Fonctions de plusieurs variables réelles, dérivées partielles.

Très souvent les fonctions rencontrées sont dépendantes non pas d'une seule variable, mais plutôt de plusieurs. Par exemple, si nous frappons sur la membrane d'un tambour, elle vibrera et son déplacement $u(x, y, t)$ sera une fonction de trois variables: x, y, t, où (x, y) correspond à un point de la membrane et t au temps. Premièrement, nous verrons comment représenter graphiquement des fonctions réelles de deux et trois variables. Par la suite, nous définirons la notion de dérivées partielles de fonctions réelles de plusieurs variables. Dans des chapitres subséquents, nous discuterons comment utiliser ces dérivées partielles pour résoudre certains problèmes d'optimisation.

Nous noterons par $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des n-tuplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont toutes les entrées x_i sont des nombres réels. Dans le cas de $\mathbf{R}^2$, nous écrirons plutôt ces éléments sous la forme (x, y) où x, y sont des nombres réels; alors que, pour $\mathbf{R}^3$, ces éléments seront notés sous la forme (x, y, z) où x, y et z sont des nombres réels.

Il est possible de représenter graphiquement $\mathbf{R}^2$ comme l'ensemble des points du plan et $\mathbf{R}^3$ comme l'ensemble des points de l'espace à trois dimensions. Nous avons illustré ceci dans les figures 2.1 et 2.2 ci-dessous.

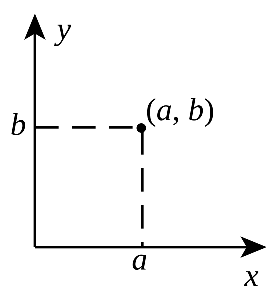

figure 2.1

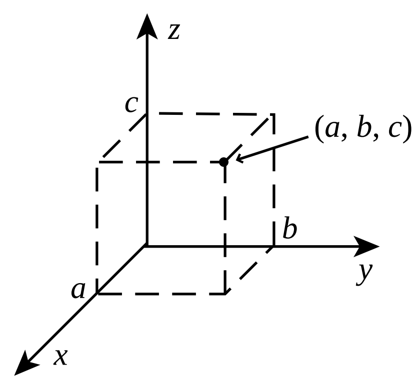

figure 2.2

Noter la façon de désigner les axes de $\mathbf{R}^3$ dans la figure 2.2. Nous avons orienté $\mathbf{R}^3$ en utilisant la règle de la main droite. Nous utiliserons toujours cette orientation de $\mathbf{R}^3$ par la suite.

Une fonction réelle $f : D \to \mathbf{R}$ de n variables réelles est une règle bien définie qui associe à tout n-tuplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un ensemble D contenu dans $\mathbf{R}^n$ un nombre bien défini $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}$. On dit alors que D est le domaine de la fonction et que la fonction f est définie sur D. Dans ces notes , D sera généralement un ouvert de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que pour chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de D, il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ (dépendant de notre point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) tel que si un n-tuplet $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$ satisfait la condition suivante: $x_i - \epsilon < y_i < x_i + \epsilon$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, alors $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est aussi un point de D. Nous abuserons parfois en ne précisant pas le domaine D d'une fonction f; dans ce cas, le domaine D sera l'ensemble des n-tuplets de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels la règle définissant f est applicable. Nous n'écrirons souvent que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour désigner la fonction f.

Exemples 2.1:

a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_3 - 5x_4)/x_2$
b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sin(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$
c) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

a), b) et c) sont respectivement des fonctions réelles de 4, 5 et 3 variables réelles. Les domaines de celles-ci sont respectivement $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_2 \neq 0\}$, $\mathbf{R}^5$ et $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Tout comme pour les fonctions d'une seule variable, la règle définissant une fonction de plusieurs variables peut être explicite comme ci-dessus, implicite ou encore au moyen d'équations aux dérivées partielles. Nous définirons et illustrerons ceci un peu plus loin dans le texte. Il est aussi possible d'effectuer des opérations algébriques, ainsi que la composition de fonctions de plusieurs variables. Nous reviendrons sur ceci après avoir présenté la notion de dérivées partielles.

