Table des matières

INTRODUCTION

Ce manuscrit est la rédaction d'un cours de Licence du module "Mesure et intégration" enseigné à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret. Ce cours constitue une introduction élémentaire rigoureuse et relativement complète à la théorie de la mesure, destiné principalement aux étudiants en troisième année licence mathématiques et peut, éventuellement, être très utile pour les étudiants en première année Master.

Dans le chapitre 1, nous présentons une structure importante de famille de sous-ensemble d'un ensemble donnée, à savoir les tribus ou σ-algèbres, et nous étudions quelques-unes de leurs propriétés. Nous introduisons la notion de fonctions mesurables et nous étudions les principales propriétés de ces fonctions.

Le chapitre 2 est dédié aux mesures positives leurs définition et propriétés fondamentales.

Le chapitre 3 est consacré à la construction de l'intégrale par rapport à une mesure positive et nous démontrons les théorèmes de la convergence monotone et de Lebesgue.

Le chapitre 4 met les bases du calcul des intégrales multiples. On introduit la notion de mesure produit et nous démontrons le théorème de Tonelli et le théorème de Fubini.

Le chapitre 5 présente une introduction aux espaces L^p et quelques propriétés de ces espaces.

Chapitre 1

Espace mesurable

1.1 Algèbres, Tribus ou σ-Algèbres

Définition 1.1. *Soit $\mathcal{A}$ une famille non vide de parties de E. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

i). $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \cup B \in \mathcal{A}$;

ii). $\forall A \in \mathcal{A}$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.1.

1. $\{\emptyset, E\}$ *et* $\mathcal{P}(E)$ *(algèbres triviales).*
2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ *où* $A \subset E$.
3. $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, E\}$ *où* $\{A, B, C\}$ *est une partition de* E.
4. $\mathcal{A} = \{A \subset E : \quad A \text{ fini ou } A^c \text{ fini }\}$.

Remarque.

1. *Dans la définition précédente on peut remplacer* $i)$ *par la condition :* $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$, *qui est parfois plus facile à vérifier que la condition* $i)$.
2. *La condition* $ii)$ *entraîne la stabilité de la tribu par réunion finie. Il suffit en effet de poser,* n_0 *étant fixé,* $A_n = \emptyset$, $n > n_0$

Propriétés :

1. $\emptyset$ et $E \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie et par union finie.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \backslash B$ et $A \Delta B \in \mathcal{A}$, $(A \backslash B = A \cap B^c)$.
4. Toute intersection d'algèbres sur E est une algèbre sur E.

Remarque. *La réunion de deux algèbres n'est pas nécessairement une algèbre, comme on le voit sur l'exemple suivant. Soient les algèbres* $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}\}$ *et* $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\}$. *La famille* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *n'est pas une algèbre puisque* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Proposition 1.1. *Soit E un ensemble non vide. $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(E)$ alors $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E si et seulement si*

i). $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A - B \in \mathcal{A}$,

ii). $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.2. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un ensemble non vide E. Alors por toutes familles d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ il exist une familles d'ensembles $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints tel que*

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n \qquad ,$$

En effet, posons $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \backslash A_0$,..., $B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$, on remarque que les B_n sont deux à deux disjoints de plus $B_n \in \mathcal{A}$ pour tout n et

$$\bigcup_{k=0}^{n} B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_n$$

et le résultat s'en déduit.

1.1.1 Algèbre engendrée par une famille

Définition 1.2. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de E. On appelle algèbre engendrée par $\mathcal{F}$, l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{F}$. Autrement dit, c'est la plus petite des algèbres sur E contenant $\mathcal{F}$. On la note $\sigma_{\mathbf{a},E}(\mathcal{F})$ ou tout simplement $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathcal{F})$ lorsqu'il n 'y a pas de confusion possible.*

1.2 Tribus, σ-Algèbres, et espaces mesurables

Définition 1.3. *Soit E un ensemble et $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(E)$ une famille de parties de E. On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de E si l'on a les propriétés suivantes :*

i) $A \in \mathcal{T} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{T}$*, stabilité par passage au complémentaire.*

ii) Si $A_n \in \mathcal{T}$ *pour tout* $n \geqslant 1$*, alors* $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{T}$*, stabilité par réunion dénombrable.*

On dit aussi que $\mathcal{T}$ est une σ -algèbre, ou plus exactement σ -algèbre de Boole, de parties de E.

Remarque.

1. *E et* $\emptyset \in \mathcal{T}$.
2. *La condition ii) entraine la stabilité de la tribu $\mathcal{T}$ par réunion finie. Il suffit en effet de poser, n_0 étant fixé, $A_n = A_{n_0}, n > n_0$.*
3. *Si $A_n \in \mathcal{T}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ d'où la stabilité par intersection finie en posant $A_n := E, n > n_0$.*
4. *En général, une tribu n'est pas stable par réunion quelconque. En effet, soient $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ est dénombrable ou A^c est dénombrable $\}$ Alors $[0,1] = \bigcup_{x\in[0,1]}\{x\}, \{x\} \in \mathcal{B}$ et $[0,1] \notin \mathcal{B}$.*
5. *Toute algèbre finie est une tribu.*
6. *Toute tribu sur E est une algèbre. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant. Soit l'algèbre $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N}/A$ fini ou A^c fini $\}$ et $A_n = \{2n\} \quad \forall n \geq 1$. Alors $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$ et $\bigcup_{n\geq 1} A_n \notin \mathcal{A}$.*

Exemple 1.2.

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$*, tribu dite grossière.*
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$*, tribu dite triviale.*
3. *Soit $A \subset E$, fixé ; $\mathscr{B} := \{\emptyset, E, A, A^c\}$: c'est la plus petite tribu contenant le sous-ensemble A.*
4. *Si $E = \bigcup_{i\in I} X_i, I$ non vide, fini ou infini dénombrable, $X_i \cap X_j = \varnothing$ dès que $i \neq j$ (les $X_i, i \in I$, forment donc une partition de X) alors $\mathcal{T} := \left\{\bigcup_{j\in J} X_j, J \subset I\right\}$ est une tribu.*

5. *$\mathscr{B} := \{A \in \mathscr{P}(E), A$ dénombrable ou A^c dénombrable $\}$. Le seul point à vérifier est l'axiome ii). Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{B}$, s'ils sont tous dénombrables, il en est de même de leur réunion. Si l'un des A_n, disons A_{n_0}, n'est pas dénombrable, son complémentaire l'est. Par suite, $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c \subset A_{n_0}^c$ est nécessairement dénombrable. En outre, on peut montrer que $\mathscr{B} \neq \mathcal{P}(E)$ si et seulement si E a un cardinal infini non dénombrable.*

Définition 1.4. *Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{T}$ une tribu sur E. Le couple $(E, \mathcal{T})$ est appelé un espace mesurable.*

Propriétés :

1. Si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \backslash B := A \cap B^c \in A$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{T}$.
3. Si $A_n \in \mathcal{T}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\overline{\lim}_n A_n$ et $\underline{\lim}_n A_n \in \mathcal{T}$.

Définition 1.5. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $H \subset E$ alors $\mathcal{T}_H := \{A \cap H : A \subset \mathcal{T}\}$ est une tribu sur H appelée tribu trace de $\mathcal{T}$ sur H.*

Proposition 1.3. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesurable, $H \subset E$. Si $\mathcal{T} = \sigma_E(\mathcal{F})$ alors $\mathcal{T}_H = \sigma_H(\mathcal{F}_H)$ où $\mathcal{F}_H = \{F \cap H : F \subset \mathcal{F}\}$.*

1.2.1 Tribus engendrées par une famille d'ensmbles

Proposition 1.4. *Si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$, est une famille quelconque de tribus sur $E, I \neq \emptyset$, alors $\mathcal{T} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.*

En effet, Soit $A \in \mathcal{T}$ alors $A \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$, comme les $\mathcal{T}_i$ sont des tribus alors $A^c \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$. Par suite, $A^c \in \mathcal{T}$. Pour la deuxième condition, soit $A_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$, ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$, d'ou la proposition.

Remarque. *La reunion de deux tribus n'est pas en générale une tribu.*

Définition 1.6. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu sur E engendrée par $\mathcal{F}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{F}$. Autrement dit c'est la plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{F}$. On la note $\sigma_E(\mathcal{F})$ ou tout simplement $\sigma(\mathcal{F})$ lorsqu'il n' y a pas de confusion possible.*

Remarque.

1. *Il n'est pas possible, en général, de caractériser de manière simple les éléments de* $\sigma_E(\mathcal{F})$.
2. $\sigma_E(\mathcal{F})$ *est caractérisée par les deux propriétés suivantes :*
   a) $\sigma_E(\mathcal{F})$ *est une tribu surE qui contient* $\mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}$ *tribu sur* $E \Longrightarrow \sigma_E(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}$.
3. *Si* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ *alors* $\sigma_E(\mathcal{F}_1) \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)$.
4. $\sigma_E(\mathcal{F}_1) = \sigma_E(\mathcal{F}_2) \Longleftrightarrow \mathcal{F}_1 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_2)$ *et* $\mathcal{F}_2 \subset \sigma_E(\mathcal{F}_1)$ *(très utile)*

Exemple 1.3.

1. *Si* $\mathcal{F} = \{A\}$ *alors* $\sigma_E(\mathcal{F}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$
2. *Soient* $\mathcal{F}_1$ *la famille des singletons de E et* $\mathcal{F}_2$ *la famille des parties finies de E. Alors* $\sigma_E(\mathcal{F}_1) = \sigma_E(\mathcal{F}_2) = \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$.
3. *Soit* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *une partition de E. Alors on a*

$$\sigma_E(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j \, : \, J \subset I, J \text{ est dénombrable ou } J^c \text{ est dénombrable} \right\}.$$

1.3 Tribu des Boreliens sur un espace topologique

Définition 1.7. *Soit* (E, T) *un espace topologique. La tribu borélienne de E, également appelée tribu des boréliens de E, est définie par* $\mathbf{B}(E) := \sigma_E(T)$. *Autrement dit, c'est la tribu engendrée-par les ouverts de E.*

Comme les tribus sont stables par passage au complementaire et que les fermés sont les complémentaires des ouverts, tout fermé est borélien. En fait :

Proposition 1.5. *La tribu borelienne de E est la plus petite tribu contenant tous les fermés de E.*

Preuve. *Soit* $\mathcal{T}$ *cette tribu. Comme* $\mathbf{B}(E)$ *est une tribu contenant les fermés, on a* $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{B}(E)$. *Inversement, la tribu* $\mathcal{T}$ *contient les complémentaires des fermés, c'està-dire les ouverts ; elle contient donc la tribu* $\mathbf{B}(E)$ *engendrée par les ouverts.* □

La tribu borélienne va contenir, en génèral, enormément de parties, que l'on ne peut pas, en general, toutes decrire. En particulier, elle contient :

1. Les intersections d'un ouvert et d'un fermé ; par exemple, dans $\mathbb{R}$, les intervalles semi-ouverts.
2. Les intersections denombrables d'ouverts, que l'on appelle les G_δ
3. Les réunions dénombrables de fermes, que l'on appelle les F_σ ;

Proposition 1.6. *Si E est un espace topologique sépare, en particulier si E est un espace métrique, alors toute partie dénombrable de E est borelienne. En particulier,* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *sont des boreliens de* $\mathbf{R}$.

Démonstration. *E étant sépare, les singletons* $\{x\}$ *sont fermes. Or pour toute partie dénombrable D de X, on peut écrire* $D = \bigcup_{x \in D}\{x\}$

Boréliens d'un espace topologique a base dénombrable d'ouverts : Un espace topologique (ou plus simplement métrique) (E, T) est à base dénombrable d'ouverts s'il existe une famille $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de E vérifiant :

$$\forall O \in T, \exists I \subset \mathbb{N}, O = \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Ainsi, un espace métrique (E, d) séparable i.e. contenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense est à base dénombrable d'ouverts puisque

$$\{B(x_n, r) : \quad n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}_+^*\}, \quad \text{où } B(x_n, r) \text{ est la boule de centre } x_n \text{ est de rayon } r,$$

est une telle base puisque $\mathbb{N} \times Q_+^*$ est dénombrable.
On déduit alors immédiatement la proposition suivante de la stabilité d'une tribu par réunion dénombrable (axiome ii)) et de la définition d'une tribu borélienne.

Proposition 1.7. *Soit E est un espace topologique possédant une base dénombrable d'ouverts* $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Alors*

$$\mathbf{B}(E) = \sigma(\{\Omega_n, n \in \mathbb{N}\})$$

1.3.1 Applications : Tribu Borelienne sur $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}^N$.

On se place sur la droite réelle $E = \mathbb{R}$. Il est immédiat que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ puisque l'on peut toujours l'écrire la réunion d'un (intervalle) ouvert et d'au plus deux singletons (fermés). Inversement, certaines familles d'intervalles engendrent la tribu borélienne. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{[a,+\infty[, a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]a,+\infty[, a \in \mathbb{Q}\}) \\ &= \sigma(\{[-\infty, a[[\,, a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{]-\infty, a\,], a \in \mathbb{Q}\}).\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$,

$$\{]\alpha,\beta[, \alpha,\beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\} = \{]\rho - r, \rho + r\,[, \rho \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

est une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Par suite $\mathbf{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{|\alpha,\beta|, \alpha,\beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\})$ Or $]\alpha,\beta[\, =]\alpha,+\infty\Big[\cap^c \Big[\beta,+\infty[$ et $]\alpha,+\infty\Big[= \bigcup_{n\geq 1}[\alpha + 1/n, +\infty[$ donc

$$\sigma(\{[\alpha,+\infty[, \alpha \in \mathbb{Q}\}) \supset \sigma(\{|\alpha,\beta|, \alpha,\beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta\}) = \mathbf{B}(\mathbb{R})$$

L'autre inclusion est immédiate (car les intervalles $[\alpha,+\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$). On procède de façon analogue pour les autres égalités.

La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la droit réelle achevée comme étant l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, muni de la relation d'ordre $\leq$ qui prolonge celle de $\mathbb{R}$ et qui vérifie

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

pour cette relation d'ordre, tout sous-ensemble non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit aussi sur $\overline{\mathbb{R}}$ des opérations algébriques prolongent celles dans $\mathbb{R}$ par,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad & (\pm\infty)+(\pm\infty) = x+(\pm\infty) = (\pm\infty)+x = \pm\infty \\
& (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty \\
& (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty \\
& (\pm\infty)x = x(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & Si\ x>0 \\ 0 & Si\ x=0 \\ \mp\infty & si\ x<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ ne sont pas définis.

On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ une topologie $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$ qui induit sur $\mathbb{R}$ sa topologie usuelle. cette topologie est définie par la base

$$\overline{\mathcal{J}} = \{]a,b[\ /\ a<b\ \ a,b\in\mathbb{R}\} \cup \{[-\infty,a[\ /a\in\mathbb{R}\} \cup \{]a,+\infty]\ /a\in\mathbb{R}\} \qquad (*)$$

Un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ et alors une réunion d'élément de $\overline{\mathcal{J}}$. Il est aisé de voir que $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$ est à base dénombrable, on vérifie que $\overline{\mathcal{J}}_{\mathbb{Q}}$ définie de la même manière que $\overline{\mathcal{J}}$ en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ dans $(*)$ est une base dénombrable pour $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}}$. On a $\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}} \cap \mathbb{R} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ et donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ est un sous-espace topologique de $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}})$ on prendra garde que $\overline{\mathcal{J}} \cap \mathbb{R}$ n'est pas égal à $\mathcal{J}$, l'ensemble des intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$, car $\overline{\mathcal{J}} \cap \mathbb{R}$ est l'ensemble des intervalles ouverts (bornés ou non) de $\mathbb{R}$.

Les intervalles du type $]a,+\infty[$ (resp.$]-\infty,a[$) forment une base de voisinages de $+\infty$ (resp.$-\infty$). Ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ converge vers $+\infty$ (resp.$-\infty$) si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq n_0 \quad x_n > M \quad (resp\ x_n < M)$$

On vérifie aisément que $\overline{\mathbb{R}}$, muni de cette topologie, est un espace compact. D'autre part cette topologie est métrisable. Elle est, par exemple, compatible avec la distance d définie par

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \quad \forall x,y \in \overline{\mathbb{R}}$$

où $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-\infty) = \frac{-\pi}{2}$.
On démontre aussi que toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ croissante (resp. décroissante) dans $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1} x_n$ (resp. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = \inf_{n\geq 1} x_n$). Maintenant si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, on dira que la série $\sum x_n$ est convergente vers x dans $\overline{\mathbb{R}}$, si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles, définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ est convergente vers x dans $\overline{\mathbb{R}}$ (sous resserve que toutes les sommes S_n soient définie) On note $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. En particulier si $(x_n)_{n\geq 1}$est positive dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors la série $\sum x_n$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

On note $\mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}})$ la tribu borélienne sur $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}})$. On a, d'après $(*)$, $\mathbf{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathbb{R} = \mathbf{B}(\mathbb{R})$. Notons que, entre autres,

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathcal{J}}) = \sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\{]a, +\infty],\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\{[-\infty, a[,\ a \in \mathbb{Q}\}).$$

Le cas de $\mathbb{R}^N$. On a le resultat important suivant

Proposition 1.8. *La tribu borelienne de $\mathbb{R}^N$ est engendrée par l'ensemble des pavés ouverts $\prod_{1\leqslant k\leqslant N} \,]a_k, b_k[$ lorsque a_k, b_k parcourent $\mathbb{R}$, avec $a_k < b_k$ (intervalles owerts $]a, b[$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, dans le cas $N = 1$).*

Démonstration. *Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les pavés ouverts. Comme les paves ouverts sont des ouverts, ils sont boréliens, donc $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{B}(\mathbb{R}^N)$. Inversement, tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est une réunion dénombrable de tels pavés ; on peut même prendre des pavés ouverts avec $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$; donc $\Omega \in \mathcal{T}$. On en déduit que $\mathbf{B}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{T}$, d'où l'égalité.*

1.4 Fonctions mesurables

Définition 1.4.1. *Soient $(E, \mathcal{T}_E)$ et $(F, \mathcal{T}_F)$ deux espaces mesurables, f une application de E dans F. On dit que f est $(\mathcal{T}_E, \mathcal{T}_F)$-mesurable si*

$$\forall A \in \mathcal{T}_F \ :\ f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_E$$

Exemple 1.4.

