الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون – تيارت–

كلية العلوم الإنسانية والاجتماعية

قسم العلوم الإنسانية

تخصص: فلسفة العلوم

مذكرة تخرج مقدمة لنيل شهادة ماستر في الفلسفة

الموسومة ب:

أزمة الأسس في الرياضيات "جورج كانتور" أنموذجا

إعداد الطالبتين:

- لوالي مختارية
- زروقي نجـــاة

إشراف الأستـــــاذ:

أ. كرطالي نور الدين

أعضاء لجنة المناقشة:

أ. رمضاني حسين .... رئيسا

أ. كرطالي نور الدين .... مشرفا ومقررا

أ. فيصل لكحل.................................... مناقشا

السنة الجامعية: 1437ه-1438ه / 2016- 2017 م

شكر

الحمد الله حق حمده والصلاة والسلام على
رسولهوعبده واله وصحبه

قال تعالى: "لَــــــئِنشَــكَرْتُم لأَزِيــدَنَّكُم"
الشكر الجزيل لله العلي القدير، الذي أكرمنا بالعقل
الذي اهتدينا به إلى نور العلم... الحمد لله ألهمنا هبة الصبر
وتحمل عناء هذا المشوار، ووقفنا لإتمام هذا العمل المتواضع
نتقدم بالشكر للأستاذ "كرطالي نور الدين"
ونشكر الأستاذ "شادلي الهواري"
لإشرافه على هذه المذكرة
وعلى كل ما أفادنا به من توجيهات ونصائح
ليس فقط أثناء إنجازنا لهذا العمل فحسب
بل خلال مشوارنا الدراسي
إلـــــــــى لجنة المناقشة
كما نتوجه بالشكر كل أساتذة الجامعة
إلى كل من مدّ لنا يد العون والمساعدة في إنجاز عملنا هذا

وشكرا

مقدمة

ظهرت الرياضيات منذ القدم، عند البابليين والمصريين القدامى، وذلك لتلبية حاجيات الانسان الضرورية، فهي مرتبطة ارتباطا وثيقا بالواقع العملي وبالممارسة اليومية للإنسان كالحسابات في الاعمال التجارية وتقدير المساحات والاطوال، وتوقع الاحداث الفلكية.

ومن هذه المرحلة وانطلاقا من الحاجات الثلاثة انبثقت الاقسام او الفروع الثلاثة للرياضيات، وهي دراسة البنية، الفضاء والمتغيرات فدراسة البينات ادت الى ظهور الاعداد بداية بالاعداد الطبيعية والاعداد الصحيحة والعمليات الحسابية المطبقة عليها، ثم ادت الدراسات المعمقة في مجال الاعداد الى ظهور نظرية الاعداد المنظارية قائمة بذاتها اي علم الكم المنفصل، وفضلا عن ذلك ادت نتيجة البحث عن الطرق لحل المعادلات الى ظهور علم الجبر، كما تم تطبيق الفكرة الفيزيائية المتمثلة في الشعاع الى الفضاءات الشعائية وتمت دراستها في الجبر الخطي.

فلقد بلغت الرياضيات القديمة قمة النضج مع الرياضيى اليوناني اقليدس الذي بقيت اسماماته الهندسية معتمدة لدى رياضيين مدة طويلة التي عرفت بالهندسة الاقليدية، لكن بانتهاء العصور القديمة تراكمت معارف جديدة وهذا بفضل الكشوفات والابداعات العلمية.

وهذا بالإضافة الى الانقلابات الفكرية التي قام بها رياضيون المعاصرون على الرياضيات الكلاسيكية، والتي ساهمت في تطوير الهندسة الاقليدية، وبهذا دخلت الرياضيات مرحلة جديدة وهي مرحلة الرياضيات الحديثة التي اسس فيها الجبر الذي اهتم بها ديكارت لتوضيح معالمه لاحقا وغيرهم من الرياضيين الذين كانت لهم اسهامات بتطوير الرياضيات والتي بلغت ذروتها في القرن 19 مع اكتشافات ديد كند وكانتور للامتناهي ومنه وجود المجموعة الامتناهية فان، للامتناهي هو بمثابة لغز حير الكثير من المفكرين، كما انه تصور فرض وجوده في معظم الانساق الفلسفية التي تستهدف الى الاجابة على مختلف تساؤلات الانسان فيعتبر جورج كانتور هو اول من اكتشف اللامتناهي.

ان هذه الاكتشافات غير مألوفة، وكذا وجود متناقضات في مختلف الفروع الرياضية تم بلورتها فيما يعرف بأزمة الرياضيات وهي ازمة الاسس وهذا ما دعى الى ضرورة اعادة النظر في هذه الاسس التي يجب الانطلاقة منها لتأسيس الرياضيات قوية متناسقة وغير متناقضة، رياضيات خصبة ويقينية وقد نجم عن تاثير الرياضيات في مختلف العلوم منها ظهور اتجاهات عديدة كاتجاه الحدسي والاتجاه المنطقي والاتجاه الاكسيوماتيكي.

وعلى ضوء ما سبق تم اختيارنا للموضوع عند هذا الرياضي وقد كان من دواعي بحثنا واختيارنا لهذا الموضوع **اسباب ذاتية واخرى موضوعية.**

الاسباب الذاتية تتمثل في:

1- الرغبة في الخوض والتعمق في هذا الموضوع لانه ذو قيمة كبيرة في فلسفة العلوم عامة وفلسفة الرياضيات على وجه الخصوص

الاسباب الموضوعية :

فهي تكمن في جدية الموضوع حيث لم يدرس الموضوع من طرف الكثير من الباحثين.

اهمية الموضوع : لقد تميز القرن 19 بظهور ازمة رياضيات التي احدثت تغيرا في الرياضيات الكلاسيكية، هذه ازمة كانت نتيجة ضرورة القطيعة مع البداهة (الحدس) فهي كذلك ظهرت نتيجة ازمة اللامتناهي، ولهذا سنقف عند اهم النقاط اللامتناهي عند جورج كانتور وعلى ضوء ما سبق فان الاشكالية المحورية في هذا البحث تدور حول **ما قيمة البرهان الرياضي؟ وهل اساس المنطقي القائم على البداهة كفيل لتحقيق اليقين في الرياضيات؟ وما موقف جورج كانتور من ذلك؟**

وتندرج تحت الاشكالية الرئيسية مجموعة من الاسئلة الفرعية منها:

-ماهو اللامتناهي؟

-وكيف كانت نظرة كانتور له؟

وللاجابة على هذه التساؤلات اعتمدنا على مؤلفات خاصة بفلسفة الرياضيات والمنطق وقد توفينا الموضوعية قد الامكان في قراءة وتحليل واستنباط الافكار والنتائج معتمدين في ذلك على منهج تحليلي نقدي بالدرجة الاولى وتارخي من اجل الاستقساء التاريخي لتطورات الفكر الرياضي المعاصر متبعين اعمل كبار الرياضيين، ابان القرن 19 وبداية القرن العشرين والتي واكبت ازمة الاسس في الرياضيات

منهج تحليلي نقدي لان ماجاء في مؤلفات هؤلاء الرياضيين كان غامضا الى ابعد الحدود مما يضطرنا الى ضرورة الوقوف عند كل مفهوم وتحليله بدقة وخاصة انها مفاهيم رياضية يجب توضيحها للقارئ

-منهج تاريخي وهذا راجع الى طبيعة الموضوع حيث في كل مرة نستقرأ تاريخ الرياضيات نعود الى الماضي كي نتحدث عن الحاضر ويتسنى لنا الحديث عن المستقبل عن تطور الرياضيات وصيرورتها وكذلك تطور فكرة اللامتناهي عبر العصور.

هذا وقد تعرضت دراسات واطروحات مختلفة سابقة لهذا الموضوع بالتحليل والنقد او بالعرض والاعتراض

1 الدراسة الاولى:بعنوان"**فلسفة الرياضة عند جان كفاييس**"من اعداد زبيدة مونية بن ميسى حرم بن عيسى، رسالة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه العلوم في الفلسفة كلية العلوم الانسانية والعلوم الاجتماعية، جامعة منتوري قسنطينة 2007 – 2008 حيث نجحت في تفكيك بعض العناصر التي لها علاقة بموضوع مذكرتنا.

-**الدراسة الثانية** : بعنوان "**الاكسيوماتيك في الرياضيات المعاصرة**" من اعداد الطالبتين ملهاق نسرين – رنان نريمان مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة، كلية العلوم الانسانية والعلوم الاجتماعية، جامعة **آكلي محند اوحاج** البويرة، 2014 – 2015

-اما بخصوص الكتب فقد كان كتاب "مسألة الانهائية في الرياضيات – نظرية جورج كانتور للدكنور عبد اللطيف يوسف الصديقي من اهم الكتب التي تتحدث عن اللامتناهي والاعداد الموغلة لجورج كانتور.

وللاجابة على الاسئلة المطروحة اعتمدنا على مؤلفات عديدة وحاولنا دراستها بدقة واخص بالذكر "**فلسفة الرياضة**" للدكتور محمد ثابت الفندي "**مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي**" للدكتورمحمدعابد الجابري بالاضافة الى اصول الرياضيات "لبرتراند راسل"

ولتحقيق هذا الهدف جاءت خطة البحث وفقا لهذا المسار كالتالي :

مقدمة :عرفنا فيها بالموضوع واهمية واسباب ودواعي اختياره ثم حددنا الاشكالية المحورية والمشكلات الفرعية، فالمنهج المعتمد وبعدها تحليل الخطة المعتمدة وبعض الصعوبات والعراقيل طبيعة العلاقة بين الرياضيات والفلسفة.

ثم قسمنا البحث الى ثلاثة فصول وكل فصل يحتوي على ثلاثة مباحث.

الفصل الاول : كان عبارة عن سياقات البحث تناولنا فيه **المبحث الاول** مدخل مفاهيمي **والمبحث الثاني** كرونولوجيا الرياضيات **والمبحث الثالث** تحدثنا فيه عن المرجعية الفكرية لجورج كانتور.

الفصل الثاني :كان عنوانه مسالة الانهائية عند جورج كانتور، **فالمبحث الاول** تطور تاريخي لفكرة اللانهائية فهو يمثل مرحلة ما قبل الكنتورية حيث ناقشنا فيه الافكار الاساسية التي دفعت كانتور للتواصل الى فكرة الاعداد الموغلة او ما بعد المنتهي ثم تطرقنا في **المبحث الثاني** الى اللامتناهي عند كانتور وتحدثنا فيه عن الاساليب الرياضية التي تميزت بها نظرياته وصولا الى الحلول الممكنة والجذرية التي قدمها بجرأة وحماس كي يثبت كل الاسس المنطقية والرياضية لتصبح فرعا من فروع الرياضيات، اما فيما يخص **المبحث الثالث** اللانهاية بعد كانتور وهي عبارة عن بعض المفارقات التي افرزتها النظرية، اما بخصوص

الفصل الثالث بعنوان الحلول المقترحة لازمة الاسس تناولنا فيه مختلف المذاهب والنزاعات، **فالمبحث الاول** تحدثنا فيه النزعة الحدسانية **والمبحث الثاني** تناولنا فيه النزعة المنطقانية، المبحث الثالث فتحدثنا فيه عن النزعة الاكسيوماتيكية.

وفي الاخير تضمن بحثنا خاتمة وهي عصارة البحث تحتوي على مجمل النتائج التي توصلنا إليها وفي اعدادنا لهذا البحث واجهتنا مجموعة من الصعوبات والعوائق تتمثل في:

1- قلة المصادر والمراجع التي تخدم الموضوع
2- الاعتماد على نسخ الكتب بصيغة (pdf)وهذا ما يصعب عملية الاطلاع والتفحص.

بالاضافة الى ان الدراسات التي تناولت هذا الموضوع قليلة جدا نظرا لصعوبته وتعقيده، وبالرغم من كل هذا تخطينا هذه العقبات وحاولنا قدر الامكان جمع ما يكفي من المعلومات.

الفصل الأول

سياقات البحث

المبحث الأول: مدخل مفاهيمي

المبحث الثاني: كرونولوجيا الرياضيات

المبحث الثالث: المرجعية الفكرية لجورج كانتور

مقدمة الفصل الاول:

ان المتامل للاطوار التي مر بها التفسير العلمي عبر التاريخ يجد ان المعارف لم توجد دفعة واحدة وانما بالتدرج الى ان تكتمل ويعاد صياغتها من جديد بصيغة تتفق والعصر الذي ظهرت فيه، مما يعني ان نتائج المعرفة العلمية قاصرة عن الوصول الى هدفها النهائي وغايتها القصوى والكمال اليقين المطلق، ومن العلوم التي عرفت فقرات في هذا مجال الرياضيات، هذه الاخيرة التي تشبهت بها العلوم المختلفة لدقتها وصرامة منهجيا حيث اصبح يقال ان المتتبع لتاريخ المعرفة الانسانية ان نموذجها الاول والابرز هو الرياضيات التي عدت منذ القدم نموذج اليقين العلمي على الاطلاق، مقارنة ببقية العلوم التي لم تظهر وتحدد الا حديثا بعد انفصالها عن الفلسفة ببداية العصر الحديث.

فقد تحدثنا في هذا الفصل عن تاريخ الرياضيات وقمنا ايضا بشرح المفاهيم التي تخدم موضوع بحثنا، اما المبحث الاخير تحدثنا عن المرجعية الفكرية لجورج كانتور.

المبحث الأول: جينالوجيا المفاهيم

المنطق:

لغة: يقصد به مصطلح نطق الكلام من أبواب الفلسفة يعطي جملة القوانين التي شأنها التي تقوم العقل، وتسدد الإنسان نحو طريق الصواب والحق فبما أن يلفظ فيه المقولات فينتقل منه الفكر من المقدمات إلى النتائج([1]).

اصطلاحا: Logique العلم الذي يبحث في القواعد الصوابة للفكر أو نظرية الشروط الواجب توافرها للإنتاج الصحيح([2]).

المنطق عند أرسطو: أول من هذب قواعد المنطق ورتب مسائله وفصوله إلى أنه سماه بالتحليل لا بالمنطق. وأول من أطلق اسم المنطق على هذا العلم شتراح أرسطو ثم شاع استعماله بعد "يسكندر الألفروديي" وسماه العرب المنطق تارة وعلم الميزان تارة أخرى([3]).

تعريف ممند: فالمنطق هو علم موضوعه الحكم التقديري التقويمي بقدر انطباعه على التمييز بين الصدق والكذب.

وفي نظر **عبد الرحمن بدوي:** هو ترجمة الكلمة إلى العربية من الكلمة اليونانية boykn من logos وتعني كلمة العقل([4]).

وفي نظر هيجل فالمنطق هو حجر الزاوية في فلسفة والمنطق هو وما بعد الطبيعة شيء واحد.

([1])مسعود جبران رائد معجم القباني في لغة الإعلام دار العلم بيروت، ط3، 2005، ص858

([2]) عبد المنجم حنفي، الموسوعة الفلسفية دار المعرفة تونس، د ط، (د س)،ص448

([3]) جميل صليبا، مرجع سابق ص193

([4])بدوي عبد الرحمن، موسوعة الفلسفية المؤسسة العربية، لدراسات والشرح ، ج2، بيروت، 1984، ص473

المنطق عند ابن سينا: المنطق هو الصناعة النظرية التي توفنا من أي الصور والمواد يكون الحد الصحيح الذي يسمى بالحقيقة حدا والقياس الصحيح الذي يسمى برهانا.

تعريف الغزالي: بأنه القانون الذي يميز صحيح الحد والقياس من غيره فيتميز العلم اليقين وكأنه الميزان أو المعيار للعلوم كلها([1]).

تعريف المنهج:

المنهج يعني الطريقة المتبعة أثناء البحث، وكلمة المنهج هي ترجمة للكلمة الفرنسية(méthode) ولهذا فهو طريقة في التفكير أو طريق للحصول على نتيجة في البحث.([2])

ويعرف رونيه ديكارت بقوله "يعني بالمنهج جملة من القواعد السهلة التطبيق إذ ما راعاها الشخص بدقة تجعله لا يتخذ شيء خاطئا على أنه صحيح ولا يضيع أي جهد عقلي بل تجعله ينمي معرفته خطوة خطوة حتى يصل إلى فهم صحيح لكل الأشياء التي قدرته([3]).

اصطلاحا: المنهج méthode)(من الكلمة اليونانية وله عدة معاني فقد يشير إلى الوسائل التي تستخدم من أجل الوصول إلى شيء معين، وقد يعني بشكل أكثر بساطة الأسلوب المستعمل لبلوغ الهدف كما قد يعني أيضا الفروض التي يقوم عليها البحث عن المعرفة "المنهج على العموم هو الطريق الواضح في التعبير عن شيء أو في عمل شيء أو في تعلم شيء طبق المبادئ معينة الوصول وبنظام معين بنية الوصول إلى غاية معينة".([4])

([1]) علي الساسي النشار المنطق الصوري من أرسطو في عصورنا الحافرة في دار المعرفة، جامعة الاسكندرية، ط1، 2000، ص8

([2]) ابراهيم مذكور، المعجم الفلسفي، صادر عن معجم اللغة العربية، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرنة، (د ط)، 1979، ص195

([3])رنيه ديكارت، مقال عن المنهج، تر: محمود الخضيري، القاهرة، ط3، 1968، ص25

([4]) مراد وهبة المعجم الفلسفي دار قباء للطباعة والنشر، الكويت ط4، 1998، ص673

المنهج إذن هو تلك الوسيلة لتحقيق هدف ما، وطريقة محددة لتنظيم النشاط وبالمعنى الفلسفي يقصد به طريقة المعرفة ويحرص الباحثون على تحديد المنهج في معالجة المواضيع وذلك قبل مزاولة البحث، ولا يكون البحث العلمي ولا يقوم له مقام إلا بتوفر منهج واضح يلتزم فيه الباحث بتتبع خطوات ومراحل معينة "ومنهج البحث العلمي يعرف على أنه سبيل تقصي الحقائق العلمية وإذاعتها بين الناس... والبحث العلمي يستند أصله إلى منهج ثابت ومحدد تحكمه خطوات يشكل قواعده وأصوله"([1]).

ويؤكد ديكارت على أن المنهج هو عبارة عن قواعد مؤكدة وبسيطة ، إذ راعاها الإنسان وكانت تلك المراعاة دقيقة كان بذلك في مأمن أن يقع في الخطأ، وأن يحسب الخطأ صواب ويقدم قاموس الفلسفة الذي أشرف عليه رونز أكثر من تعريف للمنهج أو لها لأنه إجراء يستخدم في بلوغ غاية محددة. وثاني تعريفات هذا القاموس الفلسفي هو "أساليب معروفة لنا تستخدم في عملية تحصيل المعرفة الخاصة بموضوع معين، وثالثها علم يعنى بصياغة القواعد الخاصة بإجراء ما([2]).

أما المنهج العلمي فيمكن تعريفه بأنه "تحليل منطق وتنظيم المبادئ والعمليات العقلية والتجريبية التي توجه بالضرورة البحث العلمي أما ما تؤلفه العلوم الخاصة"([3])
المنهج على العموم هو الطريق الواضح، في التعبير عن الشيء أو في عمل شيء طبقا لمبادئ معينة وبنظام معين بغية الوصول إلى غاية معينة([4]).

([1]) غازي عنابة، منهجية البحث العلمي عند المسلمين، دار البحث للطباعة والنشر، ط1، 1985

([2]) RU NES ?DICTIONARY OF PHILOSOPHY, items méthod by benycner by A .C london,p1962

([3])Runes,thid,p198

([4])مراد وهبة المعجم الفلسفي، ص628

وهو أيضا الطريقة أو المنهج فهو السلوك النظري أو العملي الذي ينبغي أن نتوخاه من أجل بلوغ غاية محددة([1]).

ومن هنا يعتبر المنهج هو الطريق السليم عن طريق إتباع مجموعة من القواعد قصد الوصول إلى نتائج([2]) أما عند جميل صليبا هو الطريق الواضح والسلوك البين، السبيل المستقيم، ومن هنا فإن المتفق عليه أن المنهج هو الطريق الواضح والسليم لبلوغ حقائق معينة.

اليقين certain: هو المنسوب إلى اليقين وهو صفة للقضية الصحيحة أو البرهان القاطع([3]).

اليقينيات: هي القضايا التي يحصل لها التصديق اليقيني كالأولويات وغيرها.

اليقين عند المتصوفة: ثلاث أقام وهي علم اليقين، وعين اليقين، حق اليقين، فعلم اليقين ما يحصل عن الفكر كعلمنا بوجود الماء في البحر، وعين اليقين ما يحصل عن مشاهدة وعيان، كما من مسى ووقف على ساحل البحر وعاينه، وحق اليقين ما يحصل عن العلم والمشاهدة، كما من خاض في البحر([4]).

وفي تعريفات "الجرجاني" اليقين عند أهل الحقيقة "رؤية العيان بقوة الإيمان بالحجاجة والبرهان"

ـــ وقيل مشاهدة العيوب بصفاء القلوب وملاحظة الأسرار بمحافظة الأحكام وقيل طمأنينة القلب على حقيقة الشيء وقيل تحقيق التصديق بالغيب بإزالة كل شك وريب... وقيل اليقين العلم الحاصل بعد الشك الذي لا يعتبر الشك([5]).

([1]) جلال الدين معجم المصطلحات والشواهد الفلسفية دار الجنوب، فلسطين، د ط، 2009، ص83

([2])جميل صليبا، المعجم الفلسفي، دار الكتاب اللبناني ، بيروت من طإلى ي 1982 ص484

([3]) جميل صليبا المعجم الفلسفي بالألفاظ، عربي فرنسي انكليزي، دار الكتاب لبنان، بيروت 22 (د ط) 1986، ص588

([4])المرجع نفسه ص264

([5]) لالاند أندري، المرجع نفسه، ص265

قال الغزالي: "علم اليقين هو الذي ينكشف فيه المعلوم انكشاف لا يبقى معه ريب ولا يقارنه إمكان الغلط والوهم، ولا يتسع القلب لتقدير ذلك، بل الأمان من الخطأ ينبغي أن يكون مقارنا لليقين.

اليقين: في الصياغة القديمة لهذه المادة كنا قد سلمنا المعنيين المشار إليهما حاليا بـــ أو ب وضرب مثلا على المنحنى الأول ودقة باسكال يقين لكن هذا الاستعمال للكلمة أدنته الأكثرية الساحقة من أعضاء الجمعية الحاضرين في جلسة مناقشة وجيء التفكير بأن "بروشار" كان يؤدي أيضا هذه الطريقة في نظر لا يستحق اشتراك النفس، اسم اليقين إلا إذا كان الشيء المفكر به صحيحا([1]).

اليقين سيكولوجيا: هو طمأنينة النفس لحكم تراه حقا لا ريب فيه ويقابل الشك وقد يدعي المرء لها في الواقع خطأ.

ب ـــ منطقيا: كل معرفة لا تقبل الشك، ومنه حدسي كاليقين بهذه الأوليات أو استدلالي غير مباشر ينتهي إليه المرء بعد البرهنة ومنه ذاتي يسلم به المرء ولا يستطيع نقله إلى غيره أو موضوعي يفرض نفسه على العقول كاليقين العلمي وقد يسمى التسليم بأمر ظاهر أو راجح، او شبه يقين والعلم اليقيني هو الذي ينكشف انكشاف لا يبقى معه ريبا وما يقارنه إمكان الخلط والوهم وما يتسع القلب لتقدير ذلك بل الأمان من الخطأ ينبغي أن يكون مقارنا باليقين([2]).

اليقين في علم النفس: موقف العقل من حكم بعده صحيحا من أدنى ريب هذا الموقف قد يتعلق إما بحكم يعد بينا بحد ذاته، وإما بحكم مثبوت أو منظور إليه هكذا في الحالة المولى يسمى مباشر أو حدسيا وفي الثانية يسمى نظريا([3]).

([1]) جميل صليبا، المعجم الفلسفي، المرجع السابق، ص162

([2])ابراهيم مذكور ، المعجم الفلسفي، المرجع السابق، ص216

([3]) لا لاند أندري، المرجع السابق، ص163

واليقين نقيض الشك وله في الفلسفة المدرسية ثلاث أقسام:

1ـــ اليقين الواقعي: أو الطبيعي وهو الاعتقاد الجازم المتعلق بموضوعات التجربة كقولنا السماء ماطرة.

2ـــ اليقين العلمي: وهو الاعتقاد الجازم المتعلق بإدراك الحقائق البديهة و الحقائق النظرية، فإذا كانت بديهة كالأوليات مثلا كان اليقين بها حدسيا مباشرا وإذا كانت نظرية كالحقائق التي يكشف عنها البرهان كاليقين استدلاليا، غير مباشر.

