République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun-Tiaret

Faculté Des Sciences De La Matière

Département De Physique

Méthodes Mathématiques Pour La Physique

(Un polycopié destiné aux étudiants de 3° année licence Physique fondamentale) (3PF)

Réalisé par :

BENAISSA BOUHARKET
BOUHARKET.BENAISSA@UNIV-TIARET.DZ

Expertisé par :

PR. SENOUCI ABDELKADER - UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN, TIARET.
PR. GUEDDA LAHCEN - UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN, TIARET.

Daté le 06/06/2021.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Introduction

L'objectif du cours Méthodes mathématique pour la physique est de présenter les définitions et les propriétés d'un certain nombre de fonctions spéciales définies par des intégrales largement utilisées dans différents domaines de la physique.

Le polycopié comprend sept chapitres et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous donnons un aperçu sur le calcul intégral (simples, doubles, généralisées) et des fonctions définies par des intégrales.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les fonctions Eulériennes Gamma et Bêta. On donne des définitions, quelques propriétés usuelles et des formules (duplication, complément, Stirling) concernant la fonction Gama.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la fonction d'erreur et des intégrales de Fresnel. La preuve des intégrales de Fresnel est donnée sous forme d'exercice.

Dans le quatrième chapitre nous définissions les fonctions intégrale sinus, intégrale cosinus et intégrale exponentielle avec quelques propriétés, puis nous prouvons l'intégrale de Dirichlet sous la forme d'un exercice.

Le cinquième chapitre traite des polynômes orthogonaux, la première partie est consacrée à la définition, la formule de récurrence et la formule de Rodriguez, la deuxième partie concerne les propriétés des polynômes classiques (Hermite, la guerre, Legendre et de Tchebychev).

Le sixième chapitre est consacré à l'étude les fonctions de Bessel. On donne la résolution de l'équation différentielle de Bessel et des propriétés sous forme des exercices.

Le dernier chapitre traite les fonctions hypergéométriques de Gauss. La première partie est sur le symbole de Pochammer et ses propriétés, la deuxiéme partie concerne la résolution des équations différentielles hypergéométrique, représentation intégrale et quelques représentations des fonctions spéciales à l'aide des fonctions hypergéométriques de Gauss.

Chapitre 1

Le calcul intégrale

Dans ce chapitre on donne des notions nécessaires sur le calcul des intégrales pour l'application (l'intégrale par parties, changement de variable, l'intégrale double, ...). Ces notions ne sont pas en détail mais on les considére comme des outils de travail.

1.1 Généralités sur les intégrales

Définition 1.1.1. *Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I non réduit à un point. La fonction F est une primitive de f sur I ssi, pour tout $x \in I : F'(x) = f(x)$.*
(Autrement dit : F est dérivable sur I, et $F' = f$).

Théorème 1.1.1. *Si f est une fonction définie sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I, alors la fonction f admet une **infinité** des fonctions primitives, les autres primitives G de f sur I sont définies par $G(x) = F(x) + C$ où C est une constante réelle.*

Proposition 1.1.1. *Toute fonction **continue** sur un intervalle I, admet des primitives sur I.*

Proposition 1.1.2. *Si f est une fonction continue sur I, et F est une primitive de f sur I, alors $F \in \mathscr{C}^1(I)$ (F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I).*

1.1.1 Intégrale indéfinie

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Définition 1.1.2. *On appelle intégrale indéfinie de la fonction f et l'on note $\int f(x)dx$, l'expression générale de toutes les primitives de f sur I.*
C'est-à-dire :

$$\int f(x)dx = F(x) + \boldsymbol{c} \quad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}),$$

où F est une primitive de f sur I.

Exemple 1.1.1.

$$\int (x^2 - \cos x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + \boldsymbol{c} \quad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + \boldsymbol{c} \quad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}).$$

Propriétes 1.1.1. .

– *Si f est dérivable sur I et f' la dérivée de f, alors*

$$\int f'(x)dx = f(x) + \boldsymbol{c}, \quad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}).$$

– *Si f et g sont deux fonctions continue sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\bullet \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,$$

$$\bullet \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Primitives Usuelles

N	$f(x)$	$\int f(x)dx$	Intervalle I	**N**	$f(x)$	$\int f(x)dx$	Intervalle I
1	a	$ax + c$	$\mathbb{R}$	2	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$	$\mathbb{R}^\star$	4	$\frac{1}{x+a}$	$\ln\|x+a\| + c$	$\mathbb{R} - \{-a\}$
5	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}^{+\star}$	6	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^\star$, $n \geq 2$
7	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	$]-1,1[$	8	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	$\mathbb{R}$
11	$\sinh x$	$\cosh x + c$	$\mathbb{R}$	12	$\cosh x$	$\sinh x + c$	$\mathbb{R}$
13	e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$	14	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Méthodes d'integration

Integration par changement de variable

Soient $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur un intervalle J, et $u : I \longrightarrow J$ une fonction dérivable sur un intervalle I telle que ; $f \circ u(x) = f(u(x))$.
Si on pose $t = u(x)$, alors $dt = u'(x)dx$.

Proposition 1.1.3. *Soient $u \in \mathscr{C}^1(I)$ à valeurs dans J et $f \in \mathscr{C}(J)$, alors*

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F(u(x)) + c,$$

où F est une primitive de f .

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on a alors :

N	$f(x)$	$\int f(x)dx$	remarques	**N**	$f(x)$	$\int f(x)dx$	remarques
1	u'	u	I	2	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	I
3	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u \neq 0$	4	$\dfrac{u'}{u^n}$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u \neq 0$, $n \geq 2$
5	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$	6	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$	$u \in]-1, 1[$
7	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$	I	8	$u'e^u$	e^u	I
9	$u' \sin u$	$\cos u$	I	10	$u' \cos u$	$-\sin u$	I
11	$u' \sinh u$	$\cosh u$	I	12	$u' \cosh u$	$\sinh u$	I

Exercice 1.1.1. *Calculer les integrales suivantes :*

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx, quad \quad \int \frac{1}{e^x+1}dx, \quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx, \quad \int \frac{1}{x(x-1)}dx.$$
$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx, \quad \int \frac{1}{(2x+1)^3}dx, \quad \int \cos^2 x dx, \int x \sin x^2 dx, \quad \int \frac{\ln x}{x}dx.$$

Solution :

On pose $u(x) = 1+x^3$, ce qui donne $u'(x) = 3x^2$, donc

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\ln|u(x)|+c = \frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|+c.$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c.$$

Soit $t = \ln x \Longrightarrow dt = \frac{1}{x}dx$, d'où

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2+c = \frac{1}{2}\ln^2 x+c.$$
$$\int \frac{1}{x(x-1)}dx = \int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx = \ln(x-1)-\ln x+c.$$

Integration par parties

La relation $(uv)' = u'v+v'u$ va permettre d'obtenir la formule d'intégration par parties :

Proposition 1.1.4. *Si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1(I)$, alors*

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.1. $u'(t) = \frac{du}{dt} \Rightarrow u'(t)dt = du$, *donc*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1.2}$$

L'intégration par parties c'est le procédé consistant à ramener le $\int u\,dv$ à l'intégrale $\int v\,du$ à l'aide de la formulle (1.2). Cette méyhode savère bonne si $\int v\,du$ est plus facile à calculer que $\int u\,dv$.

Exercice 1.1.2. *Calculer les integrales suivantes :*

$$\int \ln x\,dx, \quad \int \arctan x\,dx, \quad \int (x+1)e^x dx, \quad \int x \sin x\,dx, \quad \int x\cosh x\,dx.$$

Solution :
Soit

$$\begin{cases} u(x) & = \arctan x \\ v'(x) & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) & = \frac{1}{x^2+1} \\ v(x) & = x \end{cases}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

On pose

$$\begin{cases} u(x) & = x \\ v'(x) & = \cosh x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) & = 1 \\ v(x) & = \sinh x \end{cases}$$

d'où

$$\int x \cosh x \, dx = x \sinh x - \int \sinh x \, dx = x \sinh x - \sinh x + c.$$

1.1.2 Intégrale définie

Définition de l'intégrale de Riemann

Définition 1.1.3. ***(subdivision)***
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- *Une subdivision de l'intervalle **fermé borné**(compact) $[a;b]$ est une famille **finie** de réels $d = \{x_0; x_1; \ ...; \ x_n\}$ telle que : $a = x_0 < x_1 < \ ... \ < x_{n-1} < x_n = b$.*
  Il s'agit donc de n intervalles partiels compacts $[x_{i-1}; x_i]$ de l'intervalle $[a;b]$.
- *Le pas d'une telle subdivision est le réel strictement positif*

$$\delta(d) = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Définition 1.1.4. ***(fonction bornée)***
*Soit $[a;b]$ un intervalle compact (**fermé borné**) de $\mathbb{R}$.*
On dit que la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] : -M \le f(x) \le M,$$

autrement dit

$$\|f\| = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| < +\infty.$$

Posons

$$m_i = m_i(f,d) = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = M_i(f,d) = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x).$$

Les nombres m_i, M_i sont finis puisque $\|f(x)\| < +\infty$.

Définition 1.1.5. ***(Sommes de Darboux)***
Considérons

$$\begin{aligned} s &= s(f,d) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \\ S &= S(f,d) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Ces deux sommes sont dites sommes de Darboux, respectivement inférieure et supérieure de f relativement à la subdivision d.

Remarque 1.1.2.

$$\forall d : s(f,d) \leq S(f,d).$$

Définition 1.1.6. ***(Somme de Riemann)***
La somme

$$\sigma = \sigma(f,d) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

où

$$\xi_i \in [x_{i-1};x_i], \quad i = 1,...,n,$$

est dite somme de Riemann de f corespondant à la subdivision d et au systéme des réels $\xi = \{\xi_1,...,\xi_2\}$.

Proposition 1.1.5.

$$\forall d : s(f,d) = \inf_{\xi} \sigma(f,d), \quad S(f,d) = \sup_{\xi} \sigma(f,d),$$

$$\forall d : s(f,d) \leq \sigma(f,d) \leq S(f,d).$$

Définition 1.1.7. ***(Fonctions Riemann-intégrables)***
Une fonction ***bornée*** *$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable (au sens de Riemann) si :*

$$\sup s(f,d) = \inf S(f,d).$$

On appelle alors ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et on le note $\int_a^b f(x)dx$.

Théorème 1.1.2. *Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann), alors*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\xi(d)\to 0} \sigma(f,d) \\ &= \lim_{\xi(d)\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

Propriétes 1.1.2. *Soient f, g deux fonctions intégrables sur un intervalle I compact. a,b et c des éléments de I et λ,β des réels quelconques, alors :*

1. **Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration**
   - *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors f est intégrable sur chaque intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.*
   - $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$ • $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
   - $\int_a^a f(t)dt = 0$ • $\int_a^b 0dt = 0.$
2. **La linéarité**
   - $\int_a^b (\lambda f(t) + \beta g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$
3. **La comparaison**
   - $\forall t \in [a,b] : f(t) \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0.$ • $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$
   - $\forall t \in [a,b] : f(t) \leq g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$
4. **la valeur moyenne**
   - *Si $m \leq f(t) \leq M$ sur $[a,b]$ alors, $m \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq M.$*

$\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$ *est appelée la valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$.*

Exemples de fonctions intégrables

Théorème 1.1.3. *Toute fonction monotone bornée sur un compact $[a,b]$ est Riemann intégrable.*

Théorème 1.1.4. *Toute fonction continue sur un compact $[a,b]$ est Riemann intégrable.*

Pour la démonstration, voir [5] page 212-213.

Théorème 1.1.5. *Soit F une primitive quelconque de la fonction f continue sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Integration par parties

Théorème 1.1.6. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt. \tag{1.3}$$

Integration par changement de variable

Proposition 1.1.6. *Soient $u \in \mathscr{C}^1(I)$ à valeurs dans J et $f \in \mathscr{C}(J)$, alors*

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Proposition 1.1.7. *Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, $a \in I$ et $H(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors H est dérivable sur I et $H' = f$.*

1.1.3 Intégrale généralisée

La notation d'intégrale généralisée (où impropre) est une extension de la notion d'intégrale définie simple.

Intégrale de type $\int_a^\infty f(t)\,dt$

Définition 1.1.8. *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $I = [a, \infty[$, $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que l'intégrale de f sur I converge si $\int_a^x f(t)\,dt$ possede une limite finie quand $x \longrightarrow \infty$ et on note dans ce cas

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dans le contraire, on dit que l'intégrale généralisée est divergente.

Exemples 1.1.1. $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$, $\int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt$.
On a :

$$\int_0^a e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^a = 1 - e^{-a},$$

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-t}\,dt = \lim_{a\to\infty} 1 - e^{-a} = 1 \Longrightarrow \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 \quad \textit{(l'intégrale converge).}$$

$$\int_1^a \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^a = \ln a,\ \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{t}\,dt = \infty,$$

donc l'intégrale diverge.

