Université IBN Khaldoun, Tiaret

Département de Mathématiques

Cours de logique Mathémathique

Table des matières

Chapitre 1

Eléments de langage mathématique

1.1 Eléments de langage mathématique

On peut voir le langage mathématique comme un jeu de construction, dont le but est de fabriquer des énoncés vrais. La règle de base de ce jeu est qu'un énoncé mathématique ne peut être que vrai ou faux. Il ne peut pas être "presque vrai" ou "à moitié faux". Une des contraintes sera donc d'éviter toute ambiguité et chaque mot devra avoir un sens mathématique précis. Selon le cas, un énoncé mathématique pourra porter des noms différents :

Assertion : C'est le terme que nous utilisons le plus souvent pour designer une affirmation dont on peut dire si elle est vraie ou fausse.

Expression : C'est un ensemble de signes (lettres, chiffres, symbôles, mots,...) possédant une signification dans un contexte donné.

Axiome : C'est un enoncé supposé vrai et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Théorème : C'est un enoncé dont il faut établir la véracité.

Corollaire : C'est une conséquence directe du théorème.

Lemme : C'est un théorème préparatoire à l'etablissement d'un théorème de plus grande importance.

Proposition : C'est un terme à un résultat démontré moins important qu'un théorème.

Conjecture : C'est un enoncé que l'on suppose vrai sans parvenir à le dmontrer. c'est une hypothèse plausible au vu de quelques exemples.

Exemples :

Axiomes : La définition axiomatique des entiers naturels de Peano est usuellement decrite informellement par cinq axiomes :

- L'élément appelé zéro et noté 0 est entier naturel.
- Tout entier naturel n a un unique successeur noté $S(n)$ ou S_n.
- Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
- Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
- Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Conjecture : (Conjecture de Golbach)

Tout entier pair strictement plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers.

Théorème : Tout le monde connaît les théorèmes de Thalès, Pythagore et théorème des valeurs intermédiaires en Analyse.

On a le grand théorème de Fermat :

"Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y, z dès que la puissance n est strictement supérieur à 2 à l'équation : $x^n + y^n = z^n$"

qui est resté à l'état de conjecture pendant 350 ans avant d'être enfin entierement démontré par Andrew Wiles en 1994.

Expression :

- Soit x un réel, on considère l'expression $3x^2 + 4x - 5$.
- Dans le plan, on considère ABC un triangle.
- Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1.2 Rédaction de preuves mathématiques

1.2.1 Principes de base

La rédaction mathématique a pour but de faire comprendre clairement au lecteur un problème mathématique. Cependant la rédaction contrairement aux mathématiques, n'est pas une science exacte, c'est à dire que plusieurs rédactions sont possibles pour un même problème.

D'une façon générale, la rédaction d'une question doit comporter trois parties :

- L'introduction
- Le raisonnement
- La conclusion

Voici quelques indications pour améliorer la rédaction et apprendre quelques automatismes qu'il est bon de connaitre

1/Introduire ce dont on parle

Introduire toutes las variables utilisées, même si elles sont définies dans l'enoncé. Par exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

On peut introduire une variable personnelle, par exemple, dans l'étude d'une fonction lorsque les zéros de la dérivée ont une expression un peu longue et que l'on doit à dresser le tableau de variation.

Exemple : Posons $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Mettre en évidence les articulations logiques :

Quelques petits mots bien utile dans la rédaction :

- donc, alors, il vient, d'où, par conséquent, ainsi,
- or, on sait que, de plus, en outre, ensuite, enfin,
- mais, cependant, toutefois, puisque, comme, car,...

Ces petits mots nous permettent de mettre du liant dans notre raisonnement et rendent la lecture plus claire.

Exemple : Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$0 \leq x^2 \leq 1.$$

En conséquence

$$0 \leq 1 - x^2 \leq 1.$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

En conséquence : $\forall x \in [0,1]$, $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$.

Annoncer ce que l'on fait :

Rédiger correctement une question en mathématique, c'est aussi expliquer ce que l'on fait. Annoncer la méthode de résolution au début : "Montrons que..., Montrons par absurde que..., Il ne reste plus qu'à montrer que...".

