CHAPITRE 1

Rappels sur le calcul différentiel à une variable.

C'est à Wilhelm Gottfried Leibnitz (1646 – 1716) et à Isaac Newton (1642 – 1727) que nous devons l'invention du calcul différentiel et intégral. Déjà depuis ses débuts, il s'est avéré un outil indispensable pour formuler des phénomènes en sciences, en génie et en sciences sociales, ainsi que pour calculer les conséquences de ceux-ci. Par exemple, Newton utilisa le calcul infinitésimal pour obtenir de sa théorie de l'attraction universelle les trois lois de Kepler pour les mouvements planétaires.

Dans ces notes, nous travaillerons avec l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels. On dit aussi la droite réelle pour $\mathbf{R}$ et qu'on représente par une ligne droite:

Une fonction réelle $f : D \to \mathbf{R}$ d'une variable réelle est une règle qui associe à tout nombre réel x d'un ensemble D contenu dans $\mathbf{R}$ un nombre bien défini $y = f(x)$ de $\mathbf{R}$. On dit alors que D est le domaine de la fonction et que la fonction f est définie sur D. Dans ces notes, le domaine D consistera en général d'une réunion finie d'intervalles. Nous abuserons parfois en ne précisant pas le domaine D d'une fonction f; dans ce cas, le domaine D sera l'ensemble des nombres réels pour lesquels la règle définissant f est applicable. Nous n'écrirons souvent que $f(x)$ pour désigner la fonction f.

Exemples 1.1:
a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
b) $g(x) = \sin(x^{-1})$
c) $h(x) = (x + 3)/(x^2 + 4x - 5)$

a), b) et c) sont des exemples de trois fonctions réelles d'une variable réelle. Le domaine de chacune de celles-ci est respectivement $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ (c'est-à-dire tous les nombres réels à l'exception de 0) et $\mathbf{R}\backslash\{-5, 1\}$ (c'est-à-dire tous les nombres réels à l'exception de -5 et 1)

La règle définissant une fonction f peut être explicite comme ci-dessus ou encore implicite.

Exemples 1.2:
a) L'équation $x = e^{2y}$ définit implicitement y comme une fonction de x. Explicitement nous avons $y = (\ln(x))/2$ et le domaine D est l'intervalle $(0, \infty)$ (c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels positifs)
b) L'équation $xy - x + 2y + 1 = 0$ définit aussi implicitement y comme une fonction de x. Explicitement nous avons $y = (x - 1)/(x + 2)$ et le domaine D est $\mathbf{R}\backslash\{-2\}$
c) L'équation $(x+y)^2 = 1$ ne définit pas implicitement y comme une fonction de x. Car il y a deux solutions possibles pour y (en terme de x) à cette équation, soit $y = 1 - x$ ou soit $y = -1 - x$, il faudrait ajouter des conditions à l'équation $(x + y)^2 = 1$ pour définir correctement y en fonction de x.

Une fonction peut aussi être définie d'autres façons; par exemple, au moyen d'équations différentielles ou encore d'équations intégrales.

Avec des opérations élémentaires, il est possible d'obtenir de nouvelles fonctions. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions réelles et c est un nombre réel, nous pouvons faire les opérations algébriques suivantes: $f(x)+g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, etc. Il est aussi possible de définir la composition de deux fonctions. Si $z = f(y)$ (c'est-à-dire que z est une fonction de y) et $y = g(x)$ (c'est-à-dire que y est une fonction de x), alors la composition $f \circ g$ est la fonction obtenue en considérant $z = f(g(x))$ comme une fonction de x. La fonction $f \circ g$ est bien définie en x si $g(x)$ appartient au domaine de f. Si une fonction f est injective (c'est-à-dire $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$), alors f a une fonction inverse f^{-1} défini par $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

Exemples 1.3:
a) Si $z = f(y) = \ln(y+3)$ et $y = g(x) = x^2 - 4$, alors la composition $f \circ g$ est $z = \ln(x^2 - 4 + 3) = \ln(x^2 - 1)$. Le domaine de cette composition est $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
b) Si $f(x) = e^x$, alors $f^{-1}(x) = \ln(x)$. Le domaine de f est $\mathbf{R}$, alors que celui de f^{-1} est $(0, \infty)$.

Soit f, une fonction réelle d'une variable réelle. On écrira $\lim_{x\to a} f(x) = L$ pour indiquer que $f(x)$ peut être aussi près de L que nous le désirons en prenant x à l'intérieur d'un intervalle $(a-\delta, a+\delta)$ suffisamment petit centré en a. La définition exacte est la suivante: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ (dépendant de a et ϵ) tel que si x est compris entre $a-\delta$ et $a+\delta$, alors $f(x)$ est compris entre $L-\epsilon$ et $L+\epsilon$. L sera appelé la limite de f au point a. La limite d'une fonction à un point n'existe pas toujours.