Intégrale de type $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$

Définition 1.1.9. *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $J =]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que l'intégrale de f sur J converge si $\int_x^a f(t)\,dt$ possede une limite finie quand

$x \longrightarrow -\infty$ et on note dans ce cas

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{a} f(t)\,dt.$$

Exemples 1.1.2. $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,dt$, $\quad \int_{-\infty}^{1} e^{t}\,dt$.

On a :

$$\int_{x}^{0} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{x}^{0} = e^{-x}-1,$$

$\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}-1 = +\infty \Longrightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,dt$ *diverge.*

$$\int_{x}^{1} e^{t}\,dt = \left[e^{t}\right]_{x}^{1} = e-e^{x},$$

$\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{1} e^{t}\,dt = \lim_{x\to-\infty}(e-e^{x}) = e \Longrightarrow \int_{-\infty}^{1} e^{t}\,dt = e,$ *d'où l'intégrale converge.*

Intégrale de type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

Définition 1.1.10. *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$.*
Si $\forall c\in\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt$ converge et $\int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Si non $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est dite divergente.

Exemples 1.1.3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,dt$, $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

On a : $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,dt$ diverge et $\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est divergente.
$\forall a\in\mathbb{R}$:

$$\int_{x}^{a} \frac{1}{t^2+1}\,dt = [\arctan t]_{x}^{a} = \arctan a - \arctan x \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{a} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan a + \frac{\pi}{2},$$
$$\int_{a}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt = [\arctan t]_{a}^{x} = \arctan x - \arctan a \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan a.$$

D'où les intégrales $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ et $\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ sont convergentes pout tout $a\in\mathbb{R}$,
en on déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \pi$.

Intégrale de type $\int_a^b f(t)\,dt$

Définition 1.1.11. *Soit* $f:\ [a,b[\to\mathbb{R}$ *une fonction intégrable.*
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge si* $\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$ *est finie, et on a* $\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$.

Définition 1.1.12. *Soit* $f:\ ]a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction intégrable.*
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente si* $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$ *est finie, et on a* $\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt$.

Définition 1.1.13. *Soit* $f:\ ]a,b[\to\mathbb{R}$ *une fonction intégrable.*
On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge si* $\forall\, c\in\,]a,b[$ *:* $\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\int_c^b f(t)\,dt$ *converges.*

Exemple 1.1.2. *Soit l'intégrale (de Riemann)* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt,\quad \alpha\in\mathbb{R}$.

1. *Cas :* $\alpha=1$ *On pose* $f(t)=\frac{1}{t}$, f *est intégrable sur* $]0,1]$.
   $\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt=-\ln x\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{1}{t}\,d=-\infty$, *donc l'intégrale* $\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ *diverge.*
2. *Cas :* $\alpha\neq 1$ $\int_x^1\frac{1}{t^\alpha}\,dt=\left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_x^1=\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha-1}$.

Si $\alpha>1$ *, on déduit que* $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{1}{t^\alpha}\,dt=+\infty$, *et si* $\alpha<1$ *,alors* $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{1}{t^\alpha}\,dt=\frac{1}{1-\alpha}$.
Donc

$$\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}\,dt\quad \text{converge pour } \alpha<1.$$

Exercice 1.1.3. *Etudier la convergence de l'intégrale de Riemann* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,dt$ *suivant les valeurs de* α.

Théorème 1.1.7. *(La Comparaison) Soient* f *et* g *deux fonctions positives et intégrables sur* $[a,+\infty[$, *telle que*

$$0\le f(x)\le g(x)\ ,\ \text{pour tout } x\in[a,+\infty[,$$

si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *converge, alors* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge,*
si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge, alors* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *diverge.*

1.1.4 Intégrale double

Soit f une fonction intégrable sur le domaine D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Formules de Fubini

1. $D=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\backslash \quad x\in[a,b]\,et\,y\in[c,d]\}$ (rectangle), alors

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $h:[c,d]\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables telles que $f(x,y)=g(x)\times h(y)$, alors

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

2. Soient $[a,b](a<b)$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ telles que $\forall x\in[a,b]$, $u(x)\le v(x)$. $D=\{(x,y)\backslash \quad a\le x\le b\ ,\ u(x)\le y\le v(x)\}$, alors f est intégrable sur D et on a

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

d'abord on intégre par rapport à y et ensuite par rapport à x.

3. Soient $[c,d](c<d)$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions intégrables sur $[c,d]$ telles que $\forall y\in[c,d]$, $u(y)\le v(y)$. $D=\{(x,y)\backslash \quad c\le y\le d\ ,\ u(y)\le x\le v(y)\}$, alors f est intégrable sur D et on a

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx\right)dy,$$

on intégre par rapport à x et ensuite par rapport à y.

Exercice 1.1.4. *Calculer les intégrales doubles suivantes :*

- $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy,\qquad D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi].$
- $\iint\limits_D (xy+x-y-1)dxdy,\qquad D=\{(x,y)\backslash \quad 0\le x\le 1\ ,\ x-1\le y\le 1-x\}.$

Solution : soit $I = \displaystyle\iint_D \sin(x+y)dxdy, \qquad D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi].$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y)dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y)]_0^{\pi}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x) + \cos(x+\pi)]\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos(x)\, dx \\ &= -2\,[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2. \end{aligned}$$

Changement de variable dans une intégrale double

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 \quad ...\}$.

- En effectuant le changement de variable $x = \varphi(s,t)$ et $y = \phi(s,t)$ et en déterminant le domaine $\Delta = \{(s,t) \in \mathbb{R}_2 \quad ...\}$, puis
- On calcul la jacobienne de ce changement de variables, c'est à dire $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$,
- et finalement on calcule la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne.

Par conséquence, on obtient

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta g(s,t)|J|dsdt.$$

Exercice 1.1.5. *Calculer l'intégrale suivante :*
$\displaystyle\iint_D (x-1)^2 dxdy, \qquad D = \{(x,y)\backslash \quad -1 \leq x+y \leq 1\ ,\ -2 \leq x-y \leq 2\}.$

Changement de variable en coordonnées polaires $(x,y) \longmapsto (r,\theta)$

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \cos\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$

On déduit que $dxdy = r\,dr\,d\theta$.

Exemple 1.1.3. *Calculer l'intégrale suivante :*
$I = \displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy, \qquad D = \{(x,y)\backslash \quad 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\ ,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$

On a : $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 1 \leq r \leq 2 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\, d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Exercice 1.1.6. intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

Soit $R > 0$, on définit l'intégrale $I(R)$ par l'expression : $I(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx.$

1. *Montrer que* $I^2(R) = \int_0^R \int_0^R e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx\, dy.$
2. *On définit le domaine $D(R)$ comme suit ;*

$$D(R) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

   Vérifier que $D(R) \leq [0,R] \times [0,R] \leq D(\sqrt{2}R).$
3. *Par le passage en coordonnées polaires, montrer que* $\int\int_{D(R)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx\, dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right).$
4. *Vérifier que* $\forall R > 0 :\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1 - e^{-R^2}} \leq I(R) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1 - e^{-2R^2}}.$
5. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

1.2 Fonction d'une variable réelle définie par une intégrale

1.2.1 Fonction : $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt.$

Soit f une fonction intégrable sur tout segments $[a,b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

1. La fonction F est continue sur I et $F(a) = 0$.
2. F est dérivable en tout $x \in I$ et $F'(x) = f(x)$.

L'intégrale $\int_x^b f(t)dt$ a un sens et définit une fonction

$$\begin{array}{rcl} H : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & H(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt. \end{array}$$

1. La fonction H est continue sur I et $H(b) = 0$.
2. H est dérivable en tout $x \in I$ et $H'(x) = -f(x)$.

1.2.2 Fonction : $x \longmapsto \varphi(x) = \int_a^b f(x,t)dt$.

La fonction φ est définie si f est une application de $I \times [a,b]$; I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in I$, l'application partielle $t \longmapsto f(x,t)$ soit intégrable sur $[a,b]$.

Propriétés de φ

1. **Continuité**
   Si la fonction
   $$\begin{array}{rcl} f : I \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$$
   est continue sur $I \times [a,b]$, alors la fonction
   $$\begin{array}{rcl} \varphi : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt \end{array}$$
   est définie et continue sur I.
2. **Dérivabilité** *(Dérivation sous le signe somme)*

   Théorème 1.2.1. *Si la fonction* $\begin{array}{rcl} f : I \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ *est continue sur* $I \times [a,b]$ *et admet une fonction dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *également continue sur* $I \times [a,b]$, *alors la fonction* $\begin{array}{rcl} \varphi : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt \end{array}$ *est dérivable sur* I*, sa dérivée* φ' *vérifiant*

   $$\forall x \in I : \quad \varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in I: \quad \frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

3. **Intégrabilité** *(Intégration sous le signe somme)*
Soit f une fonction continue sur $I \times [a,b]$, alors f est intégrable sur tout rectangle $\Delta = [\alpha,\beta] \times [a,b]$ avec $\alpha,\beta \in I$ et $\alpha < \beta$. La formule d'intégration sous le signe somme est
$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dt\right)dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right)dt.$$

Exercice 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout x strictement positif, on a*

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}.$$

-1) *Calculer $F_0(x)$, $\quad F_1(x)$.*

-2) *Montrer que $F_{n+1}(x) = -\dfrac{1}{2nx}F_n'(x)$.*

1.2.3 Fonction : $x \longmapsto \varphi(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$

(Fonction définie par une intégrale impropre), soit I un intervalle fermé.

1. **Dérivation sous le signe intégrale**

Propriétes 1.2.1. *Si*

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue sur $I \times [a,+\infty[$.*
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ *converge uniformément sur I.*
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x_0,t)dt$ *converge pour certaint $x_0 \in I$,*

alors la fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ est dérivable sur I, sa dérivée φ' vérifiant

$$\forall x \in I: \quad \varphi'(x) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

2. **Intégration sous le signe intégrale**

   Propriétes 1.2.2. *Si*

   - f *est continue sur* $I \times [a, +\infty[$.
   - $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur I,*

   alors f *est intégrable sur tout segmemt* $[\alpha, \beta]$ *de I et on a*

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{+\infty} f(x,t)dt \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right) dt.$$

Exercice 1.2.2. *Pour tout réel* $x > 0$, *on considére les intégrales suivantes :*

$$I(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \ , \quad J(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

- Montrer que les intégrales convergent.

Solution :

1. Pour $t \in (0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} 1 \leq e^t \leq e \quad &\Longrightarrow \tfrac{1}{e} \leq e^{-t} \leq 1 \\ &\Longrightarrow 0 < e^{-t} \leq 1 \\ &\Longrightarrow 0 < t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}, \end{aligned}$$

   pour tout $x > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on déduit que

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 t^{x-1}e^{-t}dt \quad &\leq \int_\varepsilon^1 t^{x-1}dt \\ &= \frac{1}{x}t^x \Big|_0^\varepsilon = \frac{1}{x}(1 - \varepsilon^x), \end{aligned}$$

   d'où

$$I(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\varepsilon^1 t^{x-1}e^{-t}dt \leq \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{x}(1 - \varepsilon^x) = \frac{1}{x}, \qquad (\ \textit{converge pour tout } x > 0).$$

2. Pour $t \in [1, +\infty)$, on peut écrire : $e^t = \sum_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$, par conséquent , on obtient que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$e^t \geq \sum_0^n \frac{t^k}{k!} \geq \frac{t^n}{n!} \quad \Longrightarrow e^{-t} \leq \frac{n!}{t^n}$$

$$\Longrightarrow t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{n!}{t^{n-x+1}}.$$

Pour tout $x > 0$ et $B > 0$ suffisamment grand, si on pose $n \geq x+1$ on déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^B t^{x-1}e^{-t}dt &\leq \int_1^B \frac{n!}{t^{n-x+1}}dt \\ &= \frac{-n!}{(n-x)t^{n-x}}\bigg|_1^B = \frac{n!}{n-x}\left(1 - \frac{1}{B^{n-x}}\right), \end{aligned}$$

et on résulte que

$$J(x) = \lim_{B \longrightarrow +\infty} \int_1^B t^{x-1}e^{-t}dt \leq \lim_{B \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{n-x}\left(1 - \frac{1}{B^{n-x}}\right) = \frac{n!}{n-x},$$

d'où pour tout $x > 0$ l'intégrale $J(x)$ converge.

