons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont continues dans une région R de $\mathbf{R}^n$ de la forme $(a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1) \times (a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2) \times \cdots \times (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n)$ où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0$. Pour tout point $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) \in R$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_P h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_P h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_P h_n + \epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2 + \cdots + \epsilon_n h_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P h_i + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i h_i
\end{aligned}$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ (dépendants de $(a_1, a_2, \ldots, a_n), h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ et h_n) sont tels que

$$\lim_{(h_1, h_2, \ldots, h_n) \to (0,0,\ldots,0)} \epsilon_i = 0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous allons maintenant définir le gradient et les dérivées directionnelles d'une fonction de plusieurs variables. Soient $f(x, y)$ une fonction réelle de deux variables définie sur le domaine D de $\mathbf{R}^2$ et $(a, b) \in D$ tels les dérivées partielles $f_x(a, b), f_y(a, b)$ sont définies. Alors le gradient de f au point (a, b), noté

$$grad(f)|_{(a,b)} \text{ ou encore } \nabla f|_{(a,b)},$$

est l'élément $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ de $\mathbf{R}^2$. Ainsi le gradient de f au point (a, b) est un vecteur.

Si les dérivées partielles f_x et f_y de f sont définies pour tous les points de D, alors nous obtenons une fonction

$$\begin{aligned}
\nabla f \colon D \quad &\to \quad \mathbf{R}^2. \\
(a, b) &\mapsto (f_x(a, b), f_y(a, b))
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant définir la notion de dérivées directionnelles pour la fonction $f(x, y)$. Une direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ dans $\mathbf{R}^2$ est un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire de longueur $(u_x^2 + u_y^2)^{1/2} = 1$. Ainsi $(1, 0), (0, 1), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, où θ est un nombre réel, sont des exemples de direction. La dérivée directionnelle de f au point $(a, b) \in D$ dans la direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ est définie comme la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_x, b + hu_y) - f(a, b)}{h}.$$

Nous noterons cette dérivée directionnelle (si elle existe)

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b)} \text{ ou encore } f'(\mathbf{u}, (a, b)).$$

Pour visualiser celle-ci, il suffit de considérer l'intersection du graphe de $f(x, y)$ avec le plan vertical contenant le vecteur $\mathbf{u}$ et passant par (a, b); nous obtenons ainsi une courbe dans ce plan et la dérivée directionnelle est la pente de la tangente à cette courbe au point $(a, b, f(a, b))$. Nous avons illustré ceci à la figure 4.4.