1. *Si $f : (E, \mathcal{T}_E) \longrightarrow (F, \mathcal{T}_F)$ est l'application constante alors f est mesurable.*
2. *Toute application $f : (E, \mathcal{P}(E)) \longrightarrow (F, \mathcal{T}_F)$ est mesurable.*
3. *Soit $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux tribus sur E, alors l'identité est mesurable si et seulement si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$*

Définition 1.8. *Si E et F sont deux espaces topologiques, on dit que l'application $f : E \to F$ est une application borélienne si elle est mesurable lorsque l'on munit E et F de leur tribu borélienne.*

Définition 1.9. *Soit E un ensemble. Pour toute partie $A \subseteq E$, on note $\mathbf{1}_A$ l'application $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$ definie par*

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A. \end{cases}$$

On l'appelle la fonction indicatrice ou caractéristique de A.

Proposition 1.4.1. *La fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ de A est mesurable si et seulement si A est une partie mesurable.*

En effet, supposons A mesurable. Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :

$$(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ A & \text{si} \quad 0 \notin B \text{ et } 1 \in B \\ A^c & \text{si} \quad 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ S & \text{si} \quad 0 \in B \text{ et } 1 \in B \end{cases}$$

Dans tous les cas $(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, et donc $\mathbf{1}_A$ est mesurable. Inversement, supposons $\mathbf{1}_A$ mesurable. Alors $A = (\mathbf{1}_A)^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{T}$.
On vérifie facilement que la fonction caractéristique satisfait les propriétées suivantes

Proposition 1.9.

1. $A \subset B \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ *et* $A = B \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$
2. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \inf(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$
3. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \sup(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$

4. $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$

5. $\mathbf{1}_{A\triangle B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$

6. $\mathbf{1}_{f^{-1}(A)} = \mathbf{1}_A \circ f$ *pour toute application* $f : E \longrightarrow F$ *et* $A \subset F$

7. $\mathbf{1}_{\cup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$ *et* $\mathbf{1}_{\cap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$

8. *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'ensemble deux a deux disjoint alors on a* $\mathbf{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n} = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{A_n}$

Proposition 1.4.2. *Soit* $(E, \mathcal{T}_E)$ *un espace mesurable, F un ensemble et* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Alors*

$$\mathcal{T} = \{A \subset F \ : \ f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_E\}$$

est une tribu sur F, de plus f est $(\mathcal{T}_E, \mathcal{T})$*-mesurable.*

Remarque. $\mathcal{T}$ *est dite tribu image.*

Démonstration.

i) *Soit* $A \in \mathcal{T}$ *on a* $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c \in \mathcal{T}_E$ *alors* $A^c \in \mathcal{T}$

ii) *Soit* $(A_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{T}$*, on a*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(A_n) \in \mathcal{T}_E$$

et donc

$$\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}$$

Comme $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_E$, $\forall A \in \mathcal{T}$*, f est mesurable.*

Proposition 1.4.3. *Soit E un ensemble,* $(F, \mathcal{T}_F)$ *un espace mesurable, alors*

$$\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{T}_F) = \{f^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{T}_F\}$$

est une tribu sur E et f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_F)$*-mesurable.*

Démonstration. *Immédiate.*

Remarque. $f^{-1}(\mathcal{T}_F)$ *est la plus petite tribu sur E rendant f mesurable.*

Théorème 1.4.1. *Soit $(E,\mathcal{T}_E)$ et $(F,\mathcal{T}_F)$ deux espaces mesurables, G une famille de parties de F engendrant $\mathcal{T}_F$, alors f est $(\mathcal{T}_E,\mathcal{T}_F)$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(G)\subset\mathcal{T}_E$*

Démonstration. *Si f est mesurable, on a $f^{-1}(G)\subset\mathcal{T}_E$. Comme $G\subset\mathcal{T}_F$ et que donc $f^{-1}(G)\subset f^{-1}(\mathcal{T}_F)$, on en déduit que $f^{-1}(G)\subset\mathcal{T}_E$.*

Inversement. Si $f^{-1}(G)\subset\mathcal{T}_E$ on a $f^{-1}(B)\in\mathcal{T}_E \quad \forall B\in G$ et donc $B\in\mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est tribu image, il s'ensuit que $G\subset\mathcal{T}$ ainsi $\mathcal{T}_F\equiv\sigma(G)\subset\mathcal{T}$. Par conséquent, f est mesurable.

Corollaire 1.1. *Soit E,F deux ensembles, $\mathcal{A},\mathcal{F}$ deux familles de parties de E et F respectivement et $f:E\longrightarrow F$ une application.*

Si $f^{-1}(\mathcal{F})\subset\mathcal{A}$ alors f est $(\sigma(\mathcal{A}),\sigma(\mathcal{F}))$-mesurable.

Démonstration. *Il suffit de prendre $\mathcal{T}_E=\sigma(\mathcal{A})$,$\mathcal{T}_F=\sigma(\mathcal{F})$ et appliquer le théorème 1.4.1 car on a $f^{-1}(\mathcal{F})\subset\mathcal{A}\subset\mathcal{T}_E$*

Corollaire 1.2. *Soient E,F deux ensembles, $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(F)$ et $f:E\longrightarrow F$ une application, alors*

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))=f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$$

Démonstration. *On a $\mathcal{F}\subset\sigma_F(\mathcal{F})$ et donc $f^{-1}(M)\subset f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{F}))$. Comme $f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{F}))$ est une tribu qui contient $f^{-1}(M)$ elle contient donc $\sigma_E(f^{-1}(\mathcal{F}))$. Inversement, posons $\mathcal{T}=\{A\in F \;\; f^{-1}(A)\in\sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))\}$. Comme $\mathcal{T}$ est une tribu sur F et $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}$ alors $\sigma(\mathcal{T})\subset\mathcal{T}$. Autrement dit, on a*

$$\forall A\in\sigma(\mathcal{F}) \quad : \quad f^{-1}(A)\in\sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$$

Par suite :

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))\subset\sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$$

Proposition 1.4.4. *Soit (E,T) et (F,T') deux espaces topologiques. $f:E\longrightarrow F$ est continue alors f est borélienne.*

Remarque. *Il existe des applications mesurables qui ne sont pas continues.*

Proposition 1.4.5. *Si $f:(E,\mathcal{T}_E)\longrightarrow(F,\mathcal{T}_F)$ et $g:(F,\mathcal{T}_F)\longrightarrow(G,\mathcal{T}_G)$ sont mesurables, alors $g\circ f$ est mesurable.*

Démonstration. *On a* $(g\circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, $\forall A \in \mathcal{T}_G$, *et comme* $\forall A \in \mathcal{T}_G$, $g^{-1}(A) \in \mathcal{T}_F$ *par suite, comme f est mesurable, alors* $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_E$

Proposition 1.4.6. *Soit* $(E_1, \mathcal{T}_1)$ *et* $(E_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces mesurables. Posons,*

$$\begin{aligned} P_1 : E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_1 \quad , \quad & P_2 \; : E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_2 \\ (x,y) &\mapsto x & (x,y) &\mapsto y \end{aligned}$$

Alors P_1 *(resp* P_2*) est mesurable de* $(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ *sur* $(E_1, \mathcal{T}_1)$ *(resp* $(E_2, \mathcal{T}_2)$*)*

Démonstration. *On a*

$$\forall A \in \mathcal{T}_1, \quad P_1^{-1}(A) = A \times E_2 \in \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$$

Donc P_1 *est mesurable. De la même manière* P_2 *est mesurable.*

Proposition 1.4.7. *Soit* $(E, \mathcal{T})$, $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ *des espaces mesurables et* $f_i : E \longrightarrow E_i$, $i = 1, 2$, *des applications. Alors*

$$\begin{aligned} F : &E \longrightarrow E_1 \times E_2 \\ &x \mapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$*-mesurable si et seulement si* f_1 *et* f_2 *sont mesurables*

Démonstration. *Si F est mesurable, alors* $f_1 = P_1 \circ F$, $f_2 = P_2 \circ F$ *sont mesurables comme la composée d'applications mesurables. Inversement, supposons que* f_1 *et* f_2 *sont mesurables, alors* $\forall A \in \mathcal{T}_1$, $B \in \mathcal{T}_2$ *on a*

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \times B) &= \{x \in F \ : \ (f(x), g(x)) \in A \times B\} \\ &= \{x \in E \ : \ f_1(x) \in A\} \cap \{x \in E \ : \ f_2(x) \in B\} \\ &= f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

Ainsi, F est mesurable.

1.5 Applications numériques mesurables

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est une application numérique sur E. On dit que f est finie si $f(X) \subset \mathbb{R}$. On dit que f est bornée si $f(X)$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}$. Lorsque f est application $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable d'un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on dit plus simplement que f est $\mathcal{B}$-mesurable (ou mesurable s'il n'y a pas d'ambiguïté). On note $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ l'ensemble des applications numériques sur X $\mathcal{B}$-mesurables. on note $\mathcal{M}_f(X, \mathcal{B})$ le sous-ensemble des applications finies et $\mathcal{M}_b(X, \mathcal{B})$ le sous-ensemble des applications bornées $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{M}_f(X, \mathcal{B})$ on confond, comme on a convenu de la faire en 3.2, f avec $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in X \quad \tilde{f}(x) = f(x)$.

Soit d une application numérique définie sur un ensemble X. pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\{f > a\} = \{x \in X \ / \ f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty])$$

$$\{f \geq a\} = \{x \in X \ / \ f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty])$$

$$\{f < a\} = \{x \in X \ / \ f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a[)$$

$$\{f \leq a\} = \{x \in X \ / \ f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

Si de plus g est une application numérique définie sur X, on pose

$$\{f < g\} = \{x \in X \ / \ f(x) > g(x)\}$$

$$\{f \leq g\} = \{x \in X \ / \ f(x) \leq g(x)\}$$

$$\{f = g\} = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$$

Théorème 1.5.1. *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est $\mathcal{B}$-mesurable*
2. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f > a\} \in \mathcal{B}$
3. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f \geq a\} \in \mathcal{B}$

4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f < a\} \in \mathcal{B}$
5. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{f \leq a\} \in \mathcal{B}$

Démonstration. *C'est une simple application de* 3.2.1 *compte tenu du fait que* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *est engendrée par* $\{]a, +\infty] \,/\, a \in \mathbb{R}\}$ *(resp* $\{[a, +\infty] \,/\, a \in \mathbb{R}\}$*), resp* $\{[-\infty, a[\,/\, a \in \mathbb{R}\}$*), resp* $\{[-\infty, a] \,/\, a \in \mathbb{R}\}$*)*

Remarque. *Dans ce théorème, on peut remplacer* $\forall a \in \mathbb{R}$ *par* $\forall a \in \mathbb{Q}$*.*

Théorème 1.5.2. *Soit* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ *alors*

1. $\{f < g\} \in \mathcal{B}$
2. $\{f \leq g\} \in \mathcal{B}$
3. $\{f = g\} \in \mathcal{B}$

Démonstration.

1. *On vérifie que* $\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{g > r\})$ *et donc* $\{f < g\} \in \mathcal{B}$ *d'après* 3.5.1 *et le fait que* $\mathcal{B}$ *soit stable pour* $\cap_d$ *et* $\cup_d$*.*
2. $\{f \leq g\} = X \setminus \{f > g\} \in \mathcal{B}$*.*
3. $\{f = g\} = \{f \leq g\} \setminus \{f < g\} \in \mathcal{B}$*.*

Théorème 1.5.3. *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ *alors les quatre applications numériques :* $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\underline{\lim} f_n$, $\overline{\lim} f_n$ *sont dans* $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$*. Où*

$$\forall x \in X \quad \inf f_n(x) = \inf(f_n(x)) \text{ et } \sup f_n(x) = \sup(f_n(x))$$

$$\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{p \geq n} f_p \text{ et } \overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{p \geq n} f_p$$

Démonstration.

1. *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. On a* $\{\inf f_n \geq a\} = \cap \{f_n \geq a\} \in \mathcal{B}$ *et* $\{\sup f_n > a\} = \cup \{f_n > a\} \in \mathcal{B}$*.*
2. *Que* $\underline{\lim} f_n$ *et* $\overline{\lim} f_n$ *soient dans* $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ *résulte de leur définition et* 1*.*

Corollaire 1.3. *Soit* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$*, alors*

$$f \wedge g, f \vee g, f^+, f^- \quad \text{sont dans } \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$$

avec

$$\forall x \in X \quad (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)), \ et \ (f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = -(f \wedge 0)$$

Démonstration. *En posant $f_0 = f$ et $f_n = g$ pour tout $n \geq 1$, on obtient $f \wedge g = \inf f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ et $f \vee g = \sup f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ d'après 1.5.3. La fonction nulle est dans $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ donc $f^+ = f \vee 0 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ et $f \wedge 0 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. Si $h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ alors $-h \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. En effet, $\{-h > a\} = \{h < -a\} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On en déduit que $f^- = -(f \wedge 0) \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$*

Corollaire 1.4. *Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ et soit $C = \{x \in X \backslash \lim f_n(x)$ existe$\}$ alors $C \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. *On a $C = \{\underline{\lim} f_n = \overline{\lim} f_n\}$ donc $C \in \mathcal{B}$ d'après 1.5.3 et 1.5.2*

Notation

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur un ensemble X. On dit que (f_n) converge simplement ou ponctuellement vers f si $\forall x \in X \quad \lim f_n(x) = f(x) \quad$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). On écrit $f_n \xrightarrow{s} f$ ou $\lim f_n = f(s)$ ou encore $\lim\limits_{s} f_n = f$. Si pour tout x dans X les suites $(f_n(x))$ sont croissantes (resp. décroissantes) , on écrit $(f_n) \uparrow$ et $f_n \uparrow f$ (resp. $(f_n) \downarrow$ et $f_n \downarrow f$).

Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que (f_n) converge uniformément vers f sur X si $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. On écrit $f_n \xrightarrow{u} f$ ou $\lim f_n = f(u)$ ou encore $\lim\limits_{u} f_n = f$. Il est immédiat que :

$$(f_n \xrightarrow{u} f) \longrightarrow (f_n \xrightarrow{s} f)$$

Corollaire 1.5. *Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ convergeant simplement vers f alors $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$.*

Démonstration. *On a clairement $\underline{\lim} f_n = f = \overline{\lim} f_n$ et donc $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$.*

Théorème 1.5.4. *Soit $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f, f + g$ (lorsque cette somme a un sens) et fg sont dans $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. En particulier, si $f, g \in \mathcal{M}_f(X, \mathcal{B})$ et $\alpha f, f + g$ et fg sont dans $\mathcal{M}_f(X, \mathcal{B})$ et muni de ces trois opérations, $\mathcal{M}_f(X, \mathcal{B})$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. *Le cas αf se ramène à celui de fg en considérant l'application g constamment égale à α.*

Traitons le cas $f,g \in \mathcal{M}_f(X,\mathcal{B})$.

Soit $\theta : X \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = (f(x),g(x))$. Cette application est $(\mathcal{B},\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. En effet, $P_1\circ\theta = f$ et $P_2\circ\theta = g$ sont $(\mathcal{B},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et on applique 3.4.3.

*Remarquons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{T}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (*3.4.6 *et remarque suivant* 3.4.6*). On a donc $(\mathcal{B},\mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}))$-mesurable.*

Soit $\phi_s : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\phi_s(x,y) = x+y$ et $\phi_p : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\phi_p(x,y) = xy$. Ces applications sont $(\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{T}_{\mathbb{R}},\mathcal{T}_{\overline{\mathbb{R}}})$-continues (la vérification est élémentaire), elles sont donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{T}_{\mathbb{R}}),\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable d'après 3.2.3. *Il s'ensuit, en appliquant* 3.1.1, *que $f+g = \phi_s\circ\theta$ et $fg = \phi_p\circ\theta$ sont $(\mathcal{B},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurables.*

Cas $f,g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$.

Posons $D = \{f = \pm\infty\}\cup\{g = \pm\infty\}$. Évidement, $D \in \mathcal{B}$.