Citer une définition ou un théorème :

citer une définition ou un théorème doit se faire avec précision. Il faut donner clairement et sans faute les hypothèses, les notations et la conclusion.

Un théorème mal rédigé, imprécis, une hypothèse omise, tout cela donne une impression de manque de rigueur et peut mener à une conclusion érronée.

Exemple : Définir le nombre dérivée d'une fonction en un point.

Réponse incorrecte : le nombre dérivée de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Manque de précision, qui sont f et a ? pourquoi la limite du taux d'accroissement existe-elle ?.

Réponse correcte : Soient une fonction f définie sur l'intervalle I et $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

On appelle cette limite "nombre dérivé" de f en a que l'on note $f'(a)$.

Pas de mélange des genres :

Ecrire en français ou en mathématiques mais pas les deux à la fois, par exemple : On écrit la somme de deux entiers est un entier ou $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $m + n \in \mathbb{Z}$ mais pas : $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, la somme de m et n est un entier.

Faire la différence entre f et $f(x)$:

Rédaction incorrecte : La fonction $\frac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Rédaction correcte : La fonction $x \to \frac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En effet $\frac{x}{x^2+1}$ n'est pas une fonction mais une expression algébrique, une fonction est une relation qui à une quantité x appelée variable associe la quantité $f(x)$. On la note alors $x \to f(x)$.

Montrer une implication :

Quand on veut montrer que $p \Rightarrow q$, on procède par l'un des deux procédés suivants :

- 1/ On suppose que p est vrai et on montre qu'alors q est vrai.

  Exemple : Si n est un entier naturel impair alors l'entier $3n + 7$ est pair.

  Soit n un entier naturel impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k + 1$.

  Par conséquent, on a $3n + 7 = 3(2k + 1) + 7 = 6k + 10 = 2(3k + 5)$.

  Donc il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $3n+7 = 2k'$, ce qui prouve que l'entier $3n+7$ est pair.

- 2/ Par la contraposée. On suppose que "non q" est vrai et on montre qu'alors "non p" est vrai.

Exemple : L'exemple classique de l'utilisation de la preuve par contraposée concerne l'injectivité d'une application.
Ainsi pour montrer qu'une fonction $f : E \to F$ est injective, on peut montrer l'implication logique : $\forall x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Mais souvent il est plus simple de montrer la contraposée : $\forall x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Montrer qu'une implication est fausse :

Pour montrer l'implication $p \Rightarrow q$ est fausse il suffit de trouver un contre exemple oú la proposition p est vraie et la proposition q est fausse.

Exemple : Soit la proposition "la suite (U_n) est croissante donc la suite (U_n) est divergente".
Il faut donc trouver un contre exemple d'une suite qui est croissante et convergente.
On peut verifier facilement que la suite (U_n) définie par $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et sa limite est finie.

Montrer une équivalence : Pour montrer que $p \Leftrightarrow q$, on peut procéder de deux façons :
Soit on raisonne par équivalence, comme c'est le cas dans la résolution d'équation.
Soit on raisonne par double implication : on suppose que p est vraie et on montre alors que q est vraie et réciproquement, on suppose que q est vraie et on montre que p est vraie.

Le raisonnement par absurde :

Quand on veut montrer qu'une propriété p est vraie, on peut raisonner par l'absurde, c.à.d supposer p est fausse et arriver à une contradiction.

Exemple : Montrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Rédaction de la démonstration par récurrence :

Le raisonnement par récurrence obéit au principe suivant : soit P_n une proposition qui dépend d'un entier naturel n :
Si P_0 est vraie et si $\forall n \in \mathbb{N} : P_n \Rightarrow P_{n+1}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.
Exemple : Soit la suite (v_n), $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$.
Démontrer que la proposition $P_n : 3 \leq v_n \leq 10$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Expression sans perdre de généralité

Il arrive que deux ou plusieurs cas dans une preuve soient similaires et que les écrire séparément paraisse répétitif ou inutile.
Exemple : Montrer que si deux entiers sont de parités différentes alors leurs somme est un entier impair.
Preuve : Soient m et n deux entiers de parités différentes, on doit montrer que $m + n$ est un entier impair.
On a deux cas :

- cas 1 : Supposons que m est pair et n est impair, ils existent alors deux entiers a et b tels que $m = 2a$ et $n = ab + 1$.
  D'où on obtient $m + 1 = 2(a + b) + 1$ qui est impair.