Il est possible de représenter graphiquement une fonction de deux variables $f(x, y)$ au moyen d'un graphe dans $\mathbf{R}^3$. Il suffit de tracer tous les points $(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3$ avec (x, y) appartenant au domaine D de f. Souvent le graphe d'une telle fonction sera une surface dans $\mathbf{R}^3$.

Exemples 2.2:
a) Le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ est tracé à la figure 2.3.

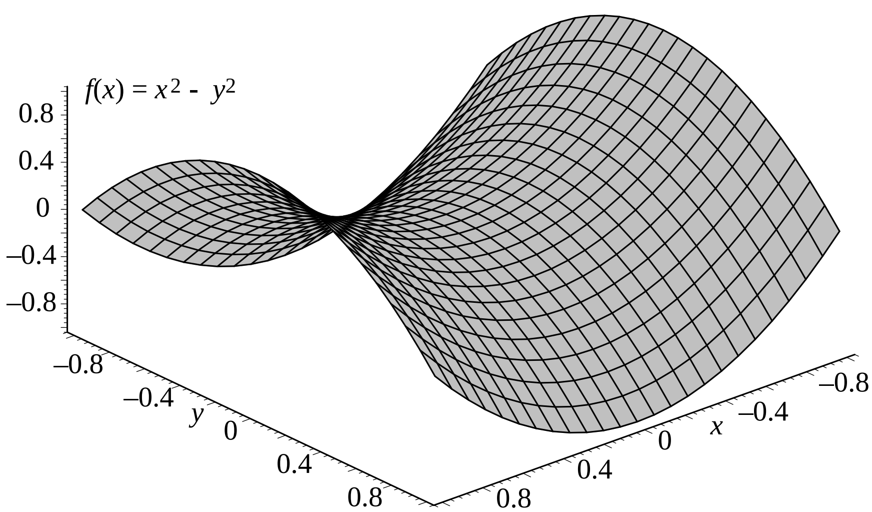

figure 2.3

Noter que dans cette figure, nous avons tracé les axes des x et y en les décalant de l'origine afin de permettre une meilleure visualisation du graphe de f. Le graphe de f nous donne une surface dans $\mathbf{R}^3$ qui est un paraboloïde hyperbolique.

b) Le graphe de la fonction $g(x, y) = x + 0.5y$ est tracé à la figure 2.4. Noter que dans cette figure, nous avons aussi tracé les axes des x et y en les décalant de l'origine afin de permettre une meilleure visualisation du graphe de g. Le graphe de g nous donne une surface dans $\mathbf{R}^3$ qui est un plan.

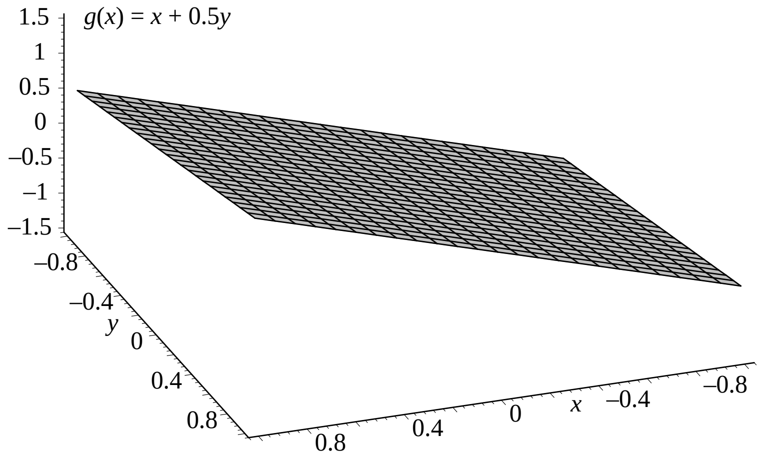

figure 2.4

Il est aussi possible de représenter une fonction $f(x, y)$ au moyen de courbes de niveau. Une courbe de niveau de $f(x, y)$ est définie comme un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ de la forme $C_\nu = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = \nu\}$ où ν est un nombre réel. Il suffit alors pour décrire f de tracer quelques-unes de ses courbes de niveau C_ν.