Exemple 1.4:
Définissons $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par la règle suivante: $f(x) = 1$ si x appartient à l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, $f(x) = -1$ sinon. Alors $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. Car, pour tout intervalle centré en 0, f prend les deux valeurs -1 et 1. Ainsi f n'approche ni -1, ni 1. Cet exemple est quelque peu exotique, mais il illustre le fait que la limite n'existe pas toujours. En fait, $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pour aucun nombre réel a.

Nous écrirons aussi $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$) pour indiquer que $f(x)$ peut être aussi près de L que nous le désirons en prenant x suffisamment grand (respectivement petit). La définition exacte est la suivante: pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel M (dépendant de ϵ) tel que si x est plus grand (respectivement plus petit) que M, alors $f(x)$ est compris entre $L-\epsilon$ et $L+\epsilon$.

Nous écrirons aussi $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) pour indiquer que $f(x)$ devient aussi grand (respectivement aussi petit) que nous le désirons en prenant x suffisamment près de a. Noter que ceci est un abus de notation, car la limite n'existe pas dans ces cas.

Exemples 1.5:
a) Si $f(x) = e^{(1/x)}$ pour $x \neq 0$, alors $\lim_{x\to 0} e^{(1/x)}$ n'existe pas, $\lim_{x\to-\infty} e^{(1/x)} = 1$ et $\lim_{x\to\infty} e^{(1/x)} = 1$.
b) Si $f(x) = \sin(x)/x$ pour $x \neq 0$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Nous avons tracé le graphe de $f(x) = \sin(x)/x$ sur l'intervalle fermé $[-10, 10]$ dans la figure 1.1 et, sur $[-100, 100]$ dans la figure 1.2 ci-dessous. La figure 1.1 illustre bien le fait que $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$, alors que la figure 1.2 illustre que $\lim_{x\to\infty} \sin(x)/x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \sin(x)/x = 0$