3ـــ اليقين الأخلاقي: وهو امتناع المرء بأنه يستطيع أن يتخذ إزاء ما يعتقد حقيقته قرارا عمليا موافقا ولأن كان هذا الامتناع لا يتنافى مع إمكان الخطأ ([1]).

ومعنى ذلك أن لليقين جانبين إحداهما هو اليقين الذاتي الذي لا يستطيع صاحبه أن ينقله إلى غيره مثل: شعور المرء بمآسي نفسه.

أما اليقين الموضوعي هو اليقين المستند إلى أسباب تفرض نفسها على جميع العقول مثل: اليقين العلمي واليقين المنطقي.

4 ـــ اليقين الرياضي: إن موضع اليقين الرياضي والضرورة الرياضية ليس الحقائق الرياضية بل العلاقات الرياضية إذ لا وجود لحقائق رياضية دائمة لا تتغير، ولكن هناك علاقات رياضية، مثل: إذا كان المكان مقعرا على السطح الداخلي للأسطوانة فإننا نستطيع رسم الأعداد لها تكون موازية لخط معين([2]).

([1]) ابراهيم مذكور، المعجم الفلسفي، الهيئة العامة لشؤون المطابع الأمير به (د ط)، 1983، ص216

([2]) يحي هويدي، في فلسفة علم المنطق، الفلسفة الوضعية المنطقية، مكتبة النهضة المصرية القاهرة (د ط)، 1972، ص157

الترعة tendance. tendency: نقول نزع إلى أهله نزوعا أي حن وانشقاق يقال له نزعة إلى كذا أي ميل إلى كذا فتصبح الترعة بهذا هي الميل وتشمل الحاجة والشهوة والغريزة والرغبة وغيرها.

ولذلك قيل أن الترعة ميل الشيء إلى الحركة في اتجاه واحد كتروع الجسم إلى السقوط وقيل أن الترعة قوة مشتقة من إرادة الحياة توجه النشاط الإنسان غايات يجد في الوصول إليها لذة([1]).

الحدس:لغة: الخبر الأهم والأخص بذاتنا.

يستعمل الحدس للدل في أن كل النظر بعيني الأشياء بقدر ما يتعارض مع التبريد وعلى النفاذ الذي نشعر أو نتكهن من خلاله بما هو غير ظاهر فيه([2]).

اصطلاحا intuition: الحدس هو معرفة حقيقة بنية مهما تكن طبيعتها ، ستعمل مبدأ و مرتكزا للاستدلال النظري، وتدور حول الأشياء وحول علاقاتها أيضا.

المذهب الحدسي أو الحدسي الجديد Neo intuitionism:

الذي يعتنقه الرياضيون أمثال "بروور" و"فايل" و"هيتج" في ألمانيا وجيل أقدم منهم من أمثال بوانكاري poincarré ولوبيج lebesge وبير baire في فرنسا، وهو مذهب لا يمكن إغفاله رغم أنه رياضي بحت، لأنه مذهب فريق من أجلاء الرياضيين المعاصرين الذين يعنيهم الأمن من كل بحث يدور حول علمهم الرياضي العريق، ولأنهم يعودون بعلمهم إلى أصول غير منطقية هي الأصول التي كانت (من قبل حركة النقد الباطني التي طردت كل حدس من الرياضة من تقاليد الرياضة في عصور نموها عبر القرون([3]).

([1]) صليبا جميل ، المعجم الفلسفي،ج2 دار الكتاب اللبناني، د ط ، 1982، ص463

([2])لالاند أندري موسوعة لالاند الفلسفية المجلة2، عويدات للنشر والطباعة، بيروت لبنان، 2008 ، ص705

([3]) محمد ثابت القندي، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، د ت، 1969 ،ص189

هنا فهم يعنوان "بالحدس" لا البداهة الديكارتية وإنما المعنى الكانطي للكلمة أي تلك التجربة الحسية أو الذهنية.

الذي يتيحها المكان،الزمان وهي التجربة التي تقابلها وتناظرها التجربة العملية، في العلوم الطبيعية.فهم إذن الرياضيون يقولون أن الرياضة لها مادة معينة وإذن فهي ليست صورية بحيث يشتق من المنطق الصوري، وإن تلك المادة إذ ما تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هي الحدس الرياضي([1]).

هذا هو المذهب الحدسي كما نستخلص من فلسفة قدماء الحدسيين من أمثال كانط وبوانكاري وغيرهما مما يطلق على مذاهبهم الحدسي وحسب.

الحدسية intnitiorrique: مذهب يرى أن للحدس المكان الأول في تكوين المعرفة ولهذه الحدسية في تاريخ الفلسفة معنيان الأول أطلاقها على المذاهب التي تعد أن المعرفة نستند إلى الحد العقلي والثاني إطلاقها على المذاهب التي تعد إن إدراك الحقائق المادية إدراك حدسي مباشر لا إدراك باطني.

كما عرفه "ابن سينا" وعده وسيلة للكشف عن الحد الأوسط وعنى به "ديكارت" وعده سبيلا الوصول إلى الحقائق البديهية ويرى بوانكاري أن المرء يبرهن بالمنطق ويخترع بالحس([2]).

وأحسن من أطلق الحدس على اطلاع النفس المباشر على ما يمثله لها الحس الظاهر، أو الحس الباطني بين صورة حسية أو تقنية على كشف الذهن عن بعض الحقائق ويوحي مفاجئ لا على سبيل القياس ولا على سبيل الاستقراء أو الاستنتاج، ولكن على سبيل المشاهدة التي ينبغي فيها الحق إصطلاحا وله أربعة أنواع: "الحدس التجريبي العقلي، الكشفي ، الفلسفي، والحدس الصوتي"

([1]) محمد ثابت القندي، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص159

([2]) المرجع نفسه، ص159

وهو حدس الإشراقيين الذين يزعمون أنهم يرتقون من مشاهدة الصور والأشكال إلى إدراك الحقائق المطلقة([1]).

هو الحكم الشريع المؤكد أو التنبؤ الغريزي بالواقع والعلاقات المجردة قال هنري "بوانكاري": «إن هذا الحس أو هذا الشعور بالنظام الرياضي يكشف لنا عن العلاقات الخفية»([2]).

الحدس: الذي اصطلح عليه الفلاسفة القدماء مأخوذ من معنى السرعة في السير قال ابن سينا: « الحدس حركة إلى إصابة الحد الأوسط وبالجملة سرعة الإنتقال من معلوم إلى مجهول».

وقال الجرجاني: « الحدس هو سرعة انتقال الذهن من المبادئ إلى المطالب»

الحدس عند التهانوي:« الحدس هو تمثيل الميادين المرتبة في النفس دفعة من غير تصدر واختبار سواء بعد الطلب أو لا فيحصل المطلوب».

والمطلوب بالحركة وسرعة الانتقال تمثل بالمعنى في نفس الدفعة واحدة في وقت واحد كأنه وحي مفاجئ أو وميض برق([3]).

ـــ ويرى بوليغان G.bouligand أن الحدس الرياضي يعتمد دوما على معارف رياضية سابقة فلا بد فيه من الخيال والذاكرة معا.... يقول : « فالحدس لا يتدخل ابتداء من معطيات عينية وحسب... بل سرعان ما يكتسب لدى الرياضي فاعلية، في ظروف أوسع من ذلك بكثير ... فعالم الهندسة إذ يصبح أكثر "ألفة" بالكيانات التي يدرسها، ينتهي به الأمر إلى أن يكون لنفسه عنها فكرة تعادل في وضوحها فكرته عن الأشياء الحقيقية التي يحفل بها العالم الخارجي، وعلى هذا

([1])جميل صليبا، ج1، المعجم الفلسفي، ج2، دار الكتاب اللبناني، د.ط، 1982، ص454

([2])جميل صليبا، مرجع سابق، ص454

([3])عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة، وتطور الفكر العلمي، ط4 مركز دراسات الوحدة العربية بيروت،2001 ،ص112-113

النوع يتكون في بعض مناطق العالم الرياضي ميل إلى إدراك علاقات عظيمة الدقة في أغلب الأحيان، وذلك عندما يكون كشف هذه المناطق قد بلغ حدا معينا من التقدم([1]).

الأكسيوماتيك:

هو دراسة نقدية لمبادئ مبرهنة، في علم ما وفي البرهنة الهندسية توجد خاصة([2]).

ونجد في تعريف أندري لالاند على أنه:

"هو الدراسة النقدية للبديهيات"([3])

الأكسيوماتيك: هو منظومة من الأوليات يقوم عليها بناء رياضي معين" ([4])

المنهج الأكسيومي: هو مجموع القضايا التي يختارها الرياضي لبناء نسق رياضي معين، هو ما يصطلح عليه بالأكسيوماتيك باعتباره مجموعة من المبادئ المتجانسة التي لا يمكن التمييز بينها([5]).

ويعتبر موريس ياش(1843-1940) أول من عرض الهندسة، في نسق من الأكسيومات حيث أكد أنه كي تصبح الهندسة علما استنباطيا يجب أنة نستخلص من المعنى المادي والواقعي([6]).

ويمكن التمييز بين ثلاث أنواع من الأكسيوماتيك

([1]) ابراهيم مذكور، المعجم الفلسفي، دار الكتاب اللباني ج2 بيروت لبنان (د ط) 1982 ،ص20
([2]) لالاند أندري ، موسوعة لالاند الفلسفية، مجلة 1 ط1 بيروت، 2001 ص25
([3])الجابري محمد عابد، ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة، وتطور الفكر العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية بيروت، ط8 2014 ،ص81
([4]) الجابري محمد عابد، ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة، وتطور الفكر العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية بيروت،2002،ط5، ص81
([5]) المرجع نفسه، ص82
([6])المرجع نفسه، ص82

المادي: والمتمثل في اقليدس، **صوري** خاص بهلبرت، **والنسق الصوري** وقد قسم مؤرخو الرياضيات تطور الأكسيوكاتيك إلى فترتين، الأولى تستند من ظهور الهندسات الإقليدية إلى أعمال هلبرت والثانية من أعمال هلبرت إلى أيامنا الحالية.

الأكسمة:

عبارة عن منهج يقوم بتنظيم النظرية بتأسيسها على أكسيومات، وهي قضايا واضحة بذاتها، ثم استنتاج مجموعة من قوانين، وأول أكسمة في الهندسة لاقليدس في كتابه الأصول، ثم تم تعميمها في الرياضيات، في نهاية القرن التاسع عشر بتأسيس هندسات لا اقليدية، تطور الجبر، أكسمة الهندسة ، تحسيب التحليل، اكتشاف الأعداد الحقيقية، تطور نظرية المجموعات.

تعريف اللامتناهي:

اللامتناهي هو تصور مرتبط بكل ما ليس له حد كالعدد أو القياس ورمزه ∞ الذي استعمل أول مرة من طرف جون واليس (john wallys) (1616-1703) وذلك سنة 1656 إذ استمده من الرومان الذين كانوا يستعملونه للإشارة إلى العدد1000 ([1])

و يعتبر اللامتناهي هي نفي للامتناهي (لا-متناهي) إذ ليس هناك أدنى تشابه بينهما([2].)

مما يعني أن هناك فروقات تحول دون تقاربها، يقول لالاند في معجمه: لن أستخدم أبدا مصطلح اللامتناهي للتعبير عما ليس له نهاية... لكن للتعبير عن الأكبر من كل ماهو متناهي([3])فلا يجب القول أن العالم لامتناهي لأننا لم نستطع أن ندرك أنه متناهي، لم نستطع أن نحصي الموجودات،

([1]) John wallis : the arithmetic, of infintesimals,(1656), sprinjr, venlag, 2004, p 71.

([2])ibid, p 73.

([3]) لالاند اندريه، الموسوعة الفلسفية ، مرجع سابق، ص511.

ولكن ماذا يوجد بعد الذي نراه؟ إن هذه التساؤلات جعلت من ال"كلنا لا نهاية" أو اللامتناهي لغز حير المفكرين في مختلف مراحل العمر.

واللامتناهي أنواع:

ـــ لا متناهي مجرد وهو الرياضي.

ـــ لا متناهي في الكمال وهو الميتافيزيقي

ـــ لا متناهي حسي وهو الفيزيائي.

وسنركز في بحثنا على اللامتناهي الرياضي والذي بدوره ينقسم إلى:

ـــ اللامتناهي ممكن(بالقوة) (infinipotentiel) وهو الذي يتزايد أو قابل للتزايد دون نهاية([1]).

ـــ لا متناهي فعلي(l'infini actual) "وهو الذي لا حدود له بالفعل"([2])

اللامتناهي الفلسفي الرياضي عند ليبتز:

إن ما ميز القرن17 هو ظهور مفهوم جديد في الحساب وهو الحساب اللامتناهي في الصغر (calcul infinitesiel) الذي اكتشفه ليبتز(leibintz) بالتعاون مع نيوتن (زينون الإيلي أشار إلى هذا المفهوم ضمنيا من خلال حججه) ومن خلال التسمية فإن هذا الحساب الجديد يرتكز على المواضيع التي تكشف باللامتناهي،فليبتز إذن يقر بوجود اللامتناهي وهو نوعان:

1ــ اللامتناهي بالمفهوم الأنطولوجي:

([1]) لالاند اندريه، الموسوعة الفلسفية، مرجع سابق، ص 513

([2]) يوسف كرم، تاريخ الفلسفة الحديثة، دار المعارف، القاهرة، (دت)، ط5، ص137.

هو مرتبط بالإله وصفاته، ولا نهاية الإله مرتبطة بكماله وهذا أثبته ديكارت، الإله هو الكائن الكامل الذي لا حدود له من ثم لا نهاية له ، ولأنه الموجود اللامتناهي وليس يوجد فيه ولا خارجا عنه ما يحد ما ماهيته أما فيه فصفات لا متناهية... وأما خارجا عنه فلا يوجد شيء مكافئ له، وفكرة الله لا تتضمن تناقضا([1]).

ولهذا فاللامتناهي هو اللامتناهي فعلي (actual) لأنه يتجلى في عالم الظواهر الطبيعية لا في العدد أو العقل الإنساني ، هذا العالم الذي هو عدد لا متناهي من المونادات كل منها يختلف عن الآخر ولما كان لا بد من وجود سبب كاف لكل ما هو كائن على نحو ما هو كائن لا على نحو آخر، فإن الله هو سبب كاف لها ، وإذا كان كذلك فإن خبرته وقوته اللامتناهيتان تقتضيان أن يكون العالم محتوى على عدد أكبر من الكائنات المتنوعة كيف، والمتوافقة مع بعضها المترابطة فيما بينها([2]).

فكل جزء من العالم يحتوي على عدد لا متناهي من الكائنات المتنوعة والمنسجمة وهي المونادات التي تؤلف متسلسلة sérieلا متناهية شبيهة متسلسلة عديدة والتي فيها كل عدد يختلف عن الآخر، فما دام لا وجود لعددين متطابقين فلا وجود لمناداتين متطابقتين([3]).

ويرى ليبتز أن العقل الإنساني بالرغم من أنه متناهي إلا أنه يمكنه أن يدرك اللامتناهي (الإله) من خلال معرفة خصائصه والتي تختلف عن فهمه([4]).

الشخصيات، المساحات، المقادير... وإذا ما قلنا أكبر مما نريد فلسبب وهو أن الحساب لا يستخدم رياضيا إلا اللامتناهي بالقوة الذي يمكن أن نعبر عنه* $\forall X \exists \gamma \ X\gamma < Y$ فإذا كان(y,x)

([1]) يوسف كرم، تاريخ الفلسفة الحديثة ، مرجع سابق، ص138.

([2])نفس المرجع ص131

([3])jhon wallis, opcit, p 78.

([4]) ibid, p80.

*وهذه الدالة متصلة، اتصال الخط الهندسي (المنحنى)، كما تم أيضا اكتشاف دوال مفصلة لا حصر لها. أنظر محمد ثابت القندي فلسفة الرياضة دار العربية بيروت ط1 ،1969

أعداد، هذا يعني أنه يمكن أن نجد لكل عدد عدد أكبر منه، فحساب اللامتناهي الصغر هو الخصب، ويجب أن نؤكد أن اللامتناهي الذي استعمله لبيتز هو الممكن petentiel ، وهو في هذه الحالة قد أكد بديهية الجزء أقل من الكل مستخدما المفهوم الكلاسيكي للتقابل عند غاليلي، فالاحتواء يعني دائما أن يكون الجزء أقل من الكل وهي قضية صادقة في اللامتناهي وهي كذلك في المتناهي([1])، وهذا الإقرار واعتراف بصلاحية وصحة بديهية إقليدس فليس فقط لا وجود لعدد لا متناهي بل إنه غير موجود أصلا لأن القضية الأصلية صادقة دوما ولذلك نقيضها سيكون كاذبا حتما.

لقد ميز ليبتز بين اللامتناهي المكون من أجزاء، والذي ليس له وحدة ولا كل ولا يدرك ككمية إلا بواسطة نشاط عقلي خالص. وبين اللامتناهي الذي لا يحتوي على أجزاء وهو واحد ولكنه أيضا ليس كلا لأنه اللامتناهي المطلق الثايت، ولهذا فإن اللامتناهيات لأنه لم يتم تريبضه بعد([2]).

وبناء على ما سبق فان ليبتز ميز بين اللامتناهي الميتافيزيقي والامتناهي الرياضي، وأكد على وجود اللامتناهي بالقوة، ولهذا فالأبستيمولوجيا موقفه يماثل موقف أرسطو بالإضافة إلى أنه وضع الأسس الأولى لأسباب اللامتناهي.

وأثناء بحثه في اللامتناهي، انكشفت ليبتز المفكر جيوردانوا برونو (Gardano Brono) (1548-1600) الذي برهن فلسفيا على وجود اللامتناهي فعالمنا الذي يبدوا كبيرا، لا هو جزء ولا هو كل بالنسبة اللامتناهي([3]) فالكل لا يعني لا متناهي، ومنه هذا الأخير هو أكبر من الكل واللامتناهي عند برونو نوعان: لا متناهي خاص بالإله ولا متناهي خاص بالكون([4].)

([1]) Jhon wallis , opcit, p100.

([2]) محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص84.

([3]) مرجع نفسه، ص84.

([4]) مرجع نفسه، ص85.

فاللامتناهي الخاص بالإله هو لا متناهي معقد كامل وتام، لأنه بذاته يقصي كل حد وأن كل من صفاته هي وحدة ثابتة لا متناهية، إن الإله هو كل لا متناهي لأن كل ما فيه كامل، وكل من أجزائه لا متناهي كامل إنه "اللامتناهي في اللامتناهي"([1])

فيما اللامتناهي الخاص بالكون فهو لا متناهي واضح، ولذلك لأن لا حد له ولا نهاية ولا مساحة، وهو لا متناهي غير تام لأن كل من أجزائه هو متناهي، ونستنتج من خلال نظرة برونو، والذي بدوره قد انطلق من أعمال نيكولا كوبر كبرنيك(nicolas copernic) (1473-1543)([2]) أن البحث في اللامتناهي استقطب اهتمام الكثير من الفلاسفة الذين برهنوا على وجوده، وجعلوه مرتبطا بالوجود الإلهي.

([1]) برتراند راسل، اصول الرياضيات، مصدر سابق، ص143.

[2] مصدر نفسه، ص145.

المبحث الثاني: كرونولوجيا الرياضيات

الرياضيات قبل اليونان:

مما هو متعارف عليه حسب مؤرخي العلم أن الرياضيات كعلم نظري ظهرت عند اليونان خاصة مع فيثاغورس ومدرسة في القرن 6م ثم اقليدس وكتابة الأصول، وقد بنى ذلك على أساس الرياضيات المشخصة التي عرفتها الحضارات القديمة في الشرق خاصة عند المصريين والبابليين حيث عرفوا العديد من الكشوف والمعارف بصورة عملية تحت ضغط الحاجات التي تفرضها الحياة الاقتصادية في الزراعة والري والتجارة وغيرها.

حيث نجد المصريين هم الذين علموا الإغريق قواعد الهندسة، فمن المؤكد أن نمو العلوم مرتبط بمجمله بالمعرفة السابقة بالرياضيات التي بدونها لا يوجد أي علم فنجد نظام عدد عشري، هذا النظام يتضمن إشارة حاصلة للمليون فإنه بالمقابل لم يعرف الصغر.

إن نظام الترقيم المصري واستقراره منذ نشأة الحضارة في وادي النيل هما النتيجة الحتمية لضرورة اقتصادية خاصة بالوضع الأجتماعي في البلد([1]).

بمعنى لأن الحكومة المصرية لم تكن تمتلك وحدة نقدية معيارية ما أدى إلى اكتشاف الحساب والهندسة المصرية اللتان كانتا ضروريتان من أجل تسهيل المبادلات التجارية.

لقد كان مقياس السعة عند المصريين "الحقة" أو "المد" وكان يساوي 4,5 لتر أما بالنسبة للسوائل فكانوا يستعملون الهن أما الأطوال فكانت تقاس بالذراع والوزن هو الدبن ويعادل تقريبا 91 غراما([2]).

([1])تاريخ العلوم العام ، العلم القديم والوسيط، رانية تاتون، تر: دعلى مقلد، مجلد 1 ط2 ،2006 مجد المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع ص32

([2])تاريخ العلوم العام، مصدر سابق، ص43

ـــ لما كان عندهم نظام كسري التي استعملوه في قياسات السعة.

أما فيما يخص الهندسة فكانت هندسة عملية متمثلة في علم المساحة وابتكار طرق هندسية لتحديد الأراضي الزراعية والري بعد فيضانات النيل وكذلك اهتمامهم ببناء الأهرام، كان عاملا في التقدم الاستعمالي للحساب والهندسة، مما يجعلهم يكونون على علم ومعرفة بالعمليات المتعلقة بمساحة نصف الكرة، ومساحة المثلث

فالنجاح الذي حققه المصريون في مجال الهندسة هو من غير شك في حساب مساحة الدائرة.

يقول هيرودوت ومن بعده سترايون وديودورا "أن بطبيعة البلد الذي يعيش فيه المصريون، أن المصريون هم الذي اخترعوا الجيومتريا وأنهم هم الذين علموا المهندسين الإغريق([1]).

أما البابليين فقد برعوا في استعمال الحساب والهندسة من خلال تنظيم الفلاحة والملاحة والري ودراسة حركة الكواكب والنجوم. وبالتالي اهتدوا إلى الكثير من المعارف الرياضية، كقياس النسبة بين محيط الدائرة وقطرها بالتقريب، وكذلك حل المعادلات من الدرجة الثانية، وحتى الثالثة حسب بعض الدراسات الحديثة.

أما فيما يخص الرياضيات في الهند القديمة فخصص "أرياباهاتا" قسما من كتابة العدد "غانيتا" فصلا للحساب والجبر، فيستخرج الجذور التربيعية والتكعيبية بحسب الأسلوب الشائع اليوم والذي يقتضي قسمة العدد المعمول به إلى أجزاء من عددين أو ثلاثة.

ـــ كما يتجلى الفكر الرياضي عند الصين القديمة من خلال كتابات مدرسة موتي التي تتضمن هذه الكتابات تعريفات للنقطة والخط، كما قاموا بحساب السطوح والأحجام، وتحدثوا حول مسائل النسب والمعادلات المئوية([2]).

([1])تاريخ العلوم العام، مصدر سابق، ص185

([2])تاريخ العلوم العام، العلم القديم والوسيط، رانية تاتون، تر: دعلي مقلد، مجله 1 ط2، 2006، مجد المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، ص32

وبذلك يتبين أنهم كانوا يمارسون البحث الرياضي العملي إلى الجانب النظري إن كان صورة أقل جزئية غير منسقة، و لم يتأت ذلك مع اليونان حيث قاموا بتحويل تلك المعارف العملية إلى رياضيات نظرية ذات طابع عقلي نظري.

الرياضيات قبل اليونان:

مما هو متعارف عليه حسب مؤرخي العلم أن الرياضيات كعلم نظري ظهرت عند اليونان خاصة مع فيثاغورس ومدرسة في القرن 6م ثم اقليدس وكتابه الأصول، وقد بنى ذلك على أساس الرياضيات المشخصة التي عرفتها الحضارات القديمة في الشرق خاصة عند المصريين والبابليين حيث عرفوا العديد من الكشوف والمعارف بصورة عملية تحت ضغط الحاجات التي تفرضها الحياة الاقتصادية في الزراعة، والري والتجارة وغيرها، حيث نجد المصريين هم الذين علموا الإغريق قواعد الهندسة فمن المؤكد أن نمو العلوم مرتبط بمجمله بالمعرفة السابقة بالرياضيات التي بدونها لا يوجد أي علم فنجد نظام عدد عشري هذا النظام يتضمن إشارة حاصلة للمليون فإنه بالمقابل لم يعرف الصغر.