L'utilisation des courbes de niveau est très répandue en cartographie. Nous pouvons énumérer quelques exemples de ceci. Une ligne isohypse est une courbe sur une carte représentant les points d'une région terreste ayant la même altitude; une ligne isotherme, celle des points d'une région ayant la même température moyenne; une ligne isobare, celle des points d'une région ayant la même pression atmosphérique à un instant et à une altitude donnés. Une ligne isobathe est une courbe sur une carte représentant les points d'une région terreste ayant la même profondeur et une ligne isohyète, celle des points d'une région ayant les mêmes pluies moyennes.

Exemples 2.3:
a) Les courbes de niveau C_ν de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ de l'exemple 2.2 a) ci-dessus sont les courbes suivantes. Si $\nu = 0$, alors C_ν est la réunion des deux droites $x - y = 0$ et $x + y = 0$ car $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$. Si $\nu \neq 0$, alors la courbe de niveau C_ν est une hyperbole. Quelques-unes de ces courbes de niveau sont tracées à la figure 2.5.

Courbes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$

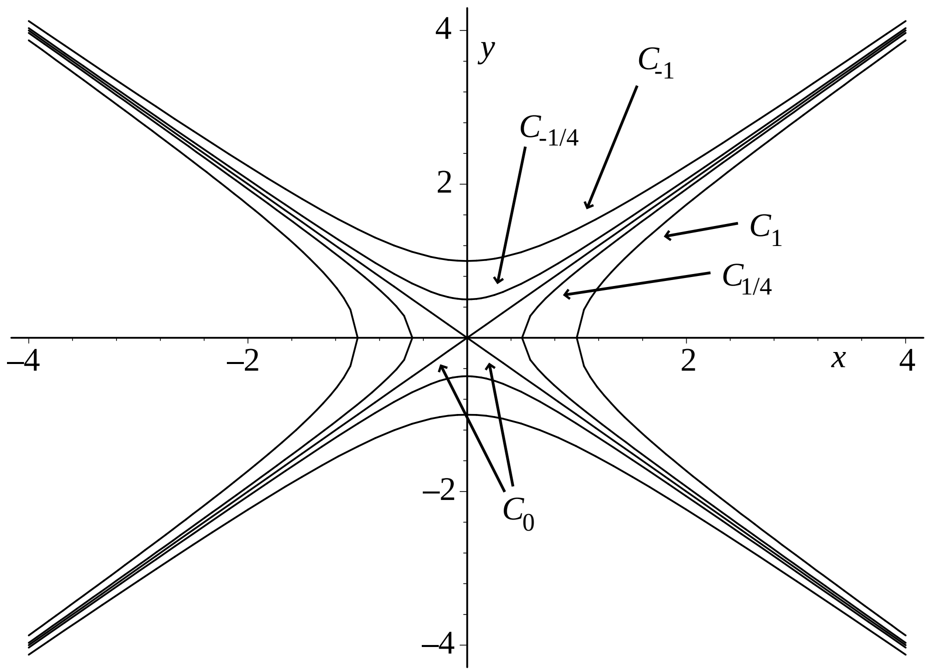

figure 2.5

b) Les courbes de niveau C_ν de la fonction $g(x, y) = x + 0.5y$ de l'exemple 2.2 b) sont les droites dont la pente est -2 car $x + 0.5y = \nu \quad \Leftrightarrow \quad y = -2x + 2\nu$. Quelques-unes de ces courbes de niveau sont tracées à la figure 2.6.