Proposition 1.2.1. ***Pour tout réel*** $x > 0$ ***, l'intégrale*** $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ ***est convergente.***

Chapitre 2

Les fonctions Eulériennes gamma et bêta

Dans ce chapitre, nous introduisons la fonction Gamma classique, essentiellement comprise comme une factorielle généralisée. Il existe de nombreuses applications de cette fonction, par exemple on la trouve dans l'analyse, la théorie des nombres, les probabilités, la théorie de la représentation des groupes et le calcul fractionnaire. Nous étudions brièvement la fonction bêta d'Euler où son origine remonte au début du calcul différentiel et intégral où elle a fait sa première apparition dans "Arithmetica Infinitorum" publiée par Wallis en 1665. Ensuite, nous donnons quelques-unes des propriétés de la fonction Gamma, l'équation fonctionnelle de Γ. Les formules de Stirling sont des formules de duplication qui simplifieront de nombreux calculs.

2.1 La fonction Eulérienne Gamma

Définition 2.1.1. *On note* Γ *" Gamma " la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{2.1}$$

Exemple 2.1.1.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Propriétes 2.1.1. *on a les propriétés suivantes :*

1. Γ *est une fonction définie et positive sur* $]0,+\infty[$.
2. Γ *est continue sur* $]0,+\infty[$.
3. Γ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$\forall x \in]0,+\infty[: \ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t . t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{2.2}$$

Preuve *:*
On a $\forall t \in]0,+\infty[: \quad t^{x-1} = e^{\ln(t^{x-1})} = e^{(x-1)\ln t}$,
si on pose $\varphi(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ *, on obtient*

$$\begin{aligned}\Gamma'(x) = \frac{d\Gamma}{dx}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \ln t . e^{(x-1)\ln t} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \ln t . t^{x-1} e^{-t} dt.\end{aligned}$$

4. Γ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N}:\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k . t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{2.3}$$

5. *Relation de récurrence de* Γ *(L'équation fonctionnelle de* Γ*)*

$$\forall x \in]0,+\infty[: \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{2.4}$$

Preuve *: Intégrons* Γ *par parties :*

$$u(t) = e^{-t},\ v'(t) = t^{x-1} \Longrightarrow u'(t) = -e^{-t},\ v(t) = \frac{1}{x}t^x,$$

pour tout $x \in]0,+\infty[$*, on obtient*

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{a\to+\infty} \left[\tfrac{1}{x} t^x e^{-t}\right]_0^a + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{x} a^x e^{-a} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{x}\Gamma(x+1).\end{aligned}$$

$$\left(\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{x} a^x e^{-a} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{x} e^{x\ln a} e^{-a} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{x} e^{a(x\frac{\ln a}{a}-1)} = 0\right).$$

6. *La fonction* Γ *est l'extension du factorielle sur* $x \in]0,+\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \Gamma(n+1) = n!. \tag{2.5}$$

Preuve : *Pour* $n > 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) &= n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &= n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times\Gamma(2)\\ &= n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1\times\Gamma(1) = n!.\end{aligned}$$

Comme on convient que $0! = 1 = \Gamma(1) = \Gamma(0+1)$, *alors on déduit*

$$\forall n\in\mathbb{N}: \quad \Gamma(n+1) = n!\ ,$$

et on peut écrire

$$\forall n\in\mathbb{N}^{\star}: \quad \Gamma(n) = (n-1)!\ .$$

7.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{2.6}$$

Preuve :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt.$$

Posons

$$t^{\frac{1}{2}} = y \Longrightarrow t = y^2 \text{ et } dt = 2y\,dy,$$

donc

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt\\ &= \int_0^{+\infty} y^{-1}e^{-y^2}2y\,dy\\ &= 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right), \quad (\text{ intégrale de Gauss})\\ &= 2(\tfrac{\sqrt{\pi}}{2}) = \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

8.

$$\forall k\in\mathbb{N}: \quad \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{2^{(2k)}.k!}\sqrt{\pi}. \tag{2.7}$$

Preuve : *Sachons que* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *alors Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\times \ldots \times \frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{2k-3}{2}\right)\times \ldots \times \frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi},
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$k! = k(k-1)(k-2)\times \ldots \times 3\times 2\times 1 = \left(\frac{2k}{2}\right)\left(\frac{2k-2}{2}\right)\left(\frac{2k-4}{2}\right)\times \ldots \times \frac{4}{2}\times\frac{2}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{2k-3}{2}\right)\times \ldots \times \frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \left[\left(\frac{2k}{2}\right)\left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{2k-2}{2}\right)\times \ldots \times \frac{3}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}\right]\frac{\sqrt{\pi}}{k!} \\
&= \left(\frac{(2k)!}{2^{(2k)}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{k!} \\
&= \frac{(2k)!}{2^{(2k)}.k!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Le cas négatif

1. Grâce à la relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on peut poser par convention

$$\forall x \in]-1,0[:\ \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{2.8}$$

Exemple 2.1.2.

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, Pour tout valeur x négative non entière, telle que $x \in]-n, -n+1[$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}, \qquad \Gamma(x) \text{ a le signe de } (-1)^n. \tag{2.9}$$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \, \frac{2^{(2n)}.n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}. \tag{2.10}$$

Exercice 2.1.1. *Soit $\alpha > 0$ et Γ la fonctin Gamma d'Euler*

-1) *Déterminer l'expression de $\Gamma(\alpha)$.*
-2) *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^{\alpha}} dt = \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha}).$$

-3) *En déduire l'integrale de Gausse $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.*

Solution :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

En utilisant le changement de variable :

$$t^{\alpha} = y \Rightarrow t = y^{\frac{1}{\alpha}} \text{ et } dt = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t^{\alpha}} dt &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha}) \\ &= \Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) = \Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha}). \end{aligned}$$

Posant $\alpha = 2$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

2.2 La fonction Eulérienne bêta

Définition 2.2.1. *On note Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ strictement positfs, on définit la fonction Bêta Eulérienne par :*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. \tag{2.11}$$

Exemple 2.2.1.

$$\beta(1,1) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{1-1}dt = \int_0^1 1\,dt = 1.$$

$$\beta(2,1) = \int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{1-1}dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

$$\beta(1,2) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{2-1}dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

- Montrer que $\beta(2,2) = \frac{1}{6}$.

Exercice 2.2.1. *- Calculer* $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Solution : on a

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

on utilisant le changement

$$t^{\frac{1}{2}} = x \Longrightarrow t = x^2 \text{ et } dt = 2x\,dx$$

alors

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \int_0^1 x^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x\,dx \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx \\ &= 2\,[\arcsin x]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$

Proposition 2.2.1.

$$\forall x,y \in]0,+\infty[: \ \beta(x,y) = \beta(y,x). \tag{2.12}$$

Preuve : on a $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$,
posons $s = 1-t$, on obtient $t = 1-s,\ dt = -ds$, $t = 0 \Longrightarrow s = 1$ et $t = 1 \Longrightarrow s = 0$, cela

nous donne

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= -\int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}ds \\ &= \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds \\ &= \beta(y,x).\end{aligned}$$

Proposition 2.2.2. ***Relation entre les fonctions*** Γ ***et*** β

$$\forall x,y \in]0,+\infty[:\ \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2.13}$$

Preuve : Considerons pour x,y strictement positifs :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}dt\right) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{y-1}e^{-s}ds\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}s^{y-1}e^{-(t+s)}dt\,ds \\ &= \int\int_D t^{x-1}\,s^{y-1}\,e^{-(t+s)}ds\,dt.\end{aligned}$$

où $D = \{(t,s) :\ t > 0,\ et\ s > 0\}$.
Utilisons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u &= t+s \\ v &= \frac{t}{t+s} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t &= u.v \\ s &= u-u.v \end{cases}$$

on déduit que $\Delta = \{(u,v) :\ u > 0,\ et\ 0 < v < 1\}$ et la jacobéenne

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv+uv-u = -u,$$

alors $dt\,ds = |J|\,du\,dv = u\,du\,dv$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_{\Delta}\int (u.v)^{x-1}(u-u.v)^{y-1}e^{-u}u\,du\,dv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{x+y-1}v^{x-1}(1-v)^{y-1}e^{-u}\,du\,dv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{x+y-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\right) \\
&= \Gamma(x+y)\times\beta(x,y).
\end{aligned}$$

Exercice 2.2.2. *Soit β la fonction Bêta d'Euler définie par*

$$\textit{pour tout } x,y>0: \quad \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

-1) *Montrer que pour tout $x,y>0$: $\quad \beta(x,y+1) = \frac{y}{x+y}\beta(x,y).$*

-2) *Par integration par parties, montrer que : $x\beta(x,y+1) = y\beta(x+1,y)$.*

-3) *Montrer que : $\forall n,m\in\mathbb{N}^\star$: $\quad \beta(n,m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$.*

Exercice 2.2.3. *Soit a, b, s des réels strictement positifs. Montrer que*

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t^s)^{b-1}dt = \frac{1}{s}\beta(\frac{a}{s},b). \tag{2.14}$$

Exercice 2.2.4. *Soit x,y deux réels strictement positifs.*

-1) *Montrer que :*

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta. \tag{2.15}$$

-2)*En déduire $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $\beta(x,\frac{1}{2})$.*

-3) *Déterminer $\beta\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$ en fonction de $sin\theta$ et $cos\theta$.*

-4) *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta(cos\theta)^2d\theta\,, \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}}(sin\theta)^2(cos\theta)^3d\theta.$$

***-5)** Montrer que :*

$$\beta(a,a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\, 2\theta)^{2a-1} d\theta. \tag{2.16}$$

Exercice 2.2.5. *Soit β la fonction Bêta d'Euleur definie par*

$$pour\ tout\ x,y > 0 : \quad \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

***-1)** Montrer que pour tout $x,y > 0$:*

$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds. \tag{2.17}$$

$\big($*Appliquer le changement* : $t = \frac{s}{s+1}.\big)$

***-2)** Montrer que pour tout $x,y > 0$:*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1} + s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}} ds, \tag{2.18}$$

Remarque 2.2.1. *Parfois les égalités (2.15) et (2.17) sont considérées en tant que définitions de la fonction β.*

2.3 Quelques formules usuelles

2.3.1 Formule de duplication

Proposition 2.3.1. *(la formule de duplication de Legendre)*
pour tout $a > 0$, on a

$$\Gamma(2a) = \frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right). \tag{2.19}$$

Preuve : D'après la formule 2.16, on a

$$\beta(a,a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\, 2\theta)^{2a-1} d\theta.$$

posons $\lambda = 2\theta$, on obtient $\theta = \frac{\lambda}{2}$, $d\theta = \frac{1}{2} d\lambda$, $\theta = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \lambda = \pi$, celà nous donne

$$\begin{aligned}
\beta(a,a) &= \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^{\pi}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(sin\,(\pi-\lambda))^{2a-1}d\lambda\right),\ \text{posons}\,\psi=\pi-\lambda \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(sin\,\psi)^{2a-1}(-d\psi)\right) \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\psi)^{2a-1}d\psi\right) \\
&= \frac{2}{2^{2a-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\lambda)^{2a-1}d\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2^{2a-1}}\beta(a,\frac{1}{2}),
\end{aligned}$$

d'où

$$\beta(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\beta(a,\frac{1}{2}). \tag{2.20}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\beta(a,a) &= \frac{\Gamma(a)\times\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} \\
\beta(a,\tfrac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\times\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})},
\end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Si on remplace a par $\frac{a}{2}$, on obtient la formule équivalente :

Proposition 2.3.2. *pour tout $a > 0$, on a*

$$\Gamma(a) = \frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right). \tag{2.21}$$

2.3.2 Formule de compléments

Proposition 2.3.3. *pour tout $0 < x < 1$, on a*

$$\beta(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{2.22}$$

Preuve : D'après la formule 2.17, on a

$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}ds,$$

d'où, pour tout $0 < x < 1$

$$\beta(x,1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{1+s}ds = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{x s^{x-1}}{1+s}ds,$$

posons $\mu = s^x$, on obtient $s = \mu^{\frac{1}{x}}$, $d\mu = x s^{x-1}ds$, on obtient

$$\begin{aligned}\beta(x,1-x) &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{x s^{x-1}}{1+s}ds \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mu^{\frac{1}{x}}}d\mu.\end{aligned}$$

Corollaire 2.3.1. *Pour tout $\alpha > 1$, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu}{1+\mu^{\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha.\sin\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{2.23}$$

On pose $\alpha = \frac{1}{x}$, cela nous donne

$$\begin{aligned}\beta(x,1-x) &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mu^{\frac{1}{x}}}d\mu \\ &= \frac{1}{x}.\frac{x\pi}{\sin(\pi x)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.\end{aligned}$$

On résulte que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{2.24}$$

2.3.3 Formule de Stirling

Proposition 2.3.4. *Pour tout $x > 0$, on a*

$$x! \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}, \qquad (x \longrightarrow +\infty). \tag{2.25}$$

L'intérêt de cette formule en général c'est pour le calcul des limites et une valeur approchée de Γ pour les grandes valeurs de x, comme on peut réécrire la formule précédente sous les formes suivantes :

$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}, \qquad (x \longrightarrow +\infty). \tag{2.26}$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = 1. \tag{2.27}$$

On déduit les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \Gamma(x) = +\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \Gamma(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty$$

2.3.4 Dérivée logarithmique de la fonction Gamma

On a, pour tout $x > 0$: $\Gamma(x) > 0$; donc on peut définir la fonction H telle que : $H(x) = \ln(\Gamma(x))$. H est logarithmique de la fonction Gamma.
La dérivée de H est appelé dérivée logarithmique de la fonction Gamma, notée par ψ telle que, Pour tout $x > 0$:

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x}\right)\frac{dt}{t}. \tag{2.28}$$

La fonction ψ est appelée aussi fonction Digamma . Parmi les propriétés de la fonction ψ, notons que, pour des valeurs entières $n \geq 2$, on a

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}. \tag{2.29}$$

où $\gamma = 0,577$ est la constante d'Euler.

$$\psi(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left[\ln n - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n}\right)\right]. \tag{2.30}$$

Chapitre 3

Fonction erreur et intégrales de Fresnel

3.1 Fonction erreur

Définition 3.1.1. *La fonction d'erreur notée " erf " définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{array}{rcl} erf:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt. \end{array}$$

Propriétés de erf

1. La fonction d'erreur est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction d'erreur est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant
$$erf'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$
3. $erf(0) = 0$.
4. $erf(+\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$, (par l'integrale de Gauss).
5. La fonction " erf " est impaire.