On a $f|_{D^c} \in \mathcal{M}_f(D^c,\mathcal{B}\cap D^c)$ et $g|_{D^c} \in \mathcal{M}_f(D^c,\mathcal{B}\cap D^c)$ en vertu de 3.3.2, *d'où, en appliquant le cas précédent, $(f+g)|_{D^c} = f|_{D^c} + g|_{D^c} \in \mathcal{M}_f(D^c,\mathcal{B}\cap D^c)$*

On a $f|_D, g|_D \in \mathcal{M}(D,\mathcal{B}\cap D)$ d'après 3.3.2. *Pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a :*

$$((f+g)|_D)^{-1}(]a,+\infty]) = ((f+g)|_D)^{-1}(\{+\infty\}) = (\{f=+\infty\})\cup\{g=+\infty\}\cap D \in \mathcal{B}\cap D$$

D'où

$$(f+g)|_D \in \mathcal{M}(D,\mathcal{B}\cap D).$$

En appliquant 3.3.3, *on obtient que $f+g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$*

Le lecteur traitera le cas fg à titre d'exercice.

Corollaire 1.6. *Soit f une application numérique sur $(X,\mathcal{B})$ espace mesurable alors :*

1. *$f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ si et seulement si $f^+, f^- \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$.*
2. *Si $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ alors $|f| \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$, (avec $|f|(x) = |f(x)|$)*

Démonstration. *Si $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ alors $f^+, f^- \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ d'après* 1.3*. Ainsi, si $f^+, f^- \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ alors $f = f^+ - f^- \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ et si $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ alors $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$.*

Remarque. *Si* $|f| \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ *on n'a pas nécessairement que* $f \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$*. En effet, soit* $A \notin \mathcal{B}$ *fixée. Posons* $f := 1_A - 1_{A^c}$ *alors* $f \notin \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$*, par contre* $|f| = |1_A - 1_{A^c}| = 1_A + 1_{A^c} = 1 \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$*.*

1.6 Fonctions étagées mesurables

Nous allons introduire, dans ce paragraphe, un sous-ensemble très important de $\mathcal{M}(E,\mathcal{T},\overline{\mathbb{R}})$.

Définition 1.6.1. *Une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Autrement dit,* $f(E)$ *est une partie finie de* $\mathbb{R}$*.*

Toute fonction indicatrice d'un ensemble est étagée ; plus généralement, toute combinaison linéaire (finie) de fonctions indicatrices de sous ensembles est étagée. Nous allons voir qu'en fait les fonctions étagées sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables. En effet, toute fonction étagée possède une représentation canonique : si l'on écrit $f(E) = \{a_1, \dots, a_n\}$, avec $a_1, \dots, a_n$ distincts, alors on a

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{E_k} = \sum_{a \in f(E)} a \mathbf{1}_{\{f=a\}}$$

avec

$$E_k = \{f = a_k\} := f^{-1}(\{a_k\}).$$

Il est a noter que la représentation canonique est unique, par revenche une fonction étagée peut avoir plusieur représentations comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'ensembles. Les résultats qui suivent donne une caractérisation des fonctions étagées mesurables.

Proposition 1.6.1. *Soit* $(E,\mathcal{T})$ *un espace mesurable,* $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$ *une fonction étagée. Si* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ *alors* f *est* $\mathcal{T}$*−mesurable.*

Proposition 1.6.2. *Soit une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$*. Si* $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$ *est la la représentation canonique de* f *alors* f *est mesurable si et seulement si* A_k *est mesurable pour tout* $k \in \{1, \cdots, m\}$*.*

Théorème 1.6.1. *Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ une application mesurable positive. Alors il existe une suite croissante d'applications $\varphi_n : E \to \mathbb{R}_+$ étagées positives dont la limite est f. De plus, si f est bornée, la convergence est uniforme.*

Notons que, dans la dernière partie, f est supposée bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in E$, et pas seulement a valeurs finies.

Corollaire 1.7. *Pour toute application mestarable $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe une suite de fonctions etagées $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ on $\mathbb{C}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in E$. De plus, si f est bornee, la convergence est uniforme.*

En effet, il suffit d'appliquer le théorème a f^+ et a f^- si f est à valeurs réelles, puis a $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ lorsque f est à valeurs complexes.

Preuve du Théorème 1.6.1. Pour $n \geqslant 1$, on partage l'intervalle $[0, n]$ en $n2^n$ intervalles de longueur $1/2^n$, et l'on pose :

$$E_{n,k} = \begin{cases} \left\{ \frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n} \right\} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n2^n - 1, \\ \{f \geqslant n\} & \text{si} \quad k = n2^n \end{cases}$$

Comme f est mesurable les parties $E_{n,k}$, $0 \leqslant k \leqslant n2^n$, sont mesurables et forment une partition de E. On definit :

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{E_{n,k}},$$

c'est-A-dire que :

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{si } x \in E_{n,k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n2^n$$

Ainsi, chaque fonction φ_n est étagée positive. De plus, par construction, on a $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$. Montrons que $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, soit $x \in E$ alors

a) Soit $x \in E_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n} \right\}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n2^n - 1$, et on a $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$; mais :

$$\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2k}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}.$$

Ainsi,

Si $\frac{2k}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}$, on a $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$.

Si $\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}$, on a $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$.

b) Soit $x \in E_{n,n2^n} = \{f \geqslant n\}$, et on a $\varphi_n(x) = n$, et alors :

Si $n \leqslant f(x) < n+1$, il existe l, avec $n2^{n+1} \leqslant l < (n+1)2^{n+1}-1$, tel que $\frac{l}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{l+1}{2^{n+1}}$, de sorte que $\varphi_{n+1}(x) = \frac{l}{2^{n+1}} \geqslant n = \varphi_n(x)$

Si $f(x) \geqslant n+1$, alors $\varphi_{n+1}(x) = n+1 > n = \varphi_n(x)$

Montrons maintenant que $\varphi_n(x)$ converge vers $f(x)$. Soit $x \in E$ on a

a) Si $f(x) < +\infty$, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $f(x) < n_0$; alors, pour $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$, et on a bien $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$

b) Si $f(x) = +\infty$, alors $f(x) \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 1$; donc, pour tout $n \geqslant 1$ $\varphi_n(x) = n$, et $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty = f(x)$.

Pour terminer, il ne reste plus qu'à voir qu'il y a convergence uniforme lorsque f est bornée. Mais si $0 \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in S$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on choisit un entier $n_0 > M$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \varepsilon$, on a, pour $n \geqslant n_0$:

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \varepsilon.$$

ce qui achève la démonstration du théoreme.

Chapitre 2

Mesures positives

2.1 Mesures positives

Dans cette section, $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.1. *Une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de E est dite disjointe si pour tout $i \neq j$ on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

Définition 2.1.2. *Une application $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ est dite une mesure positive sur E si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'élément de $\mathcal{B}$, deux à deux disjointe, on a :*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-}additivit\acute{e}).$$

Le triplet $(E, \mathcal{B}, \mu)$ est appelé espace mesuré. Si $A \in \mathcal{B}$ le nombre positif $\mu(A)$ est la mesure de A.

Exemples :

1. Soit E un ensemble non vide, $A \subset X$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. Soit la tribu $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ et soit $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}^+$. On pose :

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad , \quad \mu(A) = \alpha \quad , \quad \mu(A^c) = \beta \quad \text{et} \quad \mu(X) = \alpha + \beta.$$

   Alors μ est une mesure positive sue $\mathcal{B}$.

2. Soit l'application μ_d définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \mu_d(A) = \begin{cases} |A| & \text{si A est fini} \\ +\infty & \text{si A est infini.} \end{cases}$$

   μ_d est une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$. On l'appelle mesure de dénombrement ou mesure de comptage sur E.

3. Soit E un ensemble infini muni de la tribu $\mathcal{T} := \{A \subset E : A$ ou A^c est au plus dénombrable $\}$. Soit l'application μ définie sur $\mathcal{T}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si A est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si non.} \end{cases}$$

   μ est une mesure positive sur $\mathcal{T}$.

4. Soit $a \in E$ et soit l'application δ_a définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \delta_a(A) = \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & si\ a \in A \\ 0 & si\ a \notin A \end{cases}$$

   δ_a est une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ appelée mesure de Dirac sur X. On appelle aussi masse de Dirac au point a.

5. Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E et $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit

$$\nu : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$$

avec

$$\nu(A) := \sum_{x_k \in A} m_k \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

Alors ν est une mesure positive sur E.

Propriétés : Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable. μ une mesure positive sur E. Alors on a les propriétés suivantes :

1. μ est additives, c'est-à-dire

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \ , \ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2. μ est monotone, c'est-à-dire

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \ , \ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

3. $\forall A, B \in \mathcal{B} \ , \ (A \subset B \ et \ \mu(A) < +\infty) \Rightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$

4. μ est finie si et seulement si elle est bornée.

   En effet si μ est finie (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$) alors

$$0 \leq \mu(A) \leq \mu(X) < +\infty \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

   Donc μ est bornée. La réciproque est immédiate.

Proposition 2.1.1. *Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{B}$. Alors pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ on a :*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \quad (\sigma\textit{-sous-addivité})$$

Preuve. *On pose : $B_1 = A_1$ et $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad \forall n \geq 2.$*

On a construit ainsi une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoint telle que

$$\forall n \geq 1, \quad B_n \subset A_n \ et \ \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$$

Par suite on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

puisque μ est monotone.

Remarques :

a) Pour toute suite finie $(A_n)_{1\leq n\leq p}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}^{p} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{p} \mu(A_n) \quad (sous-additivite).$$

b) Si $\mathcal{B}$ est finie alors μ est σ-additive si et seulement si elle est additive.

c) Si $\mu(X) = 1$, on dira que μ est une mesure de probabilité et que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace probabilisé.

Proposition 2.1.2. *Si μ et v sont deux mesures positives sur $\mathcal{B}$ et si $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}^+$ alors $\alpha\mu + \beta v$ est une mesure positive sur $\mathcal{B}$. En particulier l'ensemble des mesures positives sue $\mathcal{B}$ est un cône convexe.*

Preuve. *Immédiate*

2.1.2 Continuité d'une mesure positive

Le théorème suivant est très utile dans la théorie de la mesure.

Théorème 2.1.1. *Soit μ est une mesure positive sur $\mathcal{B}$. on a les deux propriétés suivantes.*

i) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\geq 0} \mu(A_n) \quad (\textit{continuité inferieure de } \mu).$$

ii) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{B}$ et s'il existe $N \geq 1$ tel que $\mu(A_N) < +\infty$ alors on a :

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\geq 0} \mu(A_n) \quad (\textit{ continuite superieure de } \mu).$$

Preuve. *i) On pose :* $B_1 = A_1$ *et* $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$

On construit ainsi une suite disjointe $(B_n)_{n\geq 1}$ *d'éléments de* $\mathcal{B}$ *telle que :*

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n \quad et \quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \quad \forall n \geq 1.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) &= \sum_{n\geq 1} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

ii) On se ramène à une suite croissante en posant :

$$C_n = A_N \setminus A_n \quad \forall n \geq 1.$$

On applique donc i) à la suite $(C_n)_{n\geq 1}$.

<u>Remarque :</u>

La condition $\mu(A_N) < +\infty$ pour un certain $N \geq 1$ est indispensable dans ii), comme le montre l'exemple suivant :

<u>Exemple :</u>

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ et $A_n = \{m \in \mathbb{N} \,/\, m \geq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et on a $\mu_d(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part nous avons

$$\mu_d\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_d(A_n) = +\infty.$$

Nous donnons maintenant un exemple d'application du théorème 2.1.1

Théorème 2.1.2. *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et soit μ l'application*

$$\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$$

Pour que μ soit une mesure positive il faut et il suffit que :

1. *Si A, B sont deux éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{B}$ alors*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

2. *Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{B}$ alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sup_{n\geq 0} \mu(A_n)$$

Corollaire 2.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E et soient μ et ν deux mesures positives <u>bornées</u> sur $\sigma(\mathcal{A})$. Si μ et ν coïncident sur $\mathcal{A}$ alors elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{A})$.*

Preuve. *On pose : $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) / \mu(A) = \nu(A)\}$ Grâce au théorème 2.1.1 on vérifie facilement que $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$. On conclut alors par le premier théorème des classes monotones.*

2.1.3 Mesures σ-finies

Définition 2.1.3. *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, une mesure positive μ sur E est dite σ-finie s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que :*

$$E = \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad et \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1.$$

L'espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$ sera dit fini ou σ-fini si μ est finie ou σ-finie.

L'importance de ces notions vient du fait que les mesures bornées jouissent de propriétés spéciales qui les rendent faciles à manier et que l'étude des mesures σ-finie peut souvent se ramener à celle des mesures bornées.

<u>Exemples :</u>

1. Toute mesure finie est σ-finie.
2. La mesure de dénombrement μ_d est σ-finie sur $\mathbb{N}$ puisque

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \quad et \quad \mu_d(\{n\}) < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. La mesure de dénombrement μ_d n'est pas σ-finie sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Si la tribu $\mathcal{B}$ est finie alors μ est σ-finie si et seulement si elle est finie.

Proposition 2.1.3. *Si μ est une mesure positive sur $\mathcal{B}$ alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes.*

i) μ est σ-finie sur $\mathcal{B}$

ii) il existe une suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que :

$$X = \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad et \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1;$$

iii) il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoint de $\mathcal{B}$ telle que :

$$X = \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad et \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1;$$

iv) il existe une partition $\mathcal{B}$-mesurable $(A_n)_{n\in I}$ de X $(I \in X)$ telle que :

$$\mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \in I$$

Preuve. *i) $\Rightarrow ii)$: Si μ est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n`geq1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $X = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.*

En posant $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ vérifie $ii)$.

ii) $\Rightarrow iii)$: *Si la condition* $ii)$ *est vérifiée on pose :*

$$B_1 = A_1 \quad et \quad b_n = A_n / A_{n-1} \quad \forall n \geq 2.$$

Alors $(B_n)_{n\geq 1}$ *est une suite disjointe d'éléments de* $\mathcal{B}$ *qui vérifie* $iii)$.

iii) $\Rightarrow iv)$: *Soit* $I = \{n \geq 1 \ : \ A_n \neq \emptyset\}$. *Alors* $(A_n)_{n\in I}$ *est une partition* $\mathcal{B}$*-mesurable de* X *qui vérifie* $iv)$

iv) $\Rightarrow i)$: *immédiate.*

2.2 Complétion des mesures positives :

Définition 2.2.1. *Soit* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* $A \subset E$. *On dit que* A *est* μ*-négligeable ou de mesure nulle s'il existe* $B \in \mathcal{T}$ *tel que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) = 0$

Remarque :

1. Si A est μ-négligeable, on a pas nécessairement que $A \in \mathcal{T}$.
2. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ensemble μ-négligeable alors $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est aussi μ-négligeable.

Définition 2.2.2. *Soit* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré, on dit que* $\mathcal{T}$ *est une tribu complète par rapport à la mesure* μ, (μ*-complète), si toute partie* μ*-négligeable appartient à* $\mathcal{T}$.

Remarque :

1. Si $\mathcal{T}$ est μ-complète, alors elle contient tous les ensembles de la forme $A \cup N$ et $A \Delta N$, où $A \in \mathcal{T}$ et N est μ-négligeable.
2. Toute mesure positive définie sur $\mathcal{P}(E)$ est complète.
3. Si l'ensemble vide est le seul ensemble μ-négligeable de $\mathcal{T}$, alors μ est complète.

Théorème 2.2.1. *Soit* $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré.*

Posons :

$$\mathcal{T}^* = \{X \subset E \quad : \quad \exists A, B \in \mathcal{T} \quad avec \quad A \subset X \subset B \quad et \quad \mu(B \backslash A) = 0\}$$

Alors $\mathcal{T}^*$ est une tribu sur E.

En effet,

1. *Soit $X \in \mathcal{T}^*$ alors $\exists A, b \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset X \subset B$. Donc, par passage au complémentaire,*

$$B^c \subset X^c \subset A^c.$$

   Et comme

$$\mu(A^c \backslash B^c) = \mu(B \backslash A) = 0$$

   On ait

$$X^c \in \mathcal{T}^*.$$

2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite d'élément de $\mathcal{T}^*$ ainsi, il existe $(A_n), (B_n)$ deux suites d'élément de $\mathcal{T}^*$ tel que*

$$A_n \subset X_n \subset B_n \quad et \quad \mu(B_n \backslash A_n) = 0$$

   Par suite :

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n X_n \subset \bigcup_n B_n$$

   Et comme

$$\mu\left(\bigcup_n B_n \backslash \bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigcup_n B_n \backslash A_n\right) = 0$$

   On en déduit que

$$\bigcup_n X_n \in \mathcal{T}^*.$$

   Par conséquent, $\mathcal{T}^*$ est une tribu sur E

Remarque : On a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$

Proposition 2.2.1. *Soit la famille*

$$\widehat{\mathcal{T}} = \{A \cup N \quad : \quad A \in \mathcal{T} \quad et \quad N \text{ est } \mu - negligeable\}$$

Alors :

$$\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}^*$$

En effet, soit $X \in \widehat{\mathcal{T}}$ montrons que $X \in \mathcal{T}^*$. On a : X s'écrit sous la forme $A \cup N \quad , \quad A \in \mathcal{T}$ et N est μ-négligeable, donc $\exists B \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset B^*$ et $\mu(B^*) = 0$ On a alors :

$$A \subset X = A \cup N \subset A \cup B$$

Et comme

$$\mu(A \cup B \backslash A) = \mu(B) = 0$$

On déduit que $X \in \mathcal{T}^*$ inversement, Si $X \in \mathcal{T}^*$, il existe $A, B \in \mathcal{T}$ tel que $A \subset X \subset B$ Ainsi, $X = X \cup (X \setminus A)$ et comme $\mu(X \setminus A) \leq \mu(B \setminus A) = 0$ On déduit que $X \in \widehat{\mathcal{T}}$

On va maintenant définir sur $\mathcal{T}^*$ une mesure positive complète qui prolonge μ. Pour ce fait, on pose

$$\mu^*(X) = \mu(A) \tag{$*$}$$

Pour tout $X \in \mathcal{T}^*$ et $A \in \mathcal{T}$ est choisi de sort que il existe $B \in \mathcal{T}$ qui vérifier

$$A \subset X \subset B \quad et \quad \mu(B \setminus A).$$

Théorème 2.2.2. *L'application $\mu^* : \widehat{\mathcal{T}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par $(*)$ est une mesure positive complète qui prolonge μ.*

Montrons tout d'abord que μ^* est bien définie, autrement dit μ^* ne dépend pas du choix de A.