Courbes de niveau de $g(x, y) = x + 0.5y$

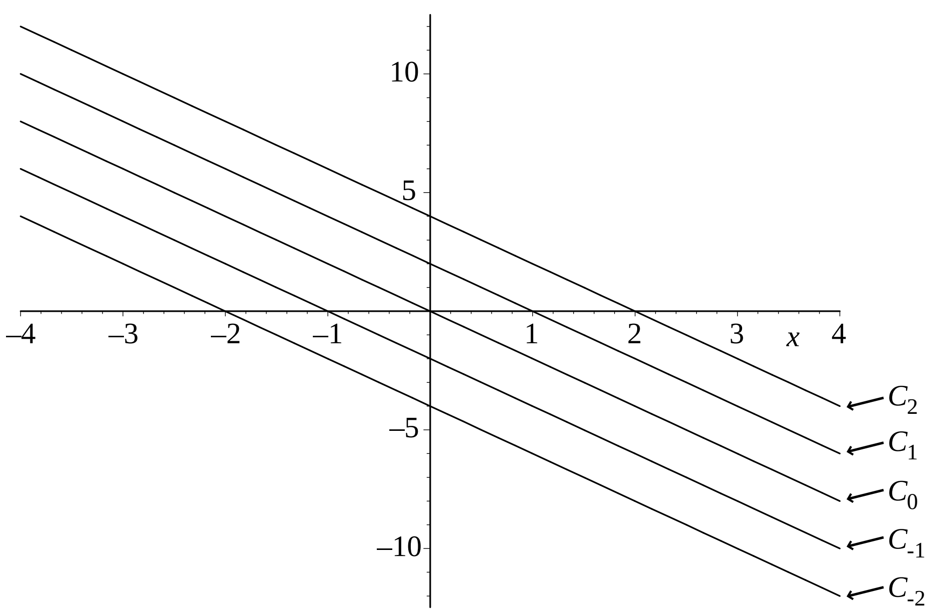

figure 2.6

Pour représenter graphiquement une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ au moyen d'un graphe, il faudrait avoir recours à $\mathbf{R}^4$. Ceci s'avère impossible. Mais il est possible d'avoir recours à des surfaces de niveau pour représenter $f(x, y, z)$. Une surface de niveau de $f(x, y, z)$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$ de la forme $S_\nu = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) = \nu\}$ où ν est un nombre réel. Il suffit alors pour décrire f de tracer quelques-unes de ses surfaces.

Exemples 2.4:
a) Les surfaces de niveau de S_ν de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ sont des paraboloïdes elliptiques $S_\nu = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - \nu\}$. Quelques-unes de ces surfaces de niveau sont tracées à la figure 2.7.

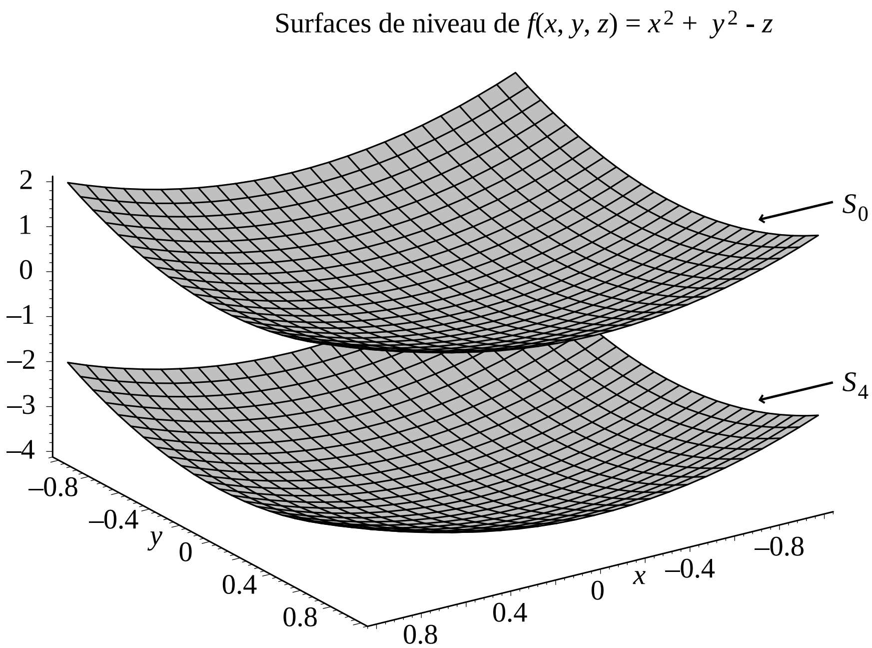

figure 2.7

b) Les surfaces de niveau de S_ν de la fonction $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ sont des ellipsoïdes lorsque $\nu > 0$ et l'origine $\{(0, 0, 0)\}$ lorsque $\nu = 0$. Noter que $S_\nu = \emptyset$ lorsque $\nu < 0$. Quelques-unes de ces surfaces de niveau sont tracées à la figure 2.8.