   Posons $s = -t$, cela nous donne $\begin{cases} dt = -ds \\ t = 0 \Longrightarrow s = 0 \\ t = -x \Longrightarrow s = x \end{cases}$, donc

$$\begin{aligned} erf(-x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-s^2}(-ds) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-s^2}ds = -erf(x). \end{aligned}$$

6. $erf(-\infty) = -1$.
7. Pour les petites valeurs de x, on peut utiliser la formule

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \tag{3.1}$$

(Utilisable pour $|x| \leq 3$).

8. Pour les grandes valeurs de x, on peut utiliser la formule

$$\begin{aligned} erf(x) &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times |2n-3|}{2^n x^{2n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \times 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^4 x^7} ... \right). \end{aligned}$$

9. La formule approchée donne les résultats de $Erf(x)$ dont l'erreur est de l'ordre du miliéme, quelle que soit la valeur de x,

$$erf(x) \approx \sqrt{1 - \exp\left(\frac{-4x^2}{\pi} \right)}. \tag{3.2}$$

3.2 Intégrales de Fresnel

Définition 3.2.1. Les fonctions de Fresnel *sont des fonctions spéciales, définies par les intégrales suivantes :*

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \tag{3.3}$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt. \tag{3.4}$$

Propriétés

1. Les fonctions S et C sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions S et C sont dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$S'(x) = \sin(x^2), \quad C'(x) = \cos(x^2).$$

3. $S(0) = C(0) = 0$.

4. S et C sont des fonctions impaires.

   Si on Pose $s=-t$, cela nous donne $\begin{cases} dt=-ds \\ t=0 \Longrightarrow s=0 \\ t=-x \Longrightarrow s=x \end{cases}$,

   alors

$$\begin{aligned} S(-x) &= \int_0^{-x} \sin(t^2)dt \\ &= \int_0^{x} \sin(s^2)(-ds) \\ &= -\int_0^{x} \sin(s^2)ds = -S(x). \end{aligned}$$

   De même farçant, on peut vérifier que $C(-x)=-C(x)$.

5. Les ***intégrales de Fresnel*** sont définies par :

$$S(+\infty)=\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt, \tag{3.5}$$

$$C(+\infty)=\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt. \tag{3.6}$$

Proposition 3.2.1.

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Preuve Pour démontrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, on va résoudre l'exercice suivant :

Exercice 3.2.1. .

1. *Montrer que, pour tout $t>0$*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts}}{\sqrt{s}}ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}. \tag{3.7}$$

   $\big($*Utiliser le changement de variable* , $ts=x^2\big)$.

2. *En intégrant par parties, montrer que, pour tout* $s>0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts}\sin t\,dt = \frac{1}{1+s^2}. \tag{3.8}$$

3. *Simplifier les expressions suivantes :*

- $\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)$

- $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{8}}t+\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{8}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}$

- $\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1\right]$.

Solution pour tout $t>0$, on Pose $ts=x^2$, cela nous donne $\sqrt{s}=\frac{x}{\sqrt{t}}$ et

$$\begin{cases} ds=\frac{2x}{t}dx \\ s\longrightarrow 0\ ,\ alors\ x\longrightarrow 0 \\ s\longrightarrow +\infty\ ,\ alors\ x\longrightarrow +\infty, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ts}}{\sqrt{s}}ds &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\frac{x}{\sqrt{t}}}\frac{2x}{t}dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{t}}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx \quad \text{(integrale de Gauss)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ts}}{\sqrt{s}}ds=\frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{3.9}$$

2/- On utilise l'intégration par parties, Soient

$$\begin{cases} v(t) &= e^{-ts} \\ u'(t) &= \sin t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v'(t) &= -se^{-ts} \\ u(t) &= -\cos t, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} I=\int_0^{+\infty}e^{-ts}\sin t\,dt &= \left[-e^{-ts}\cos t\right]_0^{+\infty}-s\int_0^{+\infty}e^{-ts}\cos t\,dt \\ &= 1-s\int_0^{+\infty}e^{-ts}\cos t\,dt \\ &= 1-sJ,\end{aligned}$$

une deuxième fois, on applique l'intégration par parties

$$\begin{cases} v(t) & = e^{-ts} \\ u'(t) & = \cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v'(t) & = -se^{-ts} \\ u(t) & = \sin t, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} e^{-ts} \cos t \, dt \\ &= [e^{-ts} \sin t]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-ts} \sin t \, dt \\ &= sI, \end{aligned}$$

d'où

$$I = 1 - s(sI) \Longrightarrow I + s^2 I = 1 \Longrightarrow I = \frac{1}{1+s^2}.$$

3/- On a

$$\begin{aligned} \left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right)\left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right) &= t^4 + 1 \\ \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}t + \frac{1}{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} - \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}t - \frac{1}{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} &= \frac{1}{1+t^4} \\ \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}t + 1\right)^2 + 1\right] &= t^2 + \sqrt{2}t + 1. \end{aligned} \qquad \Diamond$$

On calcule maintenant l'intégrale de Fresnel $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

On pose $x^2 = t$, donc $x = \sqrt{t}$ et $\begin{cases} dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ x = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow t \longrightarrow +\infty, \end{cases}$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin t \, \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts}}{\sqrt{s}} ds \right) dt \quad \text{(d'aprés 3.9)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-ts} dt \right) \frac{ds}{\sqrt{s}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} \frac{ds}{\sqrt{s}}. \quad \text{(d'aprés 3.8)}
\end{aligned}$$

Posons $\sqrt{s} = t \Longrightarrow s = t^2$ donc $ds = 2t\,dt$, par conséquent

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} . \frac{2t\,dt}{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{8}} t + \frac{1}{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} - \frac{\frac{1}{\sqrt{8}} t - \frac{1}{2}}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \right] dt,
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{\sqrt{8}} t + \frac{1}{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{8}} \left[2t + 2\sqrt{2} \right]}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[\frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2. \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}t + 1 \right)^2 + 1} \right],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{1}{\sqrt{8}} t + \frac{1}{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt &= \frac{1}{2\sqrt{8}} \int \left[\frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2. \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}t + 1 \right)^2 + 1} \right] dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[\ln\left(t^2 + \sqrt{2}t + 1 \right) + 2 \arctan\left(\sqrt{2}t + 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}+2.\frac{-\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}t+1\right)^2+1}\right],$$

donc

$$\begin{aligned}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt &= \frac{1}{2\sqrt{8}}\int\left[\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}+2.\frac{-\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}t+1\right)^2+1}\right]dt\\ &= \frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\ln\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)+2\arctan\left(-\sqrt{2}t+1\right)\right],\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}t+\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}-\frac{\frac{1}{\sqrt{8}}t-\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right]dt\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{8}}\left[\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)-2\arctan\left(-\sqrt{2}t+1\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{8}}\left[\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{8}}\left[0+2(\frac{\pi}{2})+2(\frac{\pi}{2})\right] = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

Chapitre 4

Sinus intégrale, Cosinus intégrale, Exponentielle intégrale

Les fonctions Sinus intégrale, Cosinus intégrale et Exponentielle intégrale sont des fonctions spéciales de la physique mathématique introduite par Fresnel dans l'étude des vibrations lumineuses.

4.1 Sinus intégrale

Définition 4.1.1. *La fonction Sinus intégrale notée " Si " définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\begin{array}{rcl} Si : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Si(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt. \end{array}$$

$\left(\textit{On suppose que pour } \ t = 0;\ \dfrac{\sin t}{t} = 1 \right).$

4.1.1 Propriétés de Si

1. La fonction Si est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction Si est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant
$$Si'(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
3. $Si(0) = 0$.
4. Si est une fonction impaire.

   Si on Pose $y = -t$, cela nous donne $\begin{cases} dt = -dy \\ t = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ t = -x \Longrightarrow y = x \end{cases}$, alors

$$\begin{aligned} Si(-x) &= \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_0^{x} \frac{\sin(-y)}{-y}(-dy) \\ &= -\int_0^{x} \frac{\sin y}{y} dy = -Si(x). \end{aligned}$$

5. ***L'intégrale de Dirichlet*** est définie par :

$$Si(+\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \tag{4.1}$$

6. Le développement de Si en série entière sur $\mathbb{R}$ est donné par l'expression

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Si(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \tag{4.2}$$

4.2 Cosinus intégrale

Définition 4.2.1. *La fonction Cosinus intégrale notée " Ci " définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$\begin{array}{rcl} Ci :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ci(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt. \end{array}$$

4.2.1 Propriétés de Ci

1. La fonction Ci est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Ci est dérivable sur $]0,+\infty[$, vérifiant $Ci'(x) = \frac{\cos x}{x}$.
3. $\lim_{x \longrightarrow +\infty} Ci(x) = 0$.
4. $\lim_{x \longrightarrow 0^+} Ci(x) = -\infty$.
5. Le développement de Ci en série entière sur $]0,+\infty[$ est donné par l'expression

$$\forall x \in]0,+\infty[: \quad Ci(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!(2n)}. \tag{4.3}$$

Où γ est la constante d' Euler .

Proposition 4.2.1. *Les primitives de " Si " et " Ci " sont de la forme*

$$\int Si(x)dx = xSi(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int Ci(x)dx = xCi(x) - \sin(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(Intégration par parties.)

4.3 Exponentielle intégrale

Définition 4.3.1. *La fonction Exponentielle intégrale notée " Ei " définie sur $\mathbb{R}^\star$ par*

$$\begin{array}{rcl} Ei : \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ei(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt. \end{array}$$

4.3.1 Propriétés de Ei

1. La fonction Ei est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Ei est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, vérifiant $Ei'(x) = \frac{e^x}{x}$.
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} Ei(x) = 0$.
4. Le développement de Ei en série entière sur $]0, +\infty[$ est donné par l'expression
$$\forall x \in]0, +\infty[: \quad Ei(-x) = \gamma + \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n)!(n)}. \tag{4.4}$$
Où γ est la constante d' Euler .
5. La primitive de " Ei "est de la forme
$$\int Ei(x)dx = xEi(x) - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4.4 Intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \tag{4.5}$$

Preuve Pour prouver l'intégrale de Dirichlet, on va résoudre l'exercice suivant :

Exercice 4.4.1. .
Soit H une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$\textit{pour tout } x \geq 0, \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.e^{-xt}dt.$$

-1) *Donner l'expression de* $H(0)$ *et calculer* $H'(x)$.

-2) *Par I.P.P montrer que* $x \geq 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\, e^{-xt}dt = \frac{1}{1+x^2}$.

-3) *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $\quad H(x) = c - \arctan x$.

-4) *Déterminer la constante c. (Utiliser la limite pour* $x \longrightarrow +\infty$.*)*

-5) *En déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$.

Solution On a pour tout $x \geq 0$, $\quad H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-xt}dt$.