إن نظام الترقيم المصري واستقراره منذ نشأة الحضارة في وادي النيل هما النتيجة الحتمية لضرورة اقتصادية خاصة بالوضع الاجتماعي في البلد([1]).

بمعنى أن الحكومة المصرية لم تكن تمتلك وحدة نقدية معيارية ما أدى إلى اكتشاف الحساب والهندسة المصرية اللتان كانتا ضروريتان من أصل تسهيل المبادلات التجارية.

الرياضيات النظرية عند اليونان:

([1])محمد عابد الجابري مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية، ص223

تتجلى هذه الرياضيات في ظهور مفاهيم وطرق جديدة في التفكير لم تكن موجودة من قبل، وبالتالي تشكل الفكر الرياضي عند اليونان، كالتجريد والتعميم والتحليل والتركيب. كل هذه الخصائص جعلت الرياضيات في صورة عقلية بعيدا عن التطبيقات العملية والحاجات الاجتماعية.

يمكن أن نلمس ذلك في تصور اليونان للموضوعات والمفاهيم الرياضية فموضوع الرياضيات كما تمثلها "أفلاطون" في نظريته في المثل ماهيات ذهنية تتمتع بوجود موضوعي مستقل وكامل، فالمثلث والدائرة الكاملة صور تقوم في الذهن، وفي هذا السياق أيضا يأتي اهتمام بالأبحاث التأملية كما هو الحال في مجال الأعداد. حيث اهتموا بخواصها كالصحة والكمال والتناسق، ولعل المثال الأبرز هنا الفيثاغوريين، فيتجلى الفكر الرياضي عندهم حتما قال أن العدد أصل الكون حيث قال فيلولاوس PHILOLAOS "كل ما تمكن معرفته له عدد، وبدون العدد فإننا لا نعرف شيئا ولا نفهم شيئا"([1]).

فلقد اهتم فيثاغورس بالأرقام حيث قدس الرقم 10 لأنه يمثل بالنسبة إليه الكمال وتنسب إليه مبرهنة فيثاغورث التي تقول"في المثلثات القديمة يساوي مربع الضلع المواجه للزاوية القائمة مربع الضلعين اللذين يشكلا الزاوية القائمة"([2])، فالفيثاغوريين هم الذين وضعوا الأعداد غير الجذرية.

فهذه القاعدة من الأسس الأقدم في الرياضيات فقد ساعدت في عملية بناء الأراضي.

الرياضيات عند السوفسطائيين:

لقد كان الأسلوب السفسطائي أنتيفونAntiphon في تربيع الدائرة يرشح منه أن آراءه لم تكن بعيدة عن آراء بروتاغوراس لأن مضاعفة أضلاع متعدد الأضلاع المحصور ضمن الدائرة وغير

([1])محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص223.

([2])مرجع نفسه، ص228.

المحدد نظريا، فإنه لا يتابع عمليا إلا إلى النقطة التي يصبح فيها متعدد الأضلاع في نظر العين الدائرة([1]).

الرياضيات عند أفلاطون:

فموضوع الرياضيات عنده تتمثل في نظرية المثل ماهيات ذهنية تتمتع بوجود موضوعي مسقل وكامل فلقد ربط أفلاطون الرياضيات بالفرضية فهذه الأخيرة هي المبادئ الأولى التي ترتكز عليها الرياضيات كما يغلب على الرياضيات الطابع الحدسي أي تلك الرؤية العقلية المباشرة. فهو صاحب المقولة "لا يدخل أحدا كاد ميتنا إن لم يكن جيومتريا"([2]).

وفي مرحلة لاحقة تحولت الرياضيات من الطابع الحدسي إلى الطابع المنطقي مع أرسطو واقليدس.

حيث يرى أرسطو أن الرياضيات يجب أن تكون وسيلة وأداة للعلم لا أن تحتل الموضع الأول من العلوم، فقد أصبح البرهان الرياضي مبنيا على قواعد صارمة تحت تأثير منطق أرسطو وقوانينه وهذا ما نرى عند اقليدس حيث أقام هندسته على مبدأ عدم التناقض بين المبادئ ما ينتج عنها.فيقول "سارطون" عن ذلك بقوله كانت أصول اقليدس تأملات استمرت أكثر من 1000 سنة"([3]).

وبهذا اكتست الرياضيات اليونانية الطابع النظري بعد ما أزاحت عنها كل الشوائب العملية إلا أنها لم ترقى إلى المستوى الحقيقي والدقيق للرياضيات لاختلاطها للتفسيرات الميتافيزيقية ومحاولة جعل الرياضيات كأداة للتبرير فلسفتهم الميتافيزيقية.

الرياضيات عند العرب:

([1])محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص252

([2]) سارطون جورج تاريخ العلم، ج4 تر: مجموعة من العلماء ابراهيم البيومي ومذكور وزملاؤهن دار المعارف، مصر القاهرة، دط 1970 ص203-204

([3]) جون ماكليش العدد من الحضارات القديمة حتى عصر الكمبيوتر تر: ترد خضر الأحمد ودكتور موفق دعبول عالم المعرفة،1999 ص177

ـــ خوارزمي:

اهتم الخوارزمي من الناحية النظرية بالجبر لاعتباره علم معادلات فلقد تمخض عن ترجمة كتابه في الحساب إدخال الأعداد العربية إلى الغرب وولدت عملية قادت إلى استخدام الأرقام العربية التسعة مع الرمز الصفر ومنه نستنتج أن مساهمة الخوارزمي الرئيسية هي نظرية المعادلات فيقول أن هناك ستة أنواع من المعادلات خمس منها التربيعية والسادسة خطية وتعتمد جميعها على الجبر والمقابلة([1]).

الرياضيات في العصر الحديث:

ديكارت:

حيث قام اكتشاف طريقة تمكن من التعبير عن الأشكال الهندسية بحروف جبرية أي قام بدمج الهندسة في الجبر وتقصد بذلك الهندسة التحليلية حيث قال (ديكارت): "كل مسائل الهندسة يمكن أن يعبر عنها على نحو يكفي معه أن نعرف عددا معينا من الخطوط المستقيمة لكي نحصل على التركيب المطلوب الحصول عليه"([2]).

كما يرد ديكارت الحساب إلى أربع أو خمس عمليات وكذلك الهندسة ترد بالمثل إلى العمليات نفسها يجريها على خطوط مستقيمة ينظر إليها كأعداد وحسب وعلى هذا فإن كان أ و ب يمثلان خطين مستقيمين فإن أ+ب أو أ لا ب لا يمثلان مستطيلان أو مربعان وإنما خطا مستقيما نسبته إلى أ كنسبة ب إلى الوحدة.

([1]) جون ماكليش، العدد من الحضارات القديمة حتى عصر الكمبوتر، تر: دكتور خضر احمد والدكتور موفق دعبول، عالم المعرفة، 1999، ص177.

([2])محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة والفكر العلمي،ط8 ، مركز الدراسات الوحدة العربية، بيروت 2014 ص68.

.بمعنى أن ديكارت قام بتحليل القضايا الرياضية من أجل اكتشاف قضايا أخرى جديدة فلقد تمكن ديكارت من تحويل الهندسة إلى الجبر.

رياضيات العصر الحاضر:

إن رياضيات العصر الراهن قائمة جملة وتفصيلا على مقاربة أكسيوماتيكية أصلها منظومة رموز ليس لها إتصال مباشر بالواقع وتخضع لقواعدها الخاصة بها. وتكمن السمة الرئيسية لهذه الرياضيات في ادعائها الكامل للمنطق الصوري والرمزي أيضا هذا المستوي من التجريد لا يعني عدم وجود متسع إضافي للتحليل على العكس هناك اختيار البديهيات الملائمة ، وربط المبهمات المهمة أو بعيدة المنال والبحث عن براهين جديدة أو تنقيع براهين قائمة والكشف عن قياسات موجهة تسود عالم الرياضيات وذلك كله لا يكون ممكنا من قدرة تخيل إبداعية تتبع الرياضيات المعاصرة بثراء باذخ لدرجة مذهلة واستكشافها الكامل يتطلب عمرا مديدا ولهذا يستحيل رسم أطلس لها وخصوصا أن هذا العالم قد تغيرت خارطته وتغيرت لغاية أيضا منذ الحقبة الكلاسيكية كلمات من قبيل الحساب (أو نظرية الأعداد) والجبر والهندسة والتحليل لم تعد لها تماما المعاني نفسها التي كانت تعينها([1]).

([1])أومنييس رولان، فلسفة كوانتوم فهم العلم المعاصر وتأوياه تر: أ د أحمد فؤاد باشا، د، يمنى طريف الحولبي، عالم المعرفة العدد ،350-2008 ص145

المبحث الثالث: المرجعية الفكرية لنظرية المجموعات

إن الحديث عن الأصول المرجعية لهذه النظرية يقودنا مباشرة إلى استقراء الواقع الفكري الرياضي الذي عاصره "كانتور" وكذلك انشغاله كطالب وأستاذ وباحث، فالنسبة للواقع الرياضي آنذاك كان مفعما بالحساب، فبالنسبة ل"كانتور" فقد تجلت موهبته الرياضية في سن مبكرة فهو الذي استخرج من دراساته حول وظائف المتغير الحقيقي، وبشكل خاص حول سلاسل فورية، نظرية جديدة كان لها على الرياضيين اللاحقين تأثير ضخم هي نظرته المجموعات، ولد جورج كانتور في سان بطرسابرغ سنة ..1845 من عائلة يهودية أصلها من البرتغال، ودرس في جمنازويسبادن ثم في زوريخ، ومنذ 1863 اتجه نحو النظري، ثم تتلمذ في برلين على كومر kummer([1]) كرونر kranecher ([2]) وويرستراسweierstrass([3]).

كان كانتور بروتستانتي المذهب ومن خلال هذا الأخير اكتسب ذوقا متميز، في مجادلاته وخاصة في الأمور اللفظية الصغيرة في لاهوت العصور الوسطى، فإذا لم يكن كانتور رياضيا لكان قدره حتما إما الفلسفة أو اللاهوت، ويمكن أن يقال في هذا الصدد إن نظرية كانتور حول اللانهائية كانت حجر الزاوية عند اليسوعيين الذين كانت نزعاتهم المنطقة ممكنة عن طريق الخيال الرياضي الصرف الذي يكمن وراء تصوراتهم اللاهوتية حول إثبات وجود الخالق الذي لا مجال للشك فيه وما التماسك أو الانسجام الذاتي للثلاثي المقدس إلا اندماج الثلاثة في الواحد أو الوحدة وما تفرع الواحد إلى ثلاثة إما تعبيرا عن المساواة والخلود المشتركين([4]).

([1])كومر رياضي ألماني برع في الهندسة الجبرية ونظرية الأعداد ، اشتهر باكتشاف الأعداد العقدية المثالية، عندما كان يبحث عن مبرهنة فيرما التي تنص على أن :المعادلة "س^{ن}+ع^{ن}=ص^{ن}" مستحيلة في حلقة الأعداد الصحيحة عندما يكون أكبر من 2

([2])ليوبولدكرونكر (1823–1891) رياضي ألماني كانت أطروحاته حول الوحدات العقدية بدراسة الأعداد الجبرية، كموضوع أساسي لاهتماماته الرياضية لما اهتم ببناء الرياضيات على العدد الصحيح.

([3]) ويرسترالس (1815–1817) رياضي ألماني أهم اسهاماته حول الدوال البيضوي.

([4])عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهاية في الرياضيات ، نظرية جورج كانتور، دار الشروق للنشر والتوزيع ، عمان(الأردن) ط1،1999 ص20

عندما بلغ كانتور الخامسة عشر التحق بمدرسة خاصة في فرانكفورت وفي دار مشتات، وفي عام 1860 التحقGymnasium وهو في ربيعه الخامس عشر بمدينة فيزبادن وكان قرار كانتور دراسة الرياضيات واحترافها إلا أن والده كان يصر عليه رغم اعترافه بقدرة الصبي الرياضية الالتحاق بالهندسة لما لذلك من مستقبل ومصدر للرزق مضمون، وقبل دخوله الجامعة وتبعا لما حققه من نجاح وتفوق في حقل الرياضيات ، كتب إلى والده خطابا معبرا عن شعوره العميق تجاه حقل الرياضيات.

بدأ كانتور دراسته الجامعية في زيوريخ عام 1862 وبعد عام انتقل إلى جامعة برلين إبان وفاة والده وهناك درس الرياضيات والفلسفة والفيزياء ولكن ميولاته اندفعت إلى الحقلين الأولين بالتساوي وتاركا الفيزياء دون مبالاة([1]).

لقد كان المناخ الرياضي آنذاك مفعما بالحساب وبالذات عند أستاذيه كومر وكرونكر ولكن كانتور ولع بأعمال جاوس gauss ونظرياته وهام بها حتى غاص فيها بعمق وبالذات في عمل جاوس الخالد "التحقيقات الحسابية" حيث تطرق إلى مسألة صعبة تركها جاوس دون حل كتب كانتور أطروحة الدكتوراه حول مسألة الأعداد الصحيحةX,Y,Z للمعادلة غير المحددة$ax^2+by^2+cz^2=0$ أعداد صحيحة حيث a,b,c منحت له الدرجة في عام 1867، ولم تدل أطروحته المخصصة لنظريته الأعداد على الاتجاه الذي سلكه في أعماله لاحقة، وعمل كأستاذ خاص في جامعة هال سنة 1869 ثم كمساعد أستاذ سنة 1872 ولم يحظى جورج كانتور بكرسي الأستاذية في برلين([2]).

([1])عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهاية في الرياضيات ، مصدر نفسه، ص21.

([2])رنية تاتون، تاريخ العلوم العام، العلم المعاصر القرن التاسع عشر، المجلد 3 تر: علي مقلد، المؤسسة الجامعيةللدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، ط1، 1990، ص78.

لقد كان غرام كانتور الأول هو أعمال جاوس المتعلقة بالنظرية الرقمية التي فتن بها وسحر بمحتواها ووضوح وكمال براهينها ولكن تأثير أستاذه ويرستراس جعله يتجه إلى التحليل الرياضي وبالذات المتسلسلات المثلثية(متسلسلات فورييه)([1]).

ولكن الصعوبات الحاسمة في هذه النظرية والمتعلقة بتقارب المتسلسلات اللانهائية كانت أقل عمقا وقريبة المنال إذا ما قورنت بنظرية قوى المتسلسلات.

وهي التي جذبت اهتمام كانتور ودفعته إلى أسس التحليل الرياضي أكثر من معاصريه الذي لم يولوا اعتبارا لها وقادته أخيرا إلى احتضان رياضيات وفلسفة اللانهائية هذه الفلسفة التي تترعرع في قاع جميع القضايا المتعلقة بمفاهيم الاستمرارية والنهايات التقاربية([2])

وقبل أن يتجاوز كانتور ربيعه الثلاثين نشرت ورقته الثورية في المجلة كريلله grellés حول نظرية المجموعات اللانهائية ورغم أن نتائج هذا البحث غير متوقعة تماما وكذلك مفارقاتها المتعلقة حول مجموعة جميع الأعداد الجبرية التي صاغها كانتور بطريقة بارعة وكذلك الطرق الجديدة غير المألوفة التي أدخلها في بحثه، فقد وضعت الرياضي الشاب في قائمة الرياضيين الحلاقين غير العاديين بغض النظر عن الإجماع أو الإتحاد الكلي حول هذا الموضوع، وتبقى مسألة أخرى لسنا بصددها ولكن ما يجب قوله أن هذا الرجل أتى بشيء كامل الجدة وأزاح صخرة كبيرة كانت بمثابة عثرة في الرياضيات([3]).فهذا العمل منحه قوة ونفوذا يستحق من خلاله تقليد أي منصب ذي نفوذ وسلطان، لقد اقترح" هرنيس أدوارد هاينه" على كانتور بإحدى المسائل العويصة المتعلقة بنظرية المتواليات المثلثية([4])وفي عام 1872 نشر كانتور بحثه حول الحلول العامة لهذه المسألة والتي تعد بمثابة البذرة الأولى النظرية المجموعات اللانهائية، وقد لاقت نظرية كانتور العديد من المعارضين

([1])مصدر نفسه، ص25.

([2]) عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهاية في الرياضيات ، مصدر سابق، ص25

([3])محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص95

([4]) مصدر نفسه، ص25

ولكنه توصل فعلا إلى أن يجعل المنطق الرياضي يتجدد و يصبح أكثر قوة وصلابة، بدأت أعمال كانتور الصلبة حول المجموعات سنة 1873 بمقال أول تبعته كتابات ظهرت بين 1878 و1883 ثم بين 1895 و1897 وتميز اكتشافه للأعداد "العابرة النهائية"([1]) ومنه نستنتج أن جورج كانتور هو مؤسس نظرية اللانهائيات في الرياضيات ويمكن أن يقال بحق مؤسس الرياضيات الحديثة حيث كان شغله الشاغل هو انجاز مفهوم المجموعة باعتبارها إحدى ركائز الرياضيات الأساسية وجعل نظرية الأعداد الموغلة "ما وراء المنتهي" وبالذات مفهوم الأعداد الترتيبية لأعماله.

إن الأفكار الثورية التي جاء بها كانتور أثارت منذ ظهورها الاعتراضات العنيفة وخاصة من قبل "كرونيكر" وظل مفكرون عظام أمثال "هرميت"([2]) معارضين تماما لكانتور لأن الرياضيين انقسموا إلى فريقين، فلقد كان عرض "الأسس" عرضا رياضيا دقيقا حول المجموعات الجديدة للأعداد الموغلة بالإضافة إلى الدفاع المحصن عن اللانهائية الحقيقية، ذلك المفهوم الذي حاولوا معظم الفلاسفة واللاهوتيين وفي الرياضيين أنفسهم على دحض مفهوم اللانهائية الحقيقية وبالأخص عندما حذر الفلاسفة في منطقتهم المتشدد حول المفارقات الموجودة في طبيعة اللانهائية وسلوكها الغريب منذ ما قبل السقراطيين عندما بدأو اكتشاف أشكالها المتناقضة، وعلى سبيل المثال رفض أرسطو مفهوم اللانهائية الكاملة وبالمثل دحض رجال الدين المسيحي اللانهائية الحقيقية باعتبارها هجوما مباشرا وتحديا لوحدة الله المطلقة وطبيعتها اللانهائية([3].)

كذلك كان الأمر نفسه بالنسبة للرياضيين عندما سلكوا مسار الفلاسفة حيث اعوج سبيلهم تجاه تطبيقات اللانهائية الحقيقية ومن هذا النزاع اشتد الرياضي جاوس وكان محتجا على مثل هذه اللانهائيات لقد كان كانتور يعلم كل العلم بأن نظريته الجديدة حول المجموعات اللانهائية والأعداد

([1]) مصدر نفسه، ص27

([2]) عابد محمد الجابري، مرجع سابق، ص97

([3]) مرجع نفسه، ص97

الموغلة ستلاقي حتما معارضة شديدة وهذا راجع لنظريته التي أزاحت الاعتقاد التقليدي السائد([1]).

لذا كان أحد أهداف "الأسس" هو إثبات أنه ليس ثمة سبب لقبول الاعتراضات القديمة حول اكتمال اللانهائية الحقيقية ومن الممكن أيضا الإجابة على هؤلاء الرياضيين أمثال جاوس والفلاسفة، لكن كانتور نفسه لم يتطرق إلى القضايا المعرفية للأعداد الموغلة فحسب بل إلى التصورات الميتافيزيقية المصحوبة بها لأن هذه التصورات بمثابة الروح النابضة في أية فلسفة.

بمعنى أن جورج كانتور أتى بفكرة اللامتناهي مخالفة تماما لما كانت عليه عند أرسطو وأيضا اللاهوتيين كنوما الإكويني فقد كانت هذه الفكرة مناقصة تماما للتصور الميتافيزيقي للانهائي.

وكون كرونكر محررا للدورية كريليه فقد كان باستطاعة أن يرفض أي بحث يرسل للنشر أو يجمده حتى وإن كانت هناك محاولة من قبل لعمل نشر أعمال هاينه عام 1872 وأوشك الامر نفسه أن يحدث مع كانتور عندما أرسل بحثه عام 1877 لم ينشر في الحال كما كان توقعه فقد كانت مماطلة كرونكر ليست أكاديمية وإنما شخصية فحسب، ومن منطلق شخصي بحت لم يرد كرونكر أن تنشر أعمال كانتور لأنه كان يرفض مفهوم اللانهائية الحقيقية أو المكتملة وكذلك الأعداد الموغلة([2])لقد كانت الحملة التي شنها كرونكر مشحونة بالغيرة على حد تعبير إسحاق أسيموف Asimov.

وكان كرونكر دوما معارضا له بل كان يبذل جل اهتمامه وجهده في عرقلة تقدم كانتور وإبعاده من سلك التعليم بجامعة برلين في دفعه إلى ترك برلين والالتحاق بجامعة هاله وهناك بدأت تظهر عليه نوبات الانهيار العصبي وعلى أثرها أدخل مستشفى الأمراض العقلية مات في مدينة هالة 1918.

([1])عبد اللطيف يوسف الصديقي، المصدر السابق، ص28

([2]) رونيه تاتون، تاريخ العلوم العام، مصدر سابق، ص81

الفصل الثاني

مسالة اللانهائية لجورج كانتور

المبحث الاول : اللانهائية قبل كانتور

المبحث الثاني: اللانهائية عند كانتور

المبحث الثالث: اللانهائية بعد كانتور

مقدمة الفصل الثاني

لقد بدأت مشكلة اسس الرياضيات عندما بدأ البحث في مسلمة التوازي التي اسسها اقليدس، واذا كان هذا البحث قد ادىة الى نتائج ايجابية تتلخص في ظهور هندسات جديدة، فان مشكلة الاسس بقيت مع ذلك مطروحة بجدة، كما ان تطور الفكر الرياضي قد ادى الى ظهور ازمة في الرياضيات كانت سببا في قلق واضطراب الرياضيين، خاصة المهتمين بفلسفة الرياضيات فهؤلاء لكي يتجاوز هذه الازمة بحثو عن اساس ثابت تبنى عليه الرياضيات كي تصل الى اليقين، ومن نتائج هذه الجهود تأسيس نظريات المجموعات والتي احرزت نجاحا ملحوظا في دحض مفارقات الاعداد اللامتناهية، منه نطرح الاشكال التالي: **كيف كانت نظرة كانتور للاعداد اللامتناهية؟**

المبحث الأول: اللانهائية قبل كانتور

ان اللامتناهي هو تصور مرتبط بكل ما ليس له حد لعدد أو القياس ورمزه "∞" الذي استعمل لأول مرة من طرف " جون واليس".([1])

(jhon wallis)، مع العلم أن هذه الفكرة قد اثارت منذ القديم عدم قبول واضح، فقد طال الفلاسفة والرياضيون مشككين في وجودهما الفعلي وقبل الاشارة الي اعتراضات علي فكرة اللانهاية، لابد من الحديث عن استدلال الفلسفي علي فكرة اللامتناهي، أي كيف يتم رؤية اللامتناهي قبل كانتور؟، من خلال النماذج التي تناولته سواء في فكر اليوناني أو الفكر الحديث

فلقد بدأت المسالة اللانهائية من تعريف طاليس([2]) الذي قال فيه " تلك التي ليس لها بداية او نهاية " ومنذ ذلك الحين بدأ هناك تأثيران أساسيان يلعبان دورهما في مفهوم اللانهائية، الأول تخميني أو حدسي وهو تيار الذي انطلق منه انكسمندر (Anax mandar)، أما الأخر فتمثله المدرسة الفيتاغورية عن طريق اكتشافها لأصحابها "المسألة اللاقياسية" التي أدت بهم أخير الى مفهوم الأعداد الصماء .

ومن ناحية تاريخية يمكن القول ان المسألة اللانهائية في فكر الغربي بدأت بمراحل ثلاث, الأولى ويطلق عليها ما قبل الأرسطية وهي جميع الأفكار الفلسفية والرياضية التي سبقت ارسطو والثانية هي المتمثلة في تحليل اللانهائية عند ارسطو نفسه وبعض شارحيه وهي المرحلة الأرسطية أما المرحلة الأخيرة فهي متمثلة أعمال كانتور وأخرين.