Surface de niveau de $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$

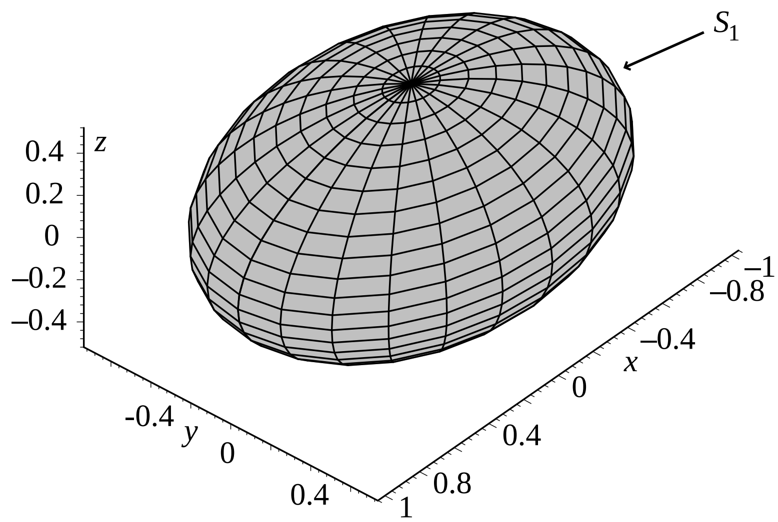

figure 2.8

c) Les surfaces de niveau S_ν de $h(x, y, z) = x + y - z$ sont des plans dans $\mathbf{R}^3$.

Nous n'insisterons pas plus sur les surfaces de niveau dans ces notes. Il est en général difficile de tracer les surfaces de niveau d'une fonction de trois variables réelles. Nous allons maintenant définir la notion de dérivée partielle premièrement pour les fonctions de deux variables, ensuite pour celles de trois variables et finalement pour celles de n variables.

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables définie sur le domaine D. Alors la dérivée partielle de f par rapport à x au point $(a, b) \in D$ est la dérivée au point $x = a$ de la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, b)$ obtenue en posant $y = b$ dans la définition de f. Cette dérivée partielle est notée

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \text{ ou encore } f_x(a, b).$$

Plus formellement, nous avons

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

De façon similaire, la dérivée partielle de f par rapport à y au point $(a, b) \in D$ est la dérivée au point $y = b$ de la fonction d'une variable $y \mapsto f(a, y)$ obtenue en posant $x = a$ dans la définition de f. Cette dérivée partielle est notée

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \text{ ou encore } f_y(a, b).$$

Ainsi formellement nous avons

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Si la dérivée partielle $f_x(a, b)$ par rapport à x (respectivement $f_y(a, b)$ par rapport à y) est définie pour tout point (a, b) appartenant à un domaine D', nous obtenons ainsi une nouvelle fonction notée f_x (respectivement f_y).

Nous allons maintenant illustrer comment calculer les dérivées partielles f_x et f_y pour la fonction $f(x, y) = x\sin(x^2y) + 2xy - 3x + 4y$. Pour calculer f_x, il suffit de considérer y comme une constante et de prendre la dérivée de f par rapport à x avec cette hypothèse. Nous obtenons alors

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x^2y) + x(\cos(x^2y))2xy + 2y - 3.$$

Alors que pour calculer f_y, il suffit de considérer x comme une constante et de prendre la dérivée de f par rapport à y avec cette hypothèse. Nous obtenons alors

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3(\cos(x^2y)) + 2x + 4.$$

Pour donner un sens plus concret à ce que sont les dérivées partielles, il faut procéder de la façon suivante. Si nous considérons l'intersection du graphe de $f(x,y)$ avec le plan vertical $y = b$ dans $\mathbf{R}^3$, nous obtenons une courbe et $f_x(a,b)$ est la pente de la droite tangente à cette courbe au point $x = a$. De façon similaire, si nous considérons l'intersection du graphe de $f(x,y)$ avec le plan vertical $x = a$ dans $\mathbf{R}^3$, nous obtenons une courbe et $f_y(a,b)$ est la pente de la droite tangente à cette courbe au point $y = b$. Nous avons illustrer ceci à la figure 2.9.