Interprétation graphique de la dérivée directionnelle

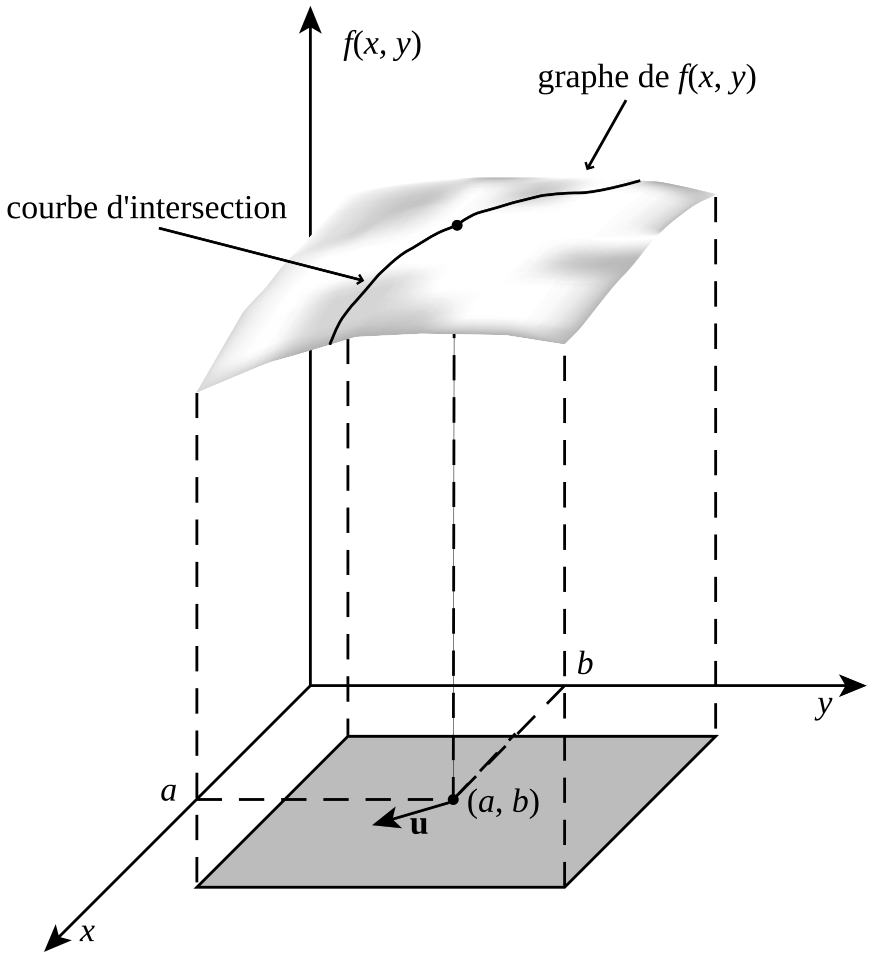

figure 4.4

Les dérivées partielles $f_x(a,b)$ et $f_y(a,b)$ sont des cas particuliers de dérivées directionnelles. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} = \frac{df}{ds}\Big|_{(1,0),(a,b)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} = \frac{df}{ds}\Big|_{(0,1),(a,b)}.$$

Sous certaines conditions, il est possible de calculer la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u},(a,b))$ pour tout direction $\mathbf{u}$ en terme du gradient f au point (a,b). Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 4.1:
Soient une fonction $f(x,y)$ réelle définie sur un rectangle R contenu dans $\mathbf{R}^2$ et un point (a,b) à l'intérieur de R. Supposons que les dérivées partielles f_x, f_y sont continues en tout point de R. Alors, pour toute direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u},(a,b))$ existe et nous avons l'égalité

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} u_y.$$

Preuve: Nous pouvons utiliser le théorème d'approximation linéaire car si h est suffisamment près de 0, alors $(a+hu_x, b+hu_y)$ sera à l'intérieur du rectangle R. Donc

$$\frac{f(a+hu_x, b+hu_y) - f(a,b)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} hu_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} hu_y + \epsilon_1 hu_x + \epsilon_2 hu_y\Big)$$

par le théorème d'approximation. Ainsi

$$\begin{aligned}\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u},(a,b)} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu_x,b+hu_y)-f(a,b)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\Big(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}u_x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}u_y+\epsilon_1 u_x+\epsilon_2 u_y\Big)\\ &= \Big(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}u_x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}u_y\Big)\end{aligned}$$

car

$$\lim_{h\to 0}\epsilon_1=\lim_{h\to 0}\epsilon_2=0 \text{ et } u_x,u_y \text{ sont des constantes.}$$

Exemple 4.1:
Soit la fonction $f(x,y)=x^2y+2xy^3$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+2y^3 \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+6xy^2.$$

Ainsi les dérivées partielles de f au point $(1,2)$ seront $f_x(1,2)=20$ et $f_y(1,2)=25$. Donc la dérivée directionnelle de f au point $(1,2)$ dans la direction $\mathbf{u}=(1/\sqrt{10},3/\sqrt{10})$ sera

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u},(1,2)}=20\frac{1}{\sqrt{10}}+25\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{95}{\sqrt{10}}.$$

En utilisant la proposition 4.1, nous pouvons caractériser le gradient ∇f de f. À cette fin, il nous faut rappeler ce qu'est le produit scalaire $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ de deux vecteurs $\mathbf{u}=(u_x,u_y)$ et $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ de $\mathbf{R}^2$. La définition algébrique est la suivante: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_xv_x+u_yv_y$. Par exemple, nous avons $(1,-1)\cdot(2,3)=(1)(2)+(-1)(3)=-1$. Géométriquement, nous avons $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)$ où $\|\mathbf{u}\|$ (respectivement $\|\mathbf{v}\|$) est la norme ou longueur $(u_x^2+u_y^2)^{1/2}$ (respectivement $(v_x^2+v_y^2)^{1/2}$) du vecteur $\mathbf{u}$ (respectivement $\mathbf{v}$) et θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Voir la figure 4.5.