- cas 2 : Supposons maintenant que m est impair et n est pair, ils existent alors deux entiers a et b tels que $m = 2a + 1$ et $n = ab$.
  Donc on obtient $m + 1 = 2(a + b) + 1$ qui est impair.

On constate que les deux cas se traitent de la même manière. En général en mathématiques, on évite cette répitition en utilisant l'expression "sans perdre de généralité", la preuve précédante serait par exemple : Soient m et n deux entiers de parités différentes, on doit montrer que $m+n$ est un entier impair.

Sans perdre de généralité, supposons que m est pair et n est impair, ils existent alors deux entiers a et b tels que $m = 2a$ et $n = ab + 1$.

D'où on obtient $m + 1 = 2(a + b) + 1$ qui est impair.

1.4 Preuves constructives et preuves existentielles

Preuves existentielles

Proposition 1.4.1. *il existe deux nombres irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel.*

Preuve : Nous savons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On considère alors le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ qui est soit rationnel soit irrationnel.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, la proposition est démontrée en considérant $x = y = \sqrt{2}$.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, alors en posant $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$, on obtient alors $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ et la proposition est démontrée.

La preuve de l'existence de deux nombres x et y irrationnels tels que x^y est rationnel est faite sans qu'on puisse être capable de donner un exemple de deux nombres irrationnels qui verifient $x^y \in \mathbb{Q}$.

Ce type de preuves est appelé "preuve non constructive" ou "preuve existentielle" dans le langage mathematique.

Preuves constructives

Proposition 1.4.2. *il existe deux nombres irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel.*

Preuve. Soit $x = \sqrt{3}$ et $y = \log_3(4)$.

x et y sont irrationnels et on a :

$x^y = \sqrt{3}^{\log_3(4)} = 3^{\frac{1}{2}\log_3(4)} = 3^{\log_3(4)^{\frac{1}{2}}} = 3^{\log_3(2)} = 2$

Chapitre 2

Théorie des ensembles

2.1 Théorie des ensembles

2.1.1 Théorie naïve des ensembles

Dans la théorie naïve des ensembles, les notions d'ensemble et d'appartenance jugés intuitives ne sont pas définis de facon précise.

On note $x \in E$ le fait que x soit un element de E. Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

L'ensemble vide est noté par $\{\}$ ou $\emptyset$.

En général on décrit un ensemble ou bien en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des étudiants de 2ème année licence Mathématiques promotion 2022-2023, ou bien en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble déja connu. Par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} / \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\}$.

On dit que F est un sous-ensemble de E, ou bien F est contenu dans E, et on note $F \subset E$, si tout element de F appartient aussi à E. On dit aussi que F est une partie de E.

La réunion de deux ensembles notée $E \cup F$ est l'ensemble de tous les éléments de E et de F. L'intersection de deux ensembles note $E \cap F$ est l'ensemble de tous les éléments

qui appartiennent à la fois à E et à F. La différence de deux ensembles note $E \setminus F$ est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à F.
Si $F \subset E$ alors nous notons $C_E F = E \setminus F$ l'ensemble complément de F dans E. Enfin la difference symétrique $E \triangle F$ est l'ensemble défini par $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.

2.1.2 Définition ensembliste du produit cartésien

Définition 2.1.1. *Soient E et F deux ensembles et soient $x \in E$ et $y \in F$. Alors on définit le couple ordonné (x, y) par*
$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Lemme 2.1.1. *On a $(x, y) = (x', y')$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.*

Preuve. On a : $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.
On a deux situations :
- 1 $\{x\} = \{x'\} \Rightarrow x = x'$ d'où $\{x, y\} = \{x', y'\}$ ainsi on obtient $y = y'$.
- 2 $\{x\} = \{x', y'\} \Rightarrow x = x' = y'$ comme $\{x, y\} = \{x'\}$ on obtient $x = x' = y' = y$.