-1) $H(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

Soit

$$H(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt, \text{ avec } \quad f(x,t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-xt},$$

donc

$$\begin{aligned} H'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\left(-te^{-xt}\right)dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-xt}dt. \end{aligned}$$

-2) Posons $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)\, e^{-xt}dt$ et on intègre par parties,

$$\begin{cases} u'(t) &= \sin t \\ v(t) &= e^{-xt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(t) &= -\cos t \\ v'(t) &= -xe^{-xt}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} J(x) &= \left[-\cos t . e^{-xt}\right]_0^{+\infty} - x\int_0^{+\infty} (\cos t)\, e^{-xt} dt \\ &= 1 - x\int_0^{+\infty} (\cos t)\, e^{-xt} dt \\ &= 1 - xI, \text{ où } \quad I = \int_0^{+\infty} (\cos t)\, e^{-xt} dt, \end{aligned}$$

une deuxième fois, on applique I.P.P

$$\begin{cases} a'(t) &= \cos t \\ b(t) &= e^{-xt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a(t) &= \sin t \\ b'(t) &= -xe^{-xt}, \end{cases}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} I &= \left[\sin t . e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} (\sin t)\, e^{-xt} dt \\ &= 0 + x\int_0^{+\infty} (\sin t)\, e^{-xt} dt \\ &= xJ(x). \end{aligned}$$

On conclut que pour tout $x \geq 0$

$$J = 1 - x(xJ(x)) \Longrightarrow J(x) = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} (\sin t)\, e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

-3) On a $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \quad H'(x) = -J(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$,
d'où

$$\begin{aligned} H(x) &= -\int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\arctan x + c. \end{aligned}$$

-4) On calcule la limite pour $x \longrightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} H(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} -\arctan x + c \quad &\Rightarrow \quad c - \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan x = 0 \\ &\Rightarrow \quad c - \tfrac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow c = \tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

-5) Par conséquence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \quad H(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

donc pour $x = 0$ on obtient

$$H(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan 0 \Longrightarrow H(0) = \frac{\pi}{2},$$

ce ci nous donne notre résultat " l'intégrale de Dirichlet " :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Nous donnons maintenant une autre version de l'exercice précédent.

Exercice 4.4.2. .
Soient F et G deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ définies par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} \, dt, \tag{4.6}$$

$$G(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t} \, dt. \tag{4.7}$$

-1) *Calculer $F(0)$ et $G(0)$.*

-2) *Déterminer la fonction g telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = g(x)$.*

-3) *Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) \, dt$.*

-4) *Par I.P.P montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) \, dt = \frac{1}{1+x^2}$,
et en déduire l'expression de $F(x)$.*

-5) *Par I.P.P sur (4.6) montrer que*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} G(xt) \, dt. \tag{4.8}$$

-6) *Par le calcul de limite sur (4.8) pour $x \longrightarrow +\infty$, en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$.*

Chapitre 5

Les polynômes orthogonaux

5.1 Introduction

Exercice 5.1.1. *Soient* $n, m \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

-1) *Montrer que*

$$2\cos n\theta \cos m\theta = \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta. \tag{5.1}$$

-2) *Pour* $n = m$ *calculer :* $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta$.

-3) *Montrer que pour tout* $n \neq m$ *:*

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = 0 \tag{5.2}$$

On pose $x = \cos\theta$ *et* $T_n(x) = \cos n\theta$.

-4) *Calculer* $T_0(x)$, $\quad T_1(x)$.

-5) *En déduire que pour tout* $n \neq m$ *:* $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} dx = 0.$

-6) *En déduire de l'expression (5.1) que,*

$$\forall n \in \mathbb{N} : T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Solution.

-1) pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a

$$\begin{aligned} \cos(n+m)\theta &= \cos n\theta \cos m\theta - \sin n\theta \sin m\theta \\ \cos(n-m)\theta &= \cos n\theta \cos m\theta + \sin n\theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

d'où par addition membre à membre , on obtient notre résultat.

-2) Pour $n=m$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta &= \int_0^\pi \cos^2(n\theta)\, d\theta\\ &= \int_0^\pi \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}\, d\theta,\end{aligned}$$

si $n=0$, alors $\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \pi$,
si $n\neq 0$, on déduit que

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2n}\sin(2n\theta)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

On conclut que

$$\begin{cases}\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \pi, & \text{si } n=0\\ \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n\neq 0.\end{cases} \tag{5.3}$$

-3) Pour $n\neq m$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(n+m)\theta+\cos(n-m)\theta\right) d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m}+\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}\right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

-4) Posons $x=\cos\theta$ et $T_n(x)=\cos n\theta$, on obtient

$$T_0(x)=1 \tag{5.4}$$

$$T_1(x)=\cos\theta \Longrightarrow T_1(x)=x \tag{5.5}$$

-5) pour tout $n\neq m$, vue que $x=\cos\theta$ et $T_n(x)=\cos n\theta$, on résulte

$$\begin{cases} dx = -\sin\theta\, d\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\theta = -\sqrt{1-x^2}\, d\theta\\ \theta=0 \Longrightarrow x=1\\ \theta=\pi \Longrightarrow x=-1,\end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta &= \int_1^{-1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}\\ &= \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} dx\end{aligned}$$

d'après (5.2), on a

$$\text{pour tout } n \neq m: \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} dx = 0 \tag{5.6}$$

-6) Utilisons l'expression (5.1) pour $m = 1$, cela nous donne

$$\begin{aligned} 2\cos n\theta \cos\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta \quad &\Leftrightarrow \quad 2x T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) + T_{n-1}(x), \end{aligned}$$

par consequent, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{5.7}$$

Grâce a cette relation de récurrence (5.7), on déduit que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n.

5.2 Généralités et définitions

5.2.1 Fonction de poids

soit $[a,b]$ un intervalle (designe par I qui peut être fini ou infini).

Définition 5.2.1. *on appelle fonction de poids w sur I toute fonction strictement positive et integrable sur cet intervalle I.*

5.2.2 Produit scalaire

Soient f et g deux fonctions intégrables sur I.

Définition 5.2.2. *Le produit scalaire de f par g par rapport à la fonction de poids w, noté $< f,g >$ est le nombre $\int_I f(x)g(x)w(x)dx$, et on écrit*

$$< f,g >= \int_I f(x)g(x)w(x)dx \quad < \infty. \tag{5.8}$$

Propriétes 5.2.1. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur I et w une fonction de poids .*

1. *Si $< f,g >= \int_I f(x)g(x)w(x)dx = 0$, alors on dit que f et g sont orthogonales.*
2. *Si $f = g$, alors de la relation (5.8) on obtient le carré de la norme de f*

$$\|f\|^2 =< f,f >= \int_I f^2(x)w(x)dx \quad < \infty. \tag{5.9}$$

5.2.3 Polynômes orthogonaux

Soient $P_0(x)$, $P_1(x)$,..., $P_n(x)$ des polynômes ($P_k(x)$est de degré k) et w une fonction de poids.

Définition 5.2.3. *On appelle polynômes orthogonaux sur I relativement à la fonction de poids w, toute suite de polynômes $P_0(x)$, $P_1(x)$,..., $P_n(x)$ vérifiant*

$$< P_n, P_k >= \int_I P_n(x)P_k(x)w(x)dx = 0 \quad si\ n \neq k. \tag{5.10}$$

Remarque 5.2.1. *On déduit que*

$$\|P_n\|^2 =< P_n, P_n >= \int_I P_n^2(x)w(x)dx. \tag{5.11}$$

Théorème 5.2.1. *Tout système $\{p_0, p_1, ..., p_n\}$ de polynômes dans lequel p_n est de degré exactement égal à n, est linéairement indépendant.*
De plus, tout polynôme de degré inférieur ou égal à n, peut s'écrire de manière unique, comme combinaison linéaire de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + ... + a_n p_n(x). \tag{5.12}$$

Théorème 5.2.2. *Le polynôme p_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur.*

5.3 Formules et Propriétés

5.3.1 Formule de récurrence

Toute série de polynômes orthogonaux peut être obtenue à l'aide d'une relation de récurrence, en particulier lorsqu'on veut effectuer des calculs numériques. Le Théorème suivant, nous permet d'obtenir une suite de polynômes orthogonaux à partir d'une relation de récurrence (on donne les deux polyômes unitaires p_0 , p_1) .

Théorème 5.3.1. *Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux. Alors il existe une relation de récurrence selon laquelle nous pouvons calculer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}, donnée par la formule*

$$P_n(x) = A_n \left[(x - \lambda_n) P_{n-1}(x) - \beta_n P_{n-1}(x)\right], \quad n \geq 2, \tag{5.13}$$

et

$$P_0(x) = 1\ ,\ P_1(x) = x - \lambda_1. \tag{5.14}$$

λ_n, β_n et A_n sont des constantes vérifiant

$$\lambda_n = \frac{< xP_{n-1}, P_{n-1} >}{\|P_{n-1}\|^2}\ ,\ \beta_n = \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}\ ,\ A_n \text{ le coefficient directeur de } P_n. \tag{5.15}$$

Exemple 5.3.1. .
Soient $I = [-1,1]$, $w(x) = 1$, $P_0(x) = 1$ et $A_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}$.
On calcul λ_1

$$\lambda_1 = \frac{< xP_0, P_0 >}{\|P_0\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} xdx}{\int_{-1}^{1} 1dx} = \frac{0}{2} = 0,$$

alors

$$P_1(x) = x - \lambda_1 = x.$$

On détermine maintenant le polynôme $P_2(x)$, d'après la relation de récurrence on a

$$P_2(x) = ,A_2\left[(x-\lambda_2)\, P_1(x) - \beta_2 P_0(x)\right], \quad A_2 = \frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{< xP_1, P_1 >}{\|P_1\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{0}{\frac{2}{3}} = 0,$$

et

$$\beta_2 = \frac{\|P_1\|^2}{\|P_0\|^2} = \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3},$$

on obtient

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\left[(x-0)\, P_1(x) - \frac{1}{3} P_0(x)\right] = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Le deuxième Théorème si dessous sur la relation de récurrence est une version plus générale sans condition sur P_0 et P_1.

Théorème 5.3.2. *Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux. Alors il existe une relation de récurrence selon laquelle nous pouvons calculer P_{n+1} en fonction de P_n et P_{n-1}, donnée par la formule*

$$P_{n+1}(x) = (Ax+B)\, P_n(x) + C P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.16}$$

où A , B, C sont des constantes vérifiant

$$A = \frac{cd(P_{n+1})}{cd(P_n)}\,, B = -A\frac{< xP_n, P_n >}{< P_n, P_n >}\,, C = A\frac{< xP_n, P_{n-1} >}{< P_{n-1}, P_{n-1} >}.$$

$cd(P_n)$ désigne le coefficient directeur de P_n.

Remarque 5.3.1. *Pour les polynômes orthogonaux classiques, la relation de récurrence est un outil pour déterminer tout polynôme P_{n+1} en fonction des deux polynômes précédant P_n et P_{n-1}.*

5.3.2 Formule de Rodriguez

soit w une fonction de poids sur un intervalle I.
Toute suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes orthogonaux, vérifie la formule de Rodriguez

$$P_n(x) = \frac{1}{C_n w(x)} \times \frac{d^n \left[w(x).X\right]}{dx^n}, \tag{5.17}$$

où X est un polynôme en x de degré k et C_n est une constante.

Remarque 5.3.2. *Pour les polynômes orthogonaux classiques, la formule de Rodriguez est un outil pour déterminer tout polynôme de degré n en fonction d'une dérivée d'ordre n.*

5.3.3 Zéros des polynômes orthogonaux

Les deux Théorèmes suivants, ont une grande importance dans la thèorie des polynômes orthogonaux.

Théorème 5.3.3. *Le n^{ieme} polynôme d'une suite de polynômes orthogonaux, $P_n \quad (n > 0)$ admet* ***n*** *racines* **réelles distinctes***, toutes situées à l'intérieur du segment fondamental I.*

Théorème 5.3.4. *Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux. Alors les racines de P_n se trouvent strictement entre les racines de P_{n+1}.*

Exemple 5.3.2. *soient $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = 2x^2 - 1$ les deux polynômes orthogonaux de Tchebycheb, $I =]-1,1[$.*

$$P_1(x) = 0 \Longrightarrow x = 0,$$
$$P_2(x) = 0 \Longrightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

5.4 Les polynômes orthogonaux classiques

Nous présentons maintenant des formules et des propriétés de quelques polynômes orthogonaux classiques : Legendre, Laguerre, Hermite et de Tchebychev, (Intervalle d'étude, fonction poids, formule de récurrence, carré de la norme, formule de Rodriguez et l'équation différentielle).

5.4.1 Les polynômes de Legendre : $L_n(x)$

– **Intervalle d'étude** : $[-1,1]$.

– **Fonction poids** : $w(x) = 1$.

– **Formule de récurrence** :
$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x L_n(x) - \frac{1}{n+1} L_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.18}$$

– **Carré de la norme** :
$$\|L_n\|^2 = \int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n \geq 0. \tag{5.19}$$

– **Formule de Rodriguez** :
$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n \left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n}, \quad n \geq 0. \tag{5.20}$$

On déduit que
$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x.$$

– **L'équation différentielle**
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{5.21}$$

5.4.2 Les polynômes de Laguerre : $P_n(x)$

– **Intervalle d'étude** : $]0,+\infty[$.