Soit $X \in \mathcal{T}^*$, supposons qu'il existe $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ tel que

$$A_1 \subset X \subset B_1 \quad , \quad A_2 \subset X \subset B_2 \quad et \quad \mu(B_1 \setminus A_1) = \mu(B_2 \setminus A_2) = 0$$

Montrons que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, en effet, on a

$$A_1 \subset X = A_2 \cup X \setminus A_2 \subset A_2 \cup B_2 \setminus A_2.$$

Ainsi,

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(B_2 \setminus A_2)$$

Et comme $\mu(B_2 \setminus A_2) = 0$, on déduit que, $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. L'inégalité inverse est obtenue de la même manière. Donc $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ et μ est bien définie.

Montrons maintenant que μ^* est une mesure positive :

1. On a $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite deux à deux disjointe de $\mathcal{T}^*$, alors il existe une famille d'élément de $\mathcal{T}(A_n)_{n\geq 0}$ tel que
$$\mu^*(X_n) = \mu(A_n)$$
De plus les A_n $n \geq 0$, soit deux à deux disjoint car sinon $(X_n)_{n\geq 0}$ ne l'est plus. Ainsi,
$$\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 0} X_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 0} \mu^*(X_n)$$
μ^* est complète En effet, soit $X \in \mathcal{T}^*$ avec $\mu^*(X) = 0$.
Montrons que $\forall A \subset X \; alors \; A \in \mathcal{T}^*$.
On a
$$\emptyset \subset A \subset X \quad et \quad \mu^*(X \setminus \emptyset) = \mu^*(X) = 0$$
Donc
$$A \subset \mathcal{T}^*$$

Remarque : $(\mathcal{T}^*, \mu^*)$ est le plus petit prolongent complet de $(\mathcal{T}, \mu)$

Définition 2.2.3. *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, la tribu $\mathcal{T}^*$ introduite ci-dessus est appelée la tribu complétée de $\mathcal{T}$ pour la mesure μ.*

Le resultat suivant donne une caractérisation importante des fonction $\mathbb{T}^*$-mesurable.

Proposition 2.2.2. *Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{T}^*, \overline{\mathbb{R}}^+)$ si et seulement s'il existe deux applications f_1 et f_2 de $\mathcal{M}(E, \mathcal{T}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ telles que :*

$$f_1 \leq f \leq f_2 \quad et \quad f_1(x) = f_2(x) \; \mu^*\text{-presque partout.}$$

La condition est suffisante, car alors, si $a \in \mathbb{R}$,

$$[f_2 \leq a] \subset [f \leq a] \subset [f_1 \leq a]$$
$$[f_i \leq a] \in \mathcal{B} \quad i = 1,2 \quad et \quad \mu([f_1 \leq a] \setminus [f_2 \leq a]) = 0.$$

Elle est nécessaire. En effet, la propriété est vraie pour les fonctions étagées mesurables. Il suffit donc de montrer qu'elle est conservée par passage à la limite croissante :

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions ayant la propriété, c'est-à-dire : il existe 2 suites (g_n) et (α_n) telles que

$$g_n \leq f_n \leq g_n + \alpha_n \quad \alpha_n = 0 \quad pp(\mu) \quad \alpha_n, g_n \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}^+).$$

Alors

$$\sup_n g_n \leq \sup_n f_n \leq \sup_n (g_n + \alpha_n) \leq \sup_n g_n + \sup_n \alpha_n$$

d'où le résultat puisque $\sup_n g_n$ et $\sup_n \alpha_n \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ et $\sup_n \alpha_n = 0 \quad \mu - p.p.$

Remarque : Si f est partout finie, on ne peut pas nécessairement trouver f_2 partout finie.La proposition ne se généralise donc pas à $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{T}, \mathbb{R})$

Corollaire 2.2. *Pour que $A \in \mathcal{T}$, il faut et il suffit qu'il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $\mu^*(A_2 \setminus A_1) = 0$.*

Corollaire 2.3. *Si $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{T}, \mathbb{R})$ et si $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $g(x) = f(x)$ μ-presque partout, alors $g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{T}, \mathbb{R})$*

En effet, si $A = [f \neq g]$, on a $g = g \cdot \chi_A + g \cdot \chi_{A^c}$, par suite $g = g \cdot \chi_A + f \cdot \chi_{A^c}$ Soit B un ensemble de $\mathcal{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$, et h la fonction $(+\infty) \cdot \chi_A$; on a $0 \leq g^+ \, I_{\mathbb{N}} \leq h$ et $0 \leq g^- \, I_{\mathbb{N}} \leq h$ donc $g^+ \cdot \chi_A$ et $g^- \cdot \chi_A$ sont dans $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}^\mu, \overline{\mathbb{R}}^+)$ d'après la proposition. Donc $g \cdot \chi_A \in \mathcal{M}(E, \mathcal{T}, \mathbb{R})$, d'où le résultat.

2.3 Prolongement d'une mesure définie sur une algèbre

Dans toute cette section $\mathcal{A}$ désigne une algèbre sur un ensemble non vide E.

2.3.1 Mesure positive sur une algèbre

Définition 2.3.1. *Une application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ est une mesure positive sur l'algèbre $\mathcal{A}$ si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) pour toute suite d'éléments deux à deux disjoints $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \quad (\sigma - additistivite).$$

μ est dite σ-finie sur $\mathcal{A}$ s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$X = \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad et \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n \geq 1.$$

Remarques :

1. La proposition 2.1.3 reste vraie pour toute mesure positive μ définie sur l'algèbre $\mathcal{A}$.
2. Une mesure positive μ définie sur l'algèbre $\mathcal{A}$ est additive, monotone et sous-additive.

   Elle est aussi σ-sous-additive sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dira pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, on a $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Exemple :

Soit l'algèbre $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} / A\ fini\ ou\ A^c\ fini\}$ et soit $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & si\ A\ fini \\ 1 & si\ A^c\ fini \end{cases} \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Alors μ est une mesure positive sur l'algèbre $\mathcal{A}$.

2.3.2 Prolongement d'une mesure

Le théorème suivant, dit théorème de prolongement de Hahn-Caratheodory, se révèle d'une importance capitale dans la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.1. *Toute mesure positive μ sur l'algèbre $\mathcal{A}$ peut être prolongée en une mesure positive sur la tribu $\sigma(\mathcal{A})$. Si de plus μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$, ce prolongement est unique et il est également σ-fini.*

Preuve. *On se contente de montrer l'unicité du prolongement, lorsque μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$.*

μ étant σ-finie sur $\mathcal{A}$, il est clair que toute mesure positive prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})$ est σ-finie.

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})$.

Pour établir l'égalité de μ_1 et μ_2 on distingue les deux cas suivants :

Premier cas : μ est finie.

μ_1 et μ_2 sont alors finies et elles coïncident sue $\mathcal{A}$. Donc elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{A})$ d'après le corollaire 2.1

Deuxième cas : μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$

Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$X = \bigcup_{n\geq 1} B_n \quad et \quad \mu(B_n) < +\infty \quad v\forall n \geq 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit sur $\sigma(\mathcal{A})$ les deux mesures positives μ_1^n et μ_2^n par :

$$\mu_1^n(A) = \mu_1(A \cap B_n) \quad et \quad \mu_2^n(A) = \mu_2(A \cap B_n) \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Comme la suite $(A \cap B_n)_{n\geq 1}$ croit vers A, le théorème 2.1.1 entraine alors que

$$\mu_1(A) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu_1^n(A) \quad \mu_2(A) = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \mu_2^n(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

D'autre part μ_1^n et μ_2^n coïncident sur $\mathcal{A}$ et elle sont finies, donc elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{A})$ d'après le premier cas. Par suite on a :

$$\mu_1 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_1^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_2^n = \mu_2$$

.

Remarque : L'hypothèse "μ est σ-finie" est nécessaire pour avoir l'unicité du prolongement comme on peut le voir sur l'exemple suivant :

Exemple : Soit la mesure positive μ définie sur l'algèbre de Borel $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & si\ A = \emptyset \\ +\infty & si\ A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Il est clair que la mesure μ n'est pas σ-finie sur $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ et que les deux mesures positives distinctes μ_1 et μ_2, définies ci-dessous, prolongent μ à la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{A}_{\mathbb{R}})$:

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mu_1(A) = \mu_d(A) = \begin{cases} |A| & si\ A\ est\ fini \\ +\infty & si\ A\ est\ infini \end{cases}$$

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mu_2(A) = \begin{cases} 0 & si\ A = \emptyset \\ +\infty & si\ A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Le théorème de Hahn -Caratheodory est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 2.4. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives sur $\sigma(\mathcal{A})$. Si μ_1 et μ_2 coïncident sur $\mathcal{A}$ et si elles sont σ-finies sur $\mathcal{A}$ alors elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{A})$.*

Preuve. *Soit μ la restriction de μ_1 et μ_2 à $\mathcal{A}$. Alors μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$ et μ_1 et μ_2 prolongent μ à $\sigma(\mathcal{A})$. Elles sont donc égales, d'après le théorème 2.3.1.*

2.3.3 Théorème de Caratheodory

Proposition 2.3.1. *Soit E un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur $\sigma(\mathcal{A})$ tels que $\mu\big|_a = \mu'\big|_a$. On suppose que μ_1 et μ_2 sont σ-finie. Alors $\mu = \mu'$ sur $\sigma(\mathcal{A})$.*

Démonstration

Premier cas : μ est finie.

$$\mu(x) = \mu'(x) < +\infty \quad (x \in a)$$

Soit $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(a) \ : \ \mu(A) = \mu'(A)\}$.

On va voir que $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant l'algèbre a, donc elle contient $\sigma(a)$ d'après le théorème des classes monotones.

$\mathcal{M}$ est une classe monotone :

i) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante ($A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) d'éléments de $\mathcal{M}$.

$$\mu(A_n) = \mu'(A_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \bigcup_n A_n \in \sigma(a)$$

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \lim \mu(A_n) \\ &= \lim \mu'(A_n) \\ &= \mu'\left(\bigcup_n A_n\right)\end{aligned}$$

ii) Soit (B_n) suite décroissante ($B_{n+1} \subseteq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$) d'éléments de $\mathcal{M}$.

$$\bigcap_n B_n \in \sigma(a)$$

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_n B_n\right) &= \lim \mu(B_n) \\ &= \lim \mu'(B_n) \\ &= \mu'\left(\bigcap_n B_n\right)\end{aligned}$$

Deuxième cas : $X = \bigcup_n D_n$ avec $\mu(D_n) < +\infty, \quad D_n \subset a, \quad D_n \subseteq$

Soit $\mu_n(A) = \mu(A \cap D_n) \quad , \quad \mu'_n(A) = \mu'(A \cap D_n)$

On veut montrer que $\mu(A) = \mu'(A)$

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_n D_n\right) = \lim \mu(A \cap D_n) = \lim \mu'(A \cap D_n) = \mu'(A)$$

2.4 Mesure extérieure

Définition 2.4.1. *Soit*

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{P}(E) \longrightarrow & \quad \overline{\mathbb{R}}^+ \\ A \mapsto & \quad \nu(A) \end{aligned}$$

On dit que ν est une mesure extérieure sur E si et seulement si :

i) $\nu(\emptyset) = 0$.

ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$, *si* $A \subseteq B$ *alors* $\nu(A) \leq \nu(B)$.

iii) $\forall (A_n)$ *suite d'éléments de* $\mathcal{P}(E)$, *on a* $\nu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \nu(A_n)$.

Proposition 2.4.1. *Soit E un ensemble non vide, ν une mesure extérieure sur E.*

Alors

$$\mathcal{T}_\nu = \{A \subset E \quad / \quad \forall B \subseteq X \quad , \nu(B) = \nu(B \cap A) + \nu(B \cap A^c)\}$$

est une tribu sur E.

Les éléments de $\mathcal{T}_\nu$ sont dits ν-mesurables. De plus $\mu := \nu|_{\mathcal{T}_\nu}$ est une mesure positive sur E.

Démonstration :

i) $\emptyset \in \mathcal{T}_\nu$: $\quad \forall B \subseteq X \quad \nu(B \cap \emptyset) + \nu(B \cap \emptyset^c) = \nu(\emptyset) + \nu(B) = \nu(B)$

ii) Soit $A \in \mathcal{T}_\nu$, on a bien $A^c \in \mathcal{T}_\nu$.

iii) Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_\nu$, montrons que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}_\nu$.

Regardons d'abord que :

Si C_1 et C_2 deux éléments de $\mathcal{T}_\nu$, alors $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{T}_\nu$.

$$\nu(B \cap C_1 \cap C_2) + \nu(B \cap (C_1 \cap C_2)^c) = \nu(B)?$$

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \nu(B\cap C_1)+\nu(B\cap C_1^c)\\ &= \nu(B\cap C_1\cap C_2)+\nu(B\cap C_1\cap C_2^c)+\nu(B\cap C_1^c\cap C_2)+\nu(B\cap C_1^c\cap C_2^c)\\ &\geq \nu(B\cap C_1\cap C_2)+\nu(B\cap (C_1\cap C_2)^c)\end{aligned}$$

On a en fait l'égalité car $B\subset (B\cap (C_1\cap C_2))\cup(B\cap (C_1\cap C_2)^c)$

On a donc, si D_1 et D_2 dans $\mathcal{T}_\nu$, $\quad D_1\cup D_2\in\mathcal{T}_\nu$ (d'après ii))

Montrons maintenant que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}_\nu$

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n \left(\underbrace{A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k}_{\in\mathcal{T}_\nu} \right) = \bigcup_n A_n' \quad les\ A_k' \in \mathcal{T}_\nu.$$

Les A_k' sont deux à deux disjoints.

Soit $B\subseteq x \quad , \quad \nu(B)=\nu(B\cap A)+\nu(B\cap A^c)$?

Il suffit de montrer que

$$\nu(b)\geq \nu(B\cap A)+\nu(B\cap A^c).$$

$$\nu(B)\geq \nu\left(B\cap\bigcup_{k=0}^n A_k'\right)+\nu\left(B\cap\left(\bigcup_{k=0}^n A_k'\right)^c\right)\geq \nu\left(\bigcup_{k=0}^n B\cap A_k'\right)+\nu\left(B\cap\left(\bigcup_{k=0}^n A_k'\right)^c\right)$$

Montrons que si

$$\begin{cases} C\ et\ C' & \in\mathcal{T}_\nu\\ C\cap C' & =\emptyset\end{cases}$$

Alors $\forall B\subseteq X \quad , \quad \nu(B\cap C\cup B\cap C')=\nu(B\cap C)+\nu(B\cap C')$?

$$\begin{aligned}\nu(B\cap C\cup B\cap C') &= \nu(B\cap (C\cup C'))\\ &= \nu(B\cap (C\cup C')\cap C)+\nu(B\cap (C\cup C')\cap C^c)\\ &= \nu(B\cap C)+\nu(B\cap C') \quad (car \quad C\cap C'=\emptyset\ ,\ C'\subseteq C^c)\end{aligned}$$

Ainsi $(*)$ implique :

$$\begin{aligned}
\nu(B) &\geq \sum_{k=0}^{n} \nu(B \cap A_k^{'}) + \nu\left(B \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k^{'}\right)^c\right) \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \nu(B \cap A_k^{'}) + \nu(B \cap A^c) \qquad (**) \\
&\geq \nu(B \cap A) + \nu(B \cap A^c)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{T}_\nu$ est une tribu sur X.

Vérifions que $\mu = \nu / \mathcal{T}_\nu$ est une mesure sue $\mathcal{T}_\nu$.

Dans $(**)$, on prend $B = A = \bigcup_n A_n$ avec les A_n deux à deux disjoints.

$$\begin{aligned}
\nu(A) &\geq \sum_k \nu(A \cap A_k) \\
&\geq \sum_k \nu(A_k)
\end{aligned}$$

L'inégalité inverse est immédiate (car ν mesure extérieure).

Ainsi $\nu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \nu(A_n)$ si les A_n deux à deux disjoints et $A_n \in \mathcal{T}_\nu$.