2.1.3 Ensembles des parties

Définition 2.1.2. *Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$ constitué de tous les sous-ensembles de E.*

Exemple. Soit $E = \{a, b, c\}$ alors
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2.1.4 Définition ensembliste des relations

Définition 2.1.3. *Relation binaire*
Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est définie par une partie $G_{\mathcal{R}}$ de $E \times F$. Les composantes d'un couple appartenant au graphe d'une relation $\mathcal{R}$

sont dites en relation par $\mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in G$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.
Quand une relation binaire est définie d'un ensemble E vers lui-même, on l'appelle relation interne sur E, ou simplement relation sur E.

Définition 2.1.4. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.*
- *On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive quand : $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.*

- *On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive ou antiréflexive si aucun élément de E n'est en relation avec lui-même.*
- *On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique quand : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.*
- *On dit que $\mathcal{R}$ est anti-symetrique quand : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.*
- *On dit que $\mathcal{R}$ est transitive quand : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}y$.*

Remarques.
- La relation d'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- La relation d'ordre strict sur $\mathbb{R}$ est antiréflexive, antisymétrique et transitive.

2.1.5 Définition ensembliste des applications

Définition 2.1.5. *Un triplet $f = (E, F, G)$ avec une relation binaire $G \subset E \times F$ est une application s'il vérifie Ą$\forall x \in E$, $\exists! y \in F$: $(x, y) \in G$.*
Si $E = F = \emptyset$ alors la fonction $f = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ est appelée la fonction vide.

Définition 2.1.6. *Soient E et F deux ensembles. On dit qu'une fonction f de E dans F est :*

- *injective si $\forall x, y \in E$, $(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$*

- *surjective si* $\forall y \in F, \nexists\exists x \in E \ (f(x) = y)$.
- *Une bijection est une application qui est injective et surjective.*

Les définitions de relation et d'application que nous venons de voir font appel au produit cartésien et par conséquent à la notion d'ensemble. On dit dans ce cas que les définitions sont ensemblistes.

2.2 Le paradoxe de Russell (1901)

Le paradoxe de Russell résulte de la question suivante :
"L'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas eux mêmes appartient il à lui même ?"
L'ensemble peut se traduire par la notation suivante :
$E = \{A : A \notin A\}$.
Nous avons alors deux possibilites :

1. Supposons que l'ensemble E appartient a lui meme donc il vérifie le prédicat $A \notin A$ et par consequent $E \notin E$.
2. Supposons à présent que l'ensemble E n'appartient pas à lui même on a alors : $E \notin E$ donc par définition $E \in E$.

2.2.1 Autres versions du paradoxe de Russell

Le paradoxe de Russell peut être énnoncé sous des formes plus ludiques, nous proposons ici certaines de ces formes.

Le paradoxe du barbier
Le barbier du village décide de raser tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là.
On se pose alors la question : qui rase le barbier ? Nous avons dans ce cas deux possibilités :

1. S'il se rase lui-même, alors il rase quelqu'un qui ne se rase pas lui-même.

2. S'il ne se rase pas lui-même alors il devrait se raser en respectant sa décision.

Le paradoxe du menteur crêtois

Le crétois Épiménide a écrit un vers à l'origine de ce paradoxe :

"Les Crétois sont toujours menteurs, de méchantes bêtes, des ventres paresseux."

On se pose alors la question suivante : Est ce qu'Épiménide dit la vérité ?

Nous avons dans ce cas deux possibilités :

1. L'affirmation :"Les Crétois sont toujours menteurs" est vraie dans ce cas Épiménide dit la vérité or Épiménide est crêtois donc il ment.
2. L'affirmation :"Les Crétois sont toujours menteurs" est fausse dans ce cas Épiménide dit la vérité.

Le paradoxe du bibliothécaire

Le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes doit il se mentionner lui même ?

1. Si le catalogue ne se mentionne pas lui même alors il devra figurer dans la liste des catalogues ne se mentionnant pas eux-mêmes.
2. Si le catalogue se mentionne lui même, donc c'est un catalogue qui ne se mentionne pas par définition.

