**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ IBN KHLDOUN-TIARET**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR**

**DEPARTEMENT DES SCIENCES EXACTES**

# Magister en Mathématiques
# option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

# Topologie et Algèbres de Fonctions Généralisées

Présenté
par

Benoumrane TELLI

Soutenu le 00 / 00 / 2010 devant le jury :

| | | |
|---|---|---|
| *Président* : | ???? ???? | ????. *Univ.* ???? |
| *Encadreur* : | *Chikh BOUZAR* | *Prof. Univ. d'Oran* |
| *Membre* : | ???? ???? | ????. *Univ.*??? |
| | ???? ???? | ????. *Univ.*??? |
| | ???? ???? | ????. *Univ.*??? |

Remerciements : Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Bouzar Chikh tant pour m'avoir fait confiance de faire ce travail, que pour ses précieuses remarques et suggestions sans lesquelles ce mémoire n'aurait pas lieu.
Je remercie également Monsieur le Docteur GUEDDA Lahcene pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
Je tiens à noter toute ma reconnaissance à Monsieur le Docteur BENMERIEM Kaled.
Ainssi, Je tiens à remercier Monsieur le Docteur LARABI Abderrahmane pour accepter de juger mon travail et d'etre menbre de jury.
Pour conclure, je remercie tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, en particulier Monsieur le Docteur SNOUSSI A.e.k.

# Table des matières

# Introduction

La théorie des distributions introduite par S.L Sobolev [17] et L. Schwartz [12], depui lontemps s'est révélé un outil indispensable à l'Analyse Mathématique. Citons à titre d'exemple le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, qui affirme que tout opérateur diffirentiel linéaire à coéfficients constants admet une solution fondamentale distributionnelle. Cependant , certains exemples montrent la limitation des distributions. En 1954, L. Schwartz publia sa note [14], où il montre les contraintes de définir une multiplication générale dans $\mathcal{D}'$. L'exemple suivant

$$\delta = (xV_p\frac{1}{x})\delta \neq V_p\frac{1}{x}x(\delta) = 0$$

en est déja une illustration.
J. F. Colombeau, voir [2] et [3] a construit une algèbre commutative et associative $(\mathcal{A}(\Omega), +, \circ)$ jouissant des proprietés suivantes :

I. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ est lineairement injecté dans $\mathcal{A}(\Omega)$ et $f \equiv 1$ est l'unité dans $\mathcal{A}(\Omega)$.

II. Il existe des opérateurs de dérivation

$$\partial_i : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega), (i = 1, ..., n)$$

qui sont lineaires et vérifient la règle de Leibniz.

III. La réstriction $\partial_i \mid \mathcal{D}'(\Omega)$ est la dérivation partielle usuelle $(i = 1, ..., n)$.

IV. La réstriction $\circ \mid \mathcal{C}^\infty \times \mathcal{C}^\infty$ coincide avec la multiplication de fonctions.

Le but de ce mémoire est d'exposer la topologie des nombres généralisés $\tilde{\mathbb{C}}$ et les $\tilde{\mathbb{C}}$-modules. En par ticulier $\mathcal{G}(\Omega)$ et $\mathcal{G}_c(\Omega)$.
Cette thèse est organiser de manière suivante : Dans le chapitre I , nous

introduisons la topologie des nombres généralisés $\tilde{\mathbb{C}}$ à l'aide des valuations et ultra-pseudo-seminormes. Cette topologie sera la base du reste du mémoire. Dans la suite du chapitre , nous adaptons les définitions de concepts absorbant, convexe et équilibré à la construction algébrique des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules et développé cette topologie pour transférer une grande majorité de la théorie des E.V.T. Dans ce cadre, on a étudier le théorème du graphe fermé, application ouverte, la limite inductive , la limite projective et dualité. Le chapitre II est consacrer aux fontions génèraliseés de Colombeau, elle forme d'une algèbre commutative , associative et différentiélle, dans laquelle s'injecte $\mathcal{D}'(\Omega)$. Les opérations de $\mathcal{D}'(\Omega)$ s'étendent aux fontions génèraliseés de Colombeau. Le dernier chapitre est une étude topologique de $\mathcal{G}(\Omega)$ et $\mathcal{G}_c(\Omega)$, où la théorie du premier chapitre est pleinement appliquée.

# Chapitre 1

# $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques

## 1.1 Espaces topologiques

Ce paragraphe est consacré à de rappels topologiques nécessaires.

**Définition 1.1.1.** *Soient $E$ un ensemble non vide, $\mathcal{P}(E)$ la famille de toutes les parties de $E$ et $\tau \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\tau$ définie une topologie sur $E$, si*

$A_1)$ *$\emptyset \in \tau$ et $E \in \tau$.*

$A_2)$ *$\tau$ est stable par réunion quelconque.*

$A_3)$ *$\tau$ est stable par intersection finie.*

*$E$ muni de $\tau$, noté $(E, \tau)$, est appelé espace topologique et tout élément de $\tau$ est appelé ouvert de $E$.*

**Définition 1.1.2.** *Soient $V$ un sous-ensemble de $(E, \tau)$ et $x \in E$, on dit que $V$ est un voisinage de $x$ s'il existe un ouvert $O$ tel que $x \in O \subset V$.*

**Proposition 1.1.3.** *Un sous-ensemble $O$ de $(E, \tau)$ est un ouvert si et seulement s'il est voisinage de tous ses points.*

Soient $x$ un point d'un espace topologique $(E, \tau)$ et $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous ses voisinages.

**Proposition 1.1.4.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées par $\mathcal{V}(x)$*

$V_1)$ *$x$ appartient à tout $V$ de $\mathcal{V}(x)$.*

$V_2)$ *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W$ est une partie de $E$ contenant $V$, alors $W$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.*

$V_3$) *$\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie.*

$V_4$) *Pour tout èlèment $V$ de $\mathcal{V}(x)$, il existe un èlèment de $W$ de $\mathcal{V}(x)$ de sorte que : $\forall y \in W, V \in \mathcal{V}(y)$.*

**Définition 1.1.5.** *Soient $x$ un point d'un espace topologique $(E, \tau)$ et $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous ses voisinages.Une famille $\mathcal{B}$ de voisinages de $x$ est dite base de voisinages de $x$, si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists B \in \mathcal{B} : B \subset V$$

**Theorem 1.1.6.** *Soit $E$ un ensemble non vide et pour tout point $x$ de $E$, on associe une famille $\mathcal{F}(x)$ de parties de $E$ vérifiant $V_1, V_2, V_3$ et $V_4$, alors il existe une unique topologie sur $E$ pour laquelle $\mathcal{F}(x)$ coïncide avec la famille $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de $x$.*

**Définition 1.1.7.** *Soit $(E, \tau)$ un espace topologique, on dit qu'il est un espace de Baire, si la propiété suivante est vérifiée : Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés de $E$ d'intérieur vide, alors $F = \bigcup_n F_n$ est encore d'intérieur vide.*

**Définition 1.1.8.** *Soit $E$ un ensemble quelconque, on appelle filtre de $E$, une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles non vides de $E$ tels que*

**i)** *Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

**ii)** *Si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$.*

**Définition 1.1.9.** *On appelle base de filtre de $E$, une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensembles non vides de $E$ tels que $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\exists C \in \mathcal{B}$, tel que $C \subset A \cap B$.*

**Définition 1.1.10.** *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres d'un même ensemble. $\mathcal{F}$ est dit plus fin que $\mathcal{G}$, si $\forall G \in \mathcal{G}, G \in \mathcal{F}$.*

**Définition 1.1.11.** *Soient $(E, \tau)$ un espace topologique et $\mathcal{F}$ un filtre de $E$. On dit que $\mathcal{F}$ converge vers $a \in E$, qu'on note $\lim \mathcal{F} = a$, si $\mathcal{F}$ est plus fin que le filtre des voisinages de $a$, i.e. $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{F}$.*

**Proposition 1.1.12.** *Soient $\mathcal{F}$ un filtre de l'espace topologique $(E, \tau)$ et $a \in E$, alors $\lim \mathcal{F} = a$ si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists F \in \mathcal{F}, F \subset V$.*

**Proposition 1.1.13.** *Soient $(E, \tau)$ un espace topologique, alors $E$ est séparé si et seulement si un filtre convergent ne peut avoir plus d'une limite.*

## 1.2 Nombres généralisés $\tilde{\mathbb{C}}$

Notons $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et $I = ]0,1]$.
**Notation** :On note $f = O(\epsilon^{-m})$, $\epsilon \to 0$, si

$$\exists c > 0, \exists \eta > 0, |f_\epsilon| \leq c\epsilon^{-m}, \forall \epsilon \in ]0, \eta[.$$

**Définition 1.2.1.** $\mathcal{E}_M^s = \{(r_\epsilon) \in \mathbb{C}^I \mid \exists N \in \mathbb{N}, |r_\epsilon| = O(\epsilon^{-N}), \epsilon \to 0\}$
$\mathcal{N}^s = \{(r_\epsilon) \in \mathbb{C}^I \mid \forall m \in \mathbb{N}, |r_\epsilon| = O(\epsilon^m), \epsilon \to 0\}$.

**Proposition 1.2.2. 1)** *$\mathcal{E}_M^s$ est un sous-algèbre de $\mathbb{C}^I$.*
**2)** *$\mathcal{N}^s$ est un idéal de $\mathcal{E}_M^s$.*

***Preuve.*** 1)Soient $(r_\epsilon)_\epsilon, (s_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ par définition

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}_0, \exists \eta_1 > 0, \exists c_1 > 0, |r_\epsilon| \leq c_1\epsilon^{-N_1}, \forall \epsilon \in ]0, \eta_1[ \tag{1.1}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}_0, \exists \eta_2 > 0, \exists c_2 > 0, |r_\epsilon| \leq c_2\epsilon^{-N_2}, \forall \epsilon \in ]0, \eta_2[ \tag{1.2}$$

D'où

$$\begin{aligned} |(\lambda_1 r_\epsilon + \lambda_2 s_\epsilon)| &\leq |\lambda_1||r_\epsilon| + |\lambda_2||s_\epsilon| \\ &\leq |\lambda_1|c_1\epsilon^{-N_1} + |\lambda_2|c_2\epsilon^{-N_2} \\ &\leq c\epsilon^{-N}, \forall \epsilon \in ]0, \eta[ \end{aligned}$$

où $N = \max(N_1, N_2)$, $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et $c = |\lambda_1|c_1 + |\lambda_2|c_2$.
Pour le produit $|r_\epsilon s_\epsilon| \leq c_1\epsilon^{-N_1}c_2\epsilon^{-N_2} \leq c\epsilon^{-N}$ où $N = N_1 + N_2$,
$\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et $c = c_1 c_2$.
2)Soient $(r_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s$ et $(s_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s$. Par définition

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N}_0, \exists \eta_1 > 0, \exists c_1 > 0 |r_\epsilon| &\leq c_1\epsilon^{-N}, \forall \epsilon \in ]0, \eta_1[ \\ \forall m \in \mathbb{N}_0, \exists \eta_2 > 0, \exists c_2 > 0, |s_\epsilon| &\leq c_2\epsilon^{m-N}, \forall \epsilon \in ]0, \eta_2[, \\ \text{d'où } \forall m \in \mathbb{N}_0, |r_\epsilon s_\epsilon| &\leq c_1 c_2 \epsilon^m, \forall \epsilon \in ]0, \eta[ \end{aligned}$$

où $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ □

**Définition 1.2.3.** $\tilde{\mathbb{C}} = \mathcal{E}_M^s/\mathcal{N}^s$ *est appelé l'algèbre des nombres généralisées de Colombeau.*

**Définition 1.2.4.** *Soient $z = [(z_\epsilon)_\epsilon]$ , $r = [(r_\epsilon)_\epsilon] \in \tilde{\mathbb{C}}$, $z = r$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$, si $(z_\epsilon - r_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s$.*