1- مرحلة ما قبل الارسطية :

أ- فيتاغورس : لقد مهد فيثاغورس phythagorrs (582-497 ق.م)

وتلاميذته الطريق الى مسالة اللانهائية والتي تعتبر بحق فصلا من فصول تاريخ الرياضيات، ان لم تكن الرياضيات برمتها هي علم اللانهائيات, هذا ما عبر عنه الرياضي الشهير هلبرت([3])Helbert جاءت

([1])جون واليس Johne waliis 1616-1703 ،فيلسوف، منطقي، ورياضي انجليزي عرف بدراسته في حساب التكامل والتفاضل، واليه يرجع الفضل في اكتشاف رمز اللمتناهي.

([2])الصديقي عبد اللطيف يوسف، مصدر سابق، ص 34.

([3])هلبرت: رياضي الماني زعيم المتجاه الصوري في اللمنطق والرياضيات مؤسس مدرسة جو تنجن الرياضى ،انصرف فهمي جدعان احصاد القرن المنجزا العملية وال و.... ف ب المؤسسة العربية ، الأردن(دط)(دت) ص 578

المسالة من خلال اكتشاف الفيثاغورس لمسالة اللاقياسية[1] Incomensureablity والتي تعتبر بحق انعطافا حادا التعاليم المدرسة الفيثاغورية وذالك كما اجبر فيلسوف الرياضية والمنطقي برتراند راسل لأن يعبر أجمل تعبير عندما قال " ان المسالة اللانهائية بدأت أول الأمر عند الفيثاغورس في محاولاتهم المسالة اللاقياسية ", وحتى ارسطو نفسه صرح بذلك قائلا "أنه فيثاغورس الذي وضع اللانهائية بين الكينونات المحسوسة الأخرى".

هكذا جاء اكتشاف الفيثاغوريين عن التعويض عن الاضلاع المثلث القائم الزاوية بالوحدة، فإن الوتر عندئذ سيكون مساوي للجذر التربيعي لعدد اثنين لنفرض المثلث abc القائم الزاوية في b، فاذا كان ab=bc=1 فإن الوتر ac يساوي $\sqrt{2}$ وذالك بناء علي نظرية فيثاغورس الشهيرة التي تنص على أن المربع المنشأ علي الوتر يساوي مجموع المربعين المنشائين علي الضلعين الاخرين ونتيجه تطبيقاتهم الهندسية فان العدد يجب أن يكون صحيحا فمثلا اذا كان الضلعان ab =3 و bc=4يساويان فان الوتر ac = 5 يساوي وهكذا ...

ولكن كارثة تبدأ وعندما يكون الناتج $\sqrt{2}$ أو $\sqrt{3}$ أو لأي جذر تربيعي أخر غير تام , لقد كان هذا العدد الناتج أكبر صدمة بالنسبة إلى برنامج وتعاليم المدرسة الفيثاغورية ان لم يكن تحديا بالمعنى الذي يحير المدرسة على تصحيح بعض مفاهيمهما أو التغلب علي مثل هذه الصعوبة , ولكن تلاميذه المدرسة اتخذوا الأسلوب أخر وهو وهو كتم السر واعتباره من الأسرار المقدسة ويعاقب من يبوح بذلك لان افشاء مثل هذه الأسرار يعني انهيار كامل المدرسة نفسها التي تقف وراء شعار "العدد هو أصل كل شيء[2]" ويجب ان يكون عدد صحيحا وهذا ما اثبتته لهم التجربة والقياس والحدس ايضا الأن اكتشافهم هذا حال تماما من اللوغوس اي العقل, ولأن هذه الأعداد غير صحيحة تماما ومن ثم تتنافى مع العقل .

اذا كانت الأشياء يمكن التعبير عنها بالأعداد الطبيعية , ج , د متلا فان التناسب أب =ج, د حيث ج,د هما النسبة بين ضلع المربع وقطره ويمكن البرهنخ أيضا علي أن أعداد طبيعية كهذه لايمكن أن توجد فالنسبة في حد ذاتها غير صحيحة, ومن ثمة لاتحمل اسما علي الاطلاق فلتكن اللانهائية

(1)الصديقي اللطيف يوسف، مصدر سابق، ص 35.

(2)حلمي معلم أميرة، الفلسفة اليونانية تارخيها ومشاكلها دار المعارف بمصر، (دط1998،ص294)

ذاتها[1] Aperation وقيل ايضا انها alogos اي غير قابلة للتعبير وباليونانية Arratos أي دون نسبة ولقد تم أخير البرهنة على أن هذه الأعداد التي يطلق عليها الاعداد الصماء غير المنطقة ليست الا سلسلة لانهائية من أعداد الصحيحة .

ب- زينونا الأيلي (حوالي 495 ق.م – 430ق.م): وهو تلميذ بارميندس القائل بثبات العالم وتماسكه ووحدته, فزينون الأيلي مكتشف البرهان بالخلف وأبو الجدل وهكذا امن لأجل الدفاع عن حجج استاذه "بارميندس" وقد طرح بذلك زينون احدى اهم المفارقات في تاريخ الفكر الفلسفي فقد طرح زينون مفارقة اخيل والسلحفاة وحجة السهم و حجة الملعب .

الحجة الأولى: القسمة الثنائية (Dichotomie)

ونصها "لا حركه لأنه ينبغي علي متحرك أن يبلغ نصف الطريق قبل أن يصل الي اخر"،([2])وبعبارة أخرى اي حركة مهما كانت نفرض وقوعها فانها تفرض وقوعها من قبل حركه اخري هي نصفها، وهي بدورها تفرض وجودها من حركة ثالثة هي ربعها، وهكذا إلى مالنهاية .

فاذا اراد شخص مثلا "س" أن ينطلق من "أ" الى "ب" فيجب أن يصل الى "ج" الذي هو منتصف [ab], ثم يصل الى "د" الذي هو منتصف [أج] ثم يصل الى "ه" التي هيا منتصف [أد] وهكذا دواليك ولهذا فهذه حجة تفترض امكانية التقسيم اللانهائي للمكان .

أما المفارقة الثانية تقول "([3])اذا كانت هناك كثرة فهي يجب أن تكون لما متناهية الصغر ولامتناهية الكبر , ان الكثرة يجب أن تكون متناهية الصغر لأنها مركبة من وحدات وهذا ما نقصده بالقول انها الكثرة.

والثالثة حول السباق بين اخيل وسلحفاة([4])"فاذا كانت سلحفاة سابقة علي أخيل فانه لن تستطيع لانه يلحقها , فلولا يجب أن يصل الى النقطة التي انطلقت منها السلحفاة وعندما يصل الى هناك تكون سلحفاة قد انتقلت لأبعد ومن ثم فعلى اخيل أن يصل الى ذلك النقطة وسيجد أن سلحفاة قد وصلت الى النقطة الثالثة وسوف يستمر هذا لأبد ومن ثم فان المسافة بينهما تتناقص باستمرار لكنها

([1])نجيب بلدي دروس في تاريخ الفلسفة، دار توبقال للنشر المغرب ط1 ، 1987 ،ص57

([2]) أميرة حلمي مطر ، الفلسفة اليونانية تاريخها ومشكلها المرجع السابق ص296

([3]) بلترا اندراسل، أصول الرياضيات ج3تر محمد مرسي أحمد وفؤاد الاهواني، دار المعارف مصر ط ح (دت) ص 205

([4]) بلتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 207

لا تجتاز (تقطع) عليه، ومن ثم لن يلحق أخيل بسلحفاة علي الاطلاق بمعنى يظلان الى مالانهية، فلو ظل المتسابقان الى اخر الدهر فلن يلحق أخيبل سلحفاة.([1])

وبهذا نستنتج أن حجج زينون الايلي قد اشارت بوضوح تام الى فكرة اللامتناهي واسنادا الى ما قدمه هذا الأخير تم احراز بعض تقدم في تناول كيفية التي يمكن بها العدد غير منتهي من الافعال أن تحدث في العالم الخارجي.

– اللامتناهي الأرسطي:

في كتابة حول الفيزياء لاحظ ارسطو (384 قم – 322 قم) أن دراسة اللامتناهي يحتوي علي احراج لأنه سواء أقررنا أنه موجود أولا , فان النتيجة مستحيلات متعددة([2]) – وحسب ما هو واضح في قول أرسطو , فانه لا يمكن الحديث عن اللامتناهي، فاذا كان اللامتناهي هو بمنأى عن المحسوس عن الاشياء الحسية ومن ثم ليس بعرض فهو موجود في ذاته وهذا مستحيل لأنه اذا لم يكن مقدار أو كثرة وموجود في ذاته فهذا يعني أنه غير قابل للانقسام , فلو كان قابل للانقسام لكان اكثر أو مقدار أي هو قابل للقياس، ولهذا مادام غير قابل للانقسام فهو غير لامتناهي .

الا ان ارسطو بعد أن قدم أدلة على استحالة وجود اللامتناهي استدرك وأكد لأنه لا يمكن قول بعدم وجوده, لكن اذا كان اللامتناهي غير موجود مطلقا , هذا ايضا يعني المستحيلات المتعددة[3] ولهذا بعد تحليل توصل الى هذه النتائج :

– أن اللامتناهي هي كفعل لا يوجد وأنه يوجد فقط بالقوة

– يرى ارسطو انه اذا افترضنا وجود اللامتناهي فان الجزء منه سيكون لامتناهيا الا أنه في الرياضيات يمكن أن نأخذ جزء من المجموعة لامتناهية ويكون متناهيا، ومنه فان ارسطو واعيا بأهمية اللامتناهي في الرياضيات وبهذا يكون ارسطو قد نظر الة اللامتناهي من زاوية مختلفة عن سابقيه وقد أثر بموقفه في الكثير من الرياضيين الذين قبلوا فكرة اللامتناهي الممكن في الرياضيات متل كرونيكر، بوانكاريه و بروور.

([1])نجيب بلدي، دروس في تاريخ الفلسفة، مرجع سابق، ص59

([2])Aristote, physique, traduction de Astevens, I, Vrin, 1999, p136.

([3])Ibid, p 137.

- اللامتناهي الاقليدي :

يعتبر اقليدس (360 ق م – 295 ق م) أول مؤسس لبديهية الهندسة الأكسمة premier axiomotisationt de la gemetrie)، فقد وضح كمجوعة من المفاهيم البديهيات التعريفات المصادرات وانطلاقا من هذه المبادئ برهن علي قضية هندسية([1]) لكن علاقة هندسة اقليدس بالامتناهي؟ لنأخذ واحد من التعريفات استعمله اقليدس وليكن التوازي مستقيمان متوازيان في مستوي واحد هما بلاحدود من جهة ومن جهة ثانية لايتقاطعان من الجهتين وقد استخدم اقليدس مصطلح Indifini و لم يستخدم مصطلح infini،([2]) ولذلك لانه راى ان القول الامتناهي يؤدي الى تناقض ولهذا تجنبه .

وبالإضافة الى ما سبق فقد كان هناك خلط بين اللامتناهي واللامحدود بين المتناهي والمحدود (infini Indifini) (Indifini infini) فاللامتناهي مرتبط بالمجهول بما هو غير معلوم بينما المتناهي هو معلوم ومحدد وتام الا ان اقليدس قد بالغ في تعريف المتناهي لان هناك كثير من المواضيع المتناهية لكن غير محددة بشكل تام ودقيق بينما يوجد اللامتناهي لكنه محدد فمثلا حبات الرمل لكوكبين هي غير محددة بالرغم أنها متناهية بينما مجموعه الأعداد الطبيعية هي لا متناهية ولكنها محدود وطفل قد يتوصل اليها ببساطة وهذا ما أكده جون بياجي اذا كنا قد أشارت الى حبات الرمل وعدها يشير الي ارخميدس – Archimede (287 ق م –212 ق م) الذي اثبت كمية ذرات الرمال علي ارض لا تنفذ وأن مقدراها كبير يقدر بالترتيب 10 وهذا ما يثبت ضمينا أن اللامتناهي الفعلي موجود لكن لا يستخدمه في براهينه.

وقد قال عنه لوبينغ (lebsgue 1879-1941) مازحا ان ارخميدس لم يحظى عندما خص وقته وجهده لعد حبات الرمال المنتشرة علي الارض فكما لاحظ توجد شكيلات لا متناهية([3])أما اذا تطرقنا الة التعريف المقدار هو جزء من مقدار الاصغر من الاكبر. عندما يكون هو (المقدار) الاكبر([4])

([1])Robert blanché, l’axiomatique, pub, paris, 1999, p 12.

([2])Euclide, les éléments, bernard vitrac, pub, paris, p 166.

([3]) Euclude : opcit, p 178.

([4]) Ibid, p 180.

هذا التعريف قائم علي مفهوم الجزء من المقدار فهو يستعمل مفهوم المقدار دون تعريفيه ودون تعريف قياس فكما نلاحظ ان استخدام مفهومي الاصغر كان بصورة غير محدودة وغير دقيقة هدا ما يثبت ان اقليدس توصل الى مفهوم اللامتناهي لكن ما يستطع التصريح به وفي اطار الحديث عن اللامتناهي يجدر ان اشارة الي بديهية من بديهيات اقليدس الكل اكبر من الجزء([1]) فهي مجال المتناهي هده البديهية هي صادقه حتما بينما في مجال اللامتناهي تطرج اشكالية وهي التي طرحت في بداية القرن العشرين ادا عدنا الي مثال السابق $p=\{0,2,4,6,8\}$، $N=\{0,1,2,3,4\}$
هنا N و P متناهيان هدا يعني ان كل ليس اكبر من جزء اي ان N ليست اكبر من P وجود تنافريين اللامتناهيين وبديهية اقليدس نلاحظ عدم قبول فكرة اللامتناهي عند اول وانكار ضمنيا اقر بوجود فأدلته وضعها لتنفيذ اللامتناهي لكن يمكن ان تشغل لاثباته بينما عند ارسطو واقليدس فهناك قبول مبدئي ناجم عن ضرورة وقد اقر كلاهما بوجود اللامتناهي بلقوة وهو اللامتناهي الرياضي بينما الامتناهي الفعلي هو المتافيزيقي وعليه لا نلمس وجود تخوف يوناني من اللامتناهي او ما يتغير عند الخوف من اللامتناهي ان الخوف من اللامتناهي عند اليونانيين القدامى يظهر في كلمه ذاتها التي تعبر عنه لانهاية apeiron التي لها معنى تحفيزي pejoratif هو الخوف الذي شكل عائق امام اكتشاف اللامتناهى الفعلي في وقت نبكر كما يقول كانتور، والأعداد التي لها الربع المضاعفات (4) هي ربع العدد في كلية والأعداد التي لها الخمس (مضاعفات 5) هي خمس.([2])
ان ثابت بن قرة اول من صرح بالحقيقة الحسابية اللامتناهي، ثم بالتأكيد عليها بعد الف سنة مع ديدكند وكانتور، فقد أقروا بوجود عدد اللامتناهي وبإمكانية المقارنة بين اللامتناهيات ($P=NK$)، بل وقد أشار الي تساوي المجموعات اللامتناهية من خلال التقابل بين عناصر كل منها ومن ثم الي تساوي المجموعات المتناهية من خلال عد عناصر كل منها.

–اللامتناهي في العصر الحديث :

([1]) Robert Blanché, opcit, p 15.

([2]) Tony levy : figures de l'ifini, editions du seuil, paris, 1987, p 101.

ان تعريف غاليلو دون شك أنار الطريق ورسم الفكرة الأساسية الرياضي العصر الحديث وبالذات الى مفهوم اللانهائية الحقيقة ومنطلق الأسلوب غاليلو هو استنباط المجاميع الكلية لأعداد على أنها لانهائية وبالمثل بالنسبة الى مربعات الأعداد نفسها، ويمكن توضيح ذالك بالرموز الاتي ([1])

1.2.3. ....∞

1،4،9 .... ∞

في مؤلفه "خطابات" تخص علمان جديدان 1638 حيث صرح غاليلي أعتقد أن الصفات أكبر وأصغر أو يساوي لاتتلائم مع المقادير اللامتناهية والتي من المستحيل القول أن الواحدة هي أكبر أو أقل أو يساوي للأخرى.([2])

اللامتناهي الميتافيزيقي بقي عند ديكارت: لقد استخدم ديكارت مصطلح اللامتناهي للدلالة علي الإله الخالق دلالة الميتافريقية، أما المعني الفيزيقي فالمتناهي هو ما ليس له نهاية، وعبر عنه أيضا بالمصطلح اللامحدود، ويؤكد على أنه يستخدم اللامتناهي كسلب للمتناهي، وذلك لأنه يوجد في الجوهر اللامتناهي من الحقيقة لأكثر مما يوجد في الجوهر المتناهي وفكرة اللامتناهي سابقة عن فكرة المتناهي.([3])

كذلك نجده يقول "اذا رجعت الى نفسي فأول ما يبتدئ لي هو نقصي، لأنني أعرف أنني أشك، وشك نقص اذا هو قصور عن بلوغ الحق وماكنت لأعرف انني كائن ناقص متناه لو لم تكن لدي فكرة الكائن الكامل أو اللامتناهي.([4])

وهذا تأكيد على اللامتناهي هي أسبق من اللامتناهي، اذن ديكارت يؤكد على وجود ذلك المتناهي الميتافيزيقي و الطبيعي كما أنه خالف السابقون عليه الذين اثبتوا وجود أن اللامتناهي هو نفي للمتناهي لكون أن الأول سابق في الوجود عن ثاني .

([1]) الصديقي عبد اللطيف يوسف، مسألة اللانهائية في الرياضيات، المرجع السابق، ص 39.

([2]) الصديقي عبد اللطيف يوسف، مصدر سابق، ص 40.

([3])عثمان أمين، ديكارت، المكتبة الأنجلومصرية (م)، ط6، 1976، ص 166.

([4]) ديكارت: مقال في المنهج، تر: محمد الخضيري، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ط3، 1985م، ص 222.

-اللامتناهي عند ليبتز: جاءت وجهة نظر ليبتر حول اللامتناهية الحقيقة من خلال الرسالة كتبها الى صديقه "فوخر" 1693faucher قائلا: "انني ميال كثيرا الى فكرة اللانهائية الحقيقة ،لذا أعتقد بأن ليس هنالك جزء من المادة ن لأقول غير قابل للانقسام ولكن يمكن تقسيمه فعلا"،([1])وتفهم ليبتر المفهوم اللانهائية الحقيقة ناجم عن فلاسفة العصور الوسطى وبالذات كاسنوس برونو Bruno ولما اقترح راسل لأن مفهوم اللانهائية عند لدى ليبتر شبيه بتلك اللانهائية التي أطلق عليها هييجل "اللانهائية الكاذبة" ومالانهائية الحقيقة في نظرر هيجل الا العقل لايمكن أن يتصورها العقل، لهذا السبب هنالك العديد من الرياضيين ممن وقف ضد فكرة اللانهائية أو في تفكير بها لان ذالك يعني بالنسبة لهم غير كامل أو مكتملا "اللاكتمال".

-اللامتناهي الفعلي عند بولزانو :

بالإضافة الى ليبتر وديكارت نجد رياضي وفيلسوف حاول تحقيق الصعوبات الناجمة عن اللامتناهي، وأضاف عناصر جديدة انه بورنارد بولزانو (1848-1781Branard Bolzano) الذي عرض نظريته حول اللامتناهي في كتابه " مفارقات الامتناهي"les paradoxes defini.([2])

بولزانو يمكن الحديث عن التاريخ الحديث اللامتناهي، فهو فيلسوف منطقي، فيزيائي ولاهوتي، كان هدفه من الكتاب توضيح اللامتناهي الفعلي والدفاع عنه من خلال ابرازاهم التناقضات الناتجة منذ زينون ايلي، ومن ثم التواصل الى تأسيس اللامتناهي الفعلي في حقل الحساب والكم لأن العالم ميتافيزيقي.

بالنسبة لبولزانو" الاله ليس لامتناهي الا لأننا نتصوره حاملا لقدرات كل منها مقدار لامتناهي، بالرغم أنه ليس الأول الذي أشار إلى وجود اللامتناهي الفعلي، وليس الأول الذي أدرك إمكانية وجود عدد من اللامتناهيات اللامتساوية، وليس الأول الذي قام بربط مساواة اللامتناهيين بإمكانية تأسس رابطة التقابل واجد يواجد بين عناصر المجموعتين لكنه اللاول الذي حاول بناء تصور رياضي خالص وحساب تنفي الامتناهي الفعلي".([3])

([1])يوسف كرم، تاريخ الفلسفة الحديثة، دار المعارف، القاهرة، (دت)، ط5، ص 137.

([2])يوسف كرم، تاريخ الفلسفة الحديثة، مرجع سابق، ص 131.

([3])نجيب بلدي، دروس في تاريخ الفلسفة، مرجع سابق، ص63.

فبولزانوا قد أكد الآراء السابقة عنه، فيما يخص وجود اللامتناهي الفعلي واقر أيضا بوجود عدد من لا متناهيات وانه لا يمكن ان نثبت مجموعتين لا متناهيتين متساويين الا من خلال التقابل بين عناصرهما، ولكن وصل الي الجديد المتمثل في حساب اللامتناهي ورأى أن بناء ذلك التصور"يكون حسب التوازي الدقيق بين المتناهي واللامتناهي".([1])

-اللامتناهي الفعلي له نفس النظام المنطقي الخاص بالمتناهي، ففيه كذلك التصورات القريبة من العدد الطبيعي، والكسر الناطق، كما أن لهما أيضا نفس النظام الرياضي، وهذا يعني أنه توجد مجموعات لامتناهية بالفعل ولايوجد أي منطق يمنع من تصور مجموعات تامه فمثلا مجموعه الاعداد الطبيعية، المستقيم ممتد الى مالانهاية، وكذلك القطعة من المستقيم وهذا ما سمح لبولزانو بالعودة الى القياس اللامتناهي للقطعه [0.1]، والمجموعة اللامتناهية للنقاط التي يحتو بها، فليس من ضروري عد كل العناصر كي تصل الى كل بل يكفي التطرق الى بعض العناصر والقيام بعملية التعميم على الكل، وققد اخذ كمثال مجموعه سكان Prague كل منم يفهم كلمة مجموعه وماذا تعنيه ولا أحد سيذهب الى كل مواطن حتى يستطيع عدهم واحد واحد، هذه المجموعه مستعينة، لكن بالنسبة اللامتناهي الكمي الرياضي ليس من الضروري أن نحصي كل عناصر المجموعه.([2])

ومنه نستنتج مما سبق أن اللامتناهي لم يكن ليصل الى الصورة التي اضافها عليه بولزانو القرن 19 لولا جهود الفلاسفة والرياضيين عبر مختلف العصور والمراحل فيه ان كان التعامل معه بتحفظ واحتشام لم يعد كذلك بعد أن تم ربطه بالإله وبصفته ففي السيرة تفسيرا ميتافيزيقيا وتم التميز حينها بين اللامتناهي الممكن واللامتناهي الفعلي، هذا الأخير التي ظهرت بوادره في القرون الوسطى من صب التركيز عليه في القرون اللاحقة وضحه بولزانو في القرن 19 ولكن البناء لم يكمل إلا في القرن 20، اذن كانت هذه اهم الاسهامات حوال اللامتناهي قبل كانتور فما هو اللامتناهي عند كانتور؟

([1])مرجع نفسه، ص65.

([2])يوسف كرم، تاريخ الفلسفة الحديثة، مرجع سابق، ص 139.

المبحث الثاني: اللانهائية عند كانتور

تعتبر نظرية المجموعات والأعداد الموغلة أحد الإبداعات والإنجازات الرئيسة بل والمتميزة في أعمال كانتور تحديدا وفي تاريخ الرياضيات وفلسفتها بصورة أعم، وتعتبر أبحاث كانتور الأولى والتي هي سلسلة من الدراسات بدأ مسارها منذ عام 1870م، وكان محورها يدور حول المتسلسلات المثلثية ولقد كان تحليل الدوال هو الحافز الذي دفع كانتور إلى فكرة "مجموعة النقط" pointset ([1]) ومن ثم إلى اكتشافه الخالد الأعداد الموغلة أي أعدادها وراء المنتهي.

لقد كانت أعمال كانتور المبكرة منصبة حول متسلسلات فورييه وهي المتسلسلة المثلثية التي يمكن التعبير عنها بالصورة التالية([2])

$$F=1/2\ a_0+\Sigma a_n \quad Cos(n_x)+b_nSin(n_x)$$

$$=1/2\ a_0+a_1 \quad Cos_x+b_1\ Sin+a_2 \quad Cos_2\ x+b_2 \quad Sin2_x+\ldots$$

([1]) عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 51.

([2]) مصدر نفسه، ص 52.

حيث b_2 b_1 b_0 a_2 a a_1 a_0 أعداد ثابتة تسمى معاملات فورييه وتستخدم هذه المتسلسلة لتمثيل أو تقريب أية دالة دورية (2π) وحيدة القيمة وذلك عن طريق تحديد قيم مناسبة للمعاملات فورييه.