2.3 Théorie de Zermelo-Fraenkel

La théorie de Zermelo-Fraenkel repose sur les axiomes suivans :

Axiome de l'égalité (ou Extensionalité)

Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments. $\forall x\ \forall y\ [\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y]$

Axiome de compréhension (ou de séparation).

Etant donné un ensemble U et un prédicat $P(x)$ il existe un ensemble E dont les éléments sont ceux, parmi les éléments de U, qui ont la propriété $P(x)$.

$E = \{x \in U : P(x)\}$

Proposition 2.3.1. *Il n'y a pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles.*

Preuve. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un ensemble de tous les ensembles noté E.

Dans ce cas l'écriture suivante est correcte

$F = \{x \in E : x \notin x\}$.

Or cette écriture mène au paradoxe de Russel et donc à une contradiction.

Ainsi il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Axiome de la paire

Etant donnés deux ensembles a et b, il existe un ensemble c qui contient a et b et eux seulement.

$\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall t\ [t \in c \Leftrightarrow (t = x \vee t = y)]$

L'ensemble c dont les seuls éléments sont a et b est noté $\{a, b\}$.

Si $a \neq b$ l'ensemble $\{a, b\}$ est appelé une paire. Si $a = b$ l'ensemble $\{a, b\}$ est appelé un singleton, on le note $\{a\}$.

Axiome de la réunion (ou de la somme)

Pour tout ensemble a il existe un ensemble b dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de a. La formule correspondante est :

$\forall a\ \forall b\ (\forall x, x \in b \Leftrightarrow \exists y, y \in a \wedge x \in y)$.

Cet ensemble est unique, on l'appelle la réunion des éléments de x et on le note $\cup_{y \in x} y$.

Axiome de l'ensemble des parties

A tout ensemble on peut associer un ensemble qui contient exactement les parties du premier. $\forall a$Ą$\forall b\ (\forall x, x \in b \Rightarrow x \subset a)$

Remarques

La notation $x \subset a$ est une abbréviation pour $\forall y, y \in x \Leftrightarrow y \in a$.

L'ensemble des parties de l'ensemble a est noté $\mathcal{P}(a)$.

Axiome de l'infini

Il existe un ensemble M dont $\emptyset$ est élément et tel que pour tout x appartenant à M l'ensemble $\{x\}$ appartient aussi à M.

Remarque Cet axiome construit indirectement les entiers naturels. Ainsi $\emptyset$ correspond à 0 et pour chaque entier n l'entier $n+1$ correspond à $n \cup \{n\}$.

Axiome de fondation

Tout ensemble non vide contient un élément avec lequel il n'a aucun élément en commun.

$\forall x,\ (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y\ (y \in x, x \cap y = \emptyset)$.

2.4 Hypothèse du continu

Equipotence

Définition 2.4.1. *Deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement s'il existe une application bijective entre E et F.*

Un ensemble E est dit subpotent à un ensemble F s'il existe une injection de E dans F.

Proposition 2.4.1. *L'équipotence est une relation d'équivalence notée $\sim$.*

Exemple L'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ est une bijection et nous avons donc $]-1,1[\sim \mathbb{R}$.

Ensembles finis / infinis

Définition 2.4.2. *Pour tout entier naturel n, on va noter $\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} : x < n\} = \{0, ..., n-1\}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels.*

Définition 2.4.3. *On dit que E est un ensemble fini de cardinal n, quand E est équipotent à $\mathbb{N}_n$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

Remarque. L'ensemble vide est l'unique ensemble fini de cardinal 0.

Ensemble denombrable

Définition 2.4.4. *Un ensemble est dit dénombrable si et seulement s'il appartient à la classe d'équivalence de* $\mathbb{N}$.

Exemple Soit $P = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers pairs. Soit l'application $f : \mathbb{N} \to P$ qui à tout entier k associe $2k$.
L'application f est bijective, l'ensemble P est dénombrable.
Exemple L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable ainsi que $\mathbb{Q}$.