Le corps $\mathbb{C}$ s'injecte canoniquement dans $\tilde{\mathbb{C}}$ par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & [(z)_\epsilon] \end{array}$$

**Définition 1.2.5.** *Soit $r \in \tilde{\mathbb{C}}$ est dit inversible, s'il existe $s \in \tilde{\mathbb{C}}$ tel que $r \cdot s = \widetilde{1} = [(1)_\epsilon]$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$.*

**Proposition 1.2.6.** *$\tilde{\mathbb{C}}$ est un anneau.*

***Preuve.*** Facile. □

**Remarque 1.2.7.** *$\tilde{\mathbb{C}}$ n'est pas un corps. En effet, considérons*

$$r_\epsilon = \begin{cases} 0 & si\ \epsilon = \frac{1}{n} \\ 1 & si\ non \end{cases}, \tag{1.3}$$

*alors $(r_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s$ et $(r_\epsilon)_\epsilon \notin \mathcal{N}^s$, ce qui signifie que $[(r_\epsilon)_\epsilon] \neq 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$. Supposons qu'il existe $[(s_\epsilon)_\epsilon] \in \mathbb{C}$ tel que $r \cdot s = 1$. Alors il existe $(\eta_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s$ tel que $r_\epsilon s_\epsilon + \eta_\epsilon = 1$ $\forall \epsilon \in I$, ce qui implique $\eta_\epsilon = 1$ pour $\epsilon = \frac{1}{n}$ contradiction.*

**Définition 1.2.8.** *Soit $r \in \tilde{\mathbb{C}}$ est dit strictement non nul, s'il existe un représentant $(r_\epsilon)_\epsilon$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $|r_\epsilon| \geq \epsilon^m$ pour $\epsilon$ suffisament petit.*

**Proposition 1.2.9.** *Soit $r \in \tilde{\mathbb{C}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

*I. r est inversible.*

*II. r est srictement non nul*

***Preuve.*** (1) $\Rightarrow$ (2) soit $r = [(r_\epsilon)_\epsilon]$ et $v = [(v_\epsilon)_\epsilon]$ l'inverse de r, par hypothèse il existe $(\eta_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s$ tel que $r_\epsilon s_\epsilon = 1 + \eta_\epsilon$, $\forall \epsilon \in I$, alors on peut affirmer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $s_\epsilon \neq 0$, $\forall \epsilon < \epsilon_0$. Supposons le contraire , alors il existe une suite $\epsilon_m \to 0$ quand $\epsilon \to 0$ et $s_{\epsilon_m} = 0, \forall m$, *d'où* $0 = r_{\epsilon_m} s_{\epsilon_m} = 1 + \eta_{\epsilon_m} \to 1$ quand $m \to \infty$ ce qui est absurde. Puisque $(s_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s$, alors il existe $N \in \mathbb{N}, \epsilon_1 > 0$ tel que $|s_\epsilon| \leq \epsilon^{-N}$, $\forall \epsilon \in ]0, \epsilon_1[$
*d'où* $|r_\epsilon| = \frac{|1+\eta_\epsilon|}{|s_\epsilon|}$ et

$$\begin{array}{rcl} |r_\epsilon| & \geq & \dfrac{|1 - |\eta_\epsilon||}{|s_\epsilon|} \\ & > & \epsilon^N |1 - |\eta_\epsilon|| \\ & > & \epsilon^{N+1}, \end{array}$$

ainsi r est strictement non nul.
(2) $\Rightarrow$ (1) r a pour inverse $s = [(\frac{1}{r_\epsilon})_\epsilon]$. □

## 1.3 Topologie de $\tilde{\mathbb{C}}$

**Lemme 1.3.1.** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} V : \mathcal{E}_{\mathcal{M}} & \longrightarrow & ]-\infty, +\infty] \\ (u_\epsilon)_\epsilon & \longmapsto & \sup\{b \in \mathbb{R} : |u_\epsilon| = O(\epsilon^b), \epsilon \longrightarrow 0\} \end{array} \tag{1.4}$$

*vérifie*

**i)** $V((u_\epsilon)_\epsilon) = +\infty$ *si et seulement si* $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}$.

**ii)** $V((u_\epsilon)_\epsilon(v_\epsilon)_\epsilon) \geq V((u_\epsilon)_\epsilon) + V((v_\epsilon)_\epsilon)$.

**iii)** $V((c\epsilon^b)_\epsilon(v_\epsilon)_\epsilon) = V((c\epsilon^b)_\epsilon) + V((v_\epsilon)_\epsilon)$.

**iv)** $V((u_\epsilon)_\epsilon + (v_\epsilon)_\epsilon) \geq \min\{V((u_\epsilon)_\epsilon), V((v_\epsilon)_\epsilon))\}$

**v)** $V((c\epsilon^b)_\epsilon + (v_\epsilon)_\epsilon) = \min\{V((c\epsilon^b)_\epsilon), V((v_\epsilon)_\epsilon))\}$.

***Preuve***. Comme $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_\epsilon| = O(\epsilon^{-N}), (\epsilon \longrightarrow 0)$. D'où $V((u_\epsilon)_\epsilon) \in \bar{\mathbb{R}}$.

**i)** Montrons (i), supposons $V((u_\epsilon)_\epsilon) = +\infty$, soit $m \in \mathbb{N}$, $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $b > m$ et $|u_\epsilon| \leq c\epsilon^b \leq c\epsilon^m$ i.e., $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}$.
Réciproquement , supposons $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}$.
$\mathbb{N} \subset \{b \in \mathbb{R} : |u_\epsilon| = O(\epsilon^b), \epsilon \longrightarrow 0\}$, d'où $V((u_\epsilon)_\epsilon) = +\infty$.

**ii)** Montrons (ii) si $V((u_\epsilon)_\epsilon) \neq +\infty$ et $V((v_\epsilon)_\epsilon) \neq +\infty$. Soit $\eta > 0$, $\exists b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tel que $|u_\epsilon| \leq c\epsilon^{b_1}$ et $|v_\epsilon| \leq c\epsilon^{b_2}$,
$V((u_\epsilon)_\epsilon) - \frac{\eta}{2} < b_1$, $V((v_\epsilon)_\epsilon) - \frac{\eta}{2} < b_2$ $(\epsilon \longrightarrow 0)$.
Ainsi $V((u_\epsilon)_\epsilon) + V((v_\epsilon)_\epsilon) - \eta < b_1 + b_2$ et
$|u_\epsilon v_\epsilon| \leq c_1 c_2 \epsilon^{b_1+b_2}$, $\epsilon \longrightarrow 0$.
D'où $V((u_\epsilon)_\epsilon) + V((v_\epsilon)_\epsilon) - \eta < V((u_\epsilon v_\epsilon)_\epsilon), \forall \eta > 0$.
Si $V((u_\epsilon)_\epsilon) = +\infty$,
$(resp. V((u_\epsilon)_\epsilon) = +\infty)$, alors $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}, (v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M$,
d'où $(u_\epsilon v_\epsilon) \in \mathcal{N}$ car $\mathcal{N}$ est un idéal

**iii)** Si $u = (c\epsilon^a)_\epsilon$

$$\begin{aligned} V((c\epsilon^a v_\epsilon)_\epsilon) &= \sup\{b \in \mathbb{R} : |c\epsilon^a v_\epsilon| = O(\epsilon^b)\} \\ &= \sup\{b \in \mathbb{R} : |v_\epsilon| = O(\epsilon^{b-a})\} \\ &= \sup\{a + \xi \in \mathbb{R} : |v_\epsilon| = O(\epsilon^{\xi})\} \\ &= a + V((v_\epsilon)_\epsilon) = V((c\epsilon^a)_\epsilon) + V((v_\epsilon)_\epsilon)) \end{aligned}$$

**iv)** de la même manière.

**v)** de la même manière.

$\square$

**Proposition 1.3.2.** *L'application $V$ est constante sur chaque classe modulo $\mathcal{N}$.*

***Preuve***. Si $[(u_\epsilon)_\epsilon] = [(v_\epsilon)_\epsilon]$, alors $(u_\epsilon - v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}$. D'pres $(i)$ $V((u_\epsilon - v_\epsilon)_\epsilon) = +\infty$, alors

$$\begin{array}{rcl} V((u_\epsilon)_\epsilon) & = & V((u_\epsilon - v_\epsilon + v_\epsilon)_\epsilon) \\ & \geq & \min(V((u_\epsilon - v_\epsilon)_\epsilon), V((v_\epsilon)_\epsilon))) \\ & \geq & V((v_\epsilon)_\epsilon) \\ V((v_\epsilon)_\epsilon) & = & V((v_\epsilon - u_\epsilon + u_\epsilon)_\epsilon) \\ & \geq & \min(V((v_\epsilon - u_\epsilon)_\epsilon), V((u_\epsilon)_\epsilon)) \\ & \geq & V((u_\epsilon)_\epsilon) \end{array}$$

d'où $V((u_\epsilon)_\epsilon) = V((v_\epsilon)_\epsilon)$. $\square$

**Définition 1.3.3.** *L'aplication*

$$\begin{array}{rcl} V_{\tilde{\mathbb{C}}} : \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & ]-\infty, +\infty] \\ u & \longmapsto & V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u) = V((u_\epsilon)_\epsilon) \end{array} \tag{1.5}$$

*est appeleé une valuation sur $\tilde{\mathbb{C}}$*

**Proposition 1.3.4.** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} |.|_e : \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & [0, +\infty[ \\ u & \longmapsto & |u|_e = e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u)} \end{array} \tag{1.6}$$

*vérifie*

**i)** $|u|_e = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

**ii)** $|\lambda\mu|_e \leq |\lambda|_e |\mu|_e,\ \forall \lambda, \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$

**iii)** $|\lambda\mu|_e = |\lambda|_e |\mu|_e,\ \forall \lambda = [(c\epsilon^a)_\epsilon],\ c \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{R},\ et\ \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$

**iv)** $|\lambda + \mu|_e \leq \max(|\lambda|_e, |\mu|_e),\ \forall \lambda, \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$.

***Preuve.*** **i)**

$$\begin{aligned} |\lambda|_e = 0 &\iff e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)} = 0 \\ &\iff V_{\tilde{\mathbb{C}}}((\lambda_\epsilon)_\epsilon) = +\infty \\ &\iff (\lambda_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N} \\ &\iff \lambda = 0 \end{aligned}$$

**ii)**

$$\begin{aligned} |\lambda\mu|_e &= e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}((\lambda_\epsilon)_\epsilon(\mu_\epsilon)_\epsilon)} \\ &\leq e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\mu)} \\ &\leq e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)}e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\mu)} \\ &\leq |\lambda|_e|\mu|_e \end{aligned}$$

**iii)**

$$\begin{aligned} |[(c\epsilon^a)_\epsilon]\mu|_e &= e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}((c\epsilon^a)_\epsilon(\mu_\epsilon)_\epsilon)} \\ &= e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}((c\epsilon^a)_\epsilon)-V_{\tilde{\mathbb{C}}}((\mu_\epsilon)_\epsilon)} \\ &= e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}((c\epsilon^a)_\epsilon)}e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}((\mu_\epsilon)_\epsilon)} \\ &= |\lambda|_e|\mu|_e \end{aligned}$$

**iv)**

$$\begin{aligned} |\lambda+\mu|_e = e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda+\mu)} &\leq e^{\max(-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda),-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\mu))} \\ &\leq \max(e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)}, e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\mu)}) \\ &\leq \max(|\lambda|_e, |\mu|_e) \end{aligned}$$

. □

**Définition 1.3.5.** *La topologie sur $\tilde{\mathbb{C}}$ est la topologie la moins fine qui rend l'application*

$$\begin{aligned} |.|_e : \tilde{\mathbb{C}} &\longrightarrow [0,+\infty[ \\ u &\longmapsto |u|_e = e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

*continue.*

**Proposition 1.3.6. i)** *Un sous-ensemble de $\tilde{\mathbb{C}}$ est un ouvert si et seulement s'il est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$.*

**ii)** *La famille $(B_{\epsilon^n}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base un voisinage de l'origine dans $\tilde{\mathbb{C}}$, où*

$$B_{\epsilon^n}(0) = \{\lambda \in \tilde{\mathbb{C}} : |u|_e = \epsilon^n\}$$

***Preuve.*** □

Facile.