– **Fonction poids** : $w(x) = e^{-x}$.

– **Formule de récurrence** :
$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1-x}{n+1}\right) P_n(x) - \left(\frac{n}{n+1}\right) P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.22}$$

– **Carré de la norme** :
$$\|P_n\|^2 = \int_0^{+\infty} P_n^2(x)e^{-x}dx = 1, \quad n \geq 0. \tag{5.23}$$

– **Formule de Rodriguez** :
$$P_n(x) = \frac{e^x}{n!} \times \frac{d^n \left[x^n e^{-x}\right]}{dx^n}, \quad n \geq 0. \tag{5.24}$$

On déduit que
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1-x.$$

– **L'équation différentielle**

$$x y'' - (1-x)\, y' + n\, y = 0. \tag{5.25}$$

5.4.3 Les polynômes de Hermite : $\mathrm{H}_n(x)$

– **Intervalle d'étude** : $]-\infty, +\infty[$.

– **Fonction poids** : $w(x) = e^{-x^2}$.

– **Formule de récurrence** :

$$\mathrm{H}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{H}_n(x) - 2n\mathrm{H}_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.26}$$

– **Carré de la norme** :

$$\|\mathrm{H}_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad n \geq 0. \tag{5.27}$$

– **Formule de Rodriguez** :

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \times \frac{d^n \left[e^{-x^2}\right]}{d x^n}, \quad n \geq 0. \tag{5.28}$$

On déduit que

$$\mathrm{H}_0(x) = 1, \quad \mathrm{H}_1(x) = 2x.$$

– **L'équation différentielle**

$$y'' - 2x y' + 2n y = 0. \tag{5.29}$$

5.4.4 Les polynômes de Tchebychev (première espèce) : $\mathrm{T}_n(x)$

– **Intervalle d'étude** : $]-1, +1[$.

– **Fonction poids** : $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

– **Formule de récurrence** :

$$\mathrm{T}_{n+1}(x) = 2x\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{5.30}$$

– **Carré de la norme** :

$$\|\mathrm{T}_n\|^2 = \int_{-1}^{+1} \mathrm{T}_n^2(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi & , \quad n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad n \neq 0 \end{cases}. \tag{5.31}$$

– **Formule de Rodriguez** :

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}\sqrt{\pi}}{2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})} \times \frac{d^n\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]}{dx^n}, \quad n \geq 0. \tag{5.32}$$

On déduit que

$$\mathrm{T}_0(x) = 1, \quad \mathrm{T}_1(x) = x.$$

– **L'équation différentielle**

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + n^2\,y = 0. \tag{5.33}$$

Chapitre 6

Les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel (on les appelles des fois fonctions de cylindre) sont des fonctions spéciales parmi les plus courantes rencontrées en physique dans des domaines aussi divers que les oscillations d'un pendule, les vibrations d'un tambour, la propagation de la chaleur ou l'astronomie. Le plus souvent à partir d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation différentielle partielle, généralement la solution peut être exprimée sous forme d'une série entière où d'une intégrale.

6.1 Résolution de l'équation différentielle de Bessel

L'équation de Bessel dans sa forme standard est :

$$\text{Pour tout réel } x > 0, \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0, \tag{6.1}$$

où p est une constante (pas nécessairement entière) appelée ordre de la fonction de Bessel y qui est la solution de (6.1). La théorie des équations de Bessel peut être généralisée à $x \in \mathbb{R}$. On peut reécrire l'équation (6.1) sous la forme suivante

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{p^2}{x^2}) y = 0 \tag{6.2}$$

Pour résoudre l'équation (6.2), on cherche une solution y sous forme d'une série entière telle que :

$$J(x) = x^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \tag{6.3}$$

dites séries entières généralisées, où s est un nombre à déterminer, il pourrait être positif, négatif ou même rationnel.

En dérivons la fonction J définie par l'équation (6.3), on obtient

$$\begin{aligned} J'(x) &= sx^{s-1}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^s \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \\ &= \tfrac{s}{x} x^s \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^s \sum_{i\geq 0} (i+1) a_{i+1} x^i \\ &= \tfrac{s}{x} J(x) + x^s \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n, \end{aligned}$$

d'où

$$J'(x) = \frac{s}{x} J(x) + x^s \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n. \tag{6.4}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} J''(x) &= -\frac{s}{x^2} J(x) + \frac{s}{x} J'(x) + sx^{s-1} \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \\ & +x^s \sum_{n\geq 1} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \\ &= -\frac{s}{x^2} J(x) + \frac{s}{x} \left\{ \frac{s}{x} J(x) + x^s \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n \right\} + \\ & sx^{s-1} \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + x^s \sum_{n\geq 0} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \\ &= -\frac{s}{x^2} J(x) + \frac{s^2}{x^2} J(x) + sx^{s-1} \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \\ & sx^{s-1} \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + x^{s-1} \sum_{n\geq 0} n(n+1) a_{n+1} x^n, \end{aligned}$$

alors

$$J''(x) = -\frac{s}{x^2} J(x) + \frac{s^2}{x^2} J(x) + x^{s-1} \sum_{n\geq 0} (n+1)(2s+n) a_{n+1} x^n. \tag{6.5}$$

D'autre part, on peut écrire $J(x)$ sous la forme

$$J(x) = x^s \sum_{n\geq 0} a_n x^n = x^{s-1} \sum_{i\geq 0} a_i x^{i+1} = x^{s-1} \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n,$$

par conséquent

$$J(x) = x^{s-1} \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n. \tag{6.6}$$

On note par *Lhs* le côté gauche de l'équation de Bessel (6.2), alors en utilisant (6.4), (6.5) et (6.6), on a

$$\begin{aligned}
Lhs &= y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y \\
&= \left(-\frac{s}{x^2}J(x) + \frac{s^2}{x^2}J(x) + x^{s-1}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2s+n)a_{n+1}x^n\right) \\
&+ \frac{1}{x}\left(\frac{s}{x}J(x) + x^s\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n\right) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J(x) \\
&= -\frac{s}{x^2}J(x) + \frac{s^2}{x^2}J(x) + x^{s-1}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2s+n)a_{n+1}x^n \\
&+ \frac{s}{x^2}J(x) + x^{s-1}\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J(x) \\
&= \frac{s^2}{x^2}J(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)J(x) + x^{s-1}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2s+n+1)a_{n+1}x^n \\
&= \left(1 + \frac{s^2 - p^2}{x^2}\right)J(x) + x^{s-1}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2s+n+1)a_{n+1}x^n.
\end{aligned}$$

Prenons $s^2 - p^2 = 0$ (dite équation d'indice), on obtient $s = \pm p$,
et par conséquent pour $s = p$ pour $p \geq 0$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) y = J(x) + x^{p-1}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2p+n+1)a_{n+1}x^n,$$

Il s'en suit que (6.2) est équivalente à

$$a_{n-1} + (n+1)(2p+n+1)a_{n+1} = 0 \quad \text{et } a_1 = 0$$

ce qui fait

$$a_1 = 0 \text{ et } a_n + (n+2)(2p+n+2)a_{n+2} = 0 \quad \text{pour } n \geq 0,$$

donc $a_{2k+1} = 0$ et

$$a_{2k} + (2k+2)(2p+2k+2)a_{2k+2} = 0 \quad \text{pour } k \geq 0,$$

on déduit que $a_0 \neq 0$ et

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2p+2k+2)} \quad \text{pour } k \geq 0,$$

cela nous donne

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{2^2(k+1)(p+k+1)} \quad \text{pour } k \geq 0. \tag{6.7}$$

En utilisant la relation de récurrence de la fonction Γ, on a pour tout $p \geq 0$ et $i > 0$

$$\Gamma(p+i+1) = (p+i)\Gamma(p+i),$$

d'aprés (6.7) on obtient :

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(p+1)} = -\frac{a_0\Gamma(p+1)}{2^2\Gamma(p+2)} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{2^3(p+2)} = \frac{a_0\Gamma(p+1)}{2^2 2^3(p+2)\Gamma(p+2)} = \frac{a_0\Gamma(p+1)}{2!2^4\Gamma(p+3)} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{2^2 3(p+3)} = -\frac{a_0\Gamma(p+1)}{2^2 3(p+3)2!2^4\Gamma(p+3)} = -\frac{a_0\Gamma(p+1)}{3!2^6\Gamma(p+4)} \\
a_8 &= \frac{a_0\Gamma(p+1)}{4!2^8\Gamma(p+5)},
\end{aligned}$$

et ainsi de suite, donc d'aprés (6.3), La solution est :

$$\begin{aligned}
J(x) &= x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= x^p \left\{ a_0 - \frac{a_0\Gamma(p+1)}{2^2\Gamma(p+2)}x^2 + \frac{a_0\Gamma(p+1)}{2!2^4\Gamma(p+3)}x^4 - \frac{a_0\Gamma(p+1)}{3!2^6\Gamma(p+4)}x^6 + \ldots \right\} \\
&= a_0\Gamma(p+1)x^p \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{x^2}{2^2\Gamma(p+2)} + \frac{x^4}{2!2^4\Gamma(p+3)} - \frac{x^6}{3!2^6\Gamma(p+4)} \ldots \right\}
\end{aligned}$$

en écrivant $x^p = 2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p$, on obtient

$$\begin{aligned}
J(x) &= a_0\Gamma(p+1)2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{x^2}{2^2\Gamma(p+2)} + \frac{x^4}{2!2^4\Gamma(p+3)} - \frac{x^6}{3!2^6\Gamma(p+4)} \ldots \right\} \\
&= a_0\Gamma(p+1)2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \left\{ \frac{1}{\Gamma(p+1)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\Gamma(p+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\Gamma(p+3)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!\Gamma(p+4)} \ldots \right\}.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$J(x) = a_0\Gamma(p+1)2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Posons $a_0 = \dfrac{1}{\Gamma(p+1)2^p}$, on obtient une fonction speciale notée $J_p(x)$ définie par

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{6.8}$$

Pour le cas $s = -p$, il suffit de remplacer p par $-p$ dans (6.8) que l'on notera $J_{-p}(x)$

$$J_{-p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{6.9}$$

6.1.1 Les fonctions de Bessel de première espèce

Définition 6.1.1. *On définit les fonctions de Bessel de première espèce pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{R}^+$ par :*

$$J_p(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}, \tag{6.10}$$

et

$$J_{-p}(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \tag{6.11}$$

J_p et J_{-p} sont deux solutions particulières de l'équation de Bessel (6.1).

Exercice 6.1.1. *Montrer que*

$$J_{-1}(x) = -J_1(x). \tag{6.12}$$

Preuve : Par définition , on a

$$J_1(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \quad \text{et} \quad J_{-1}(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1},$$

on pose $k = s-1$, et on obtient

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\ &= \sum_{s\geq 1} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!\Gamma(s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} \\ &= \sum_{s\geq 1} -\frac{(-1)^s}{(s-1)!s\Gamma(s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} \\ &= -\sum_{s\geq 1} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1} = -J_{-1}(x). \end{aligned}$$

6.1.2 Les fonctions de Neumann et de Hankel

Proposition 6.1.1. *On définit* ***la fonction de Neumann*** *pour $x > 0$ et p réel positif non entier par :*

$$N_p(x) \;=\; Y_p(x) \;=\; \frac{J_p(x)\,\cos px \;-\; J_{-p}(x)}{\sin px}, \tag{6.13}$$

Soit n est un entier naturel. Alors, pour $x > 0$, la limite $\lim\limits_{p\to n} Y_p(x)$ existe. On la note $Y_n(x)$. De plus, Y_n est une solution particulière de l'équation de Bessel. On dit que c'est ***une fonction de Bessel de seconde espèce****. Elle vèrifie les propriètès suivantes :*

$$Y_n(x) = \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\,\cos px \;-\; J_{-p}(x)}{\sin px}, \quad x > 0. \tag{6.14}$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n\, Y_n(x), \quad \lim_{x\to n} Y_n(x) = +\infty.$$

Proposition 6.1.2. *On définit* ***Fonctions de Hankel ou fonctions de Bessel de troisième espèce*** *pour $x > 0$ et p réel positif non entier par :*

$$H_p^{(1)}(x) \;=\; J_p(x) \;+\; iY_p(x), \tag{6.15}$$

et

$$H_p^{(1)}(x) \;=\; J_p(x) \;-\; iY_p(x). \tag{6.16}$$

6.2 Formules et Propriétés

Soit les fonctions de Bessel J_p définis par l'expression (6.10). On démontrera certaines de ces propriétés en TD.