Puissance du continu

Définition 2.4.5. *Un ensemble a la puissance du continu s'il appartient à la classe d'équivalence de* $\mathbb{R}$.

Exemple L'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ est une bijection et nous avons donc $]-1,1[\to \mathbb{R}$.

Théorème 2.4.1. *(Cantor) Pour tout ensemble* E *on a* $card(E) < card(P(E))$.

Hypothèse du continu : Tout sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels est soit fini, soit infini dénombrable, soit possède la puissance du continu.
Axiome du choix Axiome : Pour tout ensemble E, il existe une fonction qui à chaque partie non vide de E associe un élément de cette partie autrement dit : f :
$\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$
$X \to f(X) \in E$.

Chapitre 3

Calcul propositionnel et calcul des prédicats

3.1 Calcul propositionnel

3.1.1 Proposition

Définition 3.1.1. *Un énoncé ne possédant que deux valeurs vraie* (1) *ou fausse* (0) *sans aucune ambiguité et indépendament du contexte de l'énnoncé est dit proposition.*

On note généralement les propositions par les lettres p, q, r... ou encore p_1, p_2,...

Exemples.

1/ "4 n'est pas un carré parfait" est une proposition fausse.

2/ "La promotion de 2ème année licence mathématiques de l'université de Tiaret comporte 120 étudiants" n'est pas une proposition.

3/ La promotion de 2ème année licence mathématiques de l'université de Tiaret $2022-2023$ comporte 120 étudiants" est une proposition.

3.1.2 Connecteurs fondamentaux

Les connecteurs permettent de lier des propositions entre elles. Un connecteur se définit en donnant sa table de vérité.

La négation

Définition 3.1.2. *Si p est une proposition, sa négation est notée par $\rceil p$, ou bien $\overline{p}$ et prend la valeur contraire de celle de p, la négation est définie par la table de vérité*

p	$\rceil p$
1	*0*
0	*1*

Remarque Le connecteur $\rceil$ est un connecteur unaire autrement dit qui lie une seule proposition.

Conjonction et disjonction

Définition 3.1.3. *Les connecteurs binaires* ***conjonction*** *et* ***disjonction****, notés respectivement $\wedge$ et $\vee$ sont définis par les tables de verite :*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*0*	*0*

La proposition composée $p \wedge q$ se lit "p et q" est vraie si p et q sont vraies toutes les deux et fausse dans les autres cas.
La proposition composée $p \vee q$ se lit "p ou q" est vraie si l'une au moins des propositions p et q est vraie et fausse si p et q sont fausses.

Remarque La conjonction et la disjonction sont des connecteurs associatifs.
c'est à dire qu'on peut écrire $p \wedge (q \wedge r)$ ou $(p \wedge q) \wedge r$ ou simplement $p \wedge q \wedge r$.
De même $p \vee (q \vee r)$ ou $(p \vee q) \vee r$ ou simplement $p \vee q \vee r$.

Distributivité et lois de Morgan

Distribution de la conjonction sur la disjonction

Les propositions $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$ sont équivalentes (possèdent la même table de vérite).

Distribution de la disjonction sur la conjonction

Les propositions $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$ sont équivalentes (possèdent la même table de vérite).

Lois de Morgan

La negation de la proposition $(p \wedge q)$ est la proposition $\rceil p \vee \rceil q$.

La negation de la proposition $(p \vee q)$ est la proposition Ą$\rceil p \wedge \rceil q$.

Implication logique

Définition 3.1.4. *Soient p et q deux propositions, la proposition Ą"Si p Alors q" se note $p \Rightarrow q$ le connecteur binaire s'appelle implication et il est défini par la table de vérite.*

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p est dit antécédent et q est dit conséquent.

Exemple Une enseignante dit à ses élèves "Si vous répondez juste à la question que je vais poser alors je vous rajouterai un point en plus", l'enseignante pose sa question et aucun élève ne trouve la réponse juste, l'enseignante rajoute un point à chaque élève et ces derniers ne comprennent pas".

Si on note $P =$ "répondre juste à la question" et $Q =$" Rajouter un point".