ففي عام 1870م، أنجز كانتور أولى نتائجه المتعلقة بوحدانية الدالة وهي إذا كانت الدالة متصلة في فترة ما، فإن تمثيلها بواسطة المتسلسلة المثلثية يكون وحدانيا، أما أعماله الأخرى فكانت تدور حول متطلبات الدالة التي يجب أن تكون متصلة على مدى الفترة.

لقد بحث كانتور في عام 1872 قضايا أكثر تعميما لنتائجه حول نظرية الوحدانية قادته إلى اكتشاف نتائج مظلمة، وهكذا تركزت أعماله في العام المذكور حول اقتراب π إلى دالة صفرية عند أية نقطة في الفترة ($0,2\pi$) أما تشخيصه الدقيق لهذه المسألة فدفعته إلى صياغة نظرية محكمة وصارمة حول الأعداد النسبية وبالذات عندما واجهته مسألة المجموعة التي تحتوي على عناصر لانهائية.([1])

وهكذا استطاع كانتور أن يتوصل إلى المتتاليات* الرتبية أو رتب للمتتاليات فالمجموعة (A) للمتتالية الأساسية في تلك المتتاليات للأعداد النسبية (a=an=1,2,3,...) هذه المتوالية تقترب طبعا من معيار كوشي cauych الذي ينص على أنه قيمة صغيرة محددة مهما كانت قيمتها شرط أن تكون أكبر من الصفر فإن القيمة المطلقة للفرق بينهما سيكون أصغر من تلك القيمة.

في سنة 1872م، نشر كانتور مقالا بعنوان "امتداد قانون نظرية المتسلسلات المثلثية" عرض فيه نظريته وشروحاته حول المقادير الكبيرة، كما أشار في هذه المقالة على البناء المتقن للرياضي هاين فيما يخص تعريفه للأعداد الحقيقية، وطور نظرية فبرشتراس بتقديمه للمتتاليات الأساسية وأكد على ضرورة وأهمية التمييز بين الأنساق التالية([2])

([1]) عبد اللطيف يوسف الصديقي، مصدر سابق، ص 55.

* المتتالية: هي مجموع الأشياء الأعداد المترابطة بنمط خطي حيث ترتيب أعضاء المتتالية يتم وفق قاعدة صريحة أو ضمنية العناصر أو الأعداد تسمى عناصر أو حدود.

([2]) برتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 108.

- النسق A للأعداد الناطقة
- النسق B نهايات المتتالية للأعداد الناطقة
- النسق C وهو نسق نتوصل إليه من خلال نهايات المتتاليات للأنساق A و B
- النسقان B و C يمكن اعتبارهما متطابقين ومن المهم الإبقاء على التمييز المجرد بينهما
- النسق A أدى إلى تأسيس النسق B، والنسقان A و B معا يؤديان إلى نشأة النسق C والأنساق A، B، C تؤدي إلى النسق D وهكذا إلى أن نصل إلى النسق L للمقادير العددية

وإذا كانت لدينا متسلسلة لامتناهية ... an ... a2 ... a1 مكونة من أعداد مختارة من النسق A وB و D تنتمي كلها إلى النسق A، فهذه المتسلسلة تتكون: $A_{n+m} - a_n$ هي لامتناهية الصفر في حالة تزايد n مهما كانت m، ونهاية المتسلسلة محددة من طرف n.([1])

لقد أعطت دراسات كانتور حول المتسلسلات المثلثية بعدا آخر في مسار عمله بل تحولا أيضا في أفكاره، حيث شرع في التركيز على العلاقات الموجودة بين نقط الاتصال ناهيك عن المتسلسلات نفسها، وكانت هذه خطوة رائعة في تقدم عمله وخاصة وصفه الدقيق لمجموعة النقط اللانهائية والذي كان التحليل الرياضي معوله الأساسي في مسألة اتصال نقط الإحداثي السيني لذا اعتبرها كانتور بديهيات موضوعة فأية نقطة على الخط المتصل يناظرها عدد هذا العدد حقيقي كي يمكن تميزه عن الأعداد التخيلية، وبالمثل أي عدد حقيقي تناظره نقطة على الخط المستقيم.

إن الوصف الدقيق لمفهوم اتصال نقط الخط المستقيم وارتباطه بنسق الأعداد الحقيقية الخاضع لمبدأ "التكافؤ"([1]) أو المطابقة واحد إلى واحد يعتبر أحد إنجازات كانتور المهمة في بحوثه المنشورة عام

([1]) برتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 109.

1872م، ولكن العوائق الرئيسية حول نظرية الأعداد الحقيقية هي وجود أعداد مثل π و $\sqrt{2}$ والتي يطلق عليها الأعداد غير المنطقة أو الصماء.

وبناء على اقتراح كارل فيرتشراس أستاذه في جامعة برلين توصل كانتور إلى أن الأعداد الصماء يمكن تمثيلها بمتتالية متسلسلة لانهائية من الأعداد المنطقة، فعلى سبيل المثال الجذر التربيعي للعدد اثنين (2) ويمكن وضعه على الصورة التالية: 1/41 1/1.4 وهكذا على الساق نفسه يمكن اعتبار جميع الأعداد الصماء نقاط هندسية على خط الأعداد الحقيقية مثل الأعداد المنطقة.

لقد كانت مساهمة كانتور تدور حول هذه المسألة التي نشرت في عام 1874 في المجلة التي تسمى أيضا Grellés journal فقد استخدم كانتور الأداة التي استعارها من جاليلو Galilio وحولها إلى أداة نفاذة للمقاربة في حل المتناقضات أو المفارقات التي ذكرت آنفا وذلك بمبدأ "التناظر أو التطابق" واحدا إلى واحد، فهذا المبدأ يوضح لنا أيضا حجم أية مجموعة، فمثلا نعرف المجموعتين المتساويتين بالتالي[2]

عندما تناظر عناصر المجموعة الأولى واحد إلى واحد عناصر المجموعة الأخرى يقال أنهما متساويتان.

لقد برهن كانتور على أن الخاصية التي اعتبرها جاليلو مفارقة هي في الواقع خاصية طبيعية للمجموعات اللانهائية، وإن مجموعة الأعداد الزوجية تكافؤ مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة، وكذلك الأعداد الفردية لأن عملية المطابقة مستمرة إلى الأبد أي تطابق عناصر المجموعة الأولى مع عناصر المجموعة الأخرى دون حذف أي عنصر من المجموعتين كلتيهما.[3]

---

[1] عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 54.

[2] عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة الانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 58.

[3] بلتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 112.

استطاع كانتور أن يوضح لنا بطريقة بارعة حول هذه المعضلة، حيث أن مجموعة الأعداد المنطقة تتطابق أو تتطابق أو تكافؤ مجموعة الأعداد الصحيحة فأي مجموعة من مجموعات النظام العدد يمكن وضعها على صورة واحد إلى واحد مع مجموعة الأعداد الكلية عندئذ يقال إن المجموعة قابلة للعد.

لقد تميزت المرحلة الأولى للاكتشاف من 1873 إلى 1879م بارتباط الاكتشاف الكانتوري بالتحليل باستعمال مجموعة من نقاط أو أعداده مجموعات مجردة، وكذا بالتطبيقات التحليلية، وإذا وجدت كائنات جديدة من العناصر، فإن تبرير وجودها سيكون في هذا الفرع من نظرية الدوال والمتمثل في دراسة مجموعات النقاط إذا اكتشف كانتور قوتين وميز بينهما وهذا ما تم في رسائل ديديكند كانتور وفي مذكرة نشرت سنة 1873 حول خاصية النسق لكل الأعداد الجبرية الحقيقية:

أ- القابل للعد

ب- المستمر

ويمكن تعريف المعدودية: نقول عن E أنه قابل للعد، إذا كان من الممكن أن نعد عناصر المجموعة، ونضعها في صف ونرقم عناصر E دون تكرار أي عنصر باستعمال الأعداد الطبيعية.([1])

وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي معدودة، وكل مجموعة معدودة هي لامتناهية لأنها مكافئة لــ: N و N لامتناهية، لكن العكس غير صحيح في سنة 1873م، تساءل كانتور، إذا كانت مجموعة الأعداد الحقيقية يمكن أن توضع في شكل متسلسلة بسيطة "إذا كانت لدينا المجموعة (x1) لكل الكائنات الصحيحة الموجبة، ونمثلها بالرمز n، وإذا كانت لدينا المجموعة المقادير العددية الحقيقية

([1])برتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 116.

الموجبة ($x1$) ونرمز لها بـــ x ولكن الأهم هومعرفة ما إذا كانت n تقابل x، حيث كل عنصر من إحدى المجموعتين يقابله عنصر واحد وواحد فقط من الأخرى.([1])

قدم كانتور حلا حدسيا،([2])الأول نظرة يمكن القول أن هذا غير ممكن لأن n هو مركب من أجزاء منفصلة غير متصلة، بينما x هي متصلة (يعني أن n لها علاقة بالأعداد و x لها علاقة بالهندسة)، والقول بعدم وجود تقابل بين x و n لا أجد مبررا لهذا الحكم.

كما طرح جورج كانتور إشكالية قابلية العد لمجموعة الأعداد الحقيقية أن يبرهن على نظرية ليوفيل، فهو يؤكد من خلال رده على ديدكند، أن الهدف من طرح هذه الإشكالية هو إعطاء برهنة جديدة لنظرية ليوفيل على أنه توجد أعداد متعالية، فإن هذه الدراسة لم تخرج عن نطاق التحليل فقد قدم كانتور برهانه قائما أساسا على ضم أو دمج المجالات لكي يبرهن على لا معدودية الأعداد الحقيقية.

والجديد الذي جاء به "ليوفيل" هو أنه أول من وضع برهنة للعدد المتصاعد ومن نتائج أبحاثه أن:

$$Y=\Sigma\frac{1}{10k}=0.110001$$

فقد أثبت كانتور أن المجموعة المعدودة هي تلك التي تكون في علاقة تقابل مع متتالية الأعداد الطبيعية، بينما الأعداد الحقيقية هي غير عدودة لأنها لا تقابل الأعداد الطبيعية.

لقد عاد جورج كانتور في المرحلة 1879-1883م إلى توظيف منهج الاشتقاق المستعمل في المتسلسلات المثلثية في مسألة المتصل.

فمجموعة المشتق كمجموعة معطاة ليست حكرا على المجموعات الخطية بل تطبق على المجموعات ذات بعدين أو ثلاث متصلة أو منفصلة ومشتق مجموعة النقاط p هو مجموعة النقاط التي لها خاصية

([1]) مصدر نفسه، ص 117.

([2])بلتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 120.

الالتقاء عند نقطة حدّ (limite) لــ p سواء كانت هذه النقطة الحدّ تنتمي إلى p أو لا،[1] ومشتق p هو مجموعة جديدة p1، ومشتق p1 هو مجموعة ثانية للمشتق وهي p2 وهكذا ... إلى أن نصل إلى py.

فيمكن التمييز بين نوعين من المجموعات، تكون من النوع الأول إذا كان مشتقان فارغ أو خال، أما إذا كان المشتق غير فارغ فهي من النوع الثاني،[2] أما المجموعات التي تنتمي إلى النوع الأول فهي قابلة للعد، فقد اهتم كانتور بدراسة النوع الثاني من المجموعات حتى يتوصل إلى خصائصها ويميزها عن مجموعة النوع الأول للمجموعة أمعتمدا في ذلك على مفهوم الاشتقاق وتمديده نحو اللامتناهي، فالمشتق واللامتناهي ورمزه p∞ هو تقاطع مشتقات ذات ترتيب متناهي.

فمن p∞ نتحصل على p∞+1، p∞+2 ... وبالتقاطع نتحصل على p2∞، pn∞، p∞∞∞ ...، وهذا يعني أن امتداد منهج الاشتقاق يؤدي إلى امتداد موازي للعد، فبعد الأعداد المتناهية 1، 2 ... ن نجد رموزا متصاعدة ∞، 2+∞ ... 2∞، ... n∞ ... ∞∞∞ ... ∞n ... ∞∞∞ ...إلخ، وهذه الرموز متصاعدة.

فالرموز المتصاعدة هي ضرورية لترقيم مراحل منهج الاشتقاق، يقول عنها كانتور "نلاحظ إذن جيل جدلي للتصورات اليت تقودنا دائما نحو الأبعد، ومتحررة من كل تعسف ضروري في ذاته".[3]

وبناءا على هذا توصل كانتور إلى النتائج التالية للامتداد المتزايد:

1. إذا ما كان المشتق 'p من المجموعة p هو عدود إذن p هي كذلك إن المجموعة تتركب من مجموعة معزولة وجزء مشترك مع مشتقة.

([1])عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 75.

([2]) مصدر نفسه، ص 77.

([3])نجيب بلدي، دروس في تاريخ الفلسفة، مرجع سابق، ص 60.

2. كل مجموعة لها مشتق ذا ترتيب ∞ (حيث ∞ عدد متناه أو عدد متصاعد) هي متناهية وعدودة

ومنه فغن الرموز المتصاعدة أدّت إلى ظهور دراسة مجردة للعد، بشرط وأن تعين هذه الرموز الأعداد في نظرية جديدة تحتوي على مناهج خاصة أعداد تحدد الميدان الحقيقي للمتصاعد.([1])

كما وظف كانتور مبدأين آخرين الأعداد المتصاعدة ومبدأ التوقف او الغلق، فهذه المبادئ الثلاثة، إضافة وحدة، إيجاد حدّ جديد هو الأكبر ومبدأ غلق الفئات، ننشئ أعداد جديدة، فئات جديدة متتالية القوى المتزايدة، فهذه المتتالية ليس لها حدود.([2])

كما أشار كانتور إلى الأعداد اللاناطقة وعلاقتها بالأعداد الأصلية والترتيبية، فالأعداد المتصاعدة هي عبارة عن أعداد لاناطقة جديدة فهما متشابهان من حيث الماهية، إنهما عبارة عن تحولات أو تغيرات محددة للامتناهي الفعلي، وقد وصف كانتور الأعداد الأصلية والترتيبية بالمتصاعدة حتى يميزها عن اللامتناهي الميتافيزيقي.

وفي الأخير نستنتج أن تطور الفكر الرياضي قد أدى إلى ظهور أزمة في الرياضيات كانت سببا في قلق واضطراب الرياضيين، خاصة المهتمين بفلسفة الرياضيات، فهؤلاء لكي يتجاوزا هذه الأزمة بحثوا عن أساس ثابت تبنى عليه الرياضيات كي نصل إلى اليقين، ومن نتائج هذه الجهود تأسيس نظرية المجموعات، والتي أحرزت نجاحا ملحوظا في فحص. مفارقات الأعداد اللامتناهية فنجد جورج كانتور أول من وضع الأسس الأولى لنظرية المجموعات*، فقد كان هذا المفهوم لنظرية المجموعات حدسي سائدا حتى نهاية القرن 19م، لأنه نظر إلى تجمعات أشياء ليست معرفة بخواص رياضية على أنها مجموعات أو قواعد محددة، إن النظر في نظرية جورج كانتور يقودنا إلى القول بأنها نظرية رياضية

([1])مرجع نفسه، ص 62.

([2]) عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 85.

تعني التأليف بين الأعداد وتنطلق من ثلاثة حدود أولية لامعرفة هي المجموعة، العنصر، ينتمي وهذه بعض الخصائص الرياضية للمجموعات والعمليات التي تجرى عليها.([1])

يرمز عادة للمجموعة بأحرف كبيرة A, B, C …X ويرمز لعناصرها بأحرف صغيرة a,b,c …x. كما تستخدم العلاقات بينها بالرموز الآتية:

A∈a للدلالة على ان a عنصر من المجموعة A

A∉a للدلالة على ان a ليست عنصر من المجموعة A

A⊆B للدلالة على ان A محتواة في B

AUB للدلالة على اجتماع A و B

A B للدلالة على تقاطع A و B

∅ للدلالة على المجموعة الخالية

هذا فيما يخص الخصائص الداخلية وفيما يتعلق بالخصائص الخارجية فيمكن القول أنها نظرية في الأعداد لأنها قسمت الأعداد إلى:

أعداد أساسية:

وهي الأعداد التي نعد بها وتدل على الكم، والأعداد الترتيبية وهي الأعداد التي تدل على المرتبة الأول، ثان، ثالث، رابع …إلخ، قسمت الأعداد من جهة أخرى كذلك إلى أعداد متناهية (Fini) وإلى أعداد لامتناهية (Transfini) وتمت دراسة هذين القسمين مما أدى إلى عدة نظريات متنوعة

([1])عويدة صفوان، المجموعة الموسوعة العربية، العلوم بحتة، الرياضيات والفلك، المجلد 17، ص 218.

*نظرية المجموعات عند كانتور: (تقصد بمجموعة تجميع الاشياء متمايزة تماما محسوسة او مجردة) انظر: احمد صلاح واخرون، مرجع سابق، ص216.

في كل منهما، مما كشف عن اختلاف كبير بين نوعي الأعداد المتناهية واللامتناهية، وكل ما يتعلق بها من عمليات حسابية مختلفة.([1])

وعلى الرغم من أن نظرية المجموعات قدمت مع منتصف القرن 19م، فقد عرفت بفضلها تطورا هائلا في كل من نظرية الدوال والهندسة المعاصرة، إلا أن نجاحها لم يمنع من ظهور مجموعة مفارقات أو نقائص جديدة،([2]) وهذا ما أصبح يهدد يقينها ومصداقيتها، مما دفع الرياضيين إلى البحث للوصول إلى حلول لهذه النقائص، فظهور هذه المفارقات دفعت الرياضيين إلى قراءة جديدة للمجموعات من خلال النظرية الأكسيوماتيكية، وها بدأ بتحديد المقدمات (التعاريف) التي يجب الاعتماد عليها، وهكذا أصبحت نظرية المجموعات بالنسبة للباحثين الرياضيين تعني النظرية الأكسيوماتيكية للمجموعات مما يعني أن الاهتمام بهذه النظرية والتعمق فيها من قبل الرياضيين والمناطقة قد أدى إلى الكشف عن عدة نقائص.

المبحث الثالث: اللانهائية بعد كانتور

لقد تم اكتشاف أول تناقض في النظرية عام 1897، من قبل الإيطالي "بيورالي فورتي" يتعلق بالنظرية التاسعة والأربعون في الأعداد المرتبة اللامتناهية عند "كانتور" وتنص هذه المفارقة على أن الأعداد الترتيبية اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيبا تصاعديا بحيث أنه ما بين العددين منهما أيا كان يوجد دائما عدد أقل من الآخر، وأن أكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد، ولذا فإن

([1]) ثابت الفندي محمد، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 114.

([2]) عويدة صفوان، مرجع سابق، ص 219.

هذه المفارقة تثبت أنه كلما حددنا أكبر الأعداد الترتيبية، فإنه يمكننا إضافة العدد الواحد (1) فنحصل على عدد ترتيبي جديد يكون هو الأكبر.([1])

حيث يقول فورتي: إذا أخذنا هذا العدد الأخير طرفا وحيدا في المقارنة فلابد أن يكون وفقا للنظرية نفسها باعتباره عددا مرتبا لا متناهيا أقل من عدد آخر لا نعلمه، إذن فأكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليست أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية، وهذا تناقض هذه النظرية([2])

حيث تقول نظرية كانتور في العدد الاساسي المتناهي كل عدد منتهي باعتباره مجموعة او فئة لا يشتمل على ذاته كجزء منها كما يقول راسل: "..." لقد اكتشف بورالي فورتي التناقض المتصل بأكبر عدد ترتيبي قبل أن اكتشف تناقضي ...".([3])

فبورالي فورتي اكتشف وجود مفارقة في الأعداد المرتبة اللامتناهية عند كانتور وتنص هذه المفارقة على أن الأعداد الترتيبية اللامتناهية يمكن ان ترتب ترتيبا تصاعديا بحيث انه من بين كل عددين منهما ايا كان يوجد دائما عدد اقل من الاخر ان اكثر الاعداد الترتيبية اللامتناهية آخر سلسلة تلك أعداد، ولذا فإن هذه المفارقة تثبت أنه كلما حددنا أكبر الأعداد الترتيبية، فإنه يمكننا إضافة العدد (1) فنحصل على عدد ترتيبي جديد يكون هو الأكبر([4])ولهذا فأكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية ليس أكبر الأعداد الترتيبية المتناهية وهذا تناقض، وعليه فإن مفارقة بورالي فورتي لها علاقة بأكبر عدد ترتيبي متصاعد.

([1])ثابت الفندي محمد، فلسفة العلوم ومناهجها، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، (د.ط)، 1996، ص 116.

([2]) الصديقي عبد اللطيف يوسف، مصدر سابق، ص 76.

([3]) برتراند راسل، فلسفتي كيف تطورت، تر: عبد الرشيد الصادق، مكتبة الأنجلو مصرية، مصر، 1963، ص 92.

([4])ثابت الفندي محمد، فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 116.

ويمكن توضيح هذه المفارقة من خلال هذا المثال([1]) إذا افترضنا أنه لدينا مجموعة عناقيد من العنب موزعة كما يلي: عنقود فارغ، عنقود عنقود فيه حبة واحدة، عنقود فيه حبتان، العنقود فيه ثلاث حبات، ... وهكذا إلى العنقود الذي يضم ما لانهاية من الحبات، ولتكن هذه العناقيد مرتبة ترتيبا تصاعديا: الأول، الثاني، الثالث (...)، إن العنقود الفارغ يشكل الفئة الأولى ونرمز له بالعدد الترتيبي (1)، والعنقود الذي فيه حبة واحدة يشكل الفئة الثانية، ونرمز له بالعدد الترتيبي (2)، والعنقود الذي يضم حبتان يشكل الفئة الثالثة، ونقابله بالعدد الترتيبي (3) ... إلخ، وهكذا فالرقم الذي نرتب به كل فئة هو الرقم الذي يلي أعلى الأرقام الترتيبية الموجودة في الفئة، وعلى هذا الأساس يكون الرقم الترتيبي الذي نرتب به المجموعة الأخيرة التي تشمل على جميع الأعداد الترتيبية وهي اللانهائية، الأعلى من أكبر رقم فيها، إذن فلابد من وجود رقم ترتيبي لأعلى من جميع الأرقام، وهذا تناقض، وهنا تكمن المفارقة.

لم يستطع كانتور حل الغموض الموجود في نظريته وما زاد في أتعابه هو ظهور مفارقات في فلسفته الرياضية، ففي سنة 1895م وحسب شهادة برستين Felix Bernstein وهو تلميذ كانتور 1 كان كانتور الأول الذي أشار إلى المفارقة التي عرضت من طرف بورالي فورتي سنة 1897م، وهي أول مفارقة في نظرية المجموعات "إطارها إذن نظرية المجموعات وخصوصا الجزء الخاص بالأعداد الأصلية والترتيبية كما وضعه كانتور فهذه المفارقة تنص على مجموعة كل الأعداد الترتيبية الناتجة عن مبدأ التوالد ومبدأ التوقف، المرتبة تصاعديا تكون مجموعة جيدة الترتيب حيث نمطها هو عدد ترتيبي ∞، وعوامل نشأة هذه المفارقة تعريف كانتور للأعداد الترتيبية على أنها عبارة عن متتالية خطية أي من عددين لا متساويين يوجد دائما عدد أقل أو أكبر من الآخر بمعنى أنه إذا كان لدينا عددان a و b

([1])عابد الجابري محمد، مرجع سابق، ص 99.

وهما عددان متصاعدان ترتيبيان فإن $b=a$، $b\leq a$، $b\geq a$، أما هدف المفارقة أن نبين أنه إذا كانت a و b عددين [1]. $a>b$, $a<b$, $b\neq a$,

أما النقيضة الأخرى فقد اكتشفها كانتور سنة 1899، ولكن الإعلان عنها كان في سنة 1932م، وتتعلق بأكبر الأعداد الأصلية وفحوى هذه المتناقضة، أن نظرية المجموعات تنص على إمكانية توزيع عناصر مجموعة ما إلى مجموعات جزئية تكون أكثر عدد من عناصر تلك المجموعة 1.