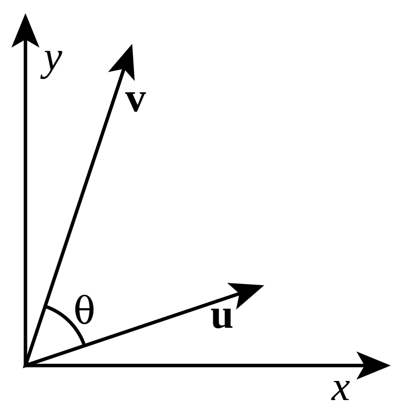

figure 4.5

Avec cette notion de produit scalaire, il est possible de récrire la proposition 4.1 de la façon suivante:

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u},(a,b)}=\nabla f|_{(a,b)}\cdot\mathbf{u}.$$

Corollaire 4.1:
Soit une fonction $f(x,y)$ réelle définie sur un rectangle R contenu dans $\mathbf{R}^2$. Supposons que les dérivées partielles f_x et f_y soient continues en tout point de R. Alors le gradient $\nabla f|_{(a,b)}$ de f au point (a,b) est le vecteur de $\mathbf{R}^2$ dont la direction $\mathbf{u}$ est celle pour laquelle la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u},(a,b))$ est maximale et dont la longueur $\|\nabla f|_{(a,b)}\|$ est la valeur de cette dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u},(a,b))$ dans cette direction $\mathbf{u}$.

Preuve: À cause de la proposition 4.1, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b)} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} u_y \quad \text{pour une direction } \mathbf{u} = (u_x, u_y) \text{ quelconque} \\ &= \|\nabla f|_{(a,b)}\| \, \|\mathbf{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f|_{(a,b)}\| \cos(\theta), \quad \text{car } \|\mathbf{u}\| = 1\end{aligned}$$

où ci-dessus θ est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\nabla f|_{(a,b)}$ et $\mathbf{u}$. Il est alors clair que $f'(\mathbf{u}, (a,b))$ est maximal lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire $\cos(\theta) = 1$. Ainsi $f'(\mathbf{u}, (a,b))$ est maximal lorsque $\mathbf{u}$ est la direction de $\nabla f|_{(a,b)}$ et alors cette valeur maximale est $\|\nabla f|_{(a,b)}\|$. Le corollaire est démontré.

Il est possible de définir le gradient, ainsi que les dérivées directionnelles pour les fonctions réelles $f(x,y,z)$ de trois variables:x, y, z. Soient $f(x,y,z)$, une fonction réelle de trois variables définie sur le domaine D de $\mathbf{R}^3$ et un point $(a,b,c) \in D$ tels que les dérivées partielles $f_x(a,b,c), f_y(a,b,c)$ et $f_z(a,b,c)$ sont définies, alors le gradient de f au point (a,b,c), noté

$$grad(f)|_{(a,b,c)} \text{ ou encore } \nabla f|_{(a,b,c)},$$

est le vecteur $(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c))$ de $\mathbf{R}^3$.

Si les dérivées partielles f_x, f_y et f_z de f sont définies pour tous les points du domaine D, alors nous obtenons une fonction

$$\begin{aligned}\nabla f\colon \quad D &\longrightarrow \quad \mathbf{R}^3. \\ (a,b,c) &\mapsto (f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c))\end{aligned}$$

La notion de dérivées directionnelles pour la fonction $f(x,y,z)$ est définie de façon similaire à celle pour les fonctions de deux variables. Une direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ dans $\mathbf{R}^3$ est un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire de longueur $(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{(1/2)} = 1$. La dérivée directionnelle de f au point $(a,b,c) \in D$ dans la direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ est définie comme la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + hu_x, b + hu_y, c + hu_z) - f(a,b,c)}{h}.$$

Nous noterons cette dérivée directionnelle (si elle existe)

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b,c)} \text{ ou encore } f'(\mathbf{u}, (a,b,c)).$$