**Proposition 1.3.7.** *La topologie $(\tilde{\mathbb{C}}, |.|_e)$ est compatible avec la structure d'anneau, i.e. les applications*

$$\begin{array}{rcl} S : \tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \\ M : \tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

*sont continues quand on munit $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$ par la topologie produit.*

***Preuve.*** On munit $\tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}}$ par la topologie produit . Alors les applications

$$\begin{array}{rcl} S : \tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto & \lambda + \mu \\ M : \tilde{\mathbb{C}} \times \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto & \lambda\mu \end{array}$$

sont continues. Car $|\lambda + \mu|_e \leq \max(|\lambda|_e, |\mu|_e)$, implique la continuité de S et $|\lambda\mu|_e \leq |\lambda|_e|\mu|_e$, implique la continuité de M □

## 1.4 $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques

**Définition 1.4.1.** *Soit $A$ un anneau, on appelle A-module, la donné d'un groupe abélien $(\mathcal{G}, +)$ muni de la multiplication*

$$\begin{array}{rcl} A \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

*tels que, pour tous $\lambda, \mu \in A$ et $u, v \in \mathcal{G}$ on a*

**i)** $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

**ii)** $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

**iii)** $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

**iv)** $1u = u$.

**Remarque 1.4.2.** *Si on prend $A = \tilde{\mathbb{C}}$, on dit $\tilde{\mathbb{C}}$-module.*

**Exemple 1.4.3.** *$\tilde{\mathbb{C}}$ est un module sur lui-même*

**Définition 1.4.4.** *Un sous-ensemble $A$ d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$ est dit*

**1)** *$\tilde{\mathbb{C}}$-absorbant si pour tout $u \in \mathcal{G}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A$ pour tout $b \leq a$.*

**2)** *$\tilde{\mathbb{C}}$-équilibré si $\lambda A \subset A$ pour tout $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$ tel que $|\lambda|_e \leq 1$.*

**Définition 1.4.5.** *Une topologie $\tau$ d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module est dite $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire, si les applications*

$$\begin{array}{rcl} S : \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \\ M : \tilde{\mathbb{C}} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

*sont continues quand on munit $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ et $\tilde{\mathbb{C}} \times \mathcal{G}$ par les topologies produits. Dans ce cas $(\mathcal{G}, \tau)$ est dit un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique.*

**Proposition 1.4.6.** *Soient $u_0 \in \mathcal{G}$ et $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, $\lambda$ inversible, alors les applications suivantes*

$$\begin{array}{rcl} S_{u_0} : (\mathcal{G}, \tau) & \longrightarrow & (\mathcal{G}, \tau) \\ u & \longmapsto & u + u_0 \\ M_\lambda : (\mathcal{G}, \tau) & \longrightarrow & (\mathcal{G}, \tau) \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

*sont des homéomorphismes.*

***Preuve**.* Montrons que $S_{u_0}$ et $M_\lambda$ sont bijectives et bicontinues. Les applications inverses sont $S_{u_0}^{-1}(u) = u - u_0 = S_{-u_0}(u)$ et $M_\lambda^{-1}(u) = \acute{\lambda} u = M_{\acute{\lambda}}(u)$. On a $S_{u_0} = S(., u_0)$ et $M_\lambda = M(\lambda, .)$. D'où la continuité de $S_{u_0}$ et $M_\lambda$ car $\mathcal{G}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique. $\square$

**Proposition 1.4.7.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $B$ une base de voisinage de l'origine, alors pour tout $U \in B$ on a*

**i)** *$U$ est absorbant.*

**ii)** *Il existe $V \in B$ tel que $V + V \subset U$.*

**iii)** *Il existe $W$ voisinage de l'origine , équilibré tel que $W \subset U$.*

***Preuve.*** **i)** Soit $U \in B$ et $a \in \mathcal{G}$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} H_a : \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda a \end{array}$$

$H_a = M(.,a)$ est continue, en particulier pour $\lambda = 0_{\tilde{\mathbb{C}}}$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $\lambda a \in U$, pour tout $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, $|\lambda|_e \leq \eta$. D'où $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]a \in U$, pour tout $b \leq \log \eta$. Ainsi $a \in [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, $b \leq \log \eta$. Ce qui prouve que U est absorbant.

**ii)** Soit $U \in B$, l'application

$$\begin{array}{rcl} S : \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (x,y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

est continue, en particulier en $(0,0)$. Alors il existe $V_1, V_2 \in B$ tel que $V_1 + V_2 \subset U$. Comme B est une base , il existe $V \in B$ tel que $V \subset V_1 \cap V_2$, d'où $V + V \subset V_1 + V_2 \subset U$, ce qui prouve (ii)

**iii)** Soit $U \in B$, l'application

$$\begin{array}{rcl} M : \tilde{\mathbb{C}} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

est continue, en particulier en (0, 0), alors il existe $\eta > 0$ et $V \in B$ tel que $\lambda V \subset U$, pour tout, $|\lambda|_e \leq \eta$. Posons

$$W = \bigcup_{|\lambda|_e \leq \eta} \lambda V.$$

I. Par construction on a $W \subset$ U

II. W est un voisinage de l'origine puisque $\left|(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon\right|_e = \eta$, $[(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]$ est inversible et $[(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]V \subset W$

III. W équilibré car $\forall \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$, $|\mu|_e \leq 1$ on a

$$\mu W \subset \bigcup_{|\lambda|_e \leq \eta} \mu\lambda V.$$

puisque $|\mu\lambda|_e \leq |\lambda|_e |\mu|_e \leq |\lambda|_e \leq \eta$. Donc

$$\mu W \subset \bigcup_{|\lambda|_e \leq \eta} \lambda V = W$$

$\square$

**Proposition 1.4.8.** *Si $\mathcal{G}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $B$ une base de voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, alors*

$$\bigcap_{V \in B} V = \{0\}$$

*si et seulement si $\mathcal{G}$ est séparé.*

***Preuve***. ($\Rightarrow$) Comme $\mathcal{G}$ est séparé, alors $\forall x \neq 0$, $\exists W \in$ *V(o)* tel que $x \notin W$. Or B est une base , il existe $V \in B$ tel que $V \subset W$. Donc $x \notin V$, ainsi

$$x \notin \bigcap_{V \in B} V.$$

($\Leftarrow$) Soit $x \neq 0$, alors

$$x \notin \bigcap_{V \in B} V,$$

il existe $V \in B$ tel que $x \notin V$, donc $\mathcal{G}$ est séparé. $\square$

**Définition 1.4.9.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $M$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module de $\mathcal{G}$. On appelle topologie quotient sur $\mathcal{G}/M$, la plus fine topologie qui rend la surjection cannonique*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}/M \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \overline{x} \end{array}$$

*continue.*

**Proposition 1.4.10.** *Un sous-ensemble $\Omega$ de $\mathcal{G}/M$ sera dit ouvert si et seulement si $\varphi^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathcal{G}$.*

***Preuve*.** Facile. □

**Proposition 1.4.11.** *Soit $\mathcal{G}/M$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique quotient où $M$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module de $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G}/M$ est séparé si et seulement si $M$ est fermé.*

***Preuve*.** ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{G}/M$ est séparé, alors $\{\bar{0}\}$ est fermé, donc $M = \varphi^{-1}(\{\bar{0}\})$ est fermé dans $\mathcal{G}$, où $\varphi$ est la surjection cannonique.
($\Longleftarrow$) Si M est fermé, $\bar{x} = \varphi(x) \neq \bar{0}$. Alors $x \notin M$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $U \cap M = \phi$. D'où $\bar{x} - \varphi(U)$ est un voisinage de $\bar{0}$, ne contient pas $\bar{x}$, donc $\mathcal{G}/M$ est séparé. □

**Définition 1.4.12.** *Soient $(E, \tau)$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $\mathcal{F}$ un filtre de $E$. On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy si $\forall V \in \mathcal{V}(0), \exists F \in \mathcal{F}$ tel que $F - F \subset V$.*

**Proposition 1.4.13.** *Tout filtre convergent est un filtre de Cauchy.*

***Preuve*.** Supposons $\mathcal{F}$ est un filtre en A qui converge vers $a \in A$. Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$, il existe W un voisinage équilibré de 0 dans $\mathcal{G}$, tel que $W + W \subset V$. Alors il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \subset a + W$, d'où $F - F \subset V$ car si $x, y \in F$ on a
$x - y = (x - a) - (y - a) \in W - W = W + W \subset V$. □

**Définition 1.4.14.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique , $a \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ un filtre dans $\mathcal{G}$. On dit que a adhère $\mathcal{F}$ si,$\forall A \in \mathcal{F}, a \in \overline{A}$.*

**Proposition 1.4.15.** *Si $a \in \mathcal{G}$ adhère à un filtre de Cauchy $\mathcal{O}$ en $A$, alors $\mathcal{O}$ converge vers $a$.*

***Preuve*.** Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$, il existe W un voisinage équilibré de 0 dans $\mathcal{G}$, tel que $W + W \subset V$. Alors il existe $F \in \mathcal{O}$ tel que $F - F \subset W$. D'autre part $F \cap (a + W) \neq \emptyset$, soit $y \in F \cap (a + W)$. Montrons $F \subset a + V$. Soit $z \in F$, $z = z - y + y$

$$\begin{aligned} z - y \in W \quad &\Rightarrow \quad z \in y + W \\ &\Rightarrow \quad z \in a + W + W \\ &\Rightarrow \quad z \in a + V \end{aligned}$$

. □

## 1.5 $\tilde{\mathbb{C}}$-modules localement convexes

**Définition 1.5.1.** *Un sous-ensemble $A$ d'un $\tilde{\mathbb{C}}-$ module $\mathcal{G}$ est dit*

**1)** $\tilde{\mathbb{C}}$*-convexe, si $A + A \subset A$ et $[(\epsilon^b)_\epsilon]A \subset A$, pour tout $b \geq 0$*

**2)** $\tilde{\mathbb{C}}$*-absolument convexe, s'il est convexe et équilibré.*

**Proposition 1.5.2.** *L'intersection quelconque de convexes dans un $\tilde{\mathbb{C}}-$ module est convexe.*

***Preuve***. Soit $(A_\alpha)_\alpha$ une famille quelconque de convexes

**1)** Montrons

$$\bigcap_\alpha A_\alpha + \bigcap_\alpha A_\alpha \subset \bigcap_\alpha A_\alpha.$$

Comme $A_\alpha$ est convexe, $\forall \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
\bigcap_\alpha A_\alpha &\subset A_\alpha \\
\bigcap_\alpha A_\alpha + \bigcap_\alpha A_\alpha &\subset A_\alpha + A_\alpha \\
\bigcap_\alpha A_\alpha + \bigcap_\alpha A_\alpha &\subset A_\alpha \\
\bigcap_\alpha A_\alpha + \bigcap_\alpha A_\alpha &\subset \bigcap_\alpha A_\alpha
\end{aligned}$$

**2)** Montrons

$$[(\epsilon^b)_\epsilon] \bigcap_\alpha A_\alpha \subset \bigcap_\alpha A_\alpha,$$

pour tout $b \geq 0$.

$$\begin{aligned}
[(\epsilon^b)_\epsilon] \bigcap_\alpha A_\alpha &\subset [(\epsilon^b)_\epsilon] A_\alpha \\
&\subset A_\alpha \\
&\subset \bigcap_\alpha A_\alpha.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.5.3. i)** *Si $0 \in A$, alors $A$ est convexe si et seulement si $[(\epsilon_1^b)_\epsilon]A + [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]A \subset A$, pour tout $b_1, b_2 \geq 0$.*

**ii)** *Si A est $\tilde{\mathbb{C}}-$équilibré, alors A est $\tilde{\mathbb{C}}-$convexe si et seulement si $\lambda A+\mu A \subset A$, $\forall \lambda, \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$, $\max(|\lambda|_e, |\mu|_e) \leq 1$.*

***Preuve.*** **i)** $(\Rightarrow)$ Supposons A est convexe , alors $[(\epsilon^{b_1})]A \subset A$ et $[(\epsilon^{b_2})]A \subset A$ où $b_1 \geq 0$ et $b_2 \geq 0$, donc $[(\epsilon^{b_1})]A + [(\epsilon^{b_2})]A \subset A + A \subset A$.
$(\Leftarrow)$ Prenons $b_1 = b_2 = 0$, alors $A + A \subset A$. Posons $b_1 = 0$ et $b_2 = b$, ainsi $[(\epsilon^{b})]A \subset A$, d'où A est convexe.