وهذا المثال يوضح هذا القول: إذا كانت لدينا المجموعة أ حيث: أ={3،2،1،0} فإن مجموعة أجزاء أ:

أ=[{0}، {1}،{2}، {3}،{1،0}، {2،0}،{3،0}، {2،1}،{3،1}،{3،2}، {2،1،0}،{3،1،0}، {3،2،1}،{3،2،0}، {3،2،1،0}]

نلاحظ هنا أن عدد المجموعات الجزئية لـــ أ=16، بينما عدد عناصر المجموعة أ=4 وهناك نجد راسل "أفرض أن مضيفك قد خيرك في نهاية الطعام بين ثلاث أنواع من الحلوى، ودعاك لتناول نوع أو نوعين أو لتناول الثلاثة جميعها حسب مشيئتكم، فكم طريقة من طرق التصرف أمامك؟ أنت قد ترفض الأنواع جميعها، هذا اختبار واحد وقد تأخذ منها نوعا واحد وهذا ممكن على أنحاء ثلاثة ومن ثمة يتيح لك هذا ثلاثة اختيارات أيضا وقد تختار اثنين من بينها، وهذا أيضا ممكن على أنحاء ثلاث أولئك نختار الثلاثة جميعها، وهذا يتيح لك إمكانية واحدة نهائية، وبذلك مجموع الاختبارات الممكنة ثمانية اختيارات".[2]

ولهذا فإن تحليل راسل للمفارقة يطابق والمثال العددي الذي تم تقديمه وهو ما يؤكد ان الجزء قد يكون أكبر من الكل وهذا تناقض.

---

[1] ثابت الفندي محمد، فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 120.

[2] برتراند راسل، فلسفتي كيف تطورت، مرجع سابق، ص 96.

كما نجد مفارقة راسل ويوضح راسل مفارقته بالمثال الآتي([1]) هناك حلاق في القرية يقوم بحلق ذقون جميع الأفراد الذين لا يحلقون ذقونهم والحلاق نفسه هو أحد أفراد القرية فهل يستطيع أن يحلق ذقنه أم لا؟ فإذا تم ذلك فقد أخل بالشرط الذي ينص على أنه يحلق الذين لا يحلقون وإذا لم يحلق ذقنه يخل أيضا لأنه لابد أن يحلق ذقون جميع الذين لا يحلقون فهنا تبرز المشكلة.

باختصار توصل رسل إلى مفارقته بالصياغة المنطقية وهي هل هناك إمكان وجود مجموعة تنتمي إلى نفسها وفي الوقت نفسه لا تنتمي إليها؟ هناك نوعان من اللانهائية، الأول هو لانهائية الأعداد الطبيعية ويطلق على هذا النوع N المجموعات والتي يكون عددها الأصلاني (القياسي) هو N_0 وتكون المجموعة في هذه الحالة قابلة للعد* أما النوع الآخر فهو الذي يمكن تمثيله بجزء من الخط المستقيم أو أي خط آخر والعدد الأصلاني في هذه الحالة هو C وعادة يرمز هذا للاتصال أو الاستمرارية، فأي خط مستقيم يكون عدده الأصلاني هو C والأمر ينطبق أيضا على شكل آخر كالمستطيل في المستوى أو المكعب في الفراغ وحتى الفراغات اللامحدودة ذات الإحداثيات النونية.

فمقارنة راسل تتعلق بمجموعة جميع المجموعات فقال راسل اهتديت إلى هذا التناقض عندما كنت أتأمل برهان "كانتور" والذي يثبت أنه ليس ثمة عدد أصلي أكبر من سائر الأعداد.([2])

بمعنى أن كل عدد منته باعتباره مجموعة لا يستمل على ذاته كجزء منها فهذا يعني أن راسل يرى أن عدد كل الأعداد المتناهية كلها هو لا يستمل ذاته ويستمل ذاته أيضا كجزء من ذاته وهذا تناقض.

مثال: فهرس جميع الفهارس هل يكون عضوا أو لا يكون في ذاته؟

([1]) الصديقي عبد اللطيف يوسف، مسألة الانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 74.

* المجموعة القابلة للعد هي تلك التي تناظر تطابق واحد إلى واحد مجموعة الأعداد الطبيعية، أنظر الصديقي عبد اللطيف، مسألة اللانهائية في الرياضيات، ص 75.

([2]) ثابت الفندي محمد، فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 116.

إذا كان فهرس جميع الفهارس يستمل ذاته كعضو فهو حينئذ سيكون فهرسان ..... جميع الفهارس، ومن ثم لا يكون فهرسا لجميع الفهارس.([1])

اما إذا كان الفهرس لا يستمل ذاته؟ فهل هذا ممكن، وهنا نجد أنفسنا أمام "مجموعة جميع المجموعات" هل تستمل على ذاهما أم لا؟

ولهذا فالرياضي يجد نفسه أمام إشكال صعب، إذا انطلق من فرضية أن "مجموعة جميع المجموعات التي لا تحتوي على ذاهما وهي مجموعة تشمل على نفسها كانت النتيجة هي أهما لا تستمل على نفس، وإذا انطلقنا من الفرضية المضادة وقلنا أهما مجموعة لا تستمل على ذاهما كانت النتيجة أهما تستمل على ذاهما"،[2] مما يعني ان إثبات القضية ونقيضها يؤديان إلى تناقض، ومما سبق، فإن مفارقة راسل أساسها "مجموعة جميع المجموعات" وحلها كان له دور مهم في بناء النظرية الخاصة بالمجموعات وسياقها الأكسيوماتيكي.

إن العدد الرئيسي الذي نشأ من تعداد المجموعات المتناهية قد وسع ليشمل المجموعات غير المتناهية وأدى إلى التعداد المتجاوز النهاية وإلى الحث الاستقراء المتجاوز النهاية، أما العدد الترتيبي من ذات المنشأ فقد أدى إلى مفاهيم المجموعة المرتبة والمجموعة المرتبة جدا إلى بديهية زيرميلو Zormelo[3] 1704 التي بموجبها يمكن في كل مجموعة فرعية من مجموعة معينة تحديد عنصر مميز من هذه البديهية واستعمال أرقام فوق التناهي أديا إلى نتائج غريبة أحيانا وإلى متناقضات فرقت الرياضيين إلى فريقين أحدهما يقبل ببديهية زيرميلو في حين يرفضها الآخر بسبب الشك الذي يتضمنه تعيين العنصر المميز الموافق لكل مجموعة، وقد أتاحت بديهية زيرميلو العديد من المجالات فقد هاجمها بوانكاريه ورفضها بوريل Borel وليبنغ ولوزين وآخرون، وقبلت من جانب هيلبرت وهادامارد وآخرين، وقد نتج عن

(1) ثابت الفندي محمد، فلسفة العلوم ومناهجها، مرجع سابق، ص 116.

(2) عابد الجابري محمد، مرجع سابق، ص 102.

(3) رنيه تاتون، تاريخ العلوم العام، المجلد الرابع، ص 28.

هذا الانقسام تحليل أفاد الأسس المنطقية للتعاريف والتحاليل العقلية وتمت متابعة البحوث الأولى التي قام بها زيميلو من قبل الكثيرين منهم فرانكل Frankel وبرنايز Bernays وفون نيومان وقد وضعوا لنظرية المجموعات بديهيات ما تزال معتمدة في أيامنا.

فموجب هذه البديهية متخذا في ذلك مجموعة من البديهيات شبيهة بخصائص النقط والخطوط المستقيمة التي تحدث عنها إقليدس اعتبر زيرميلو "المجموعة" شيئا غير محدد وغير معرف ولكنه يخضع لبديهيات معطاة.([1])

تزعم زيرميلو حركة لتقويم ما أعوج من نظرية المجاميع، وذلك بتأسيسها على مسلمات، وقد حاول هذا التيار تحاشي النقائض وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات ننتجها دون تناقض بين قضاياها، فاستخراج زيرميلو مثلا المسلمات المتضمنة لها عند كانتور وأضاف إليها مسلمتين، مسلمة الانتقاء ومسلمة الرد.([2])

تنص مثلا مسلمة الرد: أية دالة من رتبة ونمط ما، تناظرها دالة أخرى من الرتبة الأولى ونفس النمط حيث تكافؤها شكليا يقال للدالتين بأنهما متكافئين شكليا عندما تكون كلتاهما صحيحتين أو كلتاهما غير صحيحتين.

أما بديهية الاختيار([3]) Axiomof choise وتنص على إذا كانت ∞ هي مجموعة مكونة من مجموعات غير خالية ... A,B,C فإنه توجد مجموعة فلتكن Z تحتوي على عنصر واحد على الأقل من تلك المجموعات ورغم الدور الأساسي الذي تلعبه هذه البديهية في نظرية المجموعات فإن بعض الرياضيين اتخذوا موقفا سلبيا تجاهها بل أصر البعض على نبذها بقدر المستطاع ويرجع السبب في ذلك إلى عدم التمكن من إثبات صحتها أو خطئها.

([1])الصديقي عبد اللطيف يوسف، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مرجع سابق، ص 76.
([2])الفندي ثابت محمد، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 122.
([3])الصديقي عبد اللطيف يوسف، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 79.

ففي عام 1938م عالج كورت جودل K,Godel المعروف "بنظرية اللاكتمال" حيث قام بتمحيص هذه البديهية تمحيصا دقيقا ونبين له بأن الخلل المزعوم ليس في بديهية الاختيار نفسها بل في جميع البديهيات الأخرى فهي بالتالي لا تختلف جذريا عن البديهيات المتعارف عليها في نظرية المجموعات منوها إلى أن بديهية الاختيار ليست بدرجة من الخطورة إذا ما قورنت بالبديهيات الأخرى ما دام التناقض موجودا في نظرية المجموعات المقياسية، فالأمر كذلك بالنسبة لنظرية المقيدة فالتناقض كامن فيها.

تنص فرضية الاتصال الكانتورية على أنه ليس ثمة وجود لعدد أصلاني لانهائي أكبر من N أو أصغر من c وبالرموز، فإذا كان ∞ عددا أصلانيا فإن $N_1 \geq \infty$ أو $N_0 \leq \infty$.

لقد برهن جودل أيضا أنه يمكن اتخاذ فرضية الاتصال كبديهية إضافية لنظرية المجموعات المقيدة والوصول إلى مثل هذا فبالاضافة الى فرضية الاتصال والمجموعة المقيدة يؤديان الى تناقض بمعنى اخر ان التناقض كامن في نظريات المجموعات المقيدة لاعتراف يعني إيجاد نصف حل لمعضلة كانتور أي ليس برهانا على الفرضية، ولكنه برهان على عدم دحضها ومن وجهة نظر رياضيي القرن 20 كل من فرضية الاتصال والمجموعة المقيدة قابلا للتطبيق على العالم الفيزيائي وكلتاهما متناسقان.

فالحقيقة التي توصل إليها جودل هي أن فرضية الاتصال لا يمكن دحضها وبالمثل لا يمكن إثباتها، رغم أن طموح جودل([1]) هو صياغة نموذج لنظرية المجموعات المقيدة التي يمكن من خلاله البرهنة أن بديهة الاختبار وفرضية الاتصال ليستا إلا وجهين لعملة واحدة.

وفي عام 1963م، قدم بول كوهن اقتراح حول مسألة هل الجمل الرياضية صادقة او غير صادقة؟([2]) فقدم اقتراح أن هناك جمل رياضية لا يمكن أن تكون خاطئة ولذلك لا يمكن أن تكون

([1])ثابت الفندي محمد، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 125.

([2])الصديقي عبد اللطيف يوسف، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 81.

صادقة نحن في موقف لا يمكن البت في أمرها تبقى غير قابلة لاتخاذ القرار حولها والصعوبة كما تبدو في طبيعة المادة الرياضية وعدم التصاقها المباشر بالواقع المحسوس، فهناك بعض المفاهيم المجردة مثل: النقطة، الخط، المستقيم، المستوي ... ليس لها نظير في الواقع وفكرة العدد أيضا إحدى تلك المفاهيم.

فمثلا التجريد الأحادي يقودنا إلى العدد "واحد" والتجريد الثنائي يقودنا إلى العدد "اثنين" وكذلك بالنسبة للأعداد الأخرى، ففي العالم المحسوس ليس هناك عدد إثنان أو ثلاثة ولكن جذور هذه الأعداد موجودة في العالم الواقعي.

أما الرياضي السويسري لاهوبتل L'hopital الذي كتب مقررا دراسيا في حساب التفاضل والتكامل كان هو الآخر متحمسا ومعترفا بوجود هذه المتناهيات في الصفر، إلا أن العديد من الرياضيين المرموقين استخدموها في دراساتهم وحاولوا جل اهتماماتهم لتشييد البناء المنطقي للنهايات في الصفر، ونذكر منهم على سبيل المثال لاكرانج* دالمبرت بولزانو وعلى رأسهم كوشي.

لقد كان تصور كوشي حول المتناهيات في الصغر باعتبارها كميات متغيرة تقترب إلى الصفر، هذا التصور قاده إلى مفهوم "النهاية" Limit وبصورة أوضح عندما يكون الفرق بين الكميتين a و b متناهيا في الصغر وبالرموز a–b فإذا كانت متناهية في الصفر وموجبة فإن يكون أكبر من أي عدد صحيح ويكون....... بين أي عددين صحيحين لانهائيين لا معياريين هما N و N+1 حيث N=.....[1]

كانت إذن هذه أهم المفارقات التي ظهرت في بداية القرن 20، والتي أثارت وأكدت تساؤلات الرياضيين حول صلاحية قضاياهم، ولحلها اضطروا إلى اختبار طريق مخالف ألا وهو الأكسمة، ويبقى أن نقر أن طريق المفارقات هو السير الصحيح للوصول إلى الجديد.

---

* الألرانج: رئيس قسم الرياضيات.

([1]) الصديقي عبد اللطيف يوسف، مسألة اللانهائية في الرياضيات، مصدر سابق، ص 85.

مع العلم أن هذه النقائض كشفت عن الحاجة إلى استخدام المجموعات بمساعدة قواعد محددة بسبب النظرة الحدسية التي طغت على مفهومها في القرن 19م، كما صاغها كانتور ولذلك كانت أولى المحاولات لوضع المجموعات في قالب رياضي يقو على وضع مسلمات مع "زورميلو"([1])سنة 1908م ثم تليها محاولة "فرانكل"([2]) وجاءت بعد ذلك محاولة "نيومان"([3])سنة 1925م ثم جودل وبيرني سنة 1937م وبهذا يتضح مما سبق أن نظرية المجموعات قد دعمت الاتحاد الذي اهتم بتحسيب الرياضيات وترسيخ ألفة الرياضيين بالأعداد والابتعاد عن حدس الاتصال الهندسي، ورغم ظهور نقائض عديدة في هذه النظرية فإن الاهتمام بها ومعالجتها، قد أدى إلى الاستعانة بالمنطق كأساس لليقين الرياضي وبالتالي تأسيس الرياضيات على أسس منطقية.

في نهاية القرن 19م، انتهت الرياضيات إلى الوقوف عند العدد كأساس ليقينها بدل حدس الاتصال، مع حركة التحسيب التي اعتبرت العدد كائنا بديهيا لا يحتاج إلى تحليل لما هو أبعد منه أي أنها أعطت العدد الصحيح قيمة مطلقة ووجودا أوليا لا يحتاج إلى تعريف كما ادعى كرونكز([4])بأن العدد الصحيح من عند الله.([5])

لكن هذه البحوث اللاحقة سرعان ما تخلت عن هذا الطرح الذي تعتبر العدد موجودا أوليا، وأخذت تبحث عن حدود وأفكار أولية، فكانت البداية نحو التأسيس المنطقي والرياضي لفكرة العدد من ثم الرياضيات ككل.

([1])أرنست زرميلو: رياضي ألماني (1953-1871)، عرف بدوره في تطوير نظرية المجموعات.

([2])فرانكل: رياضي ألماني (1965-1891)، قدم مساهمة أساسية في وضع نظرية المجموعات في قالب موضوعاتي.

([3]) نيومان: رياضي أمريكي من أصل مجري (1957-1903).

([4])كرونيكز: رياضي ومنطقي ألماني صاحب مقولة "الله هو خالق الأعداد، وما عداها من صنع الإنسان".

([5])صلاح أحمد وآخرون، مرجع سابق، ص 119.

الفصل الثالث

الحلول المقترحة لأزمة الاسس

المبحث الاول: النزعة الحدسانية

المبحث الثاني : النزعة المنطقانية

المبحث الثالث: النزعة الاكسيوماتيكية

مقدمة الفصل الثالث

عندما ظهرت نظرية المجموعات التي من الممكن تاسيس الرياضيات عليها ونجحت الرياضيات فعلا في استيعاب مختلف فروع العلم الرياضي وجمع شتاته وتحقيق الوحدة والانسجام بين كافة اجزاءه، ولكن بشكل عام تصنف وجهات نظر حول مشكلة الاسس هذه الى ثلاث نزاعات رئيسية والمتمثلة في النزعة المنطقية، النزعة الحدسانية، النزعة الاكسيوماتيكة، ومنه نطرح الاشكال التالي:

كيف كانت نظرة كل نزعة لحلول هذه الازمة؟

المبحث الأول: النزعة الحدسانية

إن أهم نقطة جوهرية باتجاه الحدسي هي أن المنطق لا يكفي وحده لعرض المسائل والقضايا الرياضية هذا الاتجاه يتزعمه "بروير" حيث أنه رفض اعتبار القضية صادقة إلا إذا كانت هناك طريقة لتقدير ذلك والعكس صحيح وبعبارة أخرى لا يمكننا أن نعتبر أن القضية صادقة أم كاذبة، إلا إذا كانت هناك طريقة أو منهج معين ليبين أنها كذلك وبناءا على هذا رفض الحدسيون قانون ثالث المرفوع فهذا أساس نظريتهم ليرتبطوا بهذا المذهب المسمى "بالنهائية" الذي شك في القضايا المشتملة على مجموعات اللانهائية على أساس أنها لا تقبل التحقق.([1])

كما أن هناك حدسيون كثيرون من بينهم "بوانكاري" يرون ان الرياضيات لا تشتق من المنطق كما ذهب راسل تحتاج إلى مادة في مقابل الصورة أي إلى تجربة من نوع خاص هي الحدس التجريبي، أما المنطق والأكسوماتيك فهما وسيلة لشرح واستعراض الكشوف الهندسية التي تقوم على الحدس دوماً بالإضافة أن ديكارت أيضا كان يقوم منهجه على أساس الحدوس والاستنتاج، والحدس عنده رؤية عقلية مباشرة لحقائق بسيطة ومن هذه الحقائق البسيطة تنتج حقائق أخرى فأساس المعرفة عنده هو الحدس(.[2])

فقد قدم بوانكاري العديد من الآراء حول تدخلاته الفلسفية ومن هنا اقتراح يؤكد مدى ابتعاد مسلمات الهندسة عن الحدروس والأشكال يقول بوانكاري "إن أكسيوماتيك بالمعنى الحديث يصل إلى درجة من التجربة والعلوم، والبعد عن الأشكال الحدسية، بحيث أنه يأخذ معنى إقليديا أو ريمانيا أو حتى هندسيا أو عدديا أو غير ذلك"،([3]) بحيث أعطى بونكاري أيضا نظرية الأنماط المنطقية عنده تطبيقات نستطيع أن نقول أنها تصنيفات تهكمية، كما سماه بنظرية التعرجات فلقد كان المألوف حتى

([1]) محمد مهران، فلسفة راسل، مرجع سبق ذكره، ص 203.

([2]) مرجع نفسه، ص ص 111، 112.

([3]) محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص ص 74، 75.

بداية القرن الماضي أن كل الدالات متصلة، الدالة من وضع "ليبنتز" وقصد بها المنحنى الهندسي الذي يعبر عن علاقات متصلة ومتتابعة بين كمين متصلين هما الإحداثيات، وبدأ التحليل مرتبط بالهندسة الاتصال المكاني.([1])

إن المدرسة الحدسية تحاول أن تجعل مجال الرياضيات على ما يتصوره الخيال وهي تقف عند ما تعتبره نجاحاً للصورية الحديثة وقد أدى هذا عمليا إلى حذف بديهيات معينة والاقتصار على تلك البديهيات التي تظل في نظر الحدسيين شرعيا، وعلى نحو واضح يجب اعتبار الحدسية بمثابة صورة للواقعية الرياضية لكنها واقعية من نوع خاص جدا يستطيع المرء أن يصفها بالقول: أنه يوجد هناك واقع رياضي مقبول من خلال الحدس ولكنه غير شامل (أي يعطي مرة واحدة نهائيا على نحو حاسم ويوجد وحده مستقلا بذاته).([2])

وفي مقابل ذلك فإن الواقع هو ما ينسبه الرياضيون تصاعديا ولنفترض سبيلا آخر فنقول: إن (الواقع الابتدائي هو الكون الذي وجد بسببه البشر ومن بينهم الرياضيون ومهمتهم أن يزيدوا المحتوى الذكائي للكون.([3])

ومن خلال دراستنا نستنتج أن هنري بوانكاري يؤكد بأن الهندسة أصبحت مجرد شيء صوري عند الأكسيوماتكيين المحدثين أي بعيدة كل البعد عن الحدس وبهذا يمكن الانتقال إلى الشروط المنطقية والصورية من أجل إقامة نسق أكسيوماتيكي وهذا الذي وضحه بوانكاري بطريقة خاصة التي تختلف عما سبق بيانه ولكنه تبين بكل تأكيد كيف أن الأكسيوماتكيين المحدثين أفقدوا الهندسات معانيها الهندسية المألوفة وذلك باقتراحه في كتابه العلم والفرض تأليف قاموس هندسي، يعطي كل المعاني

([1]) الأخضر الشريط، المنطق الرياضي، خلاصة أثر المنطق المعاصر، الجزائر، ط1، 2009، ص ص 52، 53.
([2]) رولان أمنيس، فلسفة الكوانتم، تر: أحمد فؤاد باشا، المجلس الوطني للثقافة والفنون، الكويت، 1990، ص 171.
([3]) مصدر نفسه، ص 171.

الهندسية الممكنة لكل لفظ أوحد من الحدود الأولية، ومن أمثلة هذا القاموس عند بوانكاري "المكان جزء من المكان يوجد فوق السطح الأساسي".([1])

أما في طبيعة الاستدلال الرياضي أنه لا ريب في إمكان العودة إلى البديهيات التي عنها صدرت كل الاستدلالات فإذا رأيت أنه لا يمكن ردها إلى مبدأ عدم التناقض وإذا لم نشأ ذلك اعتبارها وقائع تجريبية لا تعلق لها بالضرورة الرياضية قلنا زيادة على ذلك إمكانية تصنيفها ضمن الأحكام التأليفية، غير أن ذلك لا يعمل بالأشكال بل هو يكرسها وحتى ولو لم يعد لحقيقة الأحكام التأليفية القبلية أي سر بالنسبة إلينا.([2])

فيتذكر بونكاري ضرورة العودة إلى البديهيات فهي لرأيه الأحكام التأليفية القبلية فبرأينا يبقى الاستدلال الرياضي عاجزة والتي تعتبر جزءا من البديهيات فإذا ما قارنا الاستدلال الرياضي بالقياس الرياضي فإنه يتميز عنه ولا يمكن لنا أن نقلل من شأنه فإنه يتميز بالقوى الإبداعية إن جميع الأنماط الاستدلالية تلك التي تحتفظ بطابعها التحليلي سواء قبلت الرد إلى القياس بالمعنى أولا هي عاجزة.([3])

يرى هنري بوانكاري أن للرياضيات خاصية الحدس، فيجب ان نبرهن على هذا الاستدلال الرياضي وهو نوع من الاستقراء.([4])

حيث أطلق بوانكاري على هذا الاستقراء "الاستدلال التكراري" فكانوا يرون أن الرياضيات لا تشتق من المنطق كما تصورها راسل بل تحتاج إلى مادة مقابل الصورة أي تجربة من النوع الحدسي وهي رؤية مباشرة، بمعنى أنه يضطر الرياضي عند الكشف عن اللمحة الحدسية إلى استعمال المنطق في البرهنة، فالحدس هنا يعتمد على معارف رياضية سابقة يشترك فيها الذاكرة والخيال.

([1]) محمد ثابت الفندي، مرجع سابق، ص ص 74، 75.

([2]) هنري بونكاري، العلم الفرضية، تر: حمادي بن جاد الله، مركز الدراسات الوحدة العربية، بيروت، ط1، 2002، ص 79.

([3]) مصدر نفسه، ص 79.

([4]) محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 68.

فالحدس لا يبدأ من معطيات عينية وحسب، بل يكتسب الرياضي فاعلية في ظروف أوسع، فعلم الهندسة يصبح مألوف بالكيانات التي يدرسها، ويكون فكرة تعادل في وضوحها الفكرة عن الأشياء الحقيقية التي يجعل بها العالم الخارجي.([1])

إن أساس مشكلة النقائض في الرياضيات هو القول بوجود مجموعات لا متناهية ولذلك وجدت هذه النقائض فتجنبها يستلزم إعادة فكرة اللانهائية.([2])

أما الحدسيون الجدد، فأخذوا فكرة التناقص منطلق معارض للنزعة المنطقية فالرياضي الذي يعتمد على الحدس في أبحاثه الرياضية لابد أن يشعر بما يشبه الدوران او الغثيان عندما يطلب منه إدراك اللانهائية، وكأنها موضوع قديم تم بناؤه في حين أن اللانهائية لا تقيد التعريف.