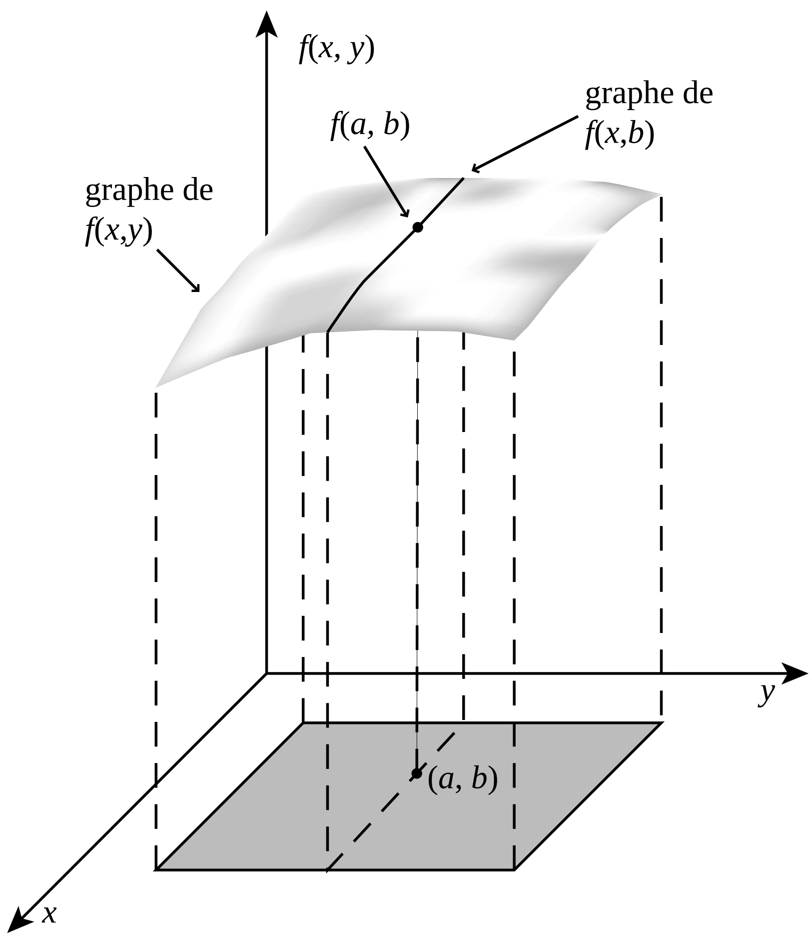

figure 2.9

Tout comme pour les fonctions à une variable, il existe des dérivées partielles d'ordres supérieurs pour $f(x,y)$. Plus précisément, les dérivées partielles f_x et f_y de $f(x,y)$ sont des fonctions de deux variables, il est donc possible de considérer leurs dérivées partielles. Nous obtenons ainsi quatre dérivées partielles mixtes d'ordre deux que l'on notera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{(respectivement } f_{xx}, f_{yx}, f_{xy} \text{ et } f_{yy} \text{).}$$

Elles sont définies par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big). \end{aligned}$$

Il faut ici noter la différence dans ces deux systèmes de notation dans l'ordre de différentiation. Nous allons illustrer ceci dans un exemple.

Exemples 2.5:
Soit $f(x, y) = 2x^3 y + e^{xy}$. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 y + y e^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^3 + x e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2 y + y e^{xy}) = 12xy + y^2 e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 + x e^{xy}) = 6x^2 + e^{xy} + xy e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(6x^2 y + y e^{xy}) = 6x^2 + e^{xy} + xy e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 + x e^{xy}) = x^2 e^{xy}. \end{aligned}$$

Noter que dans cet exemple nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ceci n'est pas fortuit. Nous expliquerons dans un chapitre ultérieur sous quelles conditions ceci est vrai .