Énonçons enfin :

Théorème 2.4.1. *(de Caratheodory)*
Soit E un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. Soit μ une mesure sur $\mathcal{A}$. Alors, on peut prolonger μ en une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\sigma(\mathcal{A})$. Plus précisément, soit $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ telle que :

$$\tilde{\mu} = \inf\left\{\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) \ : \ A \subset \bigcup_n A_n \text{ , } \textit{les } A_n \in \mathcal{A} \textit{ deux à deux disjoints}\right\}$$

Alors

(a) $\tilde{\mu} = \mu$ *sur* $\mathcal{A}$

(b) $\tilde{\mu}$ *est une mesure extérieure sur* E

(c) $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}_{\tilde{\mu}}$

(d) $\tilde{\mu}\big|_{\sigma(\mathcal{A})}$ *est une mesure sur* $(E,\sigma(\mathcal{A}))$ *prolongeant* μ.

Démonstration :

(a) Soit $A \in \mathcal{A}$

D'abord par définition de $\tilde{\mu}(A)$, on a, $\tilde{\mu}(A) \leq \mu(A) \quad (A \subset A,\ A_0 = A,\ A_n \neq \emptyset)$

$$\tilde{\mu}(A) \geq \mu(A) \quad \left(car\ \mu\ mesure\ sur\ A, \quad \mu(A) \leq \sum \mu(A_n) \quad si\ A \subset \bigcup_n A_n \right)$$

(b) i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 \quad (car\ \emptyset \in A)$

ii) Soit $A, B \in \mathcal{P}(X), \quad A \subseteq B$, montrons que $\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(B)$

$$S = \left\{ \sum_n \mu(A_n)\ :\ B \subseteq \bigcup_n A_n\ ,\ avec\ les\ A_n \in \mathcal{A} \right\}$$

$$S' = \left\{ \sum_n \mu(A_n)\ :\ A \subseteq \bigcup_n A_n\ ,\ avec\ les\ A_n \in \mathcal{A} \right\}$$

$S \subseteq S'$ donc $\inf S' \leq \inf S$.

iii) Soit $(E_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(X)$, montrons que :

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n E_n \right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(E_n)$$

Cette inégalité est évidemment vérifiée si $\exists n,\ \tilde{\mu}(E_n) = +\infty$

On se place alors dans le cas où $\tilde{\mu}(E_n) < +\infty \quad , \forall n$.

$$\tilde{\mu}(E_n) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 0} \mu(A_{k,n}) \quad : \quad E_n \subset \bigcup_k A_{k,n} \quad , \quad les\ A_{k,n} \in \mathcal{A} \right\}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour chaque n fixé, $\exists (A_{k,n})_R$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $E_n \subseteq \bigcup_k A_{k,n}$

et $\sum_k \mu(A_{k,n}) \leq \tilde{\mu}(E_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$

On a $\bigcup_n E_n \subseteq \bigcup_{n,k} A_{k,n}, \quad A_{k,n} \in \mathcal{A}$

$$\sum_n \sum_k \mu(A_{k,n}) \leq \sum_n \tilde{\mu}(E_n) + \sum_n \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leq \sum_n \tilde{\mu}(E_n) + \epsilon$$

Donc

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(E_n) + \epsilon \quad , \quad \forall \epsilon > 0$$

Donc

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \tilde{\mu}(E_n)$$

(c) Il suffit de montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_{\tilde{\mu}}$ car $\mathcal{T}_{\tilde{\mu}}$ tribu

Soit $A \in \mathcal{A}$, est ce que $A \in \mathcal{T}_{\tilde{\mu}}$?

$$\mathcal{T}_{\tilde{\mu}} = \{A \subseteq X \quad : \quad \forall B \subset X \quad , \quad \tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(B \cap A) + \tilde{\mu}(B \cap A^c)\}$$

$$\tilde{\mu}(B) \geq \tilde{\mu}(B \cap A) + \tilde{\mu}(B \cap A^c)?$$

On peut se placer dans le cas : $\tilde{\mu}(B) < +\infty$

Si $B \subset \bigcup_n A_n$ avec les $A_n \in \mathcal{A}$

$$B \cap A \subset \bigcup_n A_n \cap A \qquad (A_n \cap A \in \mathcal{A})$$
$$B \cap A^c \subset \bigcup_n A_n \cap A^c \qquad (A_n \cap A^c \in \mathcal{A})$$

Donc

$$\tilde{\mu}(B \cap A) \leq \sum_n \mu(A_n \cap A) \text{ et } \tilde{\mu}(B \cap A^c) \leq \sum_n \mu(A_n \cap A^c)$$

Par suite

$$\tilde{\mu}(B \cap A) + \tilde{\mu}(B \cap A^c) \leq \sum_n \mu(A_n \cap A) + \sum_n \mu(A_n \cap A^c)$$
$$\mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

Où la dernière inégalité découle du fait que

$$\mu(A_n) = \mu(\underbrace{A_n \cap A}_{\in \mathcal{A}}) + \mu(\underbrace{A_n \cap A^c}_{\in \mathcal{A}})$$

Ainsi

$$\mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) \leq \mu(B) \qquad \text{(En passant à l'inf)}$$

(d) Vient de la propriété précédente. D'où le théorème de Caratheodory.

Remarque : Si μ est σ-finie sur $\mathcal{A}$ alors $\tilde{\mu}$ est unique.

Théorème 2.4.2. *(Mesure de Borel-lebesgue sur $\mathbb{R}$)*
Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, notée λ, et appelée mesure de Borel-Lebesgue telle que :

$$\lambda(]a,b]) = b - a \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } a < b$$

Une telle mesure est invariante par translation, ie :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad \lambda(a + B) = \lambda(B)$$

Chapitre 3

Intégration par rapport à une mesure positive

Dans tout ce qui suit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

3.1 Intégrations des fonctions étagées mesurables positives

Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction étagée mesurable positive.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \tag{3.1}$$

sa representation canonique : $\varphi(E) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, où les a_i sont deux à deux distincts et $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\}) = \{\varphi = a_i\}$, et alors les A_i, $1 \leq i \leq n$, forme une partition de E.

Définition 3.1.1. *L'intégrale de φ sur E par rapport à la mesure positive μ est définie par :*

$$\int_E \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i). \tag{3.2}$$

Autrement dit,

$$\int_E \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(\{\varphi = a_i\}). \tag{3.3}$$

On dit que φ est μ-intégrable sur E si $\int_E \varphi d\mu$ est finie.

Remarque.

1. *Dans la définition de l'intégrale de* φ*, on fera la convention* $0 \cdot \infty = 0$.
2. *On a donc :*
$$0 \leqslant \int_E \varphi d\mu \leqslant +\infty$$
et l'intégrale peut être infinie : $\int_E \varphi d\mu = +\infty$ *si et seulement si il existe (au moins) un indice* k *tel que* $m(A_k) = +\infty$*, avec* $a_k \neq 0$
3. *Si* φ *est constante, égale à* a*, avec* $a \in \mathbb{R}_+$*, alors* $f = a\mathbf{1}_E$*, et :*
$$\int_E a d\mu = a\mu(E)$$
En particulier, avec la convention $0 \times \infty = 0$*, la fonction nulle a une intégrale égale à 0. Par contre, si* $a > 0$*, on a* $\int_E a d\mu < +\infty$ *si et seulement si* $\mu(E) < +\infty$.

Exemple 3.1.

(a) *Si* $f = \mathbf{1}_A$ *est une fonction indicatrice, mesurable :* $A \in \mathcal{T}$*, sa représentation canonique est :*
$$f = 1 \times \mathbf{1}_A + 0 \times \mathbf{1}_{A^c}$$
donc :
$$\int_E f dm = 1 \times m(A) + 0 \times m(A^c)$$
or $0 \times m(A^c) = 0$*, que* $m(A^c)$ *soit finie ou infinie. Donc :*
$$\int_E \mathbf{1}_A dm = m(A)$$

(b) *Dans l'espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_a)$ *où* $a \in \Omega$ *fixé, et* δ_a *est la mesure de Dirac de masse 1 concentrée au point* a *définie pour tout* $A \subset \Omega$*, par :*
$$\delta_a(A) := \chi_A(a) := \begin{cases} 1 & si\ a \in A \\ 0 & si\ a \notin A \end{cases}$$

c'est une mesure. Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction étagée alors

$$\int_\Omega \varphi d\xi_a = \varphi(a) \tag{3.4}$$

En effet, on a $\varphi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{\{\varphi = b_i\}}$ $\quad (b_1, b_2, \cdots b_n$ deux à deux distincts$)$ et comme $\varphi(a) \in \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ alors $\exists! j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\varphi(a) = b_j$ et donc $\delta_a(\{\varphi = b_j\}) = 1$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_a(\{\varphi = b_j\}) &= b_j \underbrace{\delta_a(\{\varphi = b_j\})}_{=1} \\ &= b_j = \varphi(a)\end{aligned}$$

Notons $\xi^+(\mathcal{T})$ l'ensemble de toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui sont étagées $\mathcal{T}$-mesurable. C'est un cône positif : $\quad \forall \varphi, \psi \in \xi^+(\mathcal{F})$ et $\forall c \in \mathbb{R}_+$

1. $\varphi + \psi \in \xi^+(\mathcal{F})$
2. $c\varphi \in \xi^+(\mathcal{F})$
3. $\varphi . \psi \in \xi^+(\mathcal{F})$

Proposition 3.1.1. *Pour toutes $\varphi, \psi \in \xi^+(\mathcal{F})$ et tout $c \in \mathbb{R}_+$, on a :*

1. $\int_\Omega (\varphi + \psi) d\mu = \int_\Omega \varphi d\mu + \int_\Omega \psi d\mu$
2. $\int_\Omega (c\varphi) d\mu = c \int_\Omega \varphi d\mu$
3. *Si $\varphi \leq \psi$ sur Ω (i,e : $\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in \Omega$), alors*

$$\int_\Omega \varphi d\mu \leq \int_\Omega \psi d\mu$$

Démonstration. 1. *Soient $\varphi, \psi \in \xi^+(\mathcal{F})$, écrivons les sous-formes canonique :*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{où} \quad A_i = \{\varphi = a_i\}$$

$$\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j} \quad où \quad B_j = \{\psi = b_j\}$$

$$\begin{cases} les \quad a_1, \cdots, a_n \text{ sont deux à deux distincts} \\ \quad b_1, \cdots, b_m \text{ sont deux à deux distincts} \\ \quad \{A_1, \cdots, A_n\} \text{ et } \{B_1, \cdots, B_m\} \text{ sont deux partitions de } \Omega \qquad (A_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \qquad (\textit{forme simple}) \\ \psi &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} b_j \chi_{A_i \cap B_j} \qquad (\textit{Écriture simple}) \\ \varphi + \psi &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}, \quad A_i \cap B_j \neq \emptyset \end{aligned}$$

et comme $\{A_i \cap B_j : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m \quad , \quad A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$ *est une partition de* Ω *On a,*

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (a_i) \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) \\ &= \int_\Omega \varphi d\mu + \int_\Omega \psi d\mu \end{aligned}$$

2. *Évidente*
3. $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\{\varphi = a_i\}}$ *et* $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{\{\psi = b_j\}}$

(Sous formes canonique $A_i = \{\varphi = a_i\}$ et $B_j = \{\psi = b_j\}$)

Alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad et \quad \psi = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{A_i \cap B_j} \tag{3.5}$$

(3.1) *: représentation disjoints de φ et ψ.*

Vu les remarques. (définition 3.1.1).

Si $x \in \Omega \quad , \quad \exists i_0, j_0 \quad : \quad x \in A_{i_0} \cap B_{j_0} \qquad (\Omega = \bigcup_i \bigcup_j A_i \cap B_j)$

$$\varphi(x) = a_{i_0} \leq \psi(x) = b_{j_0} \qquad (si\ x \in A_i \cap B_j \Rightarrow \varphi(x) = a_i \leq b_j)$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \int_\Omega \psi d\mu\end{aligned}$$

$$(\forall i, j \quad , \quad a_i \leq b_j \quad si \quad A_i \cap B_j \neq \emptyset)$$

Corollaire 3.1. *Si $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{E}_+$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\int_S \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\right) dm = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\int_S f_k dm\right)$$

En particulier :

$$\int_S \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}\right) dm = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m(A_k)$$

quels que soient les ensembles mesurables $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ et quels que soient les nombres réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Il est important de noter que cette dernière égalité a lieu, même si la somme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$ n'est pas la représentation canonique de la fonction étagée positive $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$. On n'a donc plus besoin, à partir de maintenant, d'utiliser la représentation canonique pour écrire l'intégrale de f. En fait, cette représentation canonique nous a juste servi à montrer que l'expression $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k m(A_k)$ ne dépend pas de la représentation de la fonction étagée positive f comme combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{1}_{A_k}$, à coefficients positifs, de fonctions indicatrices mesurables.

3.2 Intégration des fonctions mesurables positives à valeurs dans $[0,+\infty]$

Définition 3.2.1. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$ une fonction.*

1. *On appelle l'intégrale de f sur Ω par rapport à μ, le nombre donné par*

$$\int_\Omega f\,d\mu := \sup\left\{\int_\Omega \varphi d\mu \quad : \quad \varphi \in \xi^+(\mathcal{F}) \text{ et } \varphi \leq f\right\} \tag{3.6}$$

2. *On dit que f est μ-intégrable sur Ω si et seulement si* $\displaystyle\int_\Omega f\,d\mu < +\infty$

Proposition 3.2.1. *(i) Si $f \in \xi^+(\mathcal{F})$ alors la définition de $\int_\Omega f\,d\mu$ donné au paragraphe (1) coïncide avec celle donnée par (3.6)*

(ii) Si $f,g : \Omega \longrightarrow [0,+\infty]$ mesurables telles que $f \leq g$ alors : $\int_\Omega f f \mu \leq \int_\Omega g d\mu$

(iii) $\forall c \in \mathbb{R}_+, \forall f : \Omega \longrightarrow [0,+\infty]$ mesurable : $\int_\Omega c f\,d\mu = c\int_\Omega f\,d\mu$

Preuve. *(i) et (iii) sont clairs*

(ii) conséquence de (3.6)

Notons $\xi_f^+ = \{\varphi \in \xi^+(\mathcal{F}) \quad \varphi \leq f\} \subset \xi_g^+ \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad (f \leq g)$

$$\int_\Omega f\,d\mu := \sup_{\varphi\in\xi_f^+}\int_\Omega \varphi d\mu \leq \sup_{\psi\in\xi_g^+}\int_\Omega \psi d\mu = \int_\Omega g d\mu$$

Théorème 3.2.1. ***(de convergence monotone / ou de Beppo-Levi)***

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Notons $f := \sup\limits_{n\geq 0} f_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n$

Alors : f est mesurable à valeurs dans $[0,+\infty]$ sue Ω et on a

$$\int_\Omega (\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n)d\mu = \int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega (\sup_{n\geq 0} f_n)d\mu = \sup_{n\geq 0}\int_\Omega f_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f_n d\mu$$

En particulier, f est μ-intégrable sur Ω si et seulement si $\sup_{n\geq 0}\int_\Omega f_n d\mu < +\infty$

Démonstration. *On a* $f_n \leq f \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \overset{(3.2.1)}{\Rightarrow} \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sup_n \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu \tag{3.7}$$

Reste l'autre inégalité, à savoir que

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \sup_{n\geq 0} \int_\Omega f_n d\mu \tag{3.8}$$

Soient $c \in]0.1[$ *fixé, et* $\varphi \in \xi_f^+$ *(i,e :* $\varphi \in \xi^+(\mathcal{F})$ *et* $\varphi \leq f$*) fixé*

Écrivons $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ *où* $\begin{cases} a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{R}_+ \\ A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{F} \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, *notons* $\Omega_n = \{f_n \geq c\varphi\}$

- $\Omega_n \in \mathcal{F}$ *(vrai)*
- $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ *est croissante* *(vrai)*
- $\bigcup_{n\geq 0} \Omega_n = \Omega$ *(à vérifier)*

Soit $x \in \Omega$, *on a deux cas :*

Cas 1 : *si* $\varphi(x) = 0 \quad x \in \bigcap_{n\geq 0} \Omega_n$

Cas 2 : *si* $\varphi(x) > 0$ *dans ce cas* $c\varphi < \varphi(x) \leq f(x) = \sup_{n\geq 0} f_n(x)$

Par définition de la borne sup, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $c\varphi(x) < f_{n_0}(x) \leq f(x) \Rightarrow x \in \Omega_{n_0}$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \geq (f_n\chi_{\Omega_n})(x) \geq c\varphi(x)\chi_{\Omega_n} \quad \forall x \in \Omega$

$$f_n \geq f_n \chi_{\Omega_n} \geq c\varphi\chi_{\Omega_n} \tag{3.9}$$

$\Rightarrow$ *Par la propriété de* $\int$ *:*

$$\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega f_n\chi_{\Omega_n} d\mu \geq \int_\Omega c\varphi\chi_{\Omega_n} d\mu = c\int_\Omega \varphi\chi_{\Omega_n} d\mu$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f_n d\mu \geq c\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap \Omega_n) \quad , \quad \forall n \geq 0 \tag{3.10}$$

A la limite dans (3.10) sur n :

$$\begin{aligned}
\sup_{n\geq 0}\int_\Omega f_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega f_n d\mu &\overset{\overline{\mathbb{R}}_+}{=} c\sum_{i=1}^{m} a_i \lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu(A_i\cap\Omega_n)\\
&= c\sum_{i=1}^{m} a_i\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_i\cap\Omega_n\right) = c\sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i) = c\int_\Omega \varphi d\mu
\end{aligned}$$

$$\sup_{n\geq 0}\int_\Omega f_n d\mu \geq c\int_\Omega \varphi d\mu \quad , \quad \forall c\in]0.1[\ et\ \forall\varphi\in\xi_f^+$$

$$\Rightarrow \sup_{n\geq 0}\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\Omega \varphi d\mu \quad \forall\varphi\in\xi_f^+$$

$$\Rightarrow \sup_{n\geq 0}\int_\Omega f_n d\mu \geq \sup_{n\geq 0}\int_\Omega \varphi d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$$

D'où le (3.8)

Remarques et conséquence :

(a) Si $f_n = \chi_{A_n}$, (f_n) croissante $\Rightarrow (A_n)$ croissante.

$$\begin{aligned}
\sup_{n\geq 0}\int_\Omega \chi_{A_n} d\mu &= \sup_{n\geq 0}\mu(A_n)\\
&= \int_\Omega \sup_{n\geq 0}\chi_{A_n} d\mu\\
&= \int_\Omega \chi_{\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n} d\mu\\
&= \mu\left(\bigcup A_n\right)
\end{aligned}$$

C'est la propriété de la continuité croissante de μ

(b) Soit $f:\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$,$\mathcal{F}$-mesurable.