ومن هنا يخرج الحدسيون من مشكلة النقائض، ويرون أن الرياضيات حدسية وبناءات ذهنية، والنظرية الرياضية تغير عن حادثة أو ظاهرة محض تجربة.

المذهب الحدسي الجديد:

الحدسانية: نزعة تعود إلى كانط لا إلى ديكارت صاحب الوضوح والبداهة وبعد كانط نجد كرونوكر الذي حمل لواء هذه النزعة بمقولته "إن الله خلق الأعداد وما عداها فهي من صنع البشر" بوانكاري الذيجعل الاستقرار الناقص أساسا لتطور الرياضيات،([3]) وكذا إسهامات "لوبينغ"، ثم تطورت على يد "بروور" الذي يعتبر مؤسس الحركة الحدسانية التي اهتمت منذ بداية القرن 20 بوضع حلول لمسألة الأسس التي طرحت على الفلاسفة والرياضيين نتيجة اكتشاف مفارقات نظرية المجموعات لقد أراد "بروور" أن يؤسس الرياضيات قوية من خلال أن الرياضيات تمثل الجزء الدقيق للفكر الإنساني،

([1]) مصدر نفسه، ص 102.

([2]) المصدر نفسه، هنري بوانكاري، ص 77.

([3])هنري بوانكاري، العلم والفرضية، تر: حمادي جاب الله، ص 128.

النشاط الفكري للإنسان هو عقلي خالص، فالرياضيات هي اختراع حر مستقل عن التجربة، فإما أن الرياضيات تمثل الجزء الدقيق للفكر فهذا يعني عدم ردها إلى الفلسفة أو المنطق وهذا ما يؤكده "هايتنغ" بقوله: "ليس المنطق هو الأساس الذي استندت إليها الرياضيات، وكيف يجوز ذلك، وهو بدوره يحتاج إلى أساس فمبادئه أكثر تعقيدا وأقل مباشرة ووضوح من مبادئ الرياضيات نفسها، إن المنطق هو جزء من الرياضيات ولا يمكن النظر إليه على أنه أساس لها فالرياضيات إذن هي نشاط عقلي خالص، مرتبط بالحدس، نشاط مستقل عن التجربة وهذا يعني أن المواضيع الرياضية غير مستقلة عن الفكر".([1])

فمن خلال دراستنا نستنتج أن أصحاب هذه الترعة بروفر وهايتنج ينهيان إلى القول بأن موضوعات الرياضيات تتميز بنوع من الاستقلال الذاتي عن المنطق وأن حقيقة عبارة الرياضية لا تتوقف أساسا على مدى تماسكها مع عبارات أخرى هو مجرد وسيلة لنقل حقيقة ما كامنة فيها فصدق العبارة الرياضية تابع من ذاتها وليس من خلال التماسك المنطقي ويقدم لنا بروفر بعض المراحل التي مرت بها الرياضيات وتوجهها الصوري وهي كالآتي.

برو‌ور مؤسس للمذهب الحدسي الجديد:

- إنشاء الأنساق الرياضية الحدسية
- وضع لغة الرياضية بمعنى استخدام التعبير اللفظي الخاص بالفكر الرياضي
- التحليل الرياضي لهذه اللغة الذي يؤدي إلى إقامة بناء رياضي يستند إلى مبادئ المنطق
- التحليل الرياضي للغة المنطق

([1]) يوخينسكي، تاريخ الفلسفة المعاصرة في أروبا، تر: محمد عبد الكريم الوافي، مكتبة الفرجاني، ليبيا، ط2، د.ت، ص 107.

ويتفق الحدسيون الجدد كلهم في مسألة أساسية هي رفضهم لصلاحية مبدأ الثالث المرفوع صلاحية مطلقة، ومعلوم لأن نقائض نظرية المجموعات ترجع كلها إلى مبدأ الثالث المرفوع الذي تقرر أن القضية إما صادقة وإما كاذبة فلا مكان لقيمة ثالثة.

حيث يقول بروور: "أن تطبيق مبدأ الثالث المرفوع لا يمكن أن يتم دون قيد ولا شرط إلا في حضيرة ميدان رياضي نهائي ومحدد بوضوح".([1])

بمعنى أن أنصار الحدسانية الجديدة قد انتقدوا مبادئ المنطق خاصة مبدأ الثالث المرفوع ففي نظرهم لا نستطيع أن نستنتج من خطأ قضية قضية ثالثة تجمع بين نقيضين إن أصحاب النزعة الحدسية يرفضون إقامة الرياضيات على المنطق وان المناطق بالغوا عندما جعلوا المنطق اساس قيام الرياضيات أثناء نشأتها وتركيبها.

وبالتالي فإن المبدأ الذي تنطلق منه النزعة الحدسية الجديدة، والذي يسميه لوتزن بديهية النزعة الحدسية([2])هو التالي، إن جميع أنواع اللامتناهي تخلت عن قضية مبدأ الثالث المرفوع، فهو لا يصلح فيها، ولكنه يحتفظ بصلاحيته بالنسبة إلى المقادير النهائية، نعم قد تكون هناك أنواع من اللامتناهي لا يؤدي فيها مبدأ الثالث المرفوع أي تناقض، ولكن مع ذلك فإذا هذا المبدأ صالح للتطبيق فيها ما دمنا لم نستفد ولا يمكن ان نستغني جميع الإمكانيات التي يمنحها اللامتناهي.

كما أن أنصار المذهب الحدسي الجديد قطعوا أوصاله بعد تلك الوحدة التي أقامها المذهب الحدساني وأخرجوا الكثير من أجزائه الهامة باعتبار أنها ليست من الرياضة في شيء ولا شيء عن الحدس ومثال ذلك الأعداد الدائرة والأعداد اللامتناهية وبعض الدوال التحليلية في نظرية المجموعات عند كانتور التي هي أعمق اكتشافات الرياضة في عصورها الأخيرة لما جاءت به من حلول عجيبة، في عمومها

([1]) محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 115.

([2])محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 116.

لمشاكل اللامتناهي([1]) التي اصطدم بها الفكر البشري منذ فجره، ومن جهة أخرى اضطر أنصار هذا المذهب الحدسي الجديد إلى أن يلجأ إلى المنطق الصوري الجديد في كل أبحاثهم بحيث يبدو نقدهم للصلة بين الرياضة والمنطق في مأزق لا مخرج منه لأنهم يرفضون المنطق كأساس من جهة ثم هم يلجؤون إليه من جهة أخرى لإقامة نظريتهم.

يرى بروور حدس ثنائي الوحدة فالحدسية الجديدة ظاهرة، في التفكير الرياضي أي تجزئة اللحظات إلى أجزاء تختلف عن بعضها من حيث الكيف ويجمعها الزمان في وحدة مع بقاء انفصالها.

فهذا النوع من الحدس يتم إدراك المتصل والمنفصل فبواسطته تنشأ الأعداد الترتيبية النهائية فعناصر ثنائية الوحدة يمكن أن ننظر لها كثنائية وحدة جديدة، وهذه العملية يمكن تكرارها إلى ما لانهاية.([2])

إذ لم تكن المبادئ الرياضية واضحة تمام الوضوح في أذهان الرياضيين وخاصة الحدسيين، الذين اتخذوا المنهج الذهني، لقد اعتبروها بمثابة صور فكرية لوقائع تجريبية فبقيت ذات صلة بالحوادث التجريبية، ولم يكن يشك احد صلة الرياضيات بالتجزئة ولكن الشيء المؤكد هو انطباق الرياضيات على الحوادث التجريبية ساعدت، في تقدم العلوم الأخرى، وهذا الشيء الوحيد الواضح، في أذهان الرياضيين فكانوا يخطون خطوات في هذا البرهان دون أن يلتفتوا إلى المبادئ التي يرتكزون عليها البحث صدقها ونوعية هذا الصدق،([3]) تغيرت هذه النظرة منذ بداية النصف الثاني من القرن 19، وذلك عندما ظهرت مفاهيم وكائنات رياضية لا تتفق مع الواقع التجريبي ولا الحدس الحسي كالأعداد التخيلية والدوال المنفصلة.

([1]) فلسفة الرياضة، محمد ثابت الفندي، مرجع سابق، ص 162.

([2]) محمد عابد الجابري، نفس المرجع، ص 70.

([3]) محمد ثابت الفندي، المرجع السابق، ص 158.

المبحث الثاني: النزعة المنطقانية

إن الرياضيات البحتة هي اختراع حديث، فإذا كان القرن 19 قد تباهى باختراع البخار والطاقة، فقد كان يحق له أن يتباهى أكثر باختراع الرياضيات البحتة، إن هذا العلم كغيره من العلوم قد عمد قبل أن يولد على حد تعبير راسل ولعل ما يقصده راسل الرياضيات البحتة هي فئة جميع القضايا ذات الشكل ق ل حيث تكون ق و ل قضايا تحتوي على متغير واحد أو أكثر عما تكون المتغيرات نفسها في القضيتين ولا تحتوي ق و ل أي الثوابت ماعدا الثوابت المنطقية والثوابت المنطقية كلها أفكار يمكن تعريفها بواسطة الحدود الآتية الإلزام طلاقة الحد في فئة هو عضو فيها.([1])

بمعنى إدماج المنطق بالرياضيات على وجه أصبح معه في الإمكان اشتقاق الرياضيات البحتة بأكملها بمقدمات منطقية فتصبح بذلك جزءا من المنطق لا يمكن فصلهما عن بعض، فقد قام راسل بإرجاع الرياضيات إلى المنطق وإيجاد صلة وثيقة بين مفاهيم الرياضيات ومفاهيم المنطق، ومن خلال هذا

([1]) ياسين خليل، مقدمة في الفلسفة المعاصرة، دراسة تحليلية ونقدية لإتجاهات العلمية في فلسفة القرن 20، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2012.

يستحيل تماما وضع خط فاصل بينهما، إنهما شيء واحد المنطق شباب الرياضيات والرياضيات رجولة المنطق.([1])

فجميع القضايا الرياضيات البحتة تنفرد للبحث وتشمله على تصورات منطقية أساسية وأن جميع قضاياها يمكن استخلاصها مبادئ منطقية أساسية.

إن الرياضيات عند راسل هي ذلك الموضوع الذي لا نعرف فيه ما نتحدث عنه ولا ما إذا كان ما نقوله له صادقا او كاذبا الرياضي لا يشغل نفسه بما إذا كانت نظرية معينة متحققة عن طريق التجربة أو غير متحققة بها فنحن في الرياضيات البحتة لا نتحدث على أشياء جزئية نقول أننا نعرفها كجزئيات، ولا ندعي أن ما نقوله يصدق بالفعل على العالم الواقعي فتلك مهمة، الرياضيات التطبيقية وهذه العمومية تمكننا من معرفة خاصية من خصائص القضية المنطقية وبذلك تكون طبيعة القضايا في العلمين واحدة، وهذا ما يؤكد إمكانية أن تكون الرياضيات مشتقة من المنطق.([2])

وبينما يقدم راسل تعريفه للرياضيات البحتة نستنتج أنه يرجع الثوابت إلى منطقية فقط وهذا يدل على أسس الرياضيات منطق فمن الصعب التمييز بين الحدود التي تفصل الرياضيات عن المنطق وحسب راسل شيء واحد، فالمقدمة الرياضية تتألف من ثوابت رياضية ومتغيرات وان هذه الثوابت تعود بالتالي الى ثوابت منطقية وبذلك تصبح مقدمة الرياضية محتوية على ثوابت منطقية فقط وتتحول الرياضيات إلى المنطق.([3])

تتميز القضايا الرياضية عند راسل بخاصيتين أساسيتين الأولى هي أنها جميع قضاياها تنحل إلى علاقات اللزوم المنطقي (إذا كان كذا ... نتج كذا) والثانية هي اشتمالها على المتغيرات وثوابت منطقية،

([1])محمد مهران، فلسفة برتراند راسل، دار المعارف، مصر، 2003، مرجع سابق، ص 195.

([2]) برتراند راسل، أصول الرياضيات، تر: محمد مرسي أحمد، وأحمد فؤاد الأهواني، جامعة الدول العربية، دار المعارف، مصر، 1958، ص 22.

([3])أحمد ياسين خليل، مرجع نفسه، ص 66.

فالصلة بين الرياضيات والمنطق وثيقة جدا كون أن جميع الثوابت الرياضية ثوابت منطقية بها تتعلق جميع المقدمات الرياضية والتمييز بين هذين الآخرين أمرا اختياري وإذا شئنا التميز بينها كذلك يكون على النحو التالي، يتألف المنطق من المقدمات الرياضيات بالإضافة إلى جميع القضايا الأخرى التي تعني فقد بالثوابت المنطقية وبالمتغيرات التي لا تحقق التعريف الذي وضعناه للرياضيات، والرياضيات تتكون من جمع المقدمات السابقة التي تقرر لزوما صوريا يشتمل على متغيرات بالإضافة إلى بعض تلك المقدمات الرياضية مثل مبدأ القياس المطلق كقولك "إذا كانت ق تلزم عنهاك" وكانت "ك تلزم عنها ر" فإن مثل اللزوم هو المنطق وليس من الرياضيات كما أن راسل يعرف الثابت المنطقي بأنه: شيء يبقى ثابتا في قضيته حتى عندما نغير جميع مكوناتها. ([1])

المنطق:

يعرف المنطق منذ القديم على أنه العلم الذي يهتم بوضع القوانين والشروط للفكر السليم، وقد عرفه أرسطو على أنه آلة العلم وموضوعه الحقيقي هو العلم نفسه أو صورة العلم أي أن أرسطو شبه المنطق بآلة يسير وفقها أو عليها الفكر الإنساني حتى تضمن الآلية، في التفكير أما المنطق عند راسل فيعرفه بقوله "المنطق الرمزي أو الصوري هو دراسة مختلف الأنواع العامة للاستنباط ولقد أطلقت كلمة رمزي على هذه الدراسة لخافية عرضية، لأن لا يستخدم الرموز الرياضية في الدراسة وفي غيرها هو مجرد أمر مناسب من الناحية النظرية لا تميله طبيعة الأشياء" ([2])ولقد كان للمنطق دور كبير في فلسفة راسل لأنه في نظره هو الأساس الذي يجب أن تقوم عليه الفلسفة.

([1]) محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية، مرجع سابق، ص 106.

([2]) برناند راسل، أصول الرياضيات، ج1 تر: محمد مرسي وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف مصر د.ط.د.س ص 71.

- لقد تحدث راسل عن أنواع القضايا والوقائع باعتبارها موضوعات التحليل المنطقي وهذا ما سنتطرق اليه لاحق بالتفصيل.

إن فلسفة التحليل أو الفلسفة العلمية تختلف عن الفلسفات السابقة لأنها سترجع المشكلات الفلسفية في حدود لغة المنطق، باللغة القضايا والوقائع التي تتضمن ذلك المشكلات ([1]) وهذا ما يوضح حقيقة وأهمية المنطق في الفلسفة لأنه يزود التحليل بلغة منطقية دقيقة والحقيقية أن راسل دخل إلى المنطق من باب الرياضيات التي كان بصدد بتدعيم أسسها أصولها الثانية ولذلك فإننا نجد راسل بدرس المنطق التقليدي دراسة جديدة وربما كان الأساس في موقف راسل المنطقي تلك الثورة التي حمل لوائها ضد الفلسفة المثالية، وفي هذا الصدد وجد راسل أن هناك أمرين الأول أن الفلسفة المثالية والمنطق المثالي بزعامة برادلي إنما أعقل جزءا هاما من الأسس المنطقية في أساس النظرة للأشياء التي والتي تبدوا في العالم من حولنا ألا وهو العلاقات، أما الأمر الثاني أن المذهب الفلسفة الكبرى مثل مذهب أرسطو وليبتز وهيغل وبرادلي إنما تنظر معينة لمبحث القضايا ([2]) ما يعرف بالأسس المنطقية.

يقول راسل أن "ما يبحث فيه المنطق الرمزي هو القواعد العامة التي يجري الاستدلال عليها وهو إنما يحتاج إلى تبويب العلاقات أو القضايا من حيث أن هذه القواعد العامة تقدم معاني خاصة المعاني الخاصة التي تظهر في قضايا المنطق الرمزي فمهما مما يمكن تعريفه بدلالة هذه المعاني هي الثوابت المنطقية.([3])

لذلك نجد راسل في هذا الصدد قد حدد المعاني والمفاهيم التي يستخدمها المنطق، وعلى هذا الأساس ولأجل بيان نظرية راسل المنطقية لابد من أن نتعرف على تلك المعاني والمفاهيم التي يستخدمها في المنطق لأنها تؤلف الأساس المنطقي لنظريته، فمن المعروف منذ أيام أرسطو أن المنطق يهتم بالأشكال

([1]) جمال جمود، المنطق اللغوي في الفلسفة المعابرة، مرجع سابق، ص 87.

([2]) ماهر عبد القادر محمد علي فلسفة التحليل المعاصر، مرجع سابق، ص 126.

([3])برتراند راسل، أصول الرياضيات، ج1، تر: محمد مرسي وأحمد فؤاد الأهواني، دار المعارف، مصر، د.ط، د.س، ص 42.

* هي لفظ شعار من الرياضة والمنطق، عبارة عن حرف لغوي يرمز إلى قيم متباينة فمثلا الحرف س يرمز الى قضية عددية اذا وردت في هذه المعادلة انظر: المعجم الفلسفي تاريخ العلم العام ، مرجع سابق، ص62.

** CONSTANRES جمع ثابت وهو لفظ مستعار بين الرياضة والمنطق عبارة عن رمز له نسبة محددة مثل السلب

وأن الاستدلال** المنطقي المعروف بالقياس يعتمد كليا على الشكل دون المعنى، وقد استخدم أرسطو، بالفعل رموزا أو حروفا للتعبير عن القياس وضروبه المنطقية، أي أن القياس هو الذي يتم بمقتضاه ارتباط الأحكام التي تتألف منها القضايا بعضها ببعض ارتباطا ضروريا من أجل تكوين ما يعرف بالعلاقات المنطقية.

تميز في منطق راسل بين التغيرات* والثوابت**([1])ولكنه استخدم لفظ متغير بمعنى أوسع رمزا يشير إلى عدد وكمية معينة كما يميز في التغيرات بين نوعين، متغير محدود ومتغير غير محدود ويختلف النوع الأول عن الثاني في ندرة استيعاب القيم فالأول لا يشمل إلا على قيم محدودة بينما يستطيع الثاني استيعاب قيم غير محدودة، أما الثوابت فإنها تتميز عن المتغيرات في كونها غير متغيرة القيم، وأنها ذات معنى أو قيمة معينة لا تتغير، والثوابت أو الروابط المنطقية التي يستخدمها راسل في منطق القضايا هي البدل أو النفي والعطف والإلزام والمساواة وهذه القوانين المنطقية غير مستقلة الواحدة عن الأخرى بل يمكن تعريف بعضها بعض([2])أي أن راسل يجعل من تلك الثوابت المنطقية سلسلة واحدة لأنها تعتبر عقدة المبادئ الأساسية التي يتم بمقتضاها التفكير وتحليل القضايا، وأهم ثابت عنده هو ثابت المتضمن وقد ربط راسل المنطق بالرياضيات من أجل إرجاع المفاهيم الرياضية إلى مفاهيم منطقية كان هذا بخصوص المنطق.

لقد اهتم راسل بجلاء الفكر ووضوحه، وقد دفعت به هذه الترعة إلى دراسة الرياضيات لما رأى فيها من دقة في هذا العلم ويعتقد راسل أن التقدم الرياضي في القرن 19 كان أعظم معالم هذا القرن، وخاصة حل المصاعب التي كانت تحيط سابقا فكرة اللانهاية في الرياضيات.([3])

([1]) ياسين خليل، مقدمة في الفلسفة المعاصرة، مرجع سابق، ص 66، 67.

([2]) ياسين خليل، مقدمة في الفلسفة المعاصرة، مرجع سابق، ص69.

([3]) وول ديورانت، قصة الفلسفة، تر: محمد المشعشع فتح الله، مكتبة المعارف للنشر، بيروت، لبنان، ط6، 1988، ص 587.

هذه الأخيرة اللانهائية في الرياضيات كانت إحدى المشكلات الأساسية التي أثيرت في مجال الرياضيات حيث استطاع العالم الرياضي "كانتور" البرهنة على أن الأعداد اللامتناهية، وهذا ما جعل راسل يغير رأيه بخصوص هذا الموضوع لأنه كان يعتقد أن مجموعة الأشياء الموجودة في العالم هي الأخص للعدد وهذا ما نلمسه في قوله "ولكن في شهر مايو حدث فيه نكسة فكرية في عنق النكسة العاطفية التي ارتابتني في فيبراير، فقد توصل كانتور إلى البرهان بأنه ليس هناك حد أقصى للعدد وكنت أرى أن مجموعة الأشياء الموجودة في العالم يجب أن تكون هو الحد الأقصى للعدد ولذلك حققت برهانه وفحصته بشيء من الدقة وحاولت أن أطبقه على أصناف الأشياء جميعا"([1])أي أن راسل بحث إلى هذا البرهان وأدرك أن ما توصل إليه أستاذه كانتور غير تفكيره وعلى هذا نجده يقول: "أن كانتور قد تغلب على الألغاز المنطقية القديمة حول العدد اللامتناهي اخذ مجموعات الأعداد الصحيحة من واحد إلى ما بعد (...) واضح أن العدد ليس متناهي فحتى الألف هناك ألف عدد وحتى المليون هناك مليون عدد"([2]) وهذا ما يؤكد أن راسل قد أخذ بالبرهان الذي قدمه أستاذه كانتور حول الأعداد اللامتناهية.

وقد كان موقف "راسل" من فكرة البديهيات موقفاً صريحاً إذ يذكر "ول ديورانت" في كتابه "قصة الفلسفة" أن راسل وجد رجالا نهضوا فتحدوا هذه البديهيات، وألحوا بإصرار على إقامة الدليل عليها فقد اعتبط حين سمع من قال بأن الخطين المتوازيين قد يلتقيان في مكان ما وأن الكل قد لا يكون أكبر من أجزائه([3]) ويعني هذا أن راسل ساند أولئك الذين أحدثوا قفزة إبستيمولوجية في تاريخ الرياضيات.

([1])برتراند راسل، أصول الرياضيات، مصدر سابق، ص 229.

([2])برتراند راسل، تاريخ الفلسفة الغربية، مصدر سابق، ص 490.

([3])برتراند راسل، تاريخ الفلسفة الغربية، مصدر سابق، ص 940.

من خلال تحطيم فكرة البداهة او ما يعرف بالطرح الإبستيمولوجي لمبادئ البرهان الرياضي ويعتبر كتاب "أصول الرياضيات" أبرز ما كتب راسل في هذا المجال حيث نجده يقول: "لقد كنت أحاول منذ سنين أن أحلل الأفكار الأساسية في علم الرياضيات مثل المرتبة والأرقام غير عشرية (...) وفي أكتوبر جلست إلى مكتبتي لأكتب "أصول الرياضيات" الذي حاولت كتابته من قبل عدة مرات دون نجاح"([1])وقد استغرق راسل وقتا في تأليفه لهذا الكتاب والسبب في ذلك يعود إلى أنه كان مهتما بمسائل الرياضيات اهتماما كبيرا لذلك كانت الرياضيات إحدى المجالات الأساسية في فلسفة التحليلية وكان هدفه الأساسي هو تحليل تلك المسائل الرياضية بالاعتماد على المنطق ومن هنا كانت غايته ربط المنطق بالرياضيات ولذلك سمي منهجه بمنهج التحليل المنطقي.

المبحث الثالث: النزعة الأكسيوماتيكية

النسق الأكسيومي عند هلبرت:

([1]) وول ديورانت، قصة الفلسفة، مرجع سابق، ص 586.

نشر هلبرت (1862-1943) مقالا بعنوان "أسس الهندسة" سنة 1899م، عرض فيه مثالا عن النسق الأكسيومي، وأكد فيه الهندسة مثل علم الحساب شرط الانتقال من عدد صغير من القضايا الأولية البسيطة، وهي عبارة عن أكسيومات الهندسة.([1])

تحليل أكسيومات هلبرت:

.... نسقه بالاعتماد على ثلاثة مفاهيم لا معرفة النقطة، المستقيم، المستوى، كما استخدم أيضا بعض الروابط لـــ تنتمي، تساوي، علي.