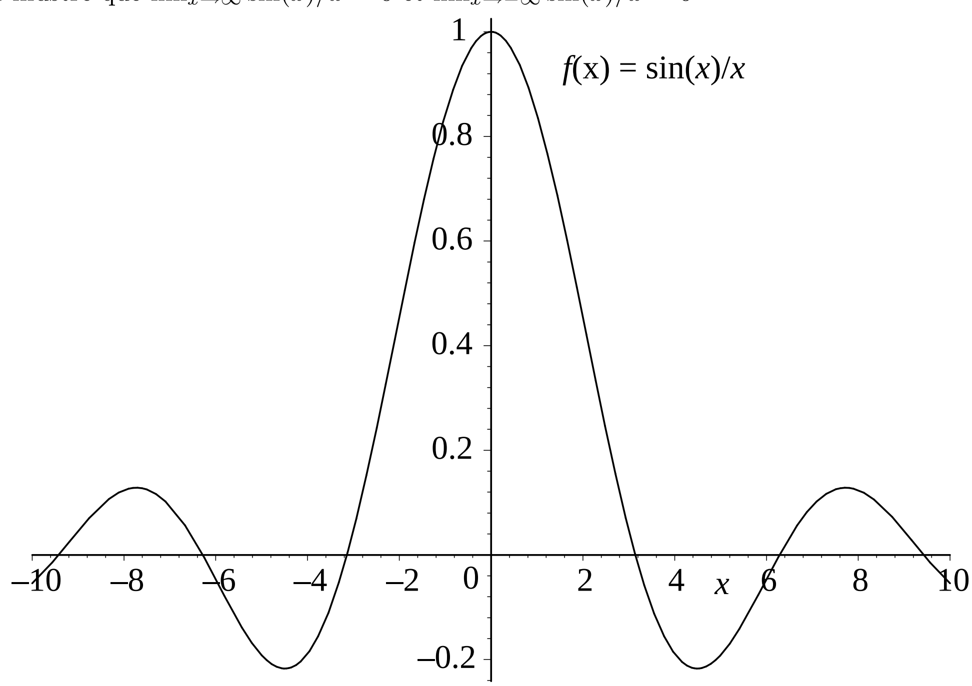

figure 1.1

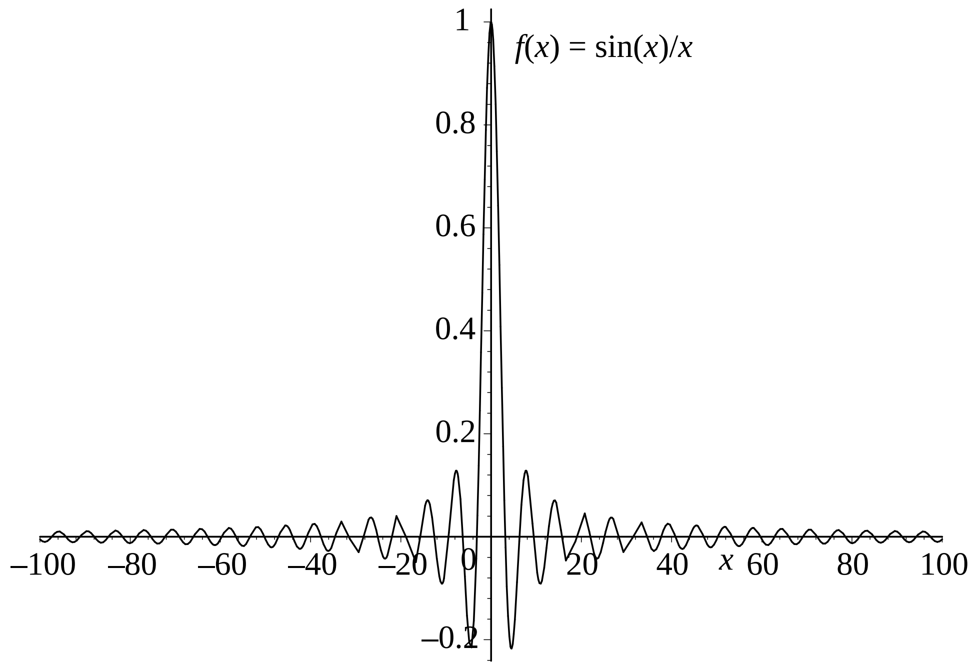

figure 1.2

Proposition 1.1:
Soient c, un nombre réel et $f(x)$, $g(x)$, deux fonctions réelles d'une variable réelle x. Supposons que les deux limites $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ existent. Alors:
a) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$;
b) $\lim_{x\to a} cf(x) = cL_1$;
c) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L_1L_2$;
d) $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = L_1/L_2$, si $L_2 \neq 0$.

La proposition est aussi valable si, au lieu de a, nous avions eu plutôt ∞ ou $-\infty$.
Étant donné une fonction f et un nombre réel a du domaine de f, si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe, alors on dira que la fonction f est dérivable à $x = a$ et cette limite sera appelée la dérivée de f à $x = a$. Nous noterons celle-ci soit par $f'(a)$, soit par $f^{(1)}(a)$ ou encore par $\frac{df}{dx}(a)$. Si la dérivée d'une fonction f existe pour tous les points d'un domaine D, nous obtenons une nouvelle fonction $f'(x)$ sur D appelée la dérivée de f. Nous noterons aussi cette dérivée par $\frac{df}{dx}$ ou encore $f^{(1)}(x)$.

Exemple 1.6:
Si $f(x) = x^3 + x$ et $a \in \mathbf{R}$, alors

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{((a+h)^3+(a+h))-(a^3+a)}{h} = \lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2+1) = 3a^2+1.$$

Ainsi $f'(x) = 3x^2 + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Si une fonction f a une dérivée f' en tout point d'un domaine D, alors nous pouvons considérer cette nouvelle fonction f' et si celle-ci est dérivable au nombre réel $x = a$, nous dirons que f a une dérivée seconde en a. Nous noterons cette dérivée seconde d'une des façons suivantes: soit $f''(a)$, soit $f^{(2)}(a)$ ou encore $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$. Si la dérivée seconde d'une fonction f existe en tout point d'un domaine D, nous obtenons alors une nouvelle fonction $f''(x)$, la dérivée seconde de f, sur le domaine D. Nous la noterons aussi par $f^{(2)}(x)$

ou par $\frac{d^2f}{dx^2}$. Nous pouvons continuer ce processus de dérivation et obtenir la dérivée troisième, la dérivée quatrième, etc. Nous noterons par $f^{(n)}(x)$ ou encore $\frac{d^nf}{dx^n}$ la dérivée n-ième de f (si elle existe).

Pour visualiser la dérivée d'une fonction, il suffit de noter que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{(pour } a \neq b\text{)}$$

est la pente de la droite passant par les deux points: $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. En laissant b être de plus en plus près de a, nous voyons que $f'(a)$ est la pente de la droite tangente à la courbe $(x, f(x))$ (pour x appartenant à un intervalle contenant a). La figure 1.3 illustre ceci ci-dessous. Nous avons tracé le graphe de $f(x) = x^2$, ceux des sécantes $y = 2.5x - 1.5$, $y = 2.25x - 1.25$ et $y = 2.125x - 1.125$ passant par le point $(1, 1)$, ainsi que celui de la droite tangente $y = 2x - 1$ au graphe de $f(x)$ au point $(1, 1)$.

