Maths Appliquées T.D. N° 7

Maximums et minimums relatifs, optimisation

Rappels de cours **:**

Soit $P=(a,b)$ un point critique de $f(x,y)$. Supposons que les dérivées partielles :

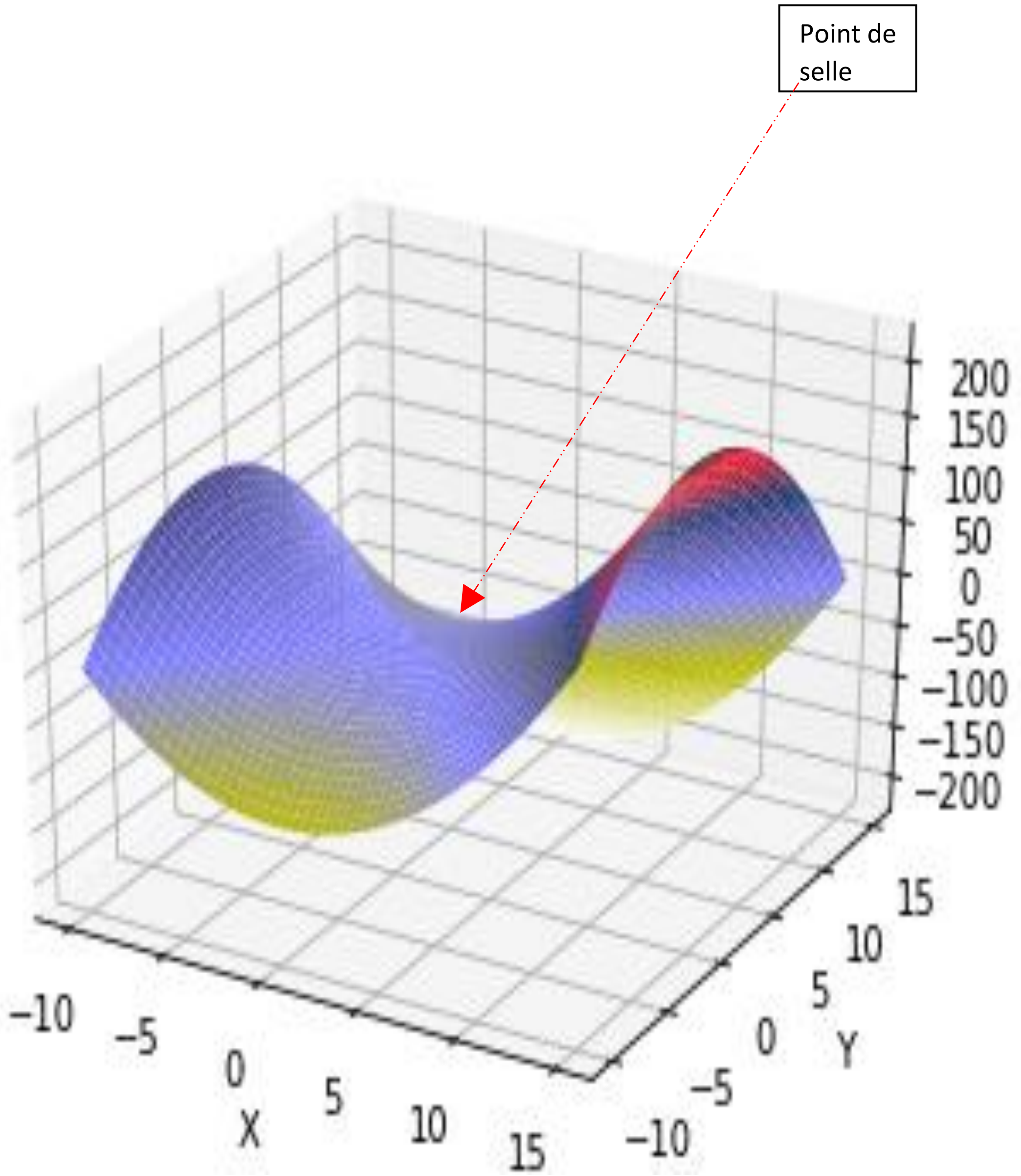
$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

sont continuent sur un rectangle R dont l'intérieur contient P. Notons :

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_P,\quad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_P,\quad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_P \quad \text{et} \quad \Delta=B^2-AC$$

1. Si $\Delta<0$ et $A<0$, alors f possède un maximum relatif au point P.
2. Si $\Delta<0$ et $A>0$, alors f possède un minimum relatif au point P.
3. Si $\Delta>0$, alors f n'a ni un maximum relatif ni minimum relatif.