**ii)** $(\Rightarrow)$ Comme A équilibré , alors $\lambda A \subset A$ et $\mu A \subset A$ , d'où $\lambda A + \mu A \subset A + A \subset A$.
$(\Leftarrow)$ $\lambda = \mu = 1$ donne $A + A \subset A$. Prenons $\lambda = 0, \mu = [(\epsilon^b)_\epsilon], b \geq 0$, alors $[(\epsilon^b)]A \subset A$

□

**Définition 1.5.4.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique est dit localement convexe s'il admet une base de voisinages de l'origine formée d'ensembles convexes.*

**Définition 1.5.5.** *On appelle enveloppe convexe d'un ensemble A noté $\Gamma(A)$, l'intersection de tous les convexes contenant A.*

**Proposition 1.5.6.** *L'enveloppe convexe $\Gamma(A)$ est identique à l'ensemble H des éléments de la forme*

$$\sum_{k=1}^{n} [(\epsilon^{b_k})_\epsilon] a_k,$$

*où $b_k \geq 0$ et $a_k \in A$*

***Preuve.*** Montrons $H \subset \Gamma(A)$. Raisonnons par récurrence. Pour $n = 1$, $b = [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]a_1$, $a_1 \in A$ et $b_1 \geq 0$, $b \in \Gamma(A)$ car $A \subset \Gamma(A)$ et $\Gamma(A)$ convexe.
Supposons la vraie pour (n-1)

$$\sum_{k=1}^{n} [(\epsilon^{b_k})_\epsilon] a_k = \sum_{k=1}^{n-1} [(\epsilon^{b_k})_\epsilon] a_k + [(\epsilon^{b_n})_\epsilon] a_n,$$

l'hypothèse de récurrence montre que

$$\sum_{k=1}^{n-1} [(\epsilon^{b_k})_\epsilon] a_k \in \Gamma(A)$$

et $[(\epsilon^{b_n})_\epsilon] a_n \in \Gamma(A)$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} [(\epsilon^{b_k})_\epsilon] a_k \in \Gamma(A) + \Gamma(A) \subset \Gamma(A).$$

Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de prouver que H est convexe

$$\sum_{k=1}^{n}[(\epsilon^{b_k})_\epsilon]a_k + \sum_{i=1}^{m}[(\epsilon^{c_i})_\epsilon]a_i \in H$$

i.e. $H + H \subset H$ et

$$[(\epsilon^{b})_\epsilon](\sum_{k=1}^{n}[(\epsilon^{b_k})_\epsilon]a_k) = \sum_{k=1}^{n}[(\epsilon^{b+b_k})_\epsilon]a_k$$

d'où $[(\epsilon^{b})_\epsilon]H \subset H$. □

**Proposition 1.5.7.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe admet une base de voisinages de l'origine formée d'ensembles absorbants et absolument convexes.*

***Preuve.*** Soit U un voisinage de l'origine. Comme $\mathcal{G}$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-localement convexe, alors U contient un voisinage de l'origine $\tilde{\mathbb{C}}$-convexe W, puis W contient un voisinage $\tilde{\mathbb{C}}$- équilibré E. Soit $\Gamma(E)$ l'enveloppe convexe de E, on sait $\Gamma(E)$ équilibré et $E \subseteq W \Rightarrow \Gamma(E) \subset \Gamma(W) = W$(car W est convexe ). D'où $\Gamma(E)$ est un voisinage de l'origine $\tilde{\mathbb{C}}$-équilibré, convexe et absorbant tel que $\Gamma(E) \subseteq U$. □

**Définition 1.5.8.** *Dans $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe .*

**1)** *On appelle tonneau tout ensemble absorbant, équilibré, convexe et fermé.*

**2)** *$\mathcal{G}$ est dit tonnelé, si tout tonneau est un voisinage de l'origine.*

**Proposition 1.5.9.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe de Baire est tonnelé.*

***Preuve.*** Soit B un tonneau, comme B est absorbant, alors

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[(\epsilon^{-n})_\epsilon]B$$

où $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]B$ est un fermé dans $\mathcal{G}$, car $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]$ est inversible. Comme $\mathcal{G}$ est de Baire, alors il existe $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]B$ d'intérieur non vide. Comme l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & u & \longmapsto & [(\epsilon^{n})_\epsilon]u \end{array}$$

est continue, alors $\emptyset \neq f(\overbrace{[(\epsilon^{-n})_\epsilon]B}^{0}) \subset \overbrace{f([(\epsilon^{-n})_\epsilon]B)}^{0} = B^0$, ce qui implique $B^0 \neq \emptyset$, il existe V un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ tel que $u_0 + V \subset B$; comme B est équilibré, alors $-u_0 \in B$, ainsi par la convexité de B on a $V = -u_0 + u_0 + V \subset B + B \subset B$. Ce qui prouve que B est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. □

## 1.6 $\tilde{\mathbb{C}}$-espaces ultra-pseudo-seminormés

**Définition 1.6.1.** *Une ultra-pseudo-seminorme sur un $\tilde{\mathbb{C}}$-module est une application*
$\mathcal{P} : \mathcal{G} \longrightarrow [0, +\infty)$ *vérifiant*

**i)** $\mathcal{P}(0) = 0$

**ii)** $\mathcal{P}(\lambda u) \leq |\lambda|_e \mathcal{P}(u)$, *pour tout* $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, $u \in \mathcal{G}$

**iii)** $\mathcal{P}(\lambda u) = |\lambda|_e \mathcal{P}(u)$, *pour tout* $\lambda = [(c\epsilon^a)_\epsilon]$, $c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{G}$

**iv)** $\mathcal{P}(u + v) \leq \max(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(v))$

**Remarque 1.6.2.** *Une ultra-pseudo-norme est une ultra-pseudo-seminorme tel que $\mathcal{P}(u) = 0$ implique $u = 0$.*

**Exemple 1.6.3.** $|.|_e$ *est une ultra-pseudo-norme sur* $\tilde{\mathbb{C}}$

**Définition 1.6.4.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module. Une valuation sur $\mathcal{G}$ est une application $V : \mathcal{G} \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ vérifiant*

**i)** $V(0) = +\infty$

**ii)** $V(\lambda u) \geq V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda) + V(u)$, $\forall \lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, $\forall u \in \mathcal{G}$

**iii)** $V(\lambda u) = V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda) + V(u)$, *pour tout* $\lambda = [(c\epsilon^a)_\epsilon]$, $c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{G}$

**iv)** $V(u + v) \geq \min\{V(u), V(v)\}$

**Proposition 1.6.5.** *Soit $V$ une valuation sur un $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{P}(u) = e^{-V(u)}$ est une ultra-pseudo-seminorme.*

***Preuve.*** Pour tous $\lambda, \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$ et $u, v \in \mathcal{G}$ on a

**1)** Puisque V est une valuation, alors $V(0) = +\infty$. Ce qui donne $\mathcal{P}(0) = 0$

**2)**

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\lambda u) &= e^{-V(\lambda u)}\\ &\leq e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)-V(u)}\\ &\leq e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)}e^{-V(u)}\\ &\leq |\lambda|_e \mathcal{P}(u).\end{aligned}$$

**3)**

$$\begin{aligned}\mathcal{P}([(c\epsilon^a)_\epsilon]u) &= e^{-V([(c\epsilon^a)_\epsilon]u)}\\ &= e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}([(c\epsilon^a)_\epsilon])-V(u)}\\ &= e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}([(c\epsilon^a)_\epsilon])}e^{-V(u)}\\ &= |[(c\epsilon^a)_\epsilon]|_e \mathcal{P}(u).\end{aligned}$$

**4)**

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(u+v) &= e^{-V(u+v)}\\ &\leq e^{-\min(V(u),V(v))}\\ &\leq \max(e^{-V(u)}, e^{-V(v)})\\ &\leq \max(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(v))\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.6.6.** *Soit $A$ un ensemble absolument convexe et absorbant d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$. Alors*

$$V_A(u) = \sup\{b \in \mathbb{R} : u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A\} \tag{1.8}$$

*est une valuation sur $\mathcal{G}$. De plus, pour $\mathcal{P}_A(u) = e^{-V_A(u)}$ et $\eta > 0$ on a*

$$\{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_A(u) < \eta\} \subset [(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]A \subset \{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_A(u) \leq \eta\} \tag{1.9}$$

*$\mathcal{P}_A$ est appelé la jauge de $A$.*

***Preuve***. Comme A est absorbant, $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A$, d'où $V_A(u)$ existe.

**i** $V_A(0) + \infty$. En éffet, puisque A est équilibré alors $0 \in A$, donc $\forall b \in \mathbb{R}$, $0 \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A$, d'où $V_A(0) = +\infty$

**ii** Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A$ et $\lambda u = [(\epsilon^{b+V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)})_\epsilon]\lambda[(\epsilon^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)})_\epsilon][(\epsilon^{-b})_\epsilon]u$. Comme $\left|\lambda[(\epsilon^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)})_\epsilon]\right|_e = e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda[(\epsilon^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)})_\epsilon])} = e^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)} \times e^{-V((\epsilon^{-V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)})_\epsilon)} = |\lambda|_e e^{V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)} = 1$. D'où $\lambda u \in [(\epsilon^{b+V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)})_\epsilon]A$, car A équilibré et $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]u \in A$, ainsi $V_A(\lambda u) \geq b + V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)$, $\forall b \in \mathbb{R}$ tel que $u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A$, i.e., $V_A(\lambda u) \geq V_A(u) + V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda)$

**iii** En particulier si $\lambda = [(c\epsilon^a)_\epsilon]$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A$, alors

$$\begin{aligned} u &= [\frac{1}{c}(\epsilon^{-a})_\epsilon][(\epsilon^b)_\epsilon][(\epsilon^{-b})_\epsilon][c(\epsilon^a)_\epsilon]u \\ &= [\frac{1}{c}(\epsilon^{-a+b})_\epsilon][(\epsilon^{-b})_\epsilon][c(\epsilon^a)_\epsilon]u \\ &= [\frac{1}{c}(\epsilon^{-a+b})_\epsilon]u', \end{aligned} \tag{1.10}$$

puisque $u' \in A$, 1.10 implique

$$\begin{aligned} V_A(u) &\geq -a+b \\ &\geq -V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda) + b \end{aligned}$$

D'où $V_A(u) \geq -V_{\tilde{\mathbb{C}}}(\lambda) + V_A(\lambda u)$

**iv** Soient $u, v \in \mathcal{G}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $u \in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]A$ et $v \in [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]A$, il s'entuit que $u + v \in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]A + [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]A$. Nous savons que $u + v \in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon](A + [(\epsilon^{b_2-b_1})_\epsilon]A)$, supposons que $b_2 - b_1 \geq 0$, puisque A est convexe, alors $[(\epsilon^{b_2-b_1})_\epsilon]A \subset A$ et $A + [(\epsilon^{b_2-b_1})_\epsilon]A \subset A + A \subset A$. D'où$[(\epsilon^{b_1})_\epsilon](A + [(\epsilon^{b_2-b_1})_\epsilon]A) \subset [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]A$ i.e $u + v \in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]A$, ce qui implique $V_A(u+v) \geq b_1$, pour tout $b_1 \in \mathbb{R}$ tels que $u \in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]A$, d'où $V_A(u+v) \geq V_A(u)$, ce qui implique $V_A(u+v) \geq \min\{V_A(u), V_A(v)\}$

**v** Prouvons 1.9

**a)** soit $u \in \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{P}_A(u) < \eta \Rightarrow V_A(u) > -\log\eta$, d'où $u \in [(\epsilon^{-\log\eta})_\epsilon]A$, donc $\{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_A(u) < \eta\} \subset [(\epsilon^{-\log\eta})_\epsilon]A$

**b)** $u \in [(\epsilon^{-\log\eta})_\epsilon]A \Rightarrow \mathcal{P}_A(u) \leq \eta$, donc $[(\epsilon^{-\log\eta})_\epsilon]A \subset \{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_A(u) \leq \eta\}$

□

**Proposition 1.6.7.** *Soit $\mathcal{P}$ une ultra-pseudo-seminorme sur un $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$. Alors l'ensemble $V = \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{P}(x) \leq 1\}$ est absorbant, équilibré et convexe.*

***Preuve*.** **i)** $\forall x \in V$, $\forall \lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$ tel que $|\lambda|_e \leq 1$ on a
$\mathcal{P}(\lambda x) \leq |\lambda|_e \mathcal{P}(x) \leq \mathcal{P}(x) \leq 1$
ce qui prouve que V est équilibré.