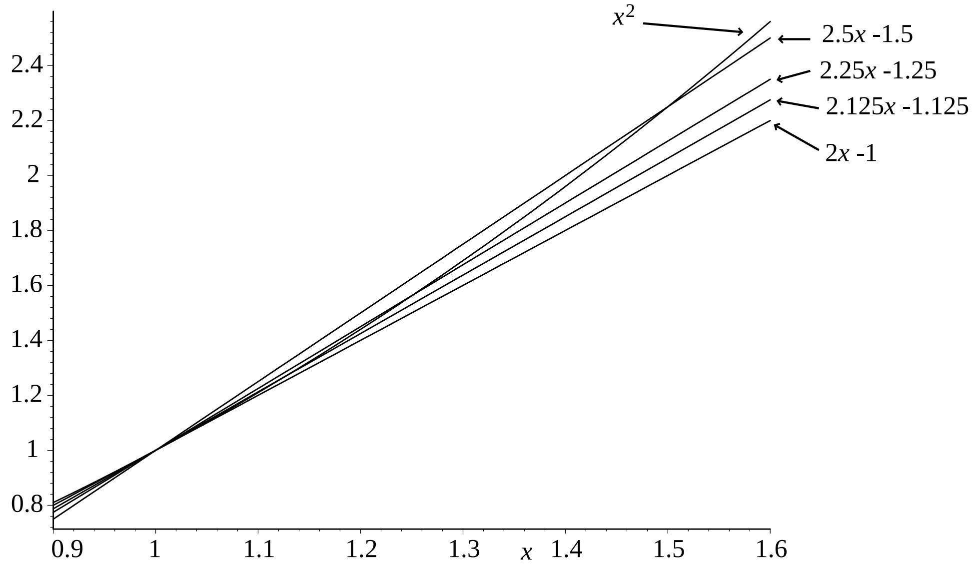

figure 1.3

Pour calculer la dérivée d'une fonction, il existe des règles obtenues de la définition de dérivée. Nous énumérons ces règles ci-dessous.

Proposition 1.2:
Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions et a, b deux nombres réels. Alors:
a) (règle linéaire) $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$;
b) (règle du produit) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
c) (règle du quotient) $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g^2(x)$, (si $g(x) \neq 0$);
d) (règle de chaines) Si $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, alors $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$;
e) (règle des puissances) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (où $n \in \mathbf{R}$);
f) (dérivée de fonctions usuelles)

$$\begin{array}{ll} (e^x)' = e^x, & (\ln(x))' = x^{-1} \quad (\text{si } x > 0), \\ (\sin(x))' = \cos(x), & (\cos(x))' = -\sin(x). \end{array}$$

Exemple 1.7:

$$\frac{d}{dx}\big((\ln(1+x^2))^{3/2}\big) = (3/2)\big((\ln(1+x^2))^{1/2}\big)\frac{d}{dx}(\ln(1+x^2)) = (3/2)\big((\ln(1+x^2))^{1/2}\big)\frac{1}{(1+x^2)}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$
$$= (3/2)\big((\ln(1+x^2))^{1/2}\big)\frac{2x}{(1+x^2)}$$

en utilisant les règles précédentes.

Exemple 1.8:

$$\frac{d}{dx}(x\tan(x)) = \tan(x) + x\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Big) = \tan(x) + x\Big(\frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)}\Big)$$
$$= \tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}$$

en utilisant les règles précédentes ainsi que le fait que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Si une fonction y est définie implicitement au moyen d'une équation, il est possible de calculer y' en dérivant chacun des côtés de cette équation et en utilisant les règles de dérivation ci-dessus.

Exemple 1.9:
Considérons la fonction y définie par l'équation $xy - x + 2y + 1 = 0$, alors $y + xy' - 1 + 2y' = 0$ et nous obtenons finalement $y' = (1-y)/(2+x)$ si $x \neq -2$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1.1:
Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes:
a) $f(x) = (x^3 - 5x + 2)/(x^2 + x + 1)$;
b) $f(x) = \sqrt[3]{1+4x^4}$;
c) $f(x) = (x^5 - 3)\ \exp(x^2)$;
d) $f(x) = \cos(\sin(x))$.

Exercice 1.2:
Pour quelles valeurs de x, la dérivée $f'(x)$ de chacune des fonctions suivantes s'annule (c'est-à-dire $f'(x) = 0$)?
a) $f(x) = \exp(-x^2)$;
b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$;
c) $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.

Exercice 1.3:
En utilisant seulement la définition théorique de la dérivée et le fait que $\lim_{h\to 0}(\cos(h) - 1)/h = 0$, montrer que
a) $(\sin(x))' = \cos(x)$;
b) $(\cos(x))' = -\sin(x)$.