   Dans ce cas le point $(P, f(P))$ est un point de selle du graphe de f.
4. Si $\Delta=0$ le teste n'est pas concluant.



Exercice N°1 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
définie par $f(x) = 1 - e^{-x^2}$

Déterminer les points critiques de f et donnez leur nature.

Calculons la dérivée de f : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

Les points critiques de f : $-2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

donc il existe un seul point critique.

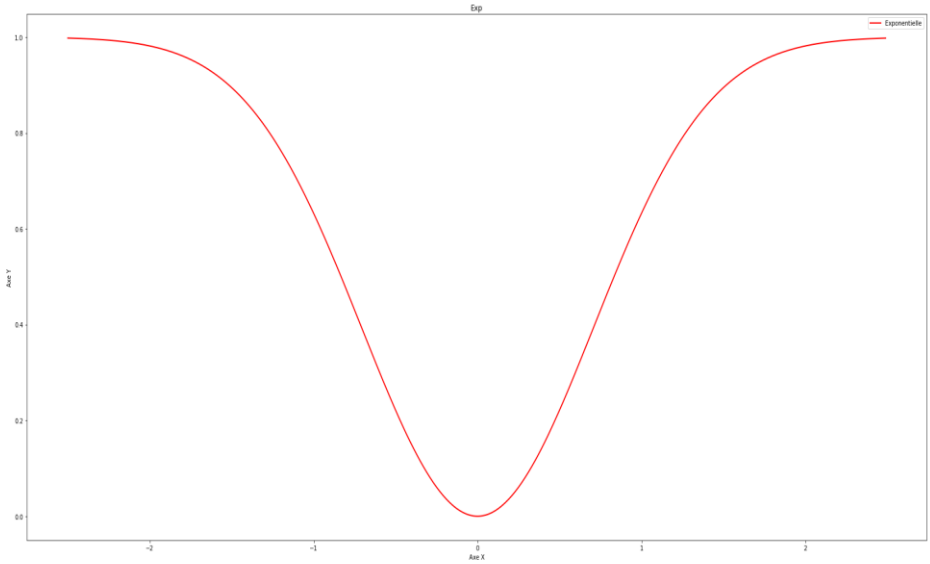
Pour déterminer sa nature, il faut calculer la dérivée seconde de f.

$f''(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$.

Au point $x^0 = 0$: $f''(x)\big|_{x=0} = \left(2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}\right)\big|_{x=0} = 2 > 0$

Le point $x^0 = 0$ est un minimum local de *f*.

Remarquons que $x^0 = 0$ est un minimum global de *f*.



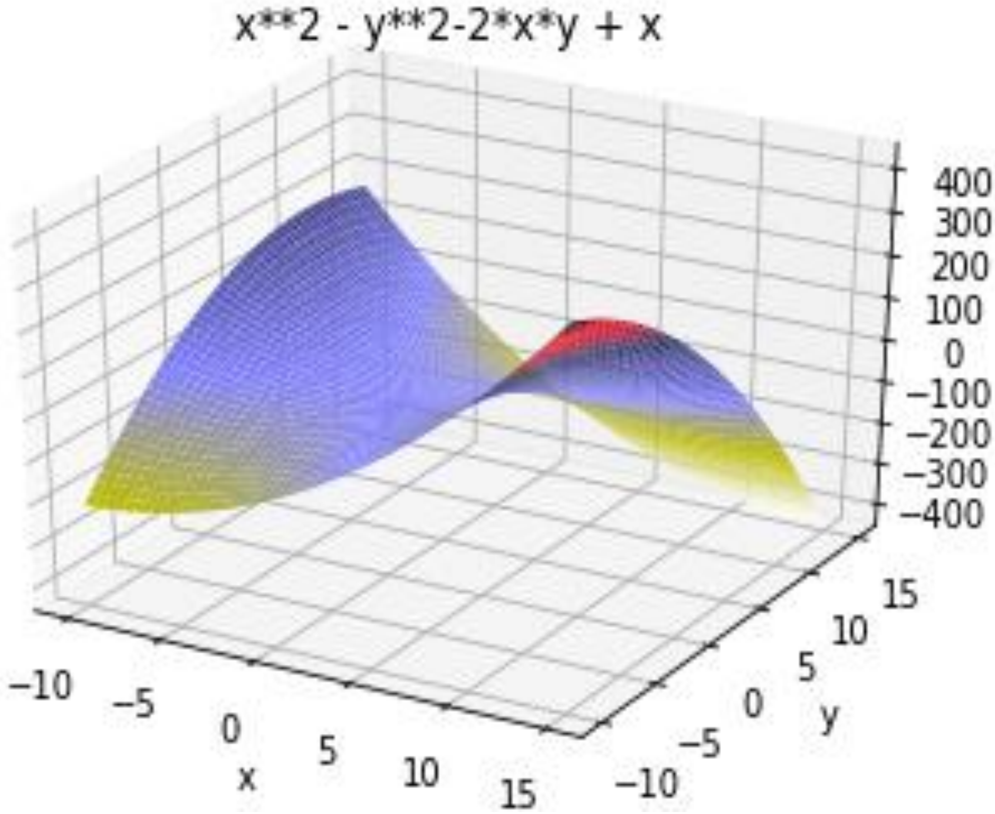
<u>Exercice N° 2</u> :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^2}{\min} f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$$