**ii)** Si $\mathcal{P}(x) = \alpha \neq 0$, alors $\mathcal{P}([(\epsilon^{\log \alpha})_\epsilon]x) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{P}(x) = 1$. D'où $[(\epsilon^{\log \alpha})_\epsilon]x \in V$, alors $x \in [(\epsilon^{-\log \alpha})_\epsilon]V$, ainsi $x \in [(\epsilon^{b})_\epsilon]V$, $\forall b \leq -\log \alpha$, ce qui prouve que V est absorbant.

**iii)** On a $0 \in V$, soit $u, v \in V$ et $b_1, b_2 \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}([(\epsilon^{b_1})_\epsilon]u + [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]v) &\leq \max(\mathcal{P}([(\epsilon^{b_1})_\epsilon]u), \mathcal{P}([(\epsilon^{b_2})_\epsilon]v)) \\ &\leq \max(e^{-b_1}\mathcal{P}(u), e^{-b_2}\mathcal{P}(v)) \\ &\leq \max(\mathcal{P}(u), \mathcal{P}(v)) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

D'où $[(\epsilon^{b_1})_\epsilon]V + [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]V \subset V$ ce qui prouve que V est convexe.

□

**Theorem 1.6.8. i)** *Soit $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ une famille d'ultra-pseudo-seminormes sur un $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$. Alors on munit $\mathcal{G}$ d'une structure topologique localement convexe, la moins fine qui rend les $\mathcal{P}_i$ continues.*

**ii)** *Dans un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe , la topologie est induite par la famille des ultra-pseudo-seminorme $(\mathcal{P}_U)_{U\in\mathcal{U}}$, où $\mathcal{U}$ est une base de voisinages de l'origine formée d'absorbants et absoluments convexes.*

***Preuve*.** Soit $V_i = \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_i(x) \leq 1\}$, alors les intersections finies des $\epsilon V_i$, $\epsilon > 0$ forme une base de voisinages de l'origine d'une topologie localement convexe, la moins fine qui rend les $\mathcal{P}_i$ continues.
Comme $\mathcal{P}_i(u + v) \leq \max(\mathcal{P}_i(u), \mathcal{P}_i(v))$, alors $S : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ est continue et $\mathcal{P}_i(\lambda u) \leq |\lambda|_e \mathcal{P}_i(u)$ implique $M : \tilde{\mathbb{C}} \times \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ est continue, d'où la topologie forte est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire sur $\mathcal{G}$.
Soit $\tau$ la topologie initiale de $\mathcal{G}$ et $\tau'$ la topologie induite par $(\mathcal{P}_U)_{U\in\mathcal{U}}$, d'aprés 1.9 on a $\{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_U(u) < \eta\} \subset [(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]U$, cela implique que U est un voisinage de 0 pour $\tau'$, donc est plus fine que $\tau$. D'autre part $[(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]U \subset \{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_U(u) \leq \eta\}$, cela implique que $\mathcal{P}_U$ est continue pour $\tau$ , donc $\tau$ est plus fine que $\tau'$. □

**Proposition 1.6.9.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ une famille d'ultra-pseudo-seminormes qui définie la topologie de $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G}$ est séparé si et seulement si $\forall u \in \mathcal{G}, u \neq 0$, $\exists i \in I$ tel que $P_i(u) \neq 0$*

***Preuve***. Supposons $\mathcal{G}$ séparé et $u \neq 0$, $\exists \epsilon > 0$, $I_0$ finie tel que

$$u \notin \bigcap_{i \in I_0} \{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_i(u) \leq \epsilon\},$$

donc $\exists i_0 \in I_0$ tel que $\mathcal{P}_{i_0}(u) > \epsilon$, d'où $\mathcal{P}_{i_0}(u) \neq 0$.
Réciproquement soit $a \neq 0$, alors il existe $i \in I$ tel que $\mathcal{P}_i(a) \neq 0$, posons $\alpha = \mathcal{P}_i(a) \neq 0$, soit $\epsilon < \alpha$, considérons $\mathcal{B}_{\epsilon,\mathcal{P}} = \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_i(u) \leq \epsilon\}$ qui est un voisinage de l'origine et $a \notin \mathcal{B}_{\epsilon,\mathcal{P}}$. D'où $\mathcal{G}$ est séparé. □

## 1.7 Application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires

**Définition 1.7.1.** *Soient E et F deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules et T une application de E dans F. T est dite application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire de E dans F, si*

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{C}} : T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

**Proposition 1.7.2.** *Soit E et F deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques. u une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire de E dans F, alors u est continue par tout si et seulement si u est continue à l'origine.*

***Preuve***. Soit W un voisinage de 0 dans F, alors il existe V un voisinage de 0 dans E tel que $u(V) \subset W$. Donc $u(a+V) \subset u(a)+W$, pour tout $a \in E$. □

**Theorem 1.7.3.** *Soient $(\mathcal{G}, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $\mathcal{Q}$ une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

**i)** *$\mathcal{Q}$ est continue par tout.*

**ii)** *$\mathcal{Q}$ est continue à l'origine.*

**iii)** *Il existe une partie finie $I_0 \subset I$ et $c > 0$ tel que*

$$\mathcal{Q}(u) \leq c \max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u), \forall u \in \mathcal{G} \tag{1.11}$$

***Preuve***. $i) \Rightarrow ii)$ est évidente
$ii) \Rightarrow i)$ Supposons $\mathcal{Q}$ continue en 0, $u_0 \neq 0$. Alors $\forall \delta > 0$, $\exists I_0 \subset I$, finie et $\eta > 0$ tel que $\mathcal{Q}(u) \leq \delta$ si

$$\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u) \leq \eta.$$

D'où
$$\forall u \in \mathcal{G} : \max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u - u_0) \leq \eta \Rightarrow \mathcal{Q}(u - u_0) \leq \delta,$$
Or $|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(u_0)| \leq \mathcal{Q}(u - u_0)$, ce qui implique la continuité de $\mathcal{Q}$, en $u_0$
*iii)* $\Rightarrow$ *ii)*,
$$\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u) \leq \frac{\delta}{c} \Rightarrow \mathcal{Q}(u) \leq \delta,$$
ce qui implique la continuité de $\mathcal{Q}$ en 0
*ii)* $\Rightarrow$ *iii)* Si $\mathcal{Q}$ continue en 0, $\exists I_0 \subset I$, finie et $\eta > 0$ tel que
$$\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u) \leq \eta \Rightarrow \mathcal{Q}(u) \leq 1.$$
Remarquons que
$$\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}(u) = 0.$$
En éffet si $\mathcal{P}_i(u) = 0$, $\forall i \in I_0$, alors
$$0 = \left|[(\epsilon^b)_\epsilon]\right|_e \max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u) = \max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i([(\epsilon^b)_\epsilon]u)$$
et $\mathcal{Q}([(\epsilon^b)_\epsilon]u) = \left|[(\epsilon^b)_\epsilon]\right|_e \mathcal{Q}(u) = e^{-b}\mathcal{Q}(u) \leq 1$, $\forall b \in \mathbb{R}$, i.e. $\mathcal{Q}(u) \leq e^b$, $\forall b \in \mathbb{R}$, D'où $\mathcal{Q}(u) = 0$. Donc 1.11 est vérifiée. Si
$$\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u) \neq 0,$$
alors
$$\mathcal{Q}([(\epsilon^b)_\epsilon]v) = e^{-b}\mathcal{Q}(v) \tag{1.12}$$
où $a = \log(\frac{\eta}{\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u)})$, $v = [(\epsilon^{-a})_\epsilon]u$, Soit $i \in I_0$
$$\mathcal{P}_i(v) = e^a \mathcal{P}_i(u) = \frac{\eta \mathcal{P}_i(u)}{\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u)} \leq \eta;$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_i(v) \leq \eta \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{Q}(v) \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{Q}([(\epsilon^{-a})_\epsilon]u) \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad e^{\log(\frac{\eta}{\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u)})}\mathcal{Q}(u) \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\eta}{\max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u)}\mathcal{Q}(u) \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{Q}(u) \leq \frac{1}{\eta} \max_{i \in I_0} \mathcal{P}_i(u)
\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.7.4.** *La composition d'une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ et d'une ultra-pseudo-seminorme $\mathcal{Q}$ sur $\mathcal{H}$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$.*

***Preuve***. $\mathcal{Q} \circ T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q} \circ T(0) &= \mathcal{Q}(T(0)) = \mathcal{Q}(0) = 0 \\
\mathcal{Q} \circ T(\lambda u) &= \mathcal{Q}(T(\lambda u)) \leq |\lambda|_e \mathcal{Q} \circ T(u) \\
\mathcal{Q} \circ T([c(\epsilon^a)_\epsilon]u) &= \mathcal{Q}(T([c(\epsilon^a)_\epsilon]u)) = |c[(\epsilon^a)_\epsilon]|_e \mathcal{Q} \circ T(u) \\
\mathcal{Q} \circ T(u+v) &= \mathcal{Q}(T(u+v)) = \mathcal{Q}(T(u) + T(v)) \leq \max(\mathcal{Q} \circ T(u), \mathcal{Q} \circ T(v)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{Q} \circ T$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$. □

**Corollaire 1.7.5.** *Soit $(\mathcal{G}, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$, $(\mathcal{H}, (\mathcal{Q}_j)_{j\in J})$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes et une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

**i)** *$T$ est continue par tout .*

**ii)** *$T$ est continue à l'origine.*

**iii)** *$\forall j \in J$, $\exists I_0 \subset I$, finie et $c > 0$ tel que*

$$\mathcal{Q}_j(Tu) \leq c \max_{i\in I_0} \mathcal{P}_i(u), \forall u \in \mathcal{G} \tag{1.13}$$

***Preuve***. $(ii \Longrightarrow iii)$ $\mathcal{Q}_j \circ T$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$. La proposition 1.7.3 implque iii)

$(iii \Longrightarrow ii)$ Soientt $j \in J$, $\{v \in \mathcal{H} : \mathcal{Q}_j(v) \leq \epsilon\}$ qui est un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$, car $\mathcal{Q}_j$ est continue. Pour ce $j$ $\exists I_0 \subset I$, finie et $c > 0$ tel que

$$\mathcal{Q}_j(Tu) \leq c \max_{i\in I_0} \mathcal{P}_i(u), \forall u \in \mathcal{G}. \tag{1.14}$$