فالمجموعة الأولى من الأكسيومات نجد فيها "على" نقطة على مستقيم، كما أن هذه المجموعة تحتوي على اكسيومي 1-2 بالنسبة للنقاط والمستقيمات، فهما أكسيومان لهما علاقة بالهندسة المستوية، هما مستويان من المجموعة (1) بينما الأكسيومات 4-3 نسميها الأكسيومات الفضائية ([2])

المجموعة الثانية تحدد ترتيب بين النقاط باستخدام علاقة بين وتسمح بتوزيع النقاط على المستقيمات.

المجموعة الثالثة مكونة من الأكسيومات بنيت على أساس علاقة التقايس سواء الخاصة بالقطع أو الزوايا.

وضمنيا التقايس يتضمن الحديث عن المقدار والطول المجموعة الرابعة من المسلمة الخامسة الاقليدية.[3]

وإذا ما تحدثنا عن الأكسيوماتيكية، مباشرة نتطرق إلى هلبرت إذ أن المنهج الأكسيومي ابتدأ منه أصبح الطريق الأسهل لمعالجة ودراسة المسائل الرياضية ففي سنة 1899 شارك هلبرت في مؤتمر سنوي حول الرياضيات بموضوع "حول نظرية العدد"([4]) وهي المداخلة التي نشرت سنة 1900،

([1]) محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 45.
([2]) مرجع نفسه، ص 112.
([3]) مرجع نفسه، ص 141.
([4]) محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 121.

عرض من خلال آرائه حول أسس علم الحساب، وذلك بعد أن تطرق بالحديث إلى المنهج التكويني، والمنهج الأكسيومي والمقارنة بينهما على الأساس أن الأول يستخدم في علم الحساب، الثاني يستخدم في الهندسة محاولا الوصول من خلال هذه المقارنة إلى تحديد أيهما أصلح لتأسيس الرياضيات، حسب هلبرت المنهج التكويني يقوم أساسا على توسيع مفهوم العدد، فالأعداد السالبة تعرف من خلال تطبيق مبدأ التعميم طرح الأعداد الموجبة الأعداد الناطقة تعرف بتطبيق مبدأ تعميم القسمة على الأعداد الموجبة والسالبة، والأعداد الحقيقية هي عبارة عن تقطعات بين الأعداد الناطقة، فهو إذن منهج يهتم أساسا بتكوين أكبر قدر ممكن من مفهوم عام للعدد الحقيقي والذي تم تكوينها، ولذا فإن المنهج الأكسيومي هو عبارة عن مفهوم عام للعدد الحقيقي والذي تم تكوينه من خلال الامتدادات المثالية للمفهوم البسيط للعدد، أما المنهج الأكسيومي فهو يعرف الأعداد من خلال العلاقات التي تعتمدها، هو يقوم أساسا على إيجاد مجموعة من الأشياء من المواضيع تطبق عليها مجموعة من العلاقات التي يعرفها في أكسيومات معينة فهو إذن عبارة عن نسق من المواضيع بينها علاقات حددت بالأكسيومات، وفي الإطار هلبرت لم يكن راضيا عن منهج التقطعات لأنه يفترض مجموعة الأعداد الناطقة لتعريف العدد الحقيقي ولهذا فهو يفضل التعريف تعريفا أكسيوميا للعدد الحقيقي بالأكسيوم يحدد ويميز التصور، إذن فالمنهج الأكسيومي هو أفضل من المنهج التكويني.([1])

فالمنهج الأكسيومي خالٍ من هذه الأخطاء، ومن الصعوبات ولا يمكن التشكيك في مصداقية فمن أجل تأسيس نظرية ما وإثبات مجموعة من مفاهيم لها علاقة بالنظرية، يكفي تأسيس نسق من الأكسيومات،[2] مع التأكيد بأنها تحقق الخصائص المنطقية اللازمة حتى تكون بمعزل عن التناقض، إن المنهج الأكسيومي هو منهج منتج ومثمر وخصب، فمثلا عن كونه يؤسس علم الحساب، لأن النظرية ممثلة بنسق من العلاقات، يمكن أن تظهر في مجالات أخرى كالفيزياء، ولذا فإن هلبرت جعل

([1]) مرجع نفسه، ص 128.

([2]) مرجع نفسه، ص 128.

من المنهج الأكسيومي أساسا لتأسيس علم[1] الحساب، ومن قبله فريجه أساس لتأسيس المنطق، ديدكند وكانتور جعلاه أساسا لنظرية المجموعات، ونلمس موقف كفاييس من هلبرت من خلال قوله: "رأيي أنه رغم القيمة البيداغوجية والكشفية للمنهج التكويني المنهج الأكسيومي هو الأفضل بالنسبة لتمثيل نهائي ودعم منطقي لمحتوى معرفتنا[2].

ثم نستنتج بنية النظريات النظريات وقد تكون رياضية، أولها علاقة بعلوم أخرى كالميكانيكا والفيزياء ومنه فإن المنهج الأكسيومي لا يسمح فقط بتأسيس الرياضيات، ولكن بتبرير بتطبيقها الشامل في علوم الطبيعة، وكل ما يكون موضوعا للفكر، فحسب العلمي هو مرتبط مباشرة بالمنهج الأكسيومي ومنه فهو ينتمي إلى الرياضيات هلبرت أن الصرح العلمي أو لنقل الخاص بالعلوم والذي رسم وبني بالاعتماد على المنهج الأكسيومي تظهر الرياضيات فيه كموجة رئيسية فلها إذن دور فعال في بناء هذا الصرح ويعزز كفايس رأي هلبرت حيث يرى أن الرياضيات الأكسيوماتيكية توصلنا إلى تكوين ماهية الفكر العلمي، ولهذا فهو بطريقة غير مباشرة جعل من المنهج الأكسيومي وسيلة للتوحيد بين العلوم، وهذا إن دلَّ على شيء، فإنما يدلُّ على نجاح المنهج الأكسيومي في سنواته الأخيرة.[3]

ومنه نستنتج أن الأكسمة هي نشاط فكري يتم داخل الرياضيات ذاتها الإجراءات الرياضية فهي تقوم بعزل وتصفية الطرق التي تكون مركز النظرية وهذا أدى إلى تطور وامتداد الرياضيات، وكون الرياضيات تفكر في ذاتها وبتعبير آخر من العوامل الأساسية التي ساعدت أحد محركات تطور الرياضيات، إنها إذن أحد سباقات التطور أحد أنماط الفكر الرياضي ولا يمكن التخلي عنها.

([1]) محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 132.

([2]) مرجع نفسه، ص 164.

([3]) مرجع نفسه، ص 167.

لابد لنا أن نتطرق إلى الشروط والخصائص التي ساهمت في البناء الأكسيومي خاصة عند الرياضي هلبرت وهي متمثلة في مجموعة من العناصر، إذ اشترط هلبرت لإقامة الأكسيوماتيك ثلاثة شروط وتمثلت فيما يلي:

1. **شروط الاستقلال:** أن تكون مسلمات النسق وأصوله مستقلة عن بعضها البعض لأنه يجب أن يكون هناك تداخل بين مسلمة وأخرى، وهذا الشرط هام وأساسي.([1])

بمعنى أن تكون المسلمات مستقلة تماما عن بعضها البعض وهذا ما نجده في كتاب فلسفة الرياضة عند الفندي والمتمثل في "استقلال كل مسلمة عن أخرى"([2]) وهذا يعني أن كل مسلمة لا تربطها صلة بالمسلمات الأخرى وبالتالي الاستقلال التام لكل مسلمة.

2. **شرط عدم التناقض:** نقول عنه "عدم تناقض المسلمات" بمعنى المسلمات تكون منفصلة ومستقلة عن بعضها البعض ولكن غير متناقضة كما يعني هلبرت بهذا الشرط أن مسلمات النسق أو أصوله الأولى يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها، وهذا الشرط هام لأنه لو كانت الأصول الأولى متناقضة فيما بينها لكانت القضايا المستنبطة من هذه الأصول متناقضة أيضا.

إذن يعرف هلبرت شرط عدم التناقض على أنه استحالة استنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات.

3. **شرط الإشباع:** يقصد به هلبرت أن الحدود او الأصول الأولى او المسلمات يجب أن تكون كافية بحيث تسمح لنا بإجراء كل عمليات الاستنباط في النسق الموضوعة له، وأن المسلمات أو الأصول الموضوعة الأولى يجب أن تكون كافية للاستنباط بحيث لا تزيد ولا تنقص لأنها لو نقصت لما أمكن لنا

([1])محمد علي عبد المعطي، المنطق ومنهاج البحث العلمي في العلوم الرياضية والطبيعية، دار المعرفة الجامعية للنشر، الإسكندرية، 2004، ص 183.

([2])محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، المرجع السابق، ص 76.

إتمام عمليات الاستنباط، ولو زادت لتعطلت بعض الأصول التي لا حاجة لنا لديها،([1]) أي أن المسلمات التي يقصد بها هلبرت يجب أن تكون كافية للاستنباط لا تزيد ولا تنقص، لأنها لو زادت أو نقصت تعطلت عملية الاستنباط.

كما سمى هلبرت شرط الإشباع بـــ Saturation أي كون عدد المسلمات الخاصة بهندسة ما هو ما يكفي بالضبط لاستنباط نظريات تلك الهندسة بحيث لا يمكن زيادتها أو نقصانها إلا وأدى إلى قضايا هندسية مختلفة.([2])

إذن فالإشباع هو أقل الشروط خطورة في مناقشات هلبرت وشرط عدم التناقض عنده هو شرط متضمن في الشرطين الأخريين الشرط المستقل وشرط الإشباع وبهذا الشرط قد تناقض في أقواله من حيث أن صمت أصوله شرطا منطقيا.

وإذا كان هلبرت هو أول من صاغ الهندسة الإقليدية صياغة الأكسومية حديثة واشترط هذه الشروط الأساسية التي يجب أن تتوفر في كل بناء علمي استنتاجي أكسيومي.([3])

1. يجيب النص صراحة على الحدود الأولية (المفاهيم، الألفاظ) التي تعتزم أن نعرف بها جميع الحدود الأخرى.

2. يجيب النص صراحة على القضايا الأولية التي تحترم أن نبرهن بواسطتها على جميع القضايا الأخرى

3. يجب أن تكون العلاقات المقامة بين الحدود الأولية علاقات منطقية محض، ويجب أن تبقى هذه العلاقات مستقلة عن المعنى المشخص الذي يمكن إعطائه لتلك الحدود.

([1]) محمد علي عبد المعطي، المنطق ومنهاج البحث العلمي في العلوم الرياضية والطبيعية، مرجع سابق، ص 183.

([2]) مرجع نفسه، ص 184.

([3]) محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص 82.

4. يجب أن تكون هذه العلاقات هي وحدها التي تتدخل في البرهنة وذلك باستقلال تام عن معاني الحدود الشيء الذي يعني الامتناع كليا عن الإشاعة بطريقة ما الأشكال الهندسية

أما فيما يخص في بعض الخصائص التي يجب أن تتوفر في البناء الأكسيومي فهي تتمثل فيما يلي:

1. **الانطلاق والانفتاح**: يقال عن أكسيوماتيك ما أنه منطلق Saturé عندما لا يكون في الإمكان إضافة أولية مستقلة جديدة إلى أولوياته وإلا أدى ذلك إلى إحداث تناقض فيه، ويكون منفتحا Ouvert في الحالة المخالفة، ومن الممكن فتح الأكسيوماتيك المغلق بأن تترع منه إحدى أولوياته، وفي هذه الحالة يصبح ضعيفا حيث تضمن حيث الاستغراق.([1])

2. **التكافؤ**: يكون ماء أكسيومي ما مكافأ بناء أكسيومي آخر إذا كان الاختلاف بينهما قائما فقط في الصياغة والتركيب، أي إذا كان معا مؤسسين على نفس الحدود والقضايا التي تؤخذ في أحدهما على أنها أوليات، وتؤخذ في الآخر على أنها مشتقات،([2]) أي أن كل نظامين أكسيومي يكون متكافئان إذ كانت كل قضية في الأول يمكن البرهنة عليها في الثاني والعكس.

3. **التقابل**: بما أن الأكسيوماتيك بناء نظري مجرد، فإنه من الممكن إعطاءه تحقيقات مشخصة مختلفة، وتسمى بـــ "الطرز" فعندما يكون الطرز لا تختلف فيما بينها إلا بتحدد العلامات المشخصة التي نعطيها للأولويات التي تقوم عليها، وعندما نعود إلى الطرز نفسها لتتطابق مع بعضها البعض، عندما نهمل تلك الدلالات المشخصة ونقصر اهتماما على الجانب الصوري المجرد وحده، فإنها طرز تسمى حينئذ بطرز المتقابلة أي التي لها نفس البنية المنطقية.

فمن خلال هذه الترعة سوف نشير إلى كيفية معالجة هذه الخيرة لنقائض المجموعات فبالنسبة إلى أنصار الصياغة الأكسيوماتيكية فإن المجموعات لا يتم تعريفها إلا كما تعرف المجاهيل (س) التي

([1])محمد عابد الجابري، مرجع سابق، ص 82.

([2]) مرجع نفسه، ص 86.

تستعمل في أوليات أية نظرية تماما كما هو الشأن في المعادلات الرياضية المتعددة المجاهيل، ومن ثمة تكون أمام مجموعات يمكن أن توضع مكان تلك المجاهيل وأمام أخرى لا تقبل ذلك، وبناءا على ذلك يرى "زرمولو" أنه من الممكن التغلب على النقائض دون التضحية بأي من الرياضيات الكلاسيكية دون اللجوء إلى تعقيدات منطقية، والوسيلة إلى ذلك هي الانطلاق من عدد من المسلمات تسمح بتحديد مفهوم المجموعة بشكل لا يسمح ببناء المجموعات المتناقضة، في القوت الذي يتيح لنا فيه إنشاء جميع المجموعات الضرورية ([1]).

والمبدأ الأساسي الذي يجب ان نأخذه بعين الاعتبار وهو أن لا نقول بوجود مجموعة لمجرد أننا نعرف إحدى خصائص عناصرها، بل لابد من أن تكون جميع هذه العناصر منتمية أيضا إلى مجموعة سبق أن تقرر وجودها، هكذا فالخاصية الواحدة لا تكفي وحدها في إنشاء مجموعة بل هي تمكننا فقط من التميز بين هذه المجموعات التي تتوفر فيها الخاصية المذكورة، ومن عناصرها الأخرى التي لا تمتلك هذه الخاصية، أما عن أكسيوماتيك هلبرت فنجده أنه ألح على ضرورة الاستغناء تماما عن معاني الأوليات وذلك أنه اعتبرها مجرد رموز تكتب معاني من السياق الذي توضع فيه ([2]).

وقد دشّن هذا العالم الرياضي الكبير البحث في ميدان جديد هو ميدان ما بعد الرياضيات وهذا ما أدى إلى ظهور علم جديد يتضمن نفس الاسم.

وموضوعه لا الكائنات الرياضية التي تحدث عنها الرموز، بل الرموز والعبارات الرياضية نفسها بغض النظر عن معناها، وهذه الرموز والعبارات التي تنشأ للتعبير عن الكائنات الرياضية تصبح هي نفسها كائنات ذات طبيعة أصلية وجديرة بدراسة خاصة، إنه علم ما بعد الرياضيات إذا هو نسبة الرياضيات نفسها إلى موضوعاتها ([3]).

([1]) محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 116.

([2]) مرجع نفسه، ص 117.

([3]) مرجع نفسه، ص 118.

إن مشكلة نقائض نظرية المجموعات، تم تجاوزه بفضل تقدم الأبحاث الأكسيومية التي أدت إلى قيام علمين جديدين هما، ما بعد الرياضيات وما بعد المنقط، أصبحت الصياغة الأكسيومية الآن معتمدة لدى معظم الرياضيين الترعة المنطقية.([1])

([1]) محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 118.

خاتمة

انفصلت الرياضيات عن الارتباط بالواقع وقضاياه لصالح فروض استنتاجية لا يهم انطباقها مع الواقع ثم الرجوع بالرياضيات الى العدد كأساس ليقينها فيما عرف بالتحسيب الذي انتهى به المطاف الى تاسيس نظرية المجموعات ودراسة أسس الرياضيات وتكوين النظرية المجردة بانتاج المفارقات التي تبدو انها اعترضت على وحدة الرياضيات ولهذا اهتم الرياضي بملاحظة العلاقات التي تتحد النظريات الرياضية بنظرية المجموعات، وهذا تاكيده على تاثيرها في كل الرياضيات مما يعني ان مسالة نظرية المجموعات هي مسالة اساس الرياضيات وهي النظرية في الاعداد المتصاعدة التي اعجب بها **"هلبرت"** ووصفها بالوردة

وتمام العقل الرياضي، فهي احدى الاكتشافات الرائعة للنشاط العقلاني الخالص، ولهذا نجده يؤكد على مقولته (**لايجب ان نطرد من الجنة التي اسسها لنا كانتور**)

فظهور نظرية المجموعات على يد **"كانتور"** فظهور نظرية المجموعات على يد **"كانتور"** في العقد الاخير من القرن الماضي كان حلقة مهمة من حلقات تطور الرياضيات، التي ميزت القرن 19، فنظرية المجموعات تشكل دعامة هذه الدقة فاصبحت الاساس المتين الذي يقوم عليه الصرح الرياضي ولهذا فتح المجال امام الابحاث في نظرية المجموعات حيث اهتم رياضيون بالبحث في اكسمة نظرية المجموعات، فهم اذن ورثة **"كانتور"** من بينهم" **ديد كند"، "بيانو"، "فريجه"، "راسل"، و"هلبرت"** الذين رفضوا الخروج من الجنة التي اسسها **"كانتور"** على حد تعبير **"هلبرت"** في محاضرة القاها سنة 1925 **"لااحد يمكنه ان يطردنا من الجنة التي اكتشفها كانتور"** فهؤلاء اكدو على ان مبدأ عدم التناقض هو معيار كافي للوجود الرياضي كما اثبتوا ايضا ان الاكسمة الدقيقة تتحدض كل المفارقات الناشئة عن نظرية المجموعات.

ان الطرق والمناهج التي استخدمها **"كانتور"** استخدمت كذلك في النظرية المجردة التي يمكن القول انها سمحت بالاكسمة للاكتشاف الكنتوري، كانتور طور نظرية التكافؤ لحل مسائل التحليل وبين ان

مجموعات ألفاظ اللامتناهية تنقسم الى فئتين العدود والمتصل مع العلم نظرية التكافؤ تقوم اساس على المجموعات الموجودة في الرياضيات الكلاسيكية وتحال ان تحدد علاقاتها.

قائمـــــــة

المصادر والمراجع

المصادر:

1. عبد اللطيف يوسف الصديقي، مسألة اللانهائية في الرياضيات، نظرية جورج كانتور، دار الشروق للنشر والتوزيع ، الاردن، ط1، 1999

المراجع بالعربية

2. بوخنيسكي، تاريخ الفلسفة المعاصرة في اوروبا، تر، محمد عبد الكريم الوافي، مكتبة الفرجاني، ليبيا، ط2، دت
3. برتراند راسل، تاريخ الفلسفة الغربية، تر، محمد فتحي الشنيطي، مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب، مصر،دط، 1977
4. برتراند راسل، اصول الرياضيات، ج1، تر، محمد مرسي احمد وفؤاد الاهواني، دار المعارف، مصر، دط، 1964
5. برتراند راسل، اصول الرياضيات،ج3، تر، محمد مرسي احمد وفؤاد الاهواني، دار المعارف، مصر، ط2، دت
6. برتراند راسل، فلسفتي كيف تطورت، تر، عبد الرشيد الصادق، مكتبة الانجلو- مصرية، مصر دط، 1963
7. جورج سارطون، تاريخ العلم، ج4، تر، مجموعة من العلماء ابراهيم البيوني ومذكور وزملاؤ، دار المعارف، مصر، دط، 1970
8. ديورانت وول، قصة الفلسفة، ترجمة محمد المشعس فتح الله، مكتبة المعارف للنشر، بيروت، لبنان، ط6، 1988
9. رنيه ديكارت، مقال في المنهج، تر، محمد الخضيري، القاهرة، ط3، 1968
10. هنري بوانكاري، العلم والفرضية، تر، حمادي بن جاد الله، مركز الدراسات الوحدة العربية، بيروت، ط1، 2002.

11. اميرة حلمي مطر، الفلسفة اليونانية تاريخها ومشكلاتها، دار المعارف، مصر، دط، 1988

12. الاخضر الشريطي، المنطق الرياضي خلاصة اثر المنطق المعاصر، الجزائر، ط1، 2009

13. جمال حمود، المنطق اللغوي في الفلسفة المعاصرة

14. عثمان امين، ديكارت، المكتبة الانجلو- مصرية، ط6، 1976

15. علي سامي النشار، المنطق الصوري من ارسطو الى عصورنا الحاضرة، دار المعرفة، الجامعة الاسكندرية، مصر، ط1، 2000

16. غازي عنابة، منهجية البحث العلمي عند المسلمين، دار البحث للطباعة والنشر، ط1، 1985

17. محمد مهران، فلسفة برتراند راسل، دار المعارف، مصر، 2003

18. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، دط، **1969**

19. محمد عابد الجابري، مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مركز الدراسات الوحدة العربية، بيروت، ط4، 2001

20. محمد علي عبد المعطي، المنطق ومنهاج البحث العلمي في العلوم الرياضية والطبيعية، دار المعرفة الجامعية للنشر، مصر، 2004

21. نجيب بلدي، دروس في تاريخ الفلسفة، دار توبقال للنشر، المغرب، ط1، 1987

22. ياسين خليل، مقدمة في الفلسفة المعاصرة، دراسة تحليلية ونقدية للاتجاهات العلمية في فلسفة القرن20، دار الشروق للنشر والتوزيع، الاردن، 2012

23. يحي هويدي، في فلسفة علم المنطق، الفلسفة الوضعية المنطقية، مكتبة النهضة المصرية، مصر، دط، **1972**

المصادر باللغة الأجنبية

24. Aristote, physique, traduction de Astevens, j vrain, 1999

25. Blanché Robert, L'acsciomatique, puf, paris, 1999

المراجع بالأجنبية:

26. Euclide, les elements, tr Bernard vitrac, puf, paris
27. John wallis, the artithmetic of infinitesmals, (1656) springer-verlage-2004
28. Tony Levy, Figures de l‘ infini, Editions, du Seuil, paris,1987

المعاجم والموسوعات:

المعاجم:

29. ابراهيم مذكور، المعجم الفلسفي، الهيئة العامة لشؤون المطابع، الاميرية، القاهرةّ، مصر، دط، 1983
30. جميل صليبا، المعجم الفلسفي، ج1، دار الكتاب اللبناني، بيروت، لبنان، دط، 1982
31. جلال الدين سعيد، معجم المصطلحات والشواهد الفلسفية، دار الجنوب للنشر، تونس، دط، 2004
32. صلاح احمد وآخرون، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، ط2، 1986
33. مسعود جبران رائد، معجم القباني، في لغة الاعلام، دار العلم، بيروتّ، لبنان، ط3، 2005
34. مراد وهبة، المعجم الفلسفي، دار قباء الحديثة للطباعة والنشر، الكويت، ط4، 1998

الموسوعات:

35. اندريه لالاند، موسوعة لالاند الفلسفية، تع، احمد خليل، المجلد الاول،a-g
36. منشورات عويدات، لبنان، ط2، 2001
37. اندريه لالاند، موسوعة لالاند الفلسفية، المجلد2، عويدات للنشر والطباعة، لبنان، دط، 2008

38. عبد المنجم حنفي، الموسوعة الفلسفية، دار المعارف، تونس، دط، دت

39. عبد الرحمان بدوي، الموسوعة الفلسفية، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، ج1،ج2، لبنان، 1984

الموسوعات بالأجنبية:

40. Runes Dictionary Of philosophy

المجلدات :

41. تاريخ العلوم العام، العلم القديم والوسيط، رنيه تاتون، تر، على مقلد، مجلد1، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، ط2، 2006

42. تاريخ العلوم العام، العلم المعاصر، القرن19، المجلد3، تر، علي مقلد، المؤسسة الجامعية للدارسات والنشر والتوزيع، لبنان، ط1، 1990

المقالات:

43. صـــــــــفوان عويرة، المجموعة الموسوعة العربية، العلوم البحتة، الرياضيات والفلك، المجلد17، متاح على http : //www.arab.ency.com/index, php, module=ph

Ency clopedia et func= display= term et id= 9792, et m=1

المجلات:

44. رولان اومنيس، فلسفة الكوانتوم، فهم العلم المعاصر وتاويله، تر، د.احمد فؤاد باشا، د.يمنى طريف خولي، عالم المعرفة، العدد 350، 2008

الفهرس

فهرس المحتويات