6.2.1 Relations de récurrence

Les fonctions de Bessel vérifient les Formules de récurrence suivantes :

Théorème 6.2.1. *Pour tout réel positif p et pour tout $x > 0$, on a*

$$x\,J_p'(x) = p\,J_p(x) \;-\; x\,J_{p+1}(x), \tag{6.17}$$

et

$$x\,J_p'(x) = -p\,J_p(x) \;+\; x\,J_{p-1}(x). \tag{6.18}$$

Par conséquent

$$J_p'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)\right), \tag{6.19}$$

$$J_p(x) = \frac{x}{2p}\left(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\right), \tag{6.20}$$

et

$$J_0'(x) = -\,J_1(x). \tag{6.21}$$

Preuve de l'expression (6.17) : Suivant l'égalité (6.10) , on a

$$J_p(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

posons $k = s-1$, on conclut que

$$\begin{aligned}
J_{p+1}(x) \quad &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p+1} \\
&= \sum_{s\geq 1} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!\Gamma(k+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p-1} \\
&= -\left(\frac{2}{x}\right)\sum_{s\geq 1} \frac{(-1)^{s}}{(s-1)!\Gamma(k+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p} \\
x\,J_{p+1}(x) \quad &= -\sum_{s\geq 1} \frac{(-1)^{s}\,2s}{(s-1)!\,s\,\Gamma(k+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p} \\
&= -\sum_{s\geq 0} \frac{(-1)^{s}\,2s}{(s-1)!\,s\,\Gamma(k+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p},
\end{aligned}$$

d'où

$$x\,J_{p+1}(x) = -\sum_{s\geq 0} \frac{(-1)^{s}\,2s}{s!\Gamma(k+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p}. \tag{6.22}$$

Dérivant les deux côtes de l'égalité (6.10), on obtient

$$\begin{aligned} J_p'(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} (2k+p) \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} (2k+p) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}, \end{aligned}$$

en vertu des égalités (6.10) et (6.22), on déduit que

$$\begin{aligned} x\, J_p'(x) &= p \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \right) + \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\, 2k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \right) \\ &= p\, J_p(x) \;-\; x\, J_{p+1}(x). \end{aligned}$$

Preuve de l'expression (6.18) : On a

$$J_p(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

alors

$$\begin{aligned} J_{p-1}(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \\ &= \left(\frac{2}{x}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\; (k+p)}{k!\; (k+p)\,\Gamma(k+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \\ &= \left(\frac{2}{x}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\; (k+p)}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \\ x\, J_{p-1}(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\, 2\,(k+p)}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\, 2k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} + 2p \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \end{aligned}$$

D'aprés les égalités (6.10), (6.22) et (6.17), on arrive à

$$\begin{aligned} x\, J_{p-1}(x) &= -x\, J_{p+1}(x) + 2\,p\, J_p(x) \\ &= \big(x\, J_p'(x) \;-\; p\, J_p(x)\big) \;+\; 2\,p\, J_p(x), \end{aligned}$$

d'où

$$x\,J_p'(x) = -p\,J_p(x) \;+\; x\,J_{p-1}(x).$$

Preuve de l'expression (6.21) : En appliquant les égalités (6.12) et (6.19) pour $p=0$, on obtient

$$\begin{aligned} J_0'(x) &= \frac{1}{2}\left(J_{-1}(x) - J_1(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-J_1(x) - J_1(x)\right) = \; -J_1(x) \end{aligned}$$

Corollaire 6.2.1. *Pour tout réel positif p et pour tout $x>0$, on a*

$$x^p\,J_{p-1}(x) = \frac{d}{d\,x}\left[\,x^p J_p(x)\right], \tag{6.23}$$

$$x^{-p-1}\,J_{p+1}(x) = -\frac{d}{x\,d\,x}\left[\,x^{-p} J_p(x)\right], \tag{6.24}$$

Par conséquent

$$x^{-p-n}\,J_{p+n}(x) = (-1)^n\left(\frac{d}{x\,d\,x}\right)^n\left[\,x^{-p} J_p(x)\right], \; pour\; n\in\mathbb{N}. \tag{6.25}$$

Preuve :• L'expression (6.23)
En vertu de légalité (6.18) on trouve

$$x\,J_{p-1}(x) = p\,J_p(x) \;+ x\,J_p'(x),$$

en multipliant par x^{p-1}, on obtient :

$$x^p\,J_{p-1}(x) = p\,x^{p-1}\,J_p(x) \;+ x^p\,J_p'(x) = \frac{d}{d\,x}\left[\,x^p J_p(x)\right].$$

• l'expression (6.24)
En vertu de légalité (6.17) on obtient

$$x\,J_{p+1}(x) = p\,J_p(x) - x\,J_p'(x),$$

en multipliant par x^{-p-2}, on a :

$$\begin{aligned} x^{-p-1}\,J_{p+1}(x) &= p\,x^{-p-2}\,J_p(x) - x^{-p-1}\,J_p'(x) \\ &= -\frac{-p\,x^{-p-1}\,J_p(x) + x^{-p}\,J_p'(x)}{x} \\ &= -\frac{d}{x\,d\,x}\left[\,x^{-p} J_p(x)\right]. \end{aligned}$$

• L'expression (6.25)
En appliquant le raisonnement par récurrence, en supposant que

$$x^{-p-n}\,J_{p+n}(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left[\,x^{-p}J_p(x)\right],$$

on montre que

$$x^{-p-n-1}\,J_{p+n+1}(x) = (-1)^{n+1} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^{n+1} \left[\,x^{-p}J_{p+1}(x)\right].$$

En utilisant (6.24), on déduit que

$$\begin{aligned}
x^{-p-n-1}\,J_{p+n+1}(x) &= x^{-\alpha-1}\,J_{\alpha+1}(x), \quad \text{pour } \alpha = p+n,\\
&= -\frac{d}{x\,dx}\left[x^{-\alpha}J_\alpha(x)\right]\\
&= -\frac{d}{x\,dx}\left[x^{-p-n}J_{p+n}(x)\right]\\
&= -\frac{d}{x\,dx}\left\{(-1)^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left[\,x^{-p}J_p(x)\right]\right\}\\
&= (-1)^{n+1}\frac{d}{x\,dx}\left\{\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left[\,x^{-p}J_p(x)\right]\right\}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^{n+1}\left[\,x^{-p}J_p(x)\right].
\end{aligned}$$

Remarque 6.2.1.

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n = \left(\frac{d}{x\,dx}\right)\circ\left(\frac{d}{x\,dx}\right)\circ\ldots\circ\left(\frac{d}{x\,dx}\right), \quad n\,\textit{fois}. \tag{6.26}$$

6.2.2 Forme intégrale

L'expressions intégrales des fonctions de Bessel J_p sont sous les formes suivantes

Théorème 6.2.2. *Pour tout réel positif p et pour tout $x > 0$, on a*

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(p+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(x\cos\theta)(\sin\theta)^{2p}\,d\theta, \tag{6.27}$$

et

$$J_p(x) = 2\left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int\limits_0^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu. \tag{6.28}$$

Preuve : Pour montrer l'égalité (6.28), on va appliquer les formules (2.11), (2.13) et (2.19) suivantes, $\forall x, y \in]0, +\infty[$:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right), \quad \text{Formule de duplication}$$

$$\cos x = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

En utilisant le changement de variable

$$t^{\frac{1}{2}} = \mu \Longrightarrow t = \mu^2 \ et \ dt = 2\mu \, d\mu,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \beta(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= 2\int_0^1 \mu^{2x-1}(1-\mu^2)^{y-1} d\mu, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} &= 2\int_0^1 \mu^{2x-1}(1-\mu^2)^{y-1} d\mu \\ \frac{1}{\Gamma(x+y)} &= \frac{2}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 \mu^{2x-1}(1-\mu^2)^{y-1} d\mu, \end{aligned}$$

soit $k \in \mathbb{N}$ et p un réel positif, prenons $x = k + \frac{1}{2}$ et $y = p + \frac{1}{2}$ dans l'égalité précédente , on résulte que

$$\frac{1}{\Gamma(k+p+1)} = \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 \mu^{2k}(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu.$$

Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!\Gamma(k+p+1)} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{\Gamma(k+1)} \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 \mu^{2k}(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\frac{1}{2})} \int_0^1 \mu^{2k}(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$J_p(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (x\mu)^{2k}}{2^{2k}\,\Gamma(k+1)\Gamma(k+\frac{1}{2})} \right) d\mu. \tag{6.29}$$

D'autre part, en utilisant la formule de duplication de la fonction Γ pour $x = k+\frac{1}{2}$, on conclut que

$$\Gamma(2k+1) = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)$$

ce qui donne

$$\sqrt{\pi}(2k)! = 2^{2k}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1),$$

et en vertu de (6.29), on déduit que

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (x\mu)^{2k}}{\sqrt{\pi}(2k)!} \right) d\mu \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (x\mu)^{2k}}{(2k)!} \right) d\mu \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu. \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'égalité (6.27), vu que

$$2\int_0^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu = \int_{-1}^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu,$$

et par le changement

$$\cos\theta = \mu \Longrightarrow d\mu = -\sin\theta\, d\theta,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu &= \int_{-1}^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu \\ &= -\int_\pi^0 \cos(x\cos\theta)(\sin\theta)^{2p-1}\sin\theta\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)(\sin\theta)^{2p}\, d\theta, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^1 \cos(x\mu)(1-\mu^2)^{p-\frac{1}{2}} d\mu \\ &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)(\sin\theta)^{2p}\, d\theta. \end{aligned}$$

6.2.3 Les fonctions de Bessel d'indice entier

Définition 6.2.1. *Soit n un entier. La série*

$$J_n(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{6.30}$$

est la solution de l'équation différentielle de Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2-n^2)\, y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.31}$$

La fonction J_n est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre n.

6.2.4 Les fonctions de Bessel d'indice demi-entier

Proposition 6.2.1. *Soit $x > 0$, les fonctions de Bessel d'ordre $p = n + \frac{1}{2}$, n entier naturel, sont définis par les expressions suivantes :*

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \tag{6.32}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \tag{6.33}$$

et

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) \;=-\, J_{-\frac{1}{2}}(x), \quad Y_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; J_{\frac{1}{2}}(x). \tag{6.34}$$

et plus généralement

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2x}{\pi}}(-x)^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right). \tag{6.35}$$

Preuve :• Pour montrer l'égalité (6.32), on est besoin des formules du développements en série entiére de $\sin x$, $\cos x$ et quelques propriétés de la fonction Γ.

$$\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{\,2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{\,2k}. \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}(2k+1)! \quad &= [(2k+1)(2k-1)...3.1]\,[(2k)(2k-2)...4.2]\\ &= [(2k+1)(2k-1)...3.1]\left[2^k(k)(k-1)...2.1\right]\\ &= [(2k+1)(2k-1)...3.1]\;2^k\,k!\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\Gamma(k+\tfrac{3}{2}) \quad &= (k+\tfrac{1}{2})\Gamma(k+\tfrac{1}{2}) \;=\; (k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})\Gamma(k-\tfrac{1}{2})\\ &= (k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})...(\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2})\\ &= \frac{1}{2^{k+1}}\,[(2k+1)(2k-1)...3.1]\,\sqrt{\pi} = \frac{1}{2^{k+1}}\left[\frac{(2k+1)!}{2^k\,k!}\right]\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

d'où

$$\Gamma(k+\frac{3}{2}) = \frac{(2k+1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}\,k!}. \tag{6.37}$$

Soit

$$J_p(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p},$$

en vertu de (6.36) et (6.37) on déduit que

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\, 2^{2k+1}\, k!}{k!\,(2k+1)!\,\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\, 2^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{\,2k+1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x\,.
\end{aligned}$$

• De la même manière, on peut prouver l'égalité (6.33).
• Pour prouver l'égalité (6.35), on applique la relation de récurrence (6.25) pour $p = \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left[x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\right] \\
&= (-x)^n x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left[x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\right] \\
&= (-x)^n x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}(-x)^n \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Chapitre 7

Les fonctions hypergéométriques

7.1 fonctions hypergéométriques de Gauss

7.1.1 Symbole de Pochammer

Le symbole $(a)_k$ est la notation de Pochammer, où a désigne un nombre quelconque (réel ou complexe) et k un entier positif, il est défini par l'expression suivante :

$$\begin{cases} (a)_k & = a(a+1)(a+2)...(a+k-1), \quad k \in \mathbb{N}^\star \\ (a)_0 & = 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

Exemple 7.1.1.

$$(a)_1 = a \qquad\qquad (a)_2 = a(a+1)$$

$$(a)_3 = a(a+1)(a+2) \qquad\qquad ((0)_k = 0,$$

Remarque 7.1.1.

$$(1)_k = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times k \;=\; k! \;. \tag{7.2}$$

$$(a)_{k+1} = (a+k)(a)_k. \tag{7.3}$$

Proposition 7.1.1. *Soit* $(a+k)$, $a\in\mathbb{R}-\{0,-1,-2,-3,...\}$, *on a*

$$\begin{aligned}\Gamma(a+k) &= (a+k-1)\Gamma(a+k-1)\\ &= (a+k-1)(a+k-2)\Gamma(a+k-2)\\ &= (a+k-1)(a+k-2)...(a+1)\Gamma(a+1)\\ &= (a+k-1)(a+k-2)...(a+1)a\Gamma(a)\\ \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} &= (a+k-1)(a+k-2)...(a+1)a\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=(a)_k. \tag{7.4}$$

7.1.2 fonctions hypergéométriques de Gauss

Soient a,b,c des paramètres et x une variable, ces quatre quantités peuvent prendre des valeurs complexes, on doit seulement exclure pour c les valeurs entières négatives ($\mathbb{Z}^-$). Gauss a donné le nom de la série hypergéométrique, à la série suivante

$$\begin{aligned}&1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)\,1.2}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\,1.2.3}x^3+...\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a(a+1)...(a+k-1)\,b(b+1)...(b+k-1)}{c(c+1)...(c+k-1)\,1.2...k}x^k\\ &=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}x^k.\end{aligned}$$

Définition 7.1.1. *la fonction hypergéométrique de Gauss est définie par*

$$F(a,b,c,x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}x^k \tag{7.5}$$

elle converge pour $|x|<1$.