Par le théorème d'approximation, $\exists(\varphi_n)$ une suite croissante d'éléments de $\xi_f^+(\mathcal{F})$ qui converge simplement sur Ω vers f.

$$f = \sup_{n\geq 0}\varphi_n \overset{\text{Théorème B-L}}{\Rightarrow} \int_\Omega f\, d\mu = \sup_n \int_\Omega \varphi_n d\mu \tag{3.11}$$

Notons que $\int_\Omega f\ d\mu$ ne dépend pas de la suite (φ_n). Ceci nous donne une façon de calculer

$\int_\Omega f\,d\mu$, en prenant par exemple la suite suivante :

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{\{\frac{k}{2^n}\le f\le \frac{k+1}{2^n}\}} + n\chi_{\{f\ge n\}}$$

Corollaire 3.2. *(i-ii)* $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+ \quad , \quad \forall f,g\in £^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F})$

On a

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g)d\mu = \alpha\int_\Omega f\ d\mu + \beta\int_\Omega g\ d\mu \qquad \textit{(Quasi-linéarité sur } £^0_{\mathbb{R}_+}\textit{)}$$

(iii) *Si* $f\le g$ *alors*

$$\int_\Omega f\ d\mu \le \int_\Omega g\ d\mu \qquad \textit{(Monotonie)}$$

Preuve. *(i-ii)* *Si* $f,g\in £^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F}) \quad , \quad \exists(\varphi_n)_{n\ge0}$ *(resp* $(\psi_n)_{n\ge0}$*) deux suites croissantes dans* $\xi^+(\mathcal{F})$ *(croissante)*

Par Beppo-Levi :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(\alpha f+\beta g)d\mu &= \int_\Omega \sup_{n\ge0}(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)d\mu\\
&= \sup_{n\ge0}\int_\Omega \underbrace{(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)}_{\subset\xi^+(\mathcal{F})}d\mu\\
&= \sup_{n\ge0}\left[\alpha\int_\Omega\varphi_n d\mu+\beta\int_\Omega\psi_n d\mu\right]\\
&\overset{limite}{=} \alpha\sup_{n\ge0}\int_\Omega\varphi_n d\mu+\beta\int_\Omega\psi_n d\mu\\
&\overset{(B\text{-}L\ dans\ \overline{\mathbb{R}}_+)}{=} \alpha\int_\Omega f\,d\mu+\beta\int_\Omega g\ d\mu \qquad (\xi^+(\mathcal{F})\xrightarrow{B\text{-}L} £^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F}))
\end{aligned}$$

(iii) *évidente.*

$\xi^+_f(\mathcal{F})\subset\xi^+_g(\mathcal{F})$ *lorsque* $f\le g$

$$\Rightarrow \int_\Omega f\,d\mu = \sup_{\varphi\in\xi^+_f}\int_\Omega\varphi\,d\mu \le \sup_{\psi\in\xi^+_g}\int_\Omega\psi\,d\mu = \int_\Omega g\ d\mu$$

Corollaire 3.3. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\pounds^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F})$*

Alors

$$\int_\Omega\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega f_n d\mu \qquad (**)$$

Application de (3.3)

Remarque. *Si $f_n = \chi_{A_n}$ où $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints. On retrouve $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_n)$ (la σ-additivité de μ).*

Lemme de Fatou :

Lemme 3.2.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\pounds^0_{\mathbb{R}_+}$, alors on a :*

$$\int_\Omega \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n d\mu$$

Preuve. *Pour tout $n\geq$, notons $g_n := \inf_{k\geq n} f_k \in \pounds^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F})$ est croissante.*

on a $\liminf_n f_n := \sup_n g_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} g_n \in \pounds^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F})$

Et $\forall n\geq 0$, $\int_\Omega g_n d\mu \leq \int_\Omega f_k d\mu$,$\forall k\geq n$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_\Omega g_n d\mu \leq \inf_{k\geq n}\int_\Omega f_k d\mu \\
&\overset{B\text{-}L}{\Rightarrow} \sup_{n\geq 0}\int_\Omega g_n d\mu \overset{B\text{-}L}{=} \int_\Omega \sup_{n\geq 0} g_n d\mu \\
&\qquad = \int_\Omega \liminf_n f_n d\mu \\
&\qquad \leq \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq n}\int_\Omega f_k d\mu\right) = \liminf_n\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)
\end{aligned}$$

Remarque. *N.B " $\leq$ " dans Fatou peut être $<$! (Trouver des exemples)*

Définition 3.2.2. *Soit $A\in\mathcal{F}$, soit $f\in\pounds^0_{\mathbb{R}_+}(\Omega,\mathcal{F})$.*

On pose par définition $\displaystyle\int_A f d\mu := \int_\Omega f.\chi_A d\mu \in \mathbb{R}^+$ qu'on appelle "l'intégrale de f sur A".

Si $\displaystyle\int_A f d\mu < +\infty$, on dit que f est μ-intégrable sur A.

Théorème-Définition :(Mesures positives à densité)

Soit $f \in £^0_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\Omega, \mathcal{F})$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, posons $\gamma_f(A) \overset{\text{Def}}{:=} \int_A f\, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Alors :

1. γ_f est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$
2. $\forall g \in £^0_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\Omega, \mathcal{F})$: $\int_\Omega g\, d\gamma_f = \int_\Omega g.f\, d\mu$

γ_f est la mesure à densité f par rapport à μ

Preuve.

3.3 Intégration des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 3.3.1. *(a) Soit* $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [0, +\infty]$ *une fonction mesurable.*

On dit que f est μ-intégrable sur Ω si et seulement si f^+ et f^- sont μ-intégrables sur Ω.

Dans ce cas, on pose :

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu$$

Avec $f^+ := \max(f, 0)$ *et* $f^- = \max(-f, 0)$ *sont dans* $£^0_{\overline{\mathbb{R}}_+}(\Omega, \mathcal{F})$

On a $f = f^+ - f^-$ *et* $|f| = f^+ + f^-$

(b) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction mesurable.*

On dit que f est μ-intégrable sur Ω si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont μ-intégrable sur Ω.

Dans ce cas, on pose :

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega Re(f) d\mu + i \int_\Omega Im(f) d\mu \in \mathbb{C}$$

Critère d'intégrabilité :

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ une fonction mesurable.

Alors f est μ-intégrable $\Leftrightarrow |f|$ est μ-intégrable sur Ω.

Preuve. *(a) Soit* $f :\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mesurable.*

$\Rightarrow$) *Si f est μ-intégrable, alors par (3.3.1) : f^+ et f^-le sont.*

Or

$$|f| = f^+ + f^- \Rightarrow |f| \text{ est } \mu\text{-intégrable}$$

$\Leftarrow$) *Si $|f|$ est μ-intégrable,* $f^+ + f^- = |f| \Rightarrow \begin{cases} f^+ \leq |f| \\ f^- \leq |f| \end{cases}$

$$\max\left(\int_\Omega f^+ d\mu, \int_\Omega f^- d\mu\right) \leq \int_\Omega |f| d\mu < +\infty$$

(b) Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable.

L'équivalence résulte de (3.3.1) et des inégalités suivantes et (a)

$$|Re(f)| \leq |f| \quad et \quad |Im(f)| \leq |f|$$

Et

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

Théorème 3.3.1. ***(Linéarité de l'intégrale :)***
Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ deux fonctions μ-intégrables sur Ω. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$
Alors $\alpha f + \beta g$ est μ-intégrable sur Ω, et de plus

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu \quad \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Notation :

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $\pounds^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est l'ensemble des fonctions μ-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$

$\pounds^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un $\mathbb{K}$-e.v (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).

Et de plus, l'application

$$\begin{aligned} \pounds^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \int_\Omega f d\mu \end{aligned}$$

est linéaire bien définie.

Preuve. *(a) On a*

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|$$
$$\int_\Omega |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_\Omega (|\alpha||f| + |\beta||g|) d\mu = |\alpha| \int_\Omega |f| d\mu + |\beta| \int_\Omega |g| d\mu$$

Par le critère d'intégrabilité, $\alpha f + \beta g$ *est* μ*-intégrable sur* Ω.

(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, on se ramène au cas réel par* $Re()$ *et* $Im()$

Donc , on peut supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Dans ce cas : il suffit de montrer

$$\int_\Omega (f+g) d\mu \overset{(i)}{=} \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g \, d\mu \quad et \quad \int_\Omega (\alpha f) d\mu \overset{(ii)}{=} \alpha \int_\Omega f d\mu$$

Montrons (i) *:* *Notons* $h = f + g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable* μ*-intégrable.*

$$\begin{cases} h & = h^+ - h^- \\ & = f^+ - f^- + g^+ - g^- \end{cases} \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_\Omega (h^+ + f^- + g^-) d\mu = \int_\Omega (f^+ + g^+ + h^-) d\mu \quad dans \ \overline{\mathbb{R}}_+ \\
&\Rightarrow \int_\Omega h^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu + \int_\Omega g^- d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega g^+ d\mu + \int_\Omega h^- d\mu \\
&\Rightarrow \int_\Omega h^+ d\mu - \int_\Omega h^- d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu + \int_\Omega g^+ d\mu - \int_\Omega g^- d\mu \\
&\Rightarrow \int_\Omega h \, d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g \, d\mu
\end{aligned}$$

Reste (ii)

$$\int_\Omega \alpha f d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu \Rightarrow \quad \bullet \ si \ \alpha \geq 0 \quad ,(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \quad (\alpha f)^- = \alpha f^-$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha f \, d\mu &= \int_\Omega (\alpha f)^+ d\mu - \int_\Omega (\alpha f)^- d\mu \\ &= \alpha \int_\Omega f^+ d\mu - \alpha \int_\Omega f^- d\mu \\ &= \alpha \left(\int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \right) \\ &= \alpha \int_\Omega f \, d\mu\end{aligned}$$

• *si* $\alpha < 0$ *, alors* $(\alpha f)^+ = \alpha f^+ \quad (\alpha f)^- = \alpha f^-$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha f \, d\mu &= \int_\Omega (\alpha f)^+ d\mu - \int_\Omega (\alpha f)^- d\mu \quad (dans\ \mathbb{R}) \\ &= \int_\Omega (-\alpha) f^- d\mu - \int_\Omega (-\alpha) f^+ d\mu \\ &= (-\alpha) \int_\Omega f^- d\mu - (-\alpha) \int_\Omega f^+ d\mu \\ &= \alpha \left(\int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \right) \\ &= \alpha \int_\Omega f \, d\mu\end{aligned}$$

Formule d'interversion :

Démonstration. *(Corollaire à B-L)*

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré.*

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ *une suite de fonctions de* Ω *dans* $[0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$

Alors

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \quad (dans\ \overline{\mathbb{R}}_+)$$

$\rightarrow$ *Poser* $g_n := \sum_{j=0}^{\infty} f_j : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

La suite (g_n) *est croissante :* $\sup_{n \geq 0} g_n \overset{dans\ \overline{\mathbb{R}}_+}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Par Beppo-Levi :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\mu = \int_\Omega (\sup_{n\geq 0} g_n) d\mu &\overset{B\text{-}L}{=} \sup_{n\geq 0} \int_\Omega g_n d\mu \\
&= \sup_{n\geq 0} \int_\Omega \left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right) d\mu \\
\textit{Quasi-linéarité de } \pounds^0(\Omega, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+) &= \sup_{n\geq 0} \sum_{j=0}^{n} \int_\Omega f_j d\mu \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{j=0}^{n} \int_\Omega f_j d\mu \\
&\overset{\overline{\mathbb{R}}_+}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega f_n d\mu
\end{aligned}$$

Théorème de linéarité : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et si $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ μ-intégrable.

Alors $\alpha f + \beta g$ est μ-intégrable et en plus

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g\ d\mu$$

$$\pounds^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad f \textit{ est } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{K})\text{-mesurable et } \mu\text{-intégrable sur } \Omega\}$$

$$\overset{\text{Critère d'intégrabilité}}{=} \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad f \textit{ est } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{K})\text{-mesurable et } \int_\Omega |f| d\mu < \infty\}$$

C'est un $\mathbb{K}$-e.v et de plus :

L'application

$$\begin{aligned}
\|.\|_1 : \pounds^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
f &\mapsto \|f\|_1 \quad \text{où} \quad \|f\|_1 := \int_\Omega |f| d\mu
\end{aligned}$$

est une semi-norme sur $\pounds^1_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Si $p \geq 1$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On introduit

$$\pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad f \textit{ est } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{K})\text{-mesurable et } |f|^p \textit{ est } \mu\text{-intégrable sur } \Omega\}$$

$$= \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \quad : \quad f \textit{ est } \mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{K})\text{-mesurable et } \int_\Omega |f| d\mu < \infty\}$$

On montre que $\pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un $\mathbb{K}$-e.v

De plus : l'application

$$\|.\|_p : \pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f \mapsto \|f\|_p \quad \text{où} \quad \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une semi-norme sur $\pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Observation :

Si $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ est mesurable, alors :

$$\int_\Omega f d\mu \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-presque partout sur } \Omega$$

3.4 Ensembles μ-négligeables et propriétés vraies μ-presque partout :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré

- Soit $N \subset \Omega$. On dit que N est μ-négligeable si et seulement si $\exists M \in \mathcal{F} : \quad N \subset M \textit{ et } \mu(M) = 0$
- $\mathcal{N}_\mu$ = {parties μ-négligeables }
- Si $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{F}$, on dit que μ est complète.
- $\mathcal{N}_\mu$ est stable par réunion dénombrable.

- Soit $\mathcal{P}(x) \quad (x \in \Omega)$ une propriété.

  On dit que $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout sur $\Omega \quad$ (μ-pp) si et seulement si $\{x \in \Omega \quad : \quad \text{Non } \mathcal{P}(x)\}$ est μ-négligeable.

Exemple 3.2. *$f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ deux fonctions.*

$\forall x \in \Omega \quad , \quad \mathcal{P}(x) = f(x) = g(x)$

On dit que $f = g$ μ-pp si et seulement si $\{f \neq g\} = \{t \in \Omega : f(t) \neq g(t)\}$ est μ-négligeable.

N.B : Si f, g sont mesurables, alors $\{f \neq g\} \subset \mathcal{F}$

Donc

$$f = g\mu\text{-}pp \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$$

Proposition 3.4.1. *Soit $f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable*

Alors

1. $\forall a > 0 \quad : \quad \mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int_\Omega f\,d\mu$ *(inégalité de Markov $*$)*
2. $\int_\Omega f\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$*$\mu$-presque partout.*
3. *Si f est μ-intégrable , alors $f < +\infty \quad \mu$-pp.*

   Si $f, g \in \pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F})$, ici $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$

Observation :

(Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, on a $\pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F})$ est un $\mathbb{K}$-e.v)

Notons $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-pp

Propriété :

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\pounds^0_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}) \quad \mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$

$\forall f \in \pounds^0_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F})$, Notons $\dot{f}$ sa classe modulo $\sim$.

$$\dot{f} = \{g \in \pounds^0_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}) \quad g \sim f\}$$

Notons $L^0_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}) = \pounds^0_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F})\Big|_\sim$

Cas particulier, si $p \geq 1$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

$\sim$ est définie sur $\pounds^p_{\mathbb{K}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$; $\quad$ ça reste une relation d'équivalence.

Notons alors $L^p_{\mathbb{K}} = £^p_{\mathbb{K}(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$

$L^p_{\mathbb{K}}$ et $£^p_{\mathbb{K}(\Omega,\mathcal{F},\mu)}$ sont des $\mathbb{K}$-e.v et sont appelés espaces de Lebesgue d'indice $p \geq 1$.

On a besoin des propriétés de $\sim$.

Proposition 3.4.2. *L'égalité μ-pp sur $£^p_{\mathbb{K}}(\Omega,\mathbb{K})$ (sur $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{K})$ en général) où $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, est une relation d'équivalence compatible avec les opérations (si elles sont définies) : l'addition, la multiplication,* sup *des familles dénombrables et pour* inf *sur les familles dénombrables de fonctions.*

Preuve. *"Pour l'addition "*

Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$.