En procédant comme pour les dérivées partielles d'ordre deux, il est possible de considérer des dérivées partielles d'ordre trois, quatre, ..., etc. Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big), & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big), & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Big), & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big), & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big), & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big), & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Il est important de noter que l'ordre de dérivation est déterminé en lisant les termes du "dénominateur" de la droite vers la gauche. Il est aussi possible de noter ces dérivées de la façon suivante:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, & f_{xxy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, & f_{xyx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \\ f_{xyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, & f_{yxx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, & f_{yxy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \\ f_{yyx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, & f_{yyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le cas des fonctions de deux variables. Mais il est facile de généraliser la notion de dérivées partielles pour les fonctions de trois variables réelles. Soient $f(x, y, z)$, une fonction de trois variables x, y et z définie sur le domaine D et $(a,b,c) \in D$. Alors les dérivées partielles de f au point (a,b,c) sont définies par

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b,c)} &= \lim_{r\to 0} \frac{f(a+r,b,c)-f(a,b,c)}{r},\\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b,c)} &= \lim_{s\to 0} \frac{f(a,b+s,c)-f(a,b,c)}{s},\\
\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(a,b,c)} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b,c+t)-f(a,b,c)}{t}.
\end{aligned}$$

En d'autres mots, la dérivée partielle f_x est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à x tout en considérant y et z comme des constantes. De la même façon,la dérivée partielle f_y est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à y tout en considérant x et z comme des constantes et la dérivée partielle f_z est obtenue en dérivant la fonction f par rapport à z tout en considérant x et y comme des constantes.

Exemple 2.6:
Si $f(x,y,z) = x^3y + xz^2 + y^4z^6$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4y^3z^6, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz + 6y^4z^5.$$

Tout comme pour les fonctions de deux variables, il est possible de considérer les dérivées partielles mixtes d'ordre deux, trois, etc. Le lecteur n'aura aucune difficulté à généraliser ces dérivées d'ordres supérieurs. Nous illustrerons ceci dans les exercices à la fin de ce chapitre.

Finalement soient $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction définie sur un domaine D de $\mathbf{R}^n$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Alors la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = \lim_{h_i\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_i+h_i,\ldots,a_n) - f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{h_i}.$$

Il est aussi facile de généraliser aux fonctions à n variables les dérivées mixtes d'ordres supérieurs.

Exemple 2.7:
Soit $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^4x_2 + x_3x_4^5$. Alors:

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4^5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1^3x_2) = 12x_1^2x_2, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x_4^2 \partial x_3} = 20x_4^3.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2.1:
Pour chacune des fonctions $f(x,y)$ suivantes, tracer son graphe et déterminer ses courbes de niveau:
a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$;
b) $f(x,y) = e^{xy}$;
c) $f(x,y) = |x+y|$ où $|\cdot|$ est la valeur absolue.

Exercice 2.2:
Déterminer les dérivées partielles f_x et f_y pour chacune des fonctions $f(x,y)$ suivantes:
a) $f(x,y) = (x^2 - 3xy + y^4)/(2x+3y)$;
b) $f(x,y) = e^{5\cos(xy)}$
c) $f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)\cos(xy)$
d) $f(x,y) = 2xy/e^{x+y}$.

Exercice 2.3:
Calculer toutes les dérivées d'ordre ≤ 2 de la fonction $f(x,y) = x^2 + 3xy^5 + \cos(xy)$, i. e. calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exercice 2.4:
Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pour toute fonction $f(x,y)$ de la forme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.

Exercice 2.5:
Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pour toute fonction $f(x,y)$ de la forme

$$\cos(ax^p y^q) + \sin(bx^r y^s)$$

où a, b sont des nombres réels et p, q, r, s sont des entiers positifs.

Exercice 2.6:
En utilisant la définition de dérivées partielles, montrer que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

pour la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0; \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.7:
Pour chacune des fonctions $f(x,y)$ suivantes, déterminer les points (a,b) pour lesquels nous avons simultanément

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0:$$

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$;
b) $f(x,y) = x^3 y + xy^2$.

Exercice 2.8:
Pour la fonction $f(x,y,z) = (x^2 + xy + yz)e^{x+2y}$, calculer les dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}.$$

Exercice 2.9:
Déterminer $f_{xy}(0,0)$ et $f_{yx}(0,0)$ pour la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Que peut-on déduire de ce calcul?

Exercice 2.10:
Même question qu'au numéro précédent, mais cette fois pour la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} yx^4 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$