Exemple 7.1.2.

$$\begin{aligned}F(-3,b,c,x) &= 1+\frac{-3b}{c}x+\frac{-3(-2)\,b(b+1)}{c(c+1)\,1.2}x^2+\frac{-3(-2)(-1)\,b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\,1.2.3}x^3+0\\ &= 1+\frac{-3b}{c}x+\frac{6b(b+1)}{c(c+1)\,1.2}x^2+\frac{-6b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)\,1.2.3}x^3.\end{aligned}$$

$F(-3,b,c,x)$ est un polynôme d'ordre 3.

$$\begin{aligned} F(a,-2,c,x) &= 1+\frac{-2a}{c}x+\frac{-2(-1)a(a+1)}{c(c+1)\,1.2}x^2+0 \\ &= 1+\frac{-2a}{c}x+\frac{2a(a+1)}{c(c+1)\,1.2}x^2. \end{aligned}$$

$F(a,-2,c,x)$ est un polynôme d'ordre 2.

Remarque 7.1.2. *Si a ou b est un entier négatif $(-n)$, $n \in \mathbb{N}$, alors $F(a,b,c,x)$ est un polynôme de degré n*

Propriétes 7.1.1. .

1. *La fonction $F(a,b,c,x)$ est symétrique par rapport aux paramètres a et b :*

$$\begin{aligned} F(a,b,c,x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(b)_k\,(a)_k}{(c)_k\,k!}x^k \\ &= F(b,a,c,x). \end{aligned}$$

2. *On considère*

$$F(a,b,c,x) = F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} M_k(a,b,c)\,x^k, \quad \text{telle que } M_0 = 1.$$

Le rapport entre deux termes successifs M_{k+1} et M_k est égale à

$$\begin{aligned} \frac{M_{k+1}(a,b,c)}{M_k(a,b,c)} &= \frac{(a)_{k+1}\,(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}\,(k+1)!}\times\frac{(c)_k\,k!}{(a)_k\,(b)_k} \\ &= \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$(k+1)M_{k+1}(a,b,c) = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)}M_k(a,b,c). \tag{7.6}$$

Proposition 7.1.2. ***La premiére dérivée :***

$$F'(a,b,c,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k M_k(a,b,c)\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) M_{k+1}(a,b,c)\, x^k,$$

d'où

$$\begin{aligned}
(k+1)M_{k+1}(a,b,c) &= (k+1)\frac{(a)_{k+1}\,(b)_{k+1}}{(c)_{k+1}\,(k+1)!} \\
&= \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k)\, b(b+1)(b+2)...(b+k)}{c(c+1)(c+2)...(c+k)\, k!} \\
&= \frac{a\,b}{c}\frac{(a+1)(a+2)...(a+k)\,(b+1)(b+2)...(b+k)}{(c+1)(c+2)...(c+k)\, k!} \\
&= \frac{a\,b}{c} M_k(a+1,b+1,c+1),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$F'(a,b,c,x) = \frac{a\,b}{c} F(a+1,b+1,c+1,x). \tag{7.7}$$

La deuxiéme dérivée :

$$F''(a,b,c,x) = \frac{a\,b}{c}\sum_{k=1}^{+\infty} k M_k(a+1,b+1,c+1)\, x^{k-1} = \frac{a\,b}{c}\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) M_{k+1}(a+1,b+1,c+1)\, x^k,$$

d'où

$$\begin{aligned}
(k+1)M_{k+1}(a+1,b+1,c+1) &= (k+1)\frac{(a+1)_{k+1}\,(b+1)_{k+1}}{(c+1)_{k+1}\,(k+1)!} \\
&= \frac{(a+1)(a+2)...(a+k+1)\,(b+1)(b+2)...(b+k+1)}{(c+1)(c+2)...(c+k+1)\, k!} \\
&= \frac{(a+1)\,(b+1)}{(c+1)}\frac{(a+2)...(a+k+1)\,(b+1)(b+2)...(b+k+1)}{(c+1)(c+2)...(c+k+1)\, k!} \\
&= \frac{(a+1)\,(b+1)}{(c+1)} M_k(a+2,b+2,c+2),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$F''(a,b,c,x) = \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{c(c+1)} F(a+2,b+2,c+2,x) = \frac{(a)_2\,(b)_2}{(c)_2} F(a+2,b+2,c+2,x). \tag{7.8}$$

La nième dérivée : *Par recurrence , on peut montrer que*

$$F^{(n)}(a,b,c,x) = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n} F(a+n,b+n,c+n,x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.9}$$

7.2 Résolution des équations différentielle de Type hypergéométrique

La fonction hypergéométrique (7.5) est définie comme une solution de l'équation différentielle de Gauss suivante :

$$x(1-x)F'' + (c-(a+b+1)x)F' - abF = 0 \tag{7.10}$$

Preuve : Soit

$$F(a,b,c,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!} x^k,$$

on pose

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} M_k(a,b,c)\,x^k,$$

la première dérivée de F nous donne

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kM_k(a,b,c)\,x^{k-1},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} xF'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kM_k(a,b,c)\,x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} kM_k(a,b,c)\,x^k, \end{aligned}$$

d'où

$$xF'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kM_k(a,b,c)\,x^k. \tag{7.11}$$

En vertu de (7.6) on deduit que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k M_k(a,b,c)\, x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) M_{k+1}(a,b,c)\, x^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} M_k(a,b,c)\, x^{k} \end{aligned}$$

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} M_k(a,b,c)\, x^{k}. \tag{7.12}$$

la deuxième dérivée de F nous donne

$$F''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) M_k(a,b,c)\, x^{k-2},$$

on déduit que

$$\begin{aligned} x^2 F''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) M_k(a,b,c)\, x^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) M_k(a,b,c)\, x^{k}, \end{aligned}$$

donc

$$x^2 F''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) M_k(a,b,c)\, x^{k}, \tag{7.13}$$

d'autre part et en vertu de (7.6) on a

$$\begin{aligned} xF''(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) M_k(a,b,c)\, x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1) M_{k+1}(a,b,c)\, x^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} M_k(a,b,c)\, x^{k}, \end{aligned}$$

d'où

$$xF''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} M_k(a,b,c)\, x^{k}. \tag{7.14}$$

Soit G le côté gauche de l'égalité (7.10), remplaçant les expressions (7.11), (7.12), (7.13) et (7.14) dans G, cela nous donne

$$G = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k M_k(a,b,c) x^k$$

où

$$\begin{aligned}\lambda_k &= k\frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} - k(k-1) + c\frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} - (a+b+1)k - ab \\ &= (a+k)(b+k) - k(k-1) - (a+b+1)k - ab \ = \ 0,\end{aligned}$$

donc

$$x(1-x)F''(x) + (c-(a+b+1)x)F'(x) - abF(x) = G = 0. \quad \text{Ce qui fallut le démontrer.}$$

7.3 Représentation intégrale

Pour $0 < b < c$, la fonction hypergéométrique de Gauss vérifie l'expression intégrale suivante :

$$\begin{aligned}F(a,b,c,x) &= \frac{1}{\beta(c-b,b)}\int_0^1 t^{(b-1)}(1-t)^{(c-b-1)}(1-xt)^{-a}\,dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\int_0^1 t^{(b-1)}(1-t)^{(c-b-1)}(1-xt)^{-a}\,dt.\end{aligned} \tag{7.15}$$

Preuve : On considére l'intégrale

$$I = \int_0^1 t^{(b-1)}(1-t)^{(c-b-1)}(1-xt)^{-a}\,dt,$$

où $|x| < 1$.
La formulle binômielle : pour les réels α, β, λ et $\lambda \neq 0$, on a

$$(\alpha+\mu)^{\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-k+1)}{k!}\alpha^{\lambda-k}\mu^k,$$

pour $\alpha = 1$, $\mu = -xt$ et $\lambda = -a$, on résulte que

$$\begin{aligned}(1-xt)^{-a} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-a(-a-1)...(-a-k+1)}{k!}(-xt)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a(a+1)...(a+k-1)}{k!}(-xt)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)...(a+k-1)}{k!}(xt)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!}(xt)^k,\end{aligned}$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 t^{(b-1)}(1-t)^{(c-b-1)}(1-xt)^{-a}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!}x^k \int_0^1 t^{(b-1)}(1-t)^{(c-b-1)}t^k\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!}x^k \int_0^1 t^{(k+b-1)}(1-t)^{(c-b-1)}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!}x^k\, \beta(k+b, c-b)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!}x^k \frac{\Gamma(k+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(k+c)} \\ &= \Gamma(c-b)\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k}{k!}x^k \frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(k+c)}\end{aligned}$$

d'aprés (7.4) , on a

$$\Gamma(b+k) = (b)_k\Gamma(b), \quad \Gamma(c+k) = (c)_k\Gamma(c)$$

on conclut que

$$\begin{aligned}
I &= \Gamma(c-b)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k}{k!}x^k\frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(k+c)}\\
&= \Gamma(c-b)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k}{k!}x^k\frac{(b)_k\Gamma(b)}{(c)_k\Gamma(c)}\\
&= \frac{\Gamma(c-b)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k\,k!}x^k\\
&= \frac{\Gamma(c-b)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c,x)\\
&= \beta(c-b,\,b)F(a,b,c,x).
\end{aligned}$$

7.4 Représentation de quelques fonctions spéciales

On cite quelques représentations des fonctions speciales à l'aide des fonction hypergéométriques de Gauss :

$$F(a,b,c,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k\,k!}x^k.$$

1. **la série géométrique** (de raison x). On obtient la série géométrique comme cas particulier de la fonction hypergéométrique de Gauss :

$$F(1,c,c,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1)_k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}x^k. \tag{7.16}$$

2. **La formulle binômielle**

$$F(a,b,b,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(a)_k}{k!}x^k = (1-x)^{-a}. \tag{7.17}$$

3. **Polynôme de Legendre**

$$L_n(x) = F(-n,n+1,1,\frac{1-x}{2}). \tag{7.18}$$

4. **Polynôme de Tchebychev**

$$T_n(x) = F(-n,n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}). \tag{7.19}$$

5. **fonctions usuelles**

$$\begin{aligned}
F(1,1,2,x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)_k(1)_k}{(2)_k k!} x^k &&= -\frac{\ln(1-x)}{x} \\
F(1,1,2,-x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1)_k(1)_k}{(2)_k k!} (-x)^k &&= \log(1+x) \qquad (7.20) \\
F(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},-x^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k(1)_k}{(\frac{3}{2})_k k!} (-x^2)^k &&= \frac{\arctan x}{x}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Elie.Azoulay, Jean.Avignant, Guy.Auliac, MathéMatiques Cours Et Exercices RéSolus, DEUG SCIENCES, tome 4, 2° année, *EdiScience*, 2002.

[2] Maurice.Chossat, Mathématiques de L'ingénieur, *L'Usine Nouvelle, DUNOD*, 2003.

[3] Naouel Bentiba, Propagation Des Singularités Des Opérateurs Hyperboliques, Elliptiques et Holomorphes, Thése de Doctorat , Université Badji Mokhtar Annaba, 2017.

[4] Vadim Schechtman, Introduction Aux Fonctions Speciales Notes du Cours, Université Toulouse, Automne 2006.

[5] Kadda Alabe, Éléments D'analyse, fonction d'une variable réelle, 1° et 2° année, *ellipses*, 2012.

[6] J. Kampe De Feriet, La fonction hypergéométrique, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 85, 1937.