L'implication logique $P \Rightarrow Q$ est vraie dans les deux situations (que l'enseignante distribue des points ou pas) car P est fausse.

Définition 3.1.5. *L'implication $q \Rightarrow p$ est appelée réciproque de $p \Rightarrow q$. L'implication $\rceil q \Rightarrow \rceil p$ est appelée contraposée de $p \Rightarrow q$.*

Remarque Une implication a toujours la même table de vérité que sa contraposée.

En effet on a :

p	q	$p \Rightarrow q$	$\rceil q$	$\rceil p$	$\rceil q \Rightarrow \rceil p$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Remarque Une implication n'a pas la même table de vérité que sa réciproque.

En effet on a :

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Proposition 3.1.1. *La négation de la proposition $p \Rightarrow q$ est la proposition $p \wedge \rceil q$.*

Preuve. On a recours à la table de vérite.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\rceil(p \Rightarrow q)$	p	$\rceil q$	$p \wedge \rceil q$
1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0

Equivalence (si et seulement si)

Définition 3.1.6. *Soient p et q deux propositions, la proposition composée $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ est dite "p si et seulement si q".*

On note $p \Leftrightarrow q$ et la table de vérite est donnée par :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*1*

Système complet de connecteurs

Définition 3.1.7. *On dit qu'un ensemble de connecteurs C est un système complet de connecteurs si toute formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs de C.*

Proposition 3.1.2. *L'ensemble $\{\rceil, \vee\}$ est un système complet de connecteurs.*

Preuve. Il suffit de montrer que les propositions $(p \wedge q)$, $(p \Rightarrow q)$, $(p \Leftrightarrow q)$ peuvent s'écrire en utilisant seulement les connecteurs $\rceil$ etĄ$\vee$.

i) On a $(p \wedge q) \Leftrightarrow \rceil(\rceil p \vee \rceil q)$.

ii) On a $(p \Rightarrow q)$ Ą$\Leftrightarrow \rceil p \vee q$.

iii) On a $(p \Leftrightarrow q) \ \Leftrightarrow \rceil[\rceil(\rceil p \vee q) \vee \rceil(\rceil q \vee p)]$.

Tautologie et antilogie

Définition 3.1.8. *Une tautologie est une formule (proposition composée) dont la valeur de vérité est toujours 1*

Une proposition qui est toujours fausse est une antilogie ou une contradiction.

Exemple Soit p une proposition, la formule $p \vee \rceil p$ est une tautologie.

p	$\rceil p$	$p \vee \rceil p$
1	0	1
0	1	1

Exemple Soit p une proposition, la formule $p \wedge \rceil p$ est une contradiction.

p	$\rceil p$	$p \wedge \rceil p$
1	0	0
0	1	0

3.2 Calcul des prédicats

Quantificateur universel et existentiel

Définition 3.2.1. *Un prédicat est un énnoncé dépendant d'une ou plusieurs variables. La valeur de vérité du prédicat dépend ainsi de la (les) variable(s) le composant.*

Définition 3.2.2. *Soit $p(x)$ un prédicat dépendant de la variable x. On introduit les propositions :*

1- $\forall x(p(x))$: Par définition cette proposition est vraie si toute valeur de x rend vrai le predicat $p(x)$.

2- $\exists x(p(x))$: Par définition cette proposition est vraie s'il existe au moins une valeur de x pour laquelle le predicat $p(x)$ est vrai.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ s'appellent respectivement quantificateur universel et quantificateur existentiel

Dans la plupart des cas les variables sur lesquels portent les quantificateurs sont prises dans des ensembles. On adopte ainsi les notations suivantes :

1- $\forall x \in A : p(x)$ est utilisée pour désigner la formule Ą$\forall x((x \in A \Rightarrow p(x)))$.

1- $\exists x \in A : p(x)$ est utilisée pour désigner la formule Ą$\exists x((x \in A) \wedge p(x))$.

Quantificateurs multiple

Lorsque un prédicat a plusieurs variables est quantifié universellement et existentiellement, l'ordre dans lequel apparaissent les quantificateurs est important. Ainsi pour un predicat $p(x, y)$ les formules $\forall x$, $\exists y$, $p(x, y)$ et $\exists x$,Ą$\forall y$, $p(x, y)$ n'ont pas le même sens.