$$\nabla f(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Les équations n'étant pas compatibles, il s'ensuit alors que le problème posé n'a pas de solution.

Exercice N° 3 : $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \ f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$



$$\nabla f(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} \ , \ \ x_2 = \frac{1}{4}$$

Calculons le hessien de f au point (-1/4,1/4) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2.$$

Donc $\nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = Det$

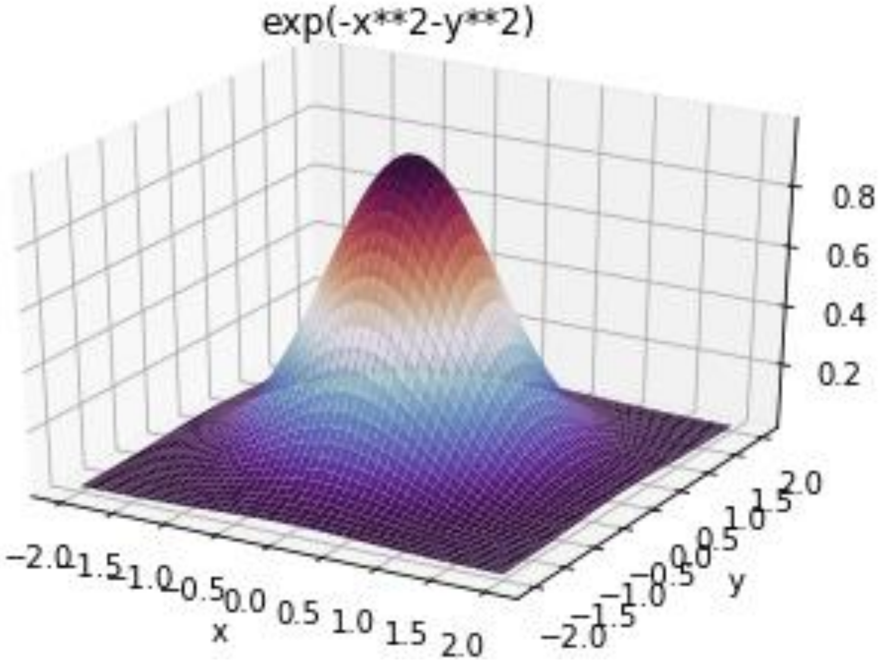
$$A_1 = 2 > 0 \qquad ; \Delta = \det(Det) = 8 \ > 0$$

Le hessien étant positif, il s’ensuit que le point x^0 = (-1/4,1/4) n’est pas un minimum de f ;

C’est un point de selle.

Exercice N° 4 **:**

Minimiser la fonction $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ sur $\mathbb{R}^2$



$$\nabla f(x)=\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2xe^{-x^2-y^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-2ye^{-x^2-y^2}=0\end{cases} \Rightarrow x=0 \quad , \quad y=0$$

Calculons les dérivées secondes :

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} = -2e^{-x^2-y^2}+4x^2e^{-x^2-y^2}=-2$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)} = 4xye^{-x^2-y^2}+4x^2e^{-x^2-y^2}=0$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(0,0)} = -2e^{-x^2-y^2}+4y^2e^{-x^2-y^2}=-2$$

$$\Delta = B^2-AC=0-(-2)(-2)=-4$$

Ici, nous avons $\Delta<0$ et $A<0$. Donc le point (0,0) est un maximum relatif de la fonction *f*.