Alors

$$T(\{u \in \mathcal{G} : \max_{i\in I_0} \mathcal{P}_i(u) \leq \frac{\epsilon}{c}\} \subset \{v \in \mathcal{H} : \mathcal{Q}_j(v) \leq \epsilon\}.$$

□

**Définition 1.7.6.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe. On appele dual topologique de $\mathcal{G}$ , noté $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ l'ensemble défini par*

$$\{T :\ \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}},\ \tilde{\mathbb{C}}\text{-}\textit{linéaire continue}\}$$

**Proposition 1.7.7.** *Si $u \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$, alors $|u|_e$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$.*

***Preuve.*** La proposition 1.7.4 implque que $|u|_e$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$. □

## 1.8 $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet

**Définition 1.8.1.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique $\mathcal{G}$ est dit métrisable s'il existe une métrique sur $\mathcal{G}$ qui définie sa topologie.*

**Theorem 1.8.2.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé qui admet une base dénombrable de voisinages de l'origine. Alors $\mathcal{G}$ est métrisable par une métrique invariante par translation.*

***Preuve.*** Supposons que $\mathcal{G}$ est séparé et a une base dénombrable de voisinages de l'origine. Tout voisinage de l'origine contient un voisinage de l'origine absolument convexe, alors il existe une base $(\mathcal{U}_n)_n$ formée d'absolument convexes. Soit$\mathcal{P}_n$ la jauge de $\mathcal{U}_n$, posons

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \inf\{\mathcal{P}_n(x), 1\}.$$

f est bien définie car $|2^{-n} \inf\{\mathcal{P}_n(x), 1\}| \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. D'autre part puisque $\mathcal{P}_n(x+y) \leq \max(\mathcal{P}_n(x), \mathcal{P}_n(y))$ alors $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, $f(-x) = f(x)$ car $\mathcal{P}_n(-x) = \mathcal{P}_n(x)$ et $f(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_n(x) = 0, \forall n$, d'où $x = 0$ car $\mathcal{G}$ est séparé. Soit

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & f(x-y) \end{array}$$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
$d(x,y) = f(x-y) = f(-(y-x)) = f(y-x) \doteq d(y,x)$

$$\begin{array}{rcl} d(x,z) & = & f(x-z) \\ & = & f(x-y+y-z) \\ & \leq & f(x-y) + f(y-z) \\ & \leq & d(x,y) + d(y,z). \end{array}$$

D'où d est une distance.

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathcal{G}^3 : d(x+z, y+z) &= f(x-y) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

d'où d est distance in variante par translation.
Dans $(\mathcal{G}, d)$ les ensembles $V_n = \{x : d(x,0) < 2^{-n}\}$ est une base dénombrable de voisinages de l'origine. Montrons que la topologie $(\mathcal{G}, d)$ est moins fine que la topologie initiale. Pour $2^{-n} > 0$, $\exists k_n \geq 0$ tel que

$$\sum_{i=k_n+1}^{\infty} 2^{-n} < 2^{-n-1}, \tag{1.15}$$

on pose

$$\mathcal{P}(x) = \max_{0 \leq i \leq k_n} \mathcal{P}_i(x),$$

où $\mathcal{P}_i$ est la jauge de $U_i$ et $\mathcal{P}$ est une ultra-pseudo-seminorme. Alors

$$\sum_{i=0}^{+k_n} 2^{-i} \inf\{\mathcal{P}_i(x), 1\} \leq \sum_{i=0}^{+k_n} 2^{-i}\mathcal{P}_i(x) \leq (\sum_{i=0}^{+k_n} 2^{-i})\mathcal{P}(x) = S\mathcal{P}(x), \tag{1.16}$$

où

$$S = \sum_{i=0}^{+k_n} 2^{-i},$$

Posons $\theta_n = \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{P}(x) < \frac{2^{-n-1}}{S}\}$ $\theta_n$ est un voisinage de l'origine pour la topologie initiale.
Montrons $\theta_n \subset V_n$, soit $x \in \theta_n$, alors

$$\begin{aligned} d(x,0) &= \sum_{i=0}^{+k_n} 2^{-i} \inf\{\mathcal{P}_i(x), 1\} + \sum_{i=k_n+1}^{+\infty} 2^{-i} \inf\{\mathcal{P}_i(x), 1\} \\ &< 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n} \end{aligned}$$

par 1.16 et 1.15, donc $\theta_n \subset V_n$. D'où $V_n$ est un voisinage de l'origine pour la topologie initiale. Montrons maintenant que les $V_n$ forme une base de voisinage de l'origine pour la topologie initiale, i.e. $V_n \subset \mathcal{B}_n$, où $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_n(x) \leq 1\}$. Si $x \notin \mathcal{B}_n$ cela implique $\mathcal{P}_n(x) > 1$, alors $d(x,0) > 2^{-n}$ donc $x \notin V_n$ □

**Définition 1.8.3.** *Si $\mathcal{G}$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $A \subset \mathcal{G}$, $A$ est dit complet si tout filtre de Cauchy de $A$ converge vers un point de $A$.*

**Définition 1.8.4.** *Soit $\mathcal{F}$ est un filtre de $\mathcal{G}$, $A$ est une partie $\mathcal{G}$. Notons $\mathcal{B}_A$ l'ensemble défini par*

$$\mathcal{B}_A = \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$$

**Lemme 1.8.5.** *Soit $\mathcal{B}$ une base d'un filtre de cauchy. Alors $\mathcal{B}_A$ est une base d'un filtre de cauchy dans $A$ si $\forall B \in \mathcal{B} : A \cap B \neq \emptyset$*

***Preuve.*** Soit $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, V un voisinages de l'origine. alors il existe $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tel que $B_1 - B_2 \subset V$, alors $B_1 \cap A - B_2 \cap A \subset (B_1 - B_2) \cap A \subset V \cap A$. □

**Proposition 1.8.6.** *Si $A$ est une partie complète d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique séparé, alors elle est fermée.*

***Preuve.*** Soit $x \in \overline{A}$, considérons $\mathcal{F} = \{U \cap A$ :U un voisinage de x$\}$. $\mathcal{F}$ est un filtre de cauchy car

**i)** $U \cap A \neq \emptyset$, car $x \in \overline{A}$.

**ii)** $U \cap A$, $U' \cap A \in \mathcal{F}$ où U, $U'$ deux voisinages de x, on a
$(U \cap A) \cap (U' \cap A) = (U \cap U') \cap A \in \mathcal{F}$.

**iii)** Si $U \cap A \subset V \subset A$, donc $V = (U \cup V) \cap A$, d'où $V \in \mathcal{F}$.

**iv)** Soit $V$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$, il existe W un voisinage équilibré de 0 dans $\mathcal{G}$, tel que $W + W \subset V$. Alors
$(x + W) \cap A - (x + W) \cap A \subset W - W = W + W \subset V$, donc $\mathcal{F}$ est un filtre de cauchy en A . Puisque A est complet, alors $\mathcal{F}$ converge dans A . D'autre part $\mathcal{F}$ converge vers x, car il adhère $\mathcal{F}$ et comme $\mathcal{G}$ est séparé, alors $x \in A$.

□

**Proposition 1.8.7.** *Soit $A$ est une partie complète d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique, alors toute partie $B$ fermée de $A$ est complète.*

***Preuve.*** Soit B un fermé de A, $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy en B, alors $\mathcal{F}$ est une base de filtre en A. Comme A est complète, alors $\mathcal{F}$ converge vers $x \in A$, donc x adhère B , d'où $x \in B$. □

**Proposition 1.8.8.** *Si $\mathcal{G}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique métrisable , alors $\mathcal{G}$ est complet si, et seulement s'il est séquentiellement complet.*

***Preuve***. ($\Leftarrow$) Soient $\mathcal{F}$ est un filtre de cauchy, $(V_n)_n$ une base dénombrable de voisinages de l'origine ; pour tout n, il existe $F_n \in \mathcal{F}$, tel que $F_n - F_n \subset V_n$. Posons

$$M_n = \bigcap_{i=n}^{n} F_i,$$

$M_n \neq \emptyset$. Dans chaque $M_n$ on prend un $x_n$, montons que $(x_n)_n$ est de cauchy.

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_{n+p'} &\in M_n - M_n (\text{car } (M_n)_n \text{ décroissante}) \\ &\in F_n - F_n \subset V_n. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{G}$ est séquentiellement complet, alors la suite $(x_n)_n$ converge vers a. Montrons $\mathcal{F} \to a$, soit $V_n$ un voisinages de l'origine, il existe $V_k$ voisinages de l'origine tel que $V_k + V_k \subset V_n$, donc il existe $F_k \in \mathcal{F}$, tel que $F_k - F_k \subset V_n$, on affirme que $F_k \subset a + V_n$. En effet, soit $x \in F_k$, on choisit $l \geq k$ et écrivons $x = x - x_l + x_l$; alors $x \in F_k - F_k + x_l \subset V_k + x_l$. Comme $x_n \to a$, $\exists N$, $\forall n \geq N$ tel que $x_n \in V_k + a$. Prenons $l \geq \max(N, k)$, donc $x_l \in V_k + a$, ce qui implique $x \in V_k + V_k + a \subset V_n + a$. □

**Proposition 1.8.9.** $\tilde{\mathbb{C}}$ *muni de la topologie définie par l'ultra-pseudo-norme* $|.|_e$ *est complèt.*

***Preuve***. $\tilde{\mathbb{C}}$ est métrisable, alors il suffit de monter qu'il est séquentiellement complet, soit $(u_n)_n$ une suite de cauchy dans $\tilde{\mathbb{C}}$, $\exists N$, $\forall m, p \geq N$ tel que $|u_m - u_p|_e \leq \eta$, nous pouvons extraire une sous- suite $(u_{n_k})_{n_k}$ tel que $V((u_{n_{k+1},\epsilon} - u_{n_k,\epsilon})_\epsilon) > k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ; cela signifie que nous pouvons trouver $\epsilon_k \searrow 0$, $\epsilon_k \leq \frac{1}{2^k}$ telle que $\left|u_{n_{k+1},\epsilon} - u_{n_k,\epsilon}\right| \leq \epsilon^k$ sur $(o, \epsilon_k)$. Soit

$$h_{k,\epsilon} = \begin{cases} u_{n_{k+1},\epsilon} - u_{n_k,\epsilon} & \text{si } \epsilon \in (o, \epsilon_k) \\ 0 & \text{si } \epsilon \in [\epsilon_k, 1] \end{cases} \tag{1.17}$$

$(h_{k,\epsilon})_\epsilon \in \mathcal{E}_M$, puisque $|h_{k,\epsilon}| \leq \epsilon^k$ sur $(0, 1]$. En plus

$$u_\epsilon = u_{n_0,\epsilon} + \sum_{k=0}^{+\infty} h_{k,\epsilon}$$

est locallement finie et

$$|u_\epsilon| \leq |u_{n_0,\epsilon}| + \sum_{k=0}^{+\infty} |h_{k,\epsilon}| \leq |u_{n_0,\epsilon}| + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k};$$

car $|h_{k,\epsilon}| \leq \epsilon^k \leq \epsilon \leq \epsilon_k \leq \frac{1}{2^k}$ i.e. $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M$, d'où $u = [(u_\epsilon)_\epsilon] \in \tilde{\mathbb{C}}$. Montrons que $(u_{n_k})_{n_k}$ converge vers u dans $\tilde{\mathbb{C}}$. $\forall \bar{k} \geq 1$ on a

$$\left|u_{n_{\bar{k},\epsilon}} - u_\epsilon\right| = \left|-\sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} h_{k,\epsilon}\right|.$$