Négation d'un quantificateur

Les règles fondamentales de négation des formules sont données par :

$\rceil(\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \rceil p(x)$

Ą $\rceil(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \rceil p(x)$

Ces règles sont appliquées succesivement a plusieurs quantificateurs.

Quantificateurs et connecteurs

Dans des formules faisant une utilisation simultanée de quantificateurs et des connecteurs de conjonction et de disjonction il faut faire attention à la signification des formules.

Ainsi les formules : $\forall x : (p(x) \wedge q(x))$ et $(\forall x : p(x)) \wedge (\forall x : q(x))$ sont équivalentes.

Par contre les formules $\forall x : (p(x) \vee q(x))$ et $(\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x))$ ne sont pas équivalentes, la seconde implique la première.

De même $\exists x : (p(x) \vee q(x))$ et $(\exists x : p(x)) \vee (\exists x : q(x))$ sont equivalentes, alors que $\exists x : (p(x) \wedge q(x))$ implique $(\exists x : p(x)) \wedge (\exists x : q(x))$.

Le quantificateur d'unique existence

Le quantificateur $\exists!$ signife "il existe un et un seul", la formule $\exists! x : p(x)$ affirme l'existence d'une unique valeur de la variable x rendant vrai le predicat $p(x)$.

Chapitre 4

Bon ordre et preuve par récurrence

4.1 Preuve par récurrence

Preuve par récurrence simple

Théorème 4.1.1. *Soit $P(n)$ un predicat dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$.*

On suppose que $P(0)$ est vraie. (Initialisation)

On suppose également que pour tout entier n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie. (Hérédite)

Alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

Preuve. On raisonne par l'absurde.

Soit $E = \{n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est faux}\}$.

En tant que partie non vide de $\mathbb{N}$, l'ensemble E a un plus petit élément n_0.

n_0 est différent de 0 car on a suppose $P(0)$ vraie comme $0 < n_0$ on sait que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.

$P(n0 - 1)$ est vraie car $n_0 - 1 \notin E$.

Par hypothèse $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ d'ou $P(n_0)$ est vraie ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Cette méthode de démonstration utilise le principe dit :"principe du bon ordre"

Exemple Soit la suite définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+{u_n}^2}{2}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$

On va montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

On suppose ensuite que la proposition est vraie pour n et on la démontre pour $n+1$.

On remarquera que les termes de la suite sont positifs.

$0 \geq u_n \leq 1 \Rightarrow {u_n}^2 \leq 1 \Rightarrow {u_n}^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{{u_n}^2+1}{2} \leq 1$.

Schéma de preuve par le principe du bon ordre

1. Definir l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ est faux}\}$
2. Supposer que E est non vide comme base pour une preuve par contradiction.
3. Comme $\mathbb{N}$ est bien ordonné , il y a un plus petit element n_0 dans E.
4. Le plus petit élément ne peut pas être celui de la proposition de départ. Utiliser l'hérédité pour arriver à la contradiction.

Exemple Soit la suite définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+{u_n}^2}{2}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$

On va montrer par le principe du bon ordre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

On raisonne par l'absurde.

Soit $E = \{n \in \mathbb{N}, u_n > 1\}$

En tant que partie non vide de $\mathbb{N}$ l'ensemble E a un plus petit élément n_0.

On a n_0 différent de 0 car on a $u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

Comme $0 < n_0$ on sait que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin E$. $0 \geq u_{n_0-1} \leq 1 \Rightarrow {u_{n_0-1}}^2 \leq 1 \Rightarrow {u_{n_0-1}}^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{{u_{n_0-1}}^2+1}{2} \leq 1 \Rightarrow u_{n_0} \leq 1 \Rightarrow u_{n_0} \notin E$.

Ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Bibliographie

[1] Rezki Chemlal, *Polycopié de Logique mathématique*, Université A. Mira de Béjaia, Algérie.

[2] Paul Milan, *Principes de la rédaction mathématique.*