Tout comme pour les fonctions de deux variables, il existe une relation entre le gradient et les dérivées directionnelles lorsque la fonction satisfait certaines conditions. Ceci est énoncé dans la proposition suivante:

Proposition 4.1':
Soient une fonction $f(x,y,z)$ réelle définie sur un parallélipipède rectangle R contenu dans $\mathbf{R}^3$ et un point (a,b,c) à l'intérieur de R. Supposons que les dérivées partielles f_x, f_y et f_z sont continues en tout point de R. Alors, pour toute direction $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a,b,c))$ existe et nous avons l'égalité

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a,b,c)} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b,c)} u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b,c)} u_y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(a,b,c)} u_z.$$

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la proposition 4.1.

Il est possible de généraliser les notions de gradient, dérivées directionnelles aux fonctions réelles $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables. Ainsi le gradient est

$$\nabla f = grad(f) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$$

et la dérivée directionnelle de f dans la direction $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\mathbf{u},(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \ldots, a_n)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, a_2 + hu_2, \ldots, a_n + hu_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}.$$

Noter que pour que $\mathbf{u}$ soit une direction, il faut que $(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{(1/2)} = 1$. Finalement la proposition 4.1 se généralise pour ces fonctions. Cette généralisation est énoncée ci-dessous.

<u>Proposition 4.1"</u>:
Soient $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction réelle de n variables et $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Supposons que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont continues dans une région R de $\mathbf{R}^n$ de la forme $(a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1) \times (a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2) \times \cdots \times (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n)$ où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0$. Alors, pour toute direction $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$, la dérivée directionnelle $f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \ldots, a_n))$ existe et nous avons l'égalité

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\mathbf{u},(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)} u_i = \nabla f\Big|_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)} \cdot \mathbf{u}.$$

$\star \quad \star \quad \star$

<u>Exercice 4.1</u>:
Estimer numériquement les valeurs suivantes en utilisant le théorème d'approximation linéaire:
a) $\sqrt[3]{(3.02)^2 - (1.1)}$

b) $e^{0.1} + \sin(0.2)$

c) $\ln((1.01)^2 + (0.1))$

<u>Exercice 4.2</u>:
En utilisant la définition théorique de dérivée directionnelle, déterminer $f'((d_1, d_2), (0,0))$ au point $(0,0)$ dans la direction (d_1, d_2) pour chacune des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^3)/(x+y), & \text{si } (x+y) \neq 0; \\ 0 & \text{si } (x+y) = 0. \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^4 + y^3)/(x^2 + 5y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

<u>Exercice 4.3</u>:
Calculer les dérivées directionnelles suivantes en utilisant le gradient:

a) $f'((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1,0))$ au point $(1,0)$ dans la direction $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pour $f(x,y) = xe^{xy} + x^3 y$;

b) $f'((1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (1,-1,1))$ au point $(1,-1,1)$ dans la direction $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ pour la fonction $f(x,y,z) = xze^y + (x-y)^2 - xyz^3$;

c) $f'((1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}), (1,0,-1))$ au point $(1,0,-1)$ dans la direction $(1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ pour pour la fonction $f(x,y,z) = 3x^5 y - 2z + 2xyz^2 - 3y - x^2 - yz$.

<u>Exercice 4.4</u>:
a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telle que $f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \ldots, a_n)) > 0$ pour toutes les directions $\mathbf{u}$ à un point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donné.

b) Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telle que pour une direction déterminée $\mathbf{u}$, les dérivées directionnelles $f'(\mathbf{u}, (a_1, a_2, \ldots, a_n)) > 0$ pour tout point $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$.

Exercice 4.5:

Indiquer pour chacune des fonctions $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ suivantes s'il existe une fonction $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que $\nabla f = F$.

a) $F(x, y) = (4x^3y + 2y^2, x^4 + 4xy)$;

b) $F(x, y) = (3x^2y, x^3y + x^2)$.

Exercice 4.6(†):

Déterminer une fonction $\phi: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ telle que $((1 + x^2)\phi(x), 2xy\phi(x)) = \nabla f(x, y)$ pour une fonction $f(x, y)$ définie sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$.