D'où

$$\left|u_{n_{\bar{k},\epsilon}} - u_\epsilon\right| \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \epsilon^k \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \epsilon^{k-1}\epsilon_k \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \epsilon^{\bar{k}-1}\frac{1}{2^k}$$

sur $(o, \epsilon_{\bar{k}-1})$, donc $(u_{n_{\bar{k},\epsilon}} - u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}$; ce qui implique $V((u_{n_k,\epsilon} - u_\epsilon)_\epsilon) \to +\infty$, i.e. $|u_{n_k} - u|_e \to 0$ quand $k \to +\infty$. D'autre part on a $(u_n)_n$ est de cauchy et $(u_{n_k})_k$ une sous- suite convergente vers u, alors $(u_n)_n$ converge vers u dans $\tilde{\mathbb{C}}$. □

**Définition 1.8.10.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe $\mathcal{G}$ métrisable complet est appelé de Fréchet*

**Définition 1.8.11.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module ultra-pseudo-normé complet est dit $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach.*

**Remarque 1.8.12.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet*

**Proposition 1.8.13.** $(\tilde{\mathbb{C}}, |.|_e)$ *est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach.*

***Preuve***. Comme $(\tilde{\mathbb{C}}, |.|_e)$ est un ultra-pseudo-normé et complet d'apres 1.8.9, alors est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach. □

## 1.9 Bornologie

**Définition 1.9.1.** *Soit $A$ un sous-ensemble d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique $\mathcal{G}$. $A$ est dit borné si $\forall U$ voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, pour tout $b \leq a$, i.e. $A$ est absorbé par tout voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$.*

**Proposition 1.9.2.** *Toute partie finie d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique $\mathcal{G}$ est bornée.*

***Preuve***. Considérons $A = \{u_1, .., u_N\}$. Soit U un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}$, comme U est absorbant, alors, pour tout $1 \leq i \leq N$, il existe $a_i \in \mathbb{R}$, tel que $u_i \in [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, pour tout $b \leq a_i$.
Posons

$$a = \min_{1 \leq i \leq N} a_i,$$

alors $A \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, pour tout $b \leq a$, i.e. A est borné. □

**Exemple 1.9.3.** *Si la suite $(u_n)_n$ est convergente dans $\mathcal{G}$,, alors elle est bornée dans $\mathcal{G}$.*

***Preuve***. Remarquons que , si $(u_n)_n$ converge vers u, alors on a

$$\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = u + \{u_n - u : n \in \mathbb{N}\}$$

i.e $(u_n)_n$ est l'image directe de $(u_n - u)_n$ par translation, donc il suffit de montrer pour $u = 0$. Soit U un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in U$, $\forall n \geq N$, donc $\{u_n : n \geq N\} \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, pour tout $b \leq 0$. D'autre part, $\{u_n : n \leq N\}$ est borné, alors il existe $a_1 \in \mathbb{R}$, $u_n \in [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, $\forall b \leq a_1$. Posons $a = \min(a_1, 0)$, d'où $u_n \in [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, $\forall b \leq a$, i.e. la suite $(u_n)_n$ est bornée. □

**Proposition 1.9.4.** *Soit $(\mathcal{G}, (\mathcal{P}_i)_{i\in I})$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe . $A \subset \mathcal{G}$ est borné si, et seulement si $\forall i \in I$, $\exists c_i > 0$ tel que $P_i(u) \leq c_i$, $\forall u \in A$.*

***Preuve***. Supposons $A \subset \mathcal{G}$ est borné, alors il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset [(\epsilon^{a_i})_\epsilon]\{u \in \mathcal{G} : P_i(u) \leq 1\}$. Ce qui signifie $[(\epsilon^{-a_i})_\epsilon]A \subset \{u \in \mathcal{G} : P_i(u) \leq 1\}$, d'où $P_i([(\epsilon^{-a_i})_\epsilon]u) \leq 1$, $\forall u \in A$. En appliquant (ii)' des ultra-pseudo-seminorme on obtient $|[(\epsilon^{-a_i})_\epsilon]|_e P_i(u) \leq 1$ i.e. $e^{a_i} P_i(u) \leq 1$, ce qui implique $P_i(u) \leq e^{-a_i} = c_i$.
Réciproquement, soit

$$U = \bigcap_{i \in I_0} \{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_i(u) \leq \eta_i\}$$

où $I_0 \subset I$ et finie, un voisinage de l'origine. Nous cherchons $a \in \mathbb{R}$ tel que $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]A \subset U$, $\forall b \leq a$. Soit $u \in A$; alors $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]u \in U$ si

$$e^b \mathcal{P}_i(u) \leq \eta_i, \forall i \in I_0,$$

alors il suffit

$$e^b \mathcal{P}_i(u) \leq \min_{i \in I_0} \eta_i.$$

Par hypothèse il suffit

$$e^b \max_{i \in I_0} c_i \leq \min_{i \in I_0} \eta_i,$$

donc il suffit

$$b \leq \ln \min_{i \in I_0} \eta_i - \ln \max_{i \in I_0} c_i = a.$$

□

**Theorem 1.9.5.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé qui admet un voisinage de l'origine borné, alors sa topologie est définie par une ultra-pseudo-norme.*

***Preuve***. Supposons $\mathcal{G}$ admet un voisinage de l'origine borné U, alors il existe un voisinage de l'origine absorbant et absolument convexe V inclu dans U, d'où V est borné. Soit W un voisinage de l'origine, alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $V \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]W$, $\forall b \leq a$, ce qui signifie $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]V \subset W$. Alors $\{[(\epsilon^d)_\epsilon]V\}_{d \in \mathbb{R}}$ est une base de voisinages de l'origine dans $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{P}_V$ détermine la topologie de $\mathcal{G}$. Comme il est séparé, alors $\forall x \in \mathcal{G}$, $x \neq 0$ implique $\mathcal{P}_V(x) \neq 0$, i.e. $\mathcal{P}_V$ est une ultra-pseudo-norme. □

**Définition 1.9.6.** *Une application d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique dans un autre $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique est dite bornée si l'image d'un borné est bornée.*

**Proposition 1.9.7.** *Soit $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques et u une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$, alors u est bornée.*

***Preuve***. Soit V un voisinage de l'origine dans $\mathcal{H}$, alors $u^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$. Si B est un borné de $\mathcal{G}$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $B \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]u^{-1}(V)$, $\forall b \leq a$, d'où $u(B) \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]V$, $\forall b \leq a$. □

**Définition 1.9.8.** *Un sous-ensemble $S$ d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique $\mathcal{G}$, qui absorbe tout borné est dit bornivore, i.e. $\forall B$ borné, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $B \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]S$, $\forall b \leq a$*

**Définition 1.9.9.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe $\mathcal{G}$ est dit bornologique si tout bornivore absolument convexe est un voisinage de l'origine.*

**Proposition 1.9.10.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module bornologique, $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

**i)** *$T$ est bornée.*

**ii)** *$T$ est continue.*

***Preuve***. On sait que ($II \Longrightarrow I$) et montrons que ($I \Longrightarrow II$). Soit V un absolument convexe voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$ et A un borné de $\mathcal{G}$, donc $T(A)$ est un borné de $\mathcal{H}$, alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $T(A) \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]V$, $\forall b \leq a$. D'où $A \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]T^{-1}(V)$, $\forall b \leq a$, donc $T^{-1}(V)$ est un bornivore, or $T^{-1}(V)$ est absolument convexe d'où $T^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. Ce qui implique la continuité de T. □

**Proposition 1.9.11.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module localement convexe topologique qui admet une base dénombrable de voisinages de l'origine est bornologique.*

***Preuve***. Soit $(V_n)_n$ une suite décroissante de voisinages équilibrés de l'origine de $\mathcal{G}$. U un absolument convexe et bornivore, montrons qu'il $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $[(\epsilon^n)_\epsilon]V_n \subset U$. Supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n$ tel que $u_n \in [(\epsilon^n)_\epsilon]V_n$ et $u_n \notin U$, donc $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]u_n \in V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. D'où $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]u_n$ converge vers 0 de $\mathcal{G}$; car si V est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{n_0} \subset V$, donc $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]u_n \in V_n \subset V_{n_0} \subset V$, $\forall n \geq n_0$. Alors $A = \{[(\epsilon^{-n})_\epsilon]u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est bornée de $\mathcal{G}$, mais U n'absorbe pas A, si non $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset [(\epsilon^a)_\epsilon]U$, alors $[(\epsilon^{-n})_\epsilon]u_n \in [(\epsilon^a)_\epsilon]U \Longrightarrow u_n \in [(\epsilon^{a+n})_\epsilon]U$; pour n suffisament grand tel que $n + a \geq 0$, donc $u_n \in [(\epsilon^{a+n})_\epsilon]U \subset [(\epsilon^0)_\epsilon]U = U$. Ce qui contredit la construction de $(u_n)_n$. □

**Corollaire 1.9.12.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet est bornologique.*

***Preuve***. Puisque un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet est métrisable , alors il admet une base dénombrable de voisinages de l'origine. La proposition 1.9.11 implique qu'il est bornologique. □

**Lemme 1.9.13.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $A \subset \mathcal{G}$. Alors $A$ est bornée si et seleument si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de $A$ et $(\lambda_n)_n$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$ converge vers 0, alors $(\lambda_n u_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{G}$*

***Preuve***. (du lemme )Supposons A est bornée dans $\mathcal{G}$ . Soit $V$ voisinage absolument convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$ , alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset [(\epsilon^a)_\epsilon]V$, donc $\mathcal{P}_V(u) \leq e^{-a}$, $\forall u \in A$ et $\mathcal{P}_V(\lambda u) \leq |\lambda|_e \mathcal{P}_V(u)$, $\forall \lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$ et $u \in \mathcal{G}$, donc $\mathcal{P}_V(\lambda_n u_n) \leq |\lambda_n|_e \mathcal{P}_V(u_n) \leq |\lambda_n|_e e^{-a}$, $|\lambda_n|_e \to 0$, alors $\mathcal{P}_V(\lambda_n u_n) \leq 1$, pour $n > N$. En appliquant 1.9 on trouve
$\{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}_V(u) < 1\} \subset [(\epsilon^{-\ln 1})_\epsilon]V = V$, ce qui implique $\lambda_n u_n \in V$, $\forall n > N$,

ce qui prouve $\lambda_n u_n \to 0$ dans $\mathcal{G}$.
Réciproquement supposons que toute suite $(\lambda_n u_n)_n$ où $(u_n) \subset A$ et $\lambda_n \to 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$, converge vers 0 dans $\mathcal{G}$. Montrons quel est bornée. En effet , si A n'est pas bornée, il existe U voisinage équilibré de l'origine et une suite $(b_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ tel que $b_n \to -\infty$ et $A \cap (\mathcal{G} \backslash [(\epsilon^b)_\epsilon]U) \neq \emptyset$ car si A n'est pas bornée, il existe U voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists b \leq a$ tel que $A \not\subset [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, prenons $a = -n, n \in \mathbb{N}$ et $b_n \leq -n$ ; choisissons $u_n \in A \cap (\mathcal{G} \backslash [(\epsilon^{b_n})_\epsilon]U)$, or $(\epsilon^{-b_n})_\epsilon \to 0$ car $\left|[(\epsilon^{-b_n})_\epsilon]\right|_e = e^{b_n} \to 0$, quand $n \to \infty$. Mais $[(\epsilon^{-b_n})_\epsilon]u_n$ ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{G}$, car $[(\epsilon^{-b_n})_\epsilon]u_n \notin U$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit notre hypothèse. □

**Définition 1.9.14.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $A \subset \mathcal{G}$. On appelle $\tilde{\mathbb{C}}$-module engendré par A et noté $\mathcal{G}_A$, l'ensemble de toutes les combinaisons $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires finies d'éléments de A.*

**Définition 1.9.15.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $A \subset \mathcal{G}$. A est dit disque si $A \neq \emptyset$, absolument convexe et le sous-module engendré par A, noté $\mathcal{G}_A$, vérifie*

$$\mathcal{G}_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(\epsilon^{-n})_\epsilon]A$$