Supposons que $\begin{cases} f_1 + f_2 \text{ a un sens sur } \Omega \\ g_1 + g_2 \text{ a un sens sur } \Omega \end{cases}$ *jamais du type $+\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$*

$f_1 \sim g_1$ *et* $f_2 \sim g_2$ $\exists N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$ *tels que* $\begin{cases} f_1 = g_1 \text{ sur } N_1^c \\ f_2 = g_2 \text{ sur } N_2^c \end{cases}$

Poser $N = N_1 \cup N_2 \in \mathcal{N}_\mu \Rightarrow N^c = N_1^c \cap N_2^c$

Si $x \in N^c = N_1^c \cap N_2^c$

$f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$

$\Rightarrow f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ *sur* N^c

$\Rightarrow \{f_1 + f_2 \neq g_1 + g_2\} \subset N \in \mathcal{N}_\mu \Leftrightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

Identique pour le reste.

Conséquence 3.4.1. *Si $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$.*

Si $f \sim g$ alors $f^+ \sim g^+$ et $f^- \sim g^-$ etc

Théorème 3.4.1. *Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ des fonctions mesurables.*

Si $f \sim g$ et si f est μ-intégrable sur Ω.

Alors g est μ-intégrable et de plus $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$

Démonstration. 1. *Si f, g sont à valeurs dans $[0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$*

On peut écrire

$$f = f.\chi_{\{f=g\}} + f.\chi_{\{f\neq g\}}$$

$$g = g.\chi_{\{f=g\}} + g.\chi_{\{f\neq g\}}$$

Les fonctions $f.\chi_{\{f=g\}}$ *et* $g.\chi_{\{f=g\}} : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *sont égales partout sur* Ω *et* $\sim$ *sur* $\{f = g\}$.

$f.\chi_{\{f\neq g\}}$, $g.\chi_{\{f\neq g\}} : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\int_\Omega f.\chi_{\{f\neq g\}} d\mu = \int_{\{f\neq g\}} f d\mu = \gamma_f(\{f \neq g\}) = 0$$

De même

$$\int_\Omega f.\chi_{\{f\neq g\}} d\mu = 0$$

$$\begin{aligned}
+\infty > \int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega (f.\chi_{\{f=g\}} + f.\chi_{\{f\neq g\}}) d\mu \\
&= \int_\Omega f.\chi_{\{f=g\}} d\mu + \int_\Omega f.\chi_{\{f\neq g\}} d\mu \\
&= \int_\Omega f.\chi_{\{f=g\}} d\mu \\
&= \int_\Omega g.\chi_{\{f=g\}} d\mu + \int_\Omega g.\chi_{\{f\neq g\}} d\mu \\
&= \int_\Omega (g.\chi_{\{f=g\}} + g.\chi_{\{f\neq g\}}) d\mu \\
&= \int_\Omega g\, d\mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int g\, d\mu = \int f d\mu < +\infty$$

2. *Cas* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}$

$$f \sim g \Rightarrow f^+ \sim g^+ \text{ et } f^- \sim g^-$$

$\Rightarrow g^+$ *et* g^- *sont* μ*-intégrables et de plus* $\int_\Omega f^+ d\mu = \int_\Omega g^+ d\mu$ *et*

$$\int_\Omega f^- d\mu = \int_\Omega g^- d\mu \Rightarrow \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu = \int_\Omega g^+ d\mu - \int_\Omega g^- d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$$

$$\int_\Omega |g| d\mu = \int_\Omega (g^+ + g^-) d\mu < \infty \Rightarrow g \text{ est } \mu\text{-intégrable}$$

3. *Si* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

$$Si\ f \sim g \Rightarrow \begin{cases} Re(f) & \sim Re(g) \\ Im(f) & \sim Im(g) \end{cases} \quad \textit{(à valeurs dans } \mathbb{R}\textit{)}$$

$$f \quad \mu\text{-intégrable} \Leftrightarrow |f| \quad \mu\text{-intégrable}$$

$$\Rightarrow |f| \sim |g| \Rightarrow \int |f| d\mu = \int |g| d\mu < +\infty \quad (\mathbb{R}_+ \subset \overline{\mathbb{R}}_+)$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\,d\mu &= \int_\Omega Re(f) d\mu + i \int_\Omega Im(f) d\mu \\ &= \int_\Omega Re(g) d\mu + i \int_\Omega Im(g) d\mu \\ &= \int_\Omega g\ d\mu \end{aligned}$$

Théorème 3.4.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré.*

Soit $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction μ-intégrable sur* Ω*.*

Alors

$$\left| \int_\Omega f\,d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| d\mu \tag{$*$}$$

Preuve. (i) *Cas où* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *où* $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\,d\mu &= \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \\ \Rightarrow \quad \left| \int_\Omega f\,d\mu \right| &= \left| \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \right| \\ &\leq \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu \\ &= \int_\Omega (f^+ + f^-) d\mu \\ &= \int_\Omega |f| d\mu \end{aligned}$$

(ii) *Cas où* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si $\int_\Omega f\,d\mu = 0$ *est finie* , $(*)$ *est vraie.*

$$Si \int_\Omega f\,d\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \quad , \quad \int_\Omega f\,d\mu = \left|\int_\Omega f\,d\mu\right| e^{i\theta} \quad où \quad \theta \in [0,2\pi[\quad \theta = Arg\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)$$

$$\Rightarrow \left|\overbrace{\int_\Omega f\,d\mu}^{\in \mathbb{R}_+}\right| = \left(\int_\Omega f\,d\mu\right)e^{-i\theta}$$

$$= \int_\Omega (e^{-i\theta} f)\,d\mu$$

$$= \int_\Omega Re(e^{-i\theta} f)\,d\mu$$

$$= \left|\int_\Omega Re(e^{-i\theta} f)\,d\mu\right|$$

$$\leq \int_\Omega |Re(e^{-i\theta} f)|\,d\mu$$

3.5 Intégration des fonctions mesurables définies μ-presque partout

Définition 3.5.1. *Soit $A \in \mathcal{F}$, soit $f : A \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$*

$\mathcal{F}_A$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mesurable (où $\mathcal{F}_A$ est la tribu trace de $\mathcal{F}$ sur A)

On dit que f est μ-intégrable sur A si et seulement si f est $\mu_{\mathcal{F}_A}$-intégrable sur l'espace mesuré $(A, \mathcal{F}_A, \mu_{\mathcal{F}_A})$.

Son intégrale sera noté $\displaystyle\int_A f\,d\mu$.

Remarque. *Avec les notations de 3.5.1*

Notons $\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & si\ \omega \in A \\ 0 & Si\ \omega \in \Omega\backslash A \end{cases}$

$\tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mesurable.

Observation :

f est μ-intégrable sur A au sens de 3.5.1 $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ est μ-intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et de plus $\displaystyle\int_\Omega \tilde{f}\,d\mu = \int_A f\,d\mu$.

Définition 3.5.2. *Soit $A \in \mathcal{F}$, soit $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.*

Alors : f est mesurable sur $A \Leftrightarrow f$ possède un prolongement $f^\sharp$ sur Ω qui est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mesurable.

Démonstration. $\Rightarrow)$ *Si f est $\mathcal{F}_A$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mesurable*

Posons $\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \in A^c \end{cases} \Rightarrow \tilde{f}$ *est $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$ mesurable qui prolonge f.*

$\Leftarrow)$ $f^\sharp : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ *un prolongement mesurable de f.*

Vérifions que f est mesurable sur A.

Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$, alors $f^{-1}(B) = (f^\sharp)^{-1}(B) \cap A \in \mathcal{F}_A$

Définition 3.5.3. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.*

On dit que f est définie μ-presque partout sur Ω si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et que f soit définie partout sur A.

Si f est en plus mesurable sur A, on dit alors que f est fonction "mesurable définie μ-presque partout"

N.B : un ensemble $B \subset \Omega$ est dit co-négligeable si et seulement si B^c est μ-négligeable.

Proposition 3.5.1. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction "mesurable définie μ-presque partout sur Ω". Soient f_1 et f_2 deux prolongements (de f à Ω) $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mesurable sur Ω.*

Si f_1 est μ-intégrable sur Ω, alors f_2 est μ-intégrable sur Ω et en plus

$$\int_\Omega f_1 \, d\mu = \int_\Omega f_2 \, d\mu$$

Démonstration. *Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application (i,e définie sur tout A).*

$f_1 = f = f_2$ sur A , $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurables.

$$f_1 \sim f_2 \overset{\textit{Théorème 3.4.1}}{\Rightarrow} f_2 \text{ est } \mu\text{-intégrable et } \quad \int_\Omega f_1 \, d\mu = \int_\Omega f_2 \, d\mu.$$

Définition 3.5.4. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction mesurable définie μ-presque partout sur Ω. On dit que f est μ-intégrable sur Ω si et seulement s'il existe un prolongement $\tilde{f}$ de f sur Ω qui est μ-intégrable. On pose alors par définition*

$$\int_{\Omega} f\, d\mu := \int_{\Omega} \tilde{f}\, d\mu \tag{$*$}$$

qu'on appelle l'intégrale de f sur Ω.

N.B : Ce nombre ne dépend pas du choix du prolongement $\tilde{f}$.

Exercice :

Soit f une fonction mesurable définie μ-presque partout sur Ω, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est μ-intégrable sur Ω (au sens de 3.5.4).
2. $\exists A \in \mathcal{F} \quad , \quad \mu(A^c) = 0$, f mesurable sur A et $|f|$ est $\mu_{\mathcal{F}_A}$-intégrable sur $(A, \mathcal{F}_A, \mu_{\mathcal{F}_A})$.

   Dans ce cas :
   $$\int_{\Omega} f\, d\mu = \int_{A} f\, d\mu$$

   Suite à la Définition 3.5.4

   Une fonction f qui vérifie 3.5.4 est dite une fonction "μ-intégrable définie μ-presque partout".

Théorème 3.5.1. ***(Généralisation de la linéarité)***
Soient f et g deux fonctions définie sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ μ-intégrables sur Ω. Alors $f + g$ est une fonction "mesurable définie μ-presque partout sur Ω" et μ-intégrable sur Ω, et de plus :

$$\int_{\Omega} (f+g) d\mu = \int_{\Omega} f\, d\mu + \int_{\Omega} g\, d\mu \tag{$*$}$$

(Sous-entendu : $\int_{\Omega} (\alpha f) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f\, d\mu$)
D'où la généralisation de la linéarité.

Démonstration. *f,g sont μ-intégrables $\Rightarrow$ $|f| < +\infty$ μ-pp et $|g| < +\infty$ μ-pp*

Posons alors $B = \{|f| < +\infty\} \cap \{|g| < +\infty\} \in \mathcal{F}$

$$\mu(B^c) \leq \mu(|f| = +\infty) + \mu(|g| = +\infty) = 0 + 0 = 0$$

$f, g : B \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est une application mesurable sur B.*

$f + g$ *est donc une fonction mesurable définie* μ*-pp sur* Ω.

La fonction $f.\chi_B + g.\chi_B : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est* $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *mesurable qui prolonge* $f + g$*, donc*

$$f = f.\chi_B \quad \mu - pp \quad (sur\ \Omega) \Leftrightarrow f \sim f.\chi B$$
$$g = g.\chi_B \quad \mu - pp \quad (sur\ \Omega) \Leftrightarrow g \sim g.\chi B$$

$\Rightarrow$ $f.\chi_B$ *est* μ*-intégrable et* $g.\chi_B$ *est* μ*-intégrable à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $f + g = f.\chi_B + g.\chi_B$ μ*-pp sur* Ω.

$\Rightarrow$ $f + g$ *possède un prolongement* μ*-intégrable* $(f.\chi_B + g.\chi_B)$.

$\Rightarrow$ $f + g$ *est alors une fonction* μ*-intégrable définie* μ*-pp*

$$\Rightarrow \int_\Omega (f+g)d\mu \overset{3.5.4}{=} \int_\Omega (f.\chi_B + g.\chi_B)d\mu = \int_\Omega f.\chi_B d\mu + \int_\Omega g.\chi_B d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g\, d\mu.$$

$$et \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad \int_\Omega (\alpha f)d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu$$

3.6 Théorème de convergence :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions : $\Omega \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{K})$-mesurables.

Notons $\{f_n \longrightarrow\} = \{x \in \Omega \quad : \quad (f_n(x))_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{K}\} \in \mathbb{K}$.

Définition 3.6.1. *On dit que la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge* μ*-pp sur* Ω *si et seulement si* $\mu(\{f_n \longrightarrow\}^c) = 0$*. Dans ce cas, on appelle limite* μ*-pp de la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$*, toute fonction g mesurable définie* μ*-pp telle que*

$$g(x) = \lim_n (f_n(x)) \quad , \quad \forall x \in \{f_n \longrightarrow\}$$

Observation :

$\rightarrow$ g n'est pas unique.

$\rightarrow$ Si g_1 et g_2 sont deux limites μ-pp de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$

$$\Rightarrow \quad g_1 \sim g_2 \quad \text{car} \quad g_1(x) = g_2(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \quad , \quad \forall x \in \{f_n \longrightarrow\}$$

Notation : Si g est une limite μ-pp d'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ convergente μ-pp sur Ω. On note alors $(f_n)_{n\geq 0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g \quad \mu$-pp sur Ω.

Remarque. *Supposons que $f_n \longrightarrow g \quad \mu$-pp.*

Remplacer f_n par $f_n.\chi_{\{f_n\longrightarrow\}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g.\chi_{\{f_n\longrightarrow\}}$

La suite $\left(f_n.\chi_{\{f_n\longrightarrow\}}\right)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $g.\chi_{\{f_n\longrightarrow\}}$ partout sur Ω.

Théorème 3.6.1. ***(Théorème de convergence dominée le Lebesgue) :***
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions : $\Omega \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ convergeant μ-pp vers une fonction f.

On suppose qu'il existe une fonction $g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ et μ-intégrable sur Ω, telle que $|f_n| \leq g$ μ-pp sur Ω, pour tout $n \geq 0$

Alors , f est μ-intégrable sur Ω.

De plus, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$$

En particulier, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

Démonstration. *Posons*

$$N_1 := \{f_n \longrightarrow\}^c$$
$$N_2 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f_n| > g\}$$
$$N_3 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f_n| = +\infty\} \cup \{g := +\infty\}$$

Notons $A = (N_1 \cup N_2 \cup N_3)^c \in \mathcal{F}$

A est co-μ-négligeable (i,e $\mu(A^c) = 0$)

Remplaçons

$$\begin{cases} f_n \quad par\ f_n.\chi_A \qquad f_n \sim f_n.\chi_A \\ g \quad par\ g.\chi_A \qquad g \sim g.\chi_A \\ f \quad par\ f.\chi_A \qquad f \sim f.\chi_A \end{cases}$$

On peut donc remplacer le mot μ-pp, par partout et que toutes ces fonctions $(f_n)_{n\geq 1}, f$, et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ *Avec cette considération :*

$$(f_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{convergence simple} \Rightarrow f \quad \text{mesurable}$$

$\rightarrow |f_n| \leq g \quad \forall n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_n$ *est μ-intégrable* $\forall n \geq 0$ *sur* Ω

$\rightarrow \quad |f| \leq g$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n := 2g - |f_n - f|$

$\Rightarrow h_n$ *est mesurable, μ-intégrable, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \quad \forall n \geq 0$$

Appliquer le lemme de Fatou à $(f_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega 2g\, d\mu &= \int_\Omega \liminf_n (h_n) d\mu \\ &\leq \liminf_n ((2g - |f_n - f|)) \\ &= \liminf_n \left[2\int_\Omega g\, d\mu - \int_\Omega |f_n - f| d\mu \right] \\ &= 2\int_\Omega g\, d\mu - \limsup_n \int_\Omega |f_n - f| d\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq -\limsup_n \int_\Omega |f_n - f| d\mu \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \limsup_n \int_\Omega |f_n - f| d\mu \leq 0$$

D'où

$$0 \leq \liminf_n \int_\Omega |f_n - f| d\mu$$
$$\limsup_n \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$$

D'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$

$$\rightarrow \quad \left| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega f d\mu \right| = \left| \int_\Omega (f_n - f) d\mu \right|$$
$$\overset{3.4.2}{\leq} \int_\Omega |f_n - f| d\mu \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par suite

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

3.6.1 Quelques conséquences :

Proposition 3.6.1.1. *Soit* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *telle que la série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_\Omega |f_n| d\mu$ *converge dans* $(\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R})$

Alors, la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ *converge absolument* μ*-pp sur* Ω.

La somme de cette série notée f *est une fonction mesurable définie* μ*-pp,* μ*-intégrable (sur* Ω*) et on a :*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{n\geq 0} f_n \right) d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_\Omega f_n d\mu$$

($2^{ème}$ formule d'interversion) *(Exercice)*

Théorème 3.6.1.1. ***(Théorème de convergence bornée) :***

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré tel que* $\mu(\Omega) < +\infty$

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, convergeant* μ*-pp vers une fonction* f *telle que* $\exists M \geq 0 \quad , \quad |f_n| \leq M \quad \mu$*-pp sur* Ω.