**Remarque 1.9.16.** *Dans $\mathcal{G}_A$, la fonction $V_A(u) = \sup\{b \in \mathbb{R} : u \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A\}$ est une valuation sur $\mathcal{G}_A$ et $\mathcal{P}_A(u) = e^{-V_A(u)}$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}_A$.*

**Définition 1.9.17.** *Soit A un disque de $\mathcal{G}$. A est dit un disque de Banach si $(\mathcal{G}_A, \mathcal{P}_A)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach, i.e. $\tilde{\mathbb{C}}$-module ultra-pseudo-normé complet.*

**Définition 1.9.18.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $B \subset \mathcal{G}$. B est dit ultra-bornivore s'il absorbe tout disque de Banach borné.*

**Définition 1.9.19.** *Un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe $\mathcal{G}$, est dit ultra-bornologique, si tout ultra-bornivore absolument convexe est un voisinage de l'origine.*

**Proposition 1.9.20.** *Tout $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach est un ultra-bornologique.*

***Preuve***. Considérons $A = \{u \in \mathcal{G} : \mathcal{P}(u) \leq 1\}$, puisque A est absorbant alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}_A$, donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}_A$. Soit V un ultra-bornivore et absolument convexe de $\mathcal{G}$, comme $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach , alors V absorbe $\mathcal{G}$, i.e.,
$\mathcal{G}_A \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]V \ \forall b \leq, a$ d'où $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]A \subset V$,ce qui implique que V est un voisinage de l'origine. □

**Proposition 1.9.21.** *Tout ultra-bornologique est un bornologique*

***Preuve***. Car tout bornivore est un ultra-bornivore □

**Corollaire 1.9.22.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet est ultra-bornologique.*

***Preuve***. Puisque, tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet est bornologique. D'autre part, il est séparé et complet. Donc, la proposition 1.9.21 implique qu'il est ultra-bornologique. □

**Lemme 1.9.23.** *Soient $(\mathcal{G}, \tau)$, $(\mathcal{G}, \tau')$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologique localements convexes séparés. Supposons que $\tau$ est plus fine que $\tau'$. $B$ une base de voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ formée d'équilibrés, complets pour $\tau'$, alors $(\mathcal{G}, \tau)$ est complet.*

***Preuve***. Montrons que tous $V \in B$ est complet pour $\tau$ . Soit $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy de V pour $\tau$, puisque $\tau$ est plus fine que $\tau'$, alors $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy de V, pour $\tau'$. Comme V est complet pour $\tau'$, alors $\mathcal{F}$ converge vers $x_0$ pour $\tau'$ sur V. Il existe $W \in B$ tel que $W + W \subset V$, donc est fermé pour $\tau'$, car, il est complet. Alors, Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A - A \subset W$, prenons $x_1 \in A$, d'où $A \subset x_1 + W$. Puisque $x_1 + W$est fermé pour $\tau'$, alors $\overline{A^{\tau'}} \subset x_1 + W$. Ce qui implique que $x_0 \in x_1 + W$. Il résulte que $A \subset x_0 + W + W \subset x_0 + V$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ converge vers $x_0$ pour $\tau$, i.e., V est complet pour $\tau$.
Montrons que $(\mathcal{G}, \tau)$ est complet. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy de $\mathcal{G}$ pour $\tau$, pour tout $V \in B$, Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $A - A \subset V$. Pour V fixé et $x_1 \in A$, on a $A \subset x_1 + V$. Le filtre induit par $\mathcal{F}$ sur $x_1 + V$ est un filtre de cauchy . Comme V est complet, alors $x_1 + V$ est complet. Alors Le filtre induit converge dans $\mathcal{G}$ pour $\tau$, i.e., $\mathcal{G}$ est complet pour $\tau$. □

**Proposition 1.9.24.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $\emptyset \neq A \subset \mathcal{G}$ absolument convexe.*

**i)** *Si $\mathcal{G}$ est séparé et A borné, alors $\mathcal{G}_A$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module ultra-pseudo-normé*

**ii)** *Si en plus des hypothès de i), A est complet, alors $\mathcal{G}_A$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach.*

***Preuve.*** **i)** Soit $u \neq 0$ de $\mathcal{G}_A$ , puisque $\mathcal{G}$ est séparé$\exists U \in$ *V(0)* tel que $u \notin U$. Comme est A borné,alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]A \subset U$, $\forall b \leq, a$ d'où $u \notin [(\epsilon^{-b})_\epsilon]A$, ce qui donne $V_A(u) \neq \infty$ , i.e , $\mathcal{P}_A(u) > 0$.

**ii)** Dans la suite, on note par $\tau$ la topologie définie par $P_A$ sur $\mathcal{G}_A$ et $\tau'$ la topologie induit de par $\mathcal{G}$ sur . D'apres la proposition1.6.6, pour tout $\eta > 0$, on a

$$\{u \in \mathcal{G}_A : \mathcal{P}_A(u) < \eta\} \subset [(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]A \subset \{u \in \mathcal{G}_A : \mathcal{P}_A(u) \leq \eta\}. \quad (1.18)$$

$([(\epsilon^n)_\epsilon]A)_n$ est une base de voisinage de l'origine de $\mathcal{G}_A$ formée d'équilibrés, pour la topologie $\tau$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[(\epsilon^n)_\epsilon]A$ est complet pour la topologie $\tau'$. Soit U un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, comme est A borné,alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]A \subset U$,$\forall b \leq a$. D'où $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $[(\epsilon^n)_\epsilon]A \subset [(\epsilon^{-b})_\epsilon]A \subset U$, pour $n \geq -b$, ce qui signifie que $\tau$ est plus fine que $\tau'$. En appliquant le lemme, nous concluons que $\mathcal{G}_A$ est complet pour la topologie $\tau$.

□

## 1.10 Théorème du graphe fermé

**Définition 1.10.1.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe*

**1)** *Une famille $W = (C(n_1, ..., n_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathcal{G}$, où $k, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ est appelé un réseau , si elle satisfait les relations suivantes :*

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n_1 \dot{=} 1}^{\infty} C(n_1)$$

*et*

$$C(n_1, ..., n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} C(n_1, ..., n_k), \forall k > 1,\ \forall n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}.$$

**2)** *Si les $C(n_1, ..., n_k)$ sont fermés le réseau est dit fermé.*

**3)** *Si les $C(n_1, ..., n_k)$ sont absolument convexes le réseau est dit absolument convexe.*

**4)** *Un réseau $W$ est dit de type $\mathcal{C}$, si la condition suivante est vérifiée :* $\forall n_k \in \mathbb{N}$, $\exists \rho_k \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall \lambda_k \geq \rho_k$, *et* $x_k \in C(n_1, ..., n_k)$, *alors*

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] x_k \text{ converge dans } \mathcal{G}.$$

**Exemple 1.10.2.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet, alors il a une base $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ de voisinages de l'origine formée d'absolument convexes fermés tel que $U_{k+1} \subset U_k$. Les sous-ensembles définie par*

$$C(n_1, ..., n_k) = \bigcap_{j=1}^{k} [(\epsilon^{-n_j})_\epsilon] U_j,$$

*$n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ est un réseau absolument convexe fermé. En effet, $C(n_1) = [(\epsilon^{-n_1})_\epsilon] U_1$, d'où*

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} [(\epsilon^{-n_1})_\epsilon] U_1,$$

*car $U_1$ est absorbant.*
*Montrons par récurrence*

$$C(n_1, ..., n_{k-1}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} C(n_1, ..., n_k), \forall k > 1, \; \forall n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}.$$

*Pour $k = 2$, on a*

$$\begin{aligned} \bigcup_{n_2=1}^{\infty} ([(\epsilon^{-n_1})_\epsilon] U_1 \cap [(\epsilon^{-n_2})_\epsilon] U_2) &= [(\epsilon^{-n_1})_\epsilon] U_1 \cap (\bigcup_{n_2 \dot{=} 1}^{\infty} [(\epsilon^{-n_2})_\epsilon] U_2) \\ &= [(\epsilon^{-n_1})_\epsilon] U_1, \end{aligned}$$

*car*

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n_2=1}^{\infty} [(\epsilon^{-n_2})_\epsilon] U_2,$$

*puisque $U_2$ est absorbant.*
*Supposons qu'elle est vraie à l'ordre $k$ et montrons qu'elle est vraie à l'ordre*

*k+1,*

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} C(n_1,...,n_{k+1}) &= \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{k+1} [(\epsilon^{-n_j})_\epsilon] U_j \\
&= (\bigcap_{j=1}^{k} [(\epsilon^{-n_j})_\epsilon] U_j) \cap (\bigcup_{n_{k+1}\doteq 1}^{\infty} [(\epsilon^{-n_{k+1}})_\epsilon] U_{k+1}) \\
&= (\bigcap_{j=1}^{k} [(\epsilon^{-n_j})_\epsilon] U_j) \cap \mathcal{G} \\
&= \bigcap_{j=1}^{k} [(\epsilon^{-n_j})_\epsilon] U_j \\
&= C(n_1,...,n_k).
\end{aligned}$$

*D'autre part les $C(n_1,...,n_k)$ sont absolument convexes fermés par construction. Ce qui implique $(C(n_1,...,n_k))_k$ est un réseau absolument convexe .*

**Proposition 1.10.3.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet admet un réseau absolument convexe , fermé et de type $\mathcal{C}$.*

***Preuve**.* D'apres 1.10.2, les sous-ensembles définie par

$$C(n_1,...,n_k) = \bigcap_{j=1}^{k} [(\epsilon^{-n_j})_\epsilon] U_j,$$

$n_1,...,n_k \in \mathbb{N}$ est un réseau , fermé et absolument convexe. Soit $n_k \in \mathbb{N}$, choisissons $\rho_k \in \mathbb{R}$ tel que $\rho_k - n_k \geq 0$. Pour tout $\lambda_k \geq \rho_k$ et $x_k \in C(n_1,...,n_k)$, on a $x_k \in [(\epsilon^{-n_k})_\epsilon] U_k$, donc $[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] x_k \in [(\epsilon^{\lambda_k - n_k})_\epsilon] U_k$.
Soit V un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $U_{m_0} \subset V$, ainsi pour tout $m \geq m_0$ et $p \geq 1$, on a

$$\sum_{k=m}^{m+p} [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] x_k \in \sum_{k=m}^{m+p} [(\epsilon^{\lambda_k - n_k})_\epsilon] U_k.$$

Comme $U_{m+i} \subset U_m \subset U_{m_0}$; où $0 \leq i \leq p$, alors

$$\sum_{k=m}^{m+p} [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] x_k \in \sum_{k=m}^{m+p} [(\epsilon^{\lambda_k - n_k})_\epsilon] U_m.$$

Du fait que $U_m$ est absolument convexe$\lambda_k - n_k \geq 0$, alors on aura

$$\sum_{k=m}^{m+p}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k \in \sum_{k=m}^{m+p}[(\epsilon^{\lambda_k - n_k})_\epsilon]U_m \subset U_{m_0}.$$

Donc cette série est de Cauchy, puisque $\mathcal{G}$ est complet, alors elle converge dans $\mathcal{G}$, ce qui implique qu'il est de type $\mathcal{C}$. $\square$

**Lemme 1.10.4.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques et*

$$T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire. Si $\mathcal{G}$ est de Baire, alors pour tout V voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$, $\overline{T^{-1}(V)}$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$.*

***Preuve***. Soit V un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{H}$, alors $T^{-1}(V)$ est absorbant dans $\mathcal{G}$, donc

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[(\epsilon^{-n})_\epsilon]T^{-1}(V),$$

d'où

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[(\epsilon^{-n})_\epsilon]\overline{T^{-1}(V)}.$$

Comme $\mathcal{G}$ est de Baire, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $int(\overline{[(\epsilon^{-n})_\epsilon]T^{-