$\forall n \geq 0$*, alors* f *est* μ*-intégrable sur* Ω *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$

De plus

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f\, d\mu$$

Preuve. *Conséquence immédiate du Théorème de convergence dominée de Lebesgue.*

Exemple 3.3.

$$\Omega = \mathbb{N} \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\mu = \mu_d : A \longrightarrow \mu_d(A) = \begin{cases} Card(A) & \text{nombre d'éléments de } A \text{ si } A \text{ fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

μ_d *est une mesure dite mesure de comptage ou de dénombrement.*

$$\begin{aligned}\int d\mu_d &= \sum_{i=1}^{N} a_i Card(\{u = a_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \sum_{\{u=a_i\}} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\{u=a_i\}} a_i \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{N}} f\, d\mu_d \quad si \quad f \in \xi^+(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \quad , \quad f(\Omega) = \{a_1, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}_+ \quad fini, \quad u = \sum_i a_i . \chi_{A_i}$$

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \tag{3.12}$$

$$n \mapsto u(n) = U_n \tag{3.13}$$

$$A \subset \mathbb{N} \quad \int_{\Omega} \chi_A \, d\mu_d = Card(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_A(n) \quad (\chi_A : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$$

Si $u = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i}$

$$\int_\Omega u \, d\mu_d = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_\Omega \chi_{A_i} \, d\mu_d = \sum_{i=1}^{N} a_i \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_i}(n) \right) \quad (dans\ \overline{\mathbb{R}}_+)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i} \right)(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u(n) \quad (dans\ \overline{\mathbb{R}}_+)$$

Dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}, \mu_d))$

E_1 *:*

$$\begin{aligned} \forall u : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ n &\mapsto u(n) = U_n \end{aligned} \quad (\text{étagée})$$

$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\mu_d = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)$$

E_2 *: Si* $\mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*-mesurable.*

Considérer $v_n = u.\chi_{\{0,1,\cdots,n\}}$ *suite croissante de fonctions mesurables.*

$$\forall n \quad , v_n \text{ est étagée} \quad v_n(m) = u(m) \quad (A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B)$$

Vu l'étape E_1*,*

$$\int_{\mathbb{N}} v_n \, d\mu_d = \sum_{m=0}^{\infty} v_n(m)$$
$$= \sum_{m=0}^{n} v_n(m)$$
$$= \sum_{m=0}^{n} u(m)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} U_m$$

$$B.L \quad : \quad \int_{\mathbb{N}} u \, d\mu_d = \int_{\mathbb{N}} (\sup_{n\geq 0} v_n) d\mu_d = \sup_{n\geq 0} \int_{\mathbb{N}} v_n \, d\mu_d = \sup_{n\geq 0} \sum_{m=0}^{n} u(m)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} u(k)$$

Finir avec le cas $u : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ *si*

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R} \; ou \; \mathbb{C}$$
$$n \mapsto U_n = u(n)$$

u est μ_d*-intégrable* $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| < +\infty$

3.7 Comparaison de l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue

Rappel (Sur l'intégrale de Riemann) :

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné (compact) de $\mathbb{R}$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$.

Noter $\mathcal{D}$ l'ensemble de toutes les subdivision de $[a, b]$

Si $d \in \mathcal{D}$

$$d = (x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b) \quad (x_0 < x_1 < x_2 x \cdots < x_n) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$S(d, f) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{où} \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k[} f(x)$$

(C'est la somme de Darboux supérieure)

$$s(d, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{où} \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k[} f(x)$$

(C'est la somme de Darboux inférieure)

On a montrer que :

a) $\forall d, d' \in \mathcal{D} \quad : \quad s(d,f) \leq S(d,f)$

Alors

$$S_f := \inf_{d \in \mathcal{D}} S(d,f) \quad \text{existe dans } \mathbb{R}$$
$$s_f := \sup_{d \in \mathcal{D}} s(d,f) \quad \text{existe dans } \mathbb{R}$$

et on a

$$s_f \leq S_f$$

b) f est dite Riemann intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si $s_f = S_f$.

Dans ce cas, on note
$$s_f = S_f \overset{\text{noté}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Remarque. *Si f est en escalier sur* $[a,b]$

$\Rightarrow$ *f est borélienne sur* $[a,b]$ *et* λ*-intégrable sur* $[a,b]$*, et*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{$(1)_{L\backslash R}$}$$

$$\begin{cases} (1)_{L\backslash R} & : 1^{\grave{e}re} \textit{ relation entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann} \\ \lambda & : \textit{mesure de Borel-Lebesgue sur } [a,b] \end{cases}$$

Question : $(1)_{L\backslash R}$ est vraie pour quels types de fonctions f ?

Réponse : Donnée par :

Théorème 3.7.1. ***(Théorème de Lebesgue) :***
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée. Alors, on a :*

i) f *est Riemann-intégrale sur* $[a,b]$

$$f \textit{ continue} \Leftrightarrow \lambda\textit{-pp sur } [a,b]$$

ii) Si f *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *(et si elle borélienne), alors* f *est (Lebesgue)* λ*-*

intégrable sur $[a,b]$, et de plus, on a :

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(t)dt \qquad ((1)_{L\backslash R})$$

Observation :

(Sur 3.7.1) sous les hypothèses de 3.7.1

$\rightarrow f$ est mesurable définie λ-pp sur $[a,b]$

Le reste suit

Démonstration.

Remarque. *Il existe des fonctions λ-intégrables sur $[a,b]$ qui ne sont pas Riemann-intégrable.*

Exemple 3.4. $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \leq 1$ *bornée.*

$\rightarrow$ *f est étagée mesurable sur $\mathcal{B}([a,b])$ et Lebesgue-λ-intégrable sur $[a,b]$ et* $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = 0$

$\rightarrow$ *f n'est pas Riemann-intégrable sur $[a,b]$* $\quad S_f = 1$ *et* $s_f = 0$

$\rightarrow$ *f est nulle-part continue.*

Relation entre les intégrales de Riemann-généralisées impropres et celle de Lebesgue :

On est dans la situation suivante : $(a,b) \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne.

$\rightarrow [a,b[\quad$ où $\quad -\infty < a < b \leq +\infty$

$f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ localement $\mathbb{R}$-intégrable. (i,e Riemann-intégrable dans chaque segment $[\alpha,\beta] \subset [a,b[$), et on étudie alors l'existence de l'intégrale généralisée (au sens de Riemann) $\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx$ (si ça existe $= \lim\limits_{\beta \longrightarrow b} \int_a^{\beta} f(t)dt$)

La réponse est donnée par :

Proposition 3.7.1. *Sous les hypothèses ci-dessus , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\int_a^{\rightarrow b} f(t)dt$ *converge absolument (i,e* $\int_a^{\rightarrow} |f(t)|dt$ *converge)* *ii) f est λ-intégrable sur $[a,b[$*

En plus, si i), ii) vraies, alors on a :

$$\int_a^{\to b} f(t)dt = \int_{[a,b[} f d\lambda \qquad ((1)_{L\backslash R})$$

Démonstration.

$ii) \Rightarrow i)$ *Supposons donc que f est λ-intégrable sur $[a,b[$*

Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $[a,b[$ (strictement croissante) convergente vers b.

$\forall n$, poser $g_n := |f|.\chi_{[a,b_n]}$

$\to g_n$ est borélienne $\quad ,g_n \leq g_{n+1}, \quad (g_n) \nearrow |f|$ sur $[a,b[$

Par le théorème de Beppo-Levi (Théorème de convergence monotone), on a :

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{[a,b[} |f| d\lambda &\overset{B\text{-}L}{=} \sup_{n\geq 0} \int_{[a,b[} g_n d\lambda \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b[} g_n d\lambda \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b_n]} |f| d\lambda \\
&\overset{(1)_{L\backslash R}}{=} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^{b_n} |f(t)|dt
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_a^b |f(s)|ds$ *converge absolument et* $\int_a^{\to b} |f(s)|ds = \int_{[a,b[} |f| d\lambda$

$i) \Rightarrow ii)$ *Supposons que* $\int_a^{\to b} |f(s)|ds$ *converge.*

Soit encore $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'éléments de $[a,b[\quad , \quad b_n \longrightarrow b$

Notons $f_n = fg.\chi_{[a,b_n]} \quad , \quad \forall n \geq 0$ borélienne $(|f_n| = g_n, \forall n \geq 0)$

f_n est λ-intégrable sur $[a, b_n]$

$$\int_{[a,b_n]} |f_n| d\lambda = \int_{[a,b_n]} |f| d\lambda = \int_a^{b_n} |f(t)|dt \leq \int_a^{\to b} |f(t)|dt < +\infty$$

$$\begin{cases} (f_n) & \overset{\text{convergence simple}}{\longrightarrow_{[a,b[}} f \\ |f_n| & = g_n \overset{\text{convergence simple}}{\longrightarrow_{[a,b[}} |f| \quad (g_n \nearrow |f|) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{[a,b[} |f| d\lambda \overset{B\text{-}L}{=} \sup_{n\geq 0} \int_{[a,b[} g_n \, d\lambda &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b[} g_n \, d\lambda \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b_n]} |f| d\lambda \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b_n]} |f_n| d\lambda \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^{b_n} |f(t)| dt \\ &= \int_a^{\rightarrow b} |f(s)| ds < +\infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b[} |f| d\lambda < \infty \Rightarrow f \text{ est } \lambda\text{-intégrable sur } [a,b[$$

1. *Si i) ou ii) est vraie ⇒ i) et ii) sont vraies.*

$$\begin{cases} (f_n) & \overset{\text{convergence simple}}{\longrightarrow_{[a,b[}} f \\ |f_n| & = g_n \leq |f| \quad \lambda\text{-intégrable sur } [a,b[\end{cases}$$

Par le T.C.D.L , on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b[} |f_n - f| d\lambda = 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{[a,b[} f \, d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b[} f_n \, d\lambda &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b[} f.\chi_{[a,b_n]} \, d\lambda \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[a,b_n]} f \, d\lambda \\ \text{Théorème de Lebesgue} \quad &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^{b_n} f(s) \, ds \\ &= \int_a^{\rightarrow b} f(t) \, dt \end{aligned}$$

Observation :

Dans cette proposition, on ne peut pas supprimer le mot "absolument".

Exemple 3.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ *intégrale convergente :* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Mais $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *borélienne,* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ *non* λ*-intégrable sur* $[0,+\infty[$

On peut montrer que

$$\int_{[0,+\infty[} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| d\lambda(x) = +\infty$$

Ici $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ *diverge* $\Rightarrow$ *Intégrale généralisée semi-convergente.*

On a étudié la relation entre l'intégrale de Riemann impropre $\int_a^{\rightarrow b} f(t)dt$.

Résultats similaires pour $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ *et pour* $\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(t)dt \quad (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} |f(t)| dt < +\infty \Leftrightarrow f \text{ est } \lambda\text{-intégrable sur } (a,b)$$

Observation :

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

$|f|$ bornée et par le théorème de Lebesgue, $|f|$ est Riemann-intégrable.

3.8 Intégration de Lebesgue dépendant d'un paramètre :

Position du problème :

Ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace normé.

$\rightarrow (X, \tau)$ est un espace topologique.

$\rightarrow (E, d)$ est un espace métrique.

$$f : \Omega \times X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$(\omega, x) \mapsto f(\omega, x)$$

A $\forall x$ fixé , $\omega \mapsto f^x(\omega) = f(\omega, x)$

Si f^x est μ-intégrable sur Ω.

On fabrique alors une fonction

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_{\Omega} f(\omega, x) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

Question :

Quelles sont les propriétés analytiques de F ?

$\rightarrow$ Continuité de F et dérivabilité de F.

La réponse est donnée par :

Théorème 3.8.1. ***(Théorème de Continuité) :***
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et (E, d) un espace métrique.

Soit $f : \Omega \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $t_0 \in E$.

On suppose que :

i) Pour tout $t \in E$, la fonction $f(., t) = f^t$ est μ-intégrable sur Ω.

ii) Pour μ-presque tout $x \in \Omega$, la fonction $f(x, .) = f_x$ est continue en t_0.

iii) il existe une fonction $g : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ μ-intégrable sur Ω, et un voisinage $V \in \mathcal{V}(t_0)$ tels que, pour tout $t \in V$, on a

$$|f^t| = |f(., t)| \leq g \quad \mu\text{-pp sur } \Omega$$

Alors, la fonction F définie sur E par :

$$F(t) = \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x)$$

est continue en t_0.

Démonstration. (E, d) *étant un espace métrique.*

Soit donc $(\delta_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de E , $(\delta_n) \overset{(E,d)}{\longrightarrow}_{n \longrightarrow +\infty} t_0$
montrons alors que $F(\delta_n) \overset{\mathbb{R} \backslash \mathbb{C}}{\longrightarrow} F(t_0)$

→ $\forall n$, f_n *mesurable et* μ*-intégrable sur* Ω *(d'après i)*

→ *Pour* μ*-presque partout* x , $f_n(x) = f(x, \delta_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} f(x, t_0)$

$$(f_n) \overset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} f^{t_0} \quad \mu\text{-}pp$$

→ $\exists N_V \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_V \Rightarrow \delta_n \in V$ *(Pour* $n \geq N_V$*)*

On a

$$|f_n| = |f^{\delta_n}| \leq g \quad \mu\text{-}pp \text{ sur } \Omega$$

Par le Théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega, t_0) d\mu(\omega)$$

$$\text{i,e :} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f(\omega, \delta_n) d\mu(\omega) = F(t_0)$$

$$\text{i,e :} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} F(\delta_n) = F(t_0)$$

Théorème 3.8.2. ***(Théorème de Dérivabilité) :***
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $E =]a, b[$ *(ici* $-\infty \leq a << +\infty$*) un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.

Soit $f : \Omega \times E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, on suppose que :*

$i)$ *pour tout* $t \in E$*, la fonction* $f(., t) = f^t$ *est* μ*-intégrable sur* Ω.

$ii_d)$ *Pour* μ*-presque tout* $x \in \Omega$*, la fonction* $t \mapsto f(x, t)$ *est finie et dérivable par rapport à* t *sur* E.

$iii_d)$ *il existe une fonction* $g : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ μ*-intégrable sur* Ω*, telle que pour tout* $t \in E$*, on a*

$$\left| \frac{\partial f(., t)}{\partial t} \right| \leq g\mu\text{-}pp \text{ sur } \Omega.$$

Alors, la fonction F *définie sur* E *par* $F(t) := \int_\Omega f(\omega, t) d\mu(\omega)$ *est dérivable sur* E *et pour tout* $t \in E$*, on a :*

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_\Omega f(x, t) d\mu(x) \right) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

Démonstration. *Soit* $t \in E$*. Soit* (t_n) *une suite de points de* E *(distincts de* t*) telle que*

$(t_n) \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} t.$

posons

$$f_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\rightarrow$ *f_n est mesurable définie μ-pp et f_n est μ-intégrable sur Ω. (Voir le Théorème qui généralise la linéarité)*

$\rightarrow$ *Par le Théorème de A.F* $\quad , \quad f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,c) \quad c \in (t_n,t) \subset E$

pour μ-presque tout $x \in \Omega$, :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,c)\right| \leq g(x)$$

Ainsi,

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-pp sur } \Omega$$

On utilise alors le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{F(t_n) - f(t)}{t_n - t} \\
\text{(Théorème qui généralise la linéarité)} \quad &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t_n - t}\left[\int_\Omega f(x,t_n)d\mu(x) - \int_\Omega f(x,t)d\mu(x)\right] \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega (f(x,t_n) - f(x,t))d\mu(x) \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)d\mu(x) \\
&\overset{T.D.C}{=} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x)
\end{aligned}$$

Noter que par ii_d)

$$fn \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial t}(.,t) \quad \mu\text{-pp sur } \Omega.$$

3.9 Complements et applications :

3.9.1 Intégration par rapport à une mesure image :

$(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{Y})$ espace mesurable.

$T : (X, \mathcal{X}) \longrightarrow (Y, \mathcal{Y})$ application mesurable.

$\mu_T(B) = \mu(T^{-1}(B)) \quad , \quad \forall B \in \mathcal{Y}$

μ_T est une mesure (positive) sur $(Y, \mathcal{Y}) \Rightarrow (Y, \mathcal{Y}, \mu_T)$ espace mesuré.

Si $f : (Y, \mathcal{Y}) \longrightarrow \mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ mesurable.

Question :

Quand f est μ_T-intégrable ?

Réponse :

f est μ_T-intégrable sur $(Y, \mathcal{Y}) \Leftrightarrow f \circ T$ est μ-intégrable sur $(X, \mathcal{X}, \mu)$.

Dans ce cas : on a

$$\int_Y f \, d\mu_T = \int_X (f \circ T) d\mu$$

3.9.2 Intégration par rapport à une mesure à densité :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

$f : \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$

Si $A \in \mathcal{F} \quad , \quad \int_A f \, d\mu = \int f.\chi_A \, d\mu := \gamma_f(A)$

$$\begin{aligned} \gamma_f : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \gamma_f(A) \end{aligned}$$

est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Question :

$g : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ mesurable

Quand g est γ_f-intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F})$?

Réponse :

g est γ_f-intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}) \Leftrightarrow |g|.f$ est μ-intégrable.

Dans ce cas :

$$\int_\Omega g \, d\gamma_f = \int_\Omega g.f \, d\mu$$

Bibliographie

[1] Li, D : Intégration et applications - Cours et exercices corrigés. Ellipses, 2016.

[2] Halmos, P. R. : Measure Theory. Springer, 2e édition, 1974.

[3] Lebesgue, H. : Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[4] Rudin, W. : Analyse réelle et complexe. Science sup. Dunod, 3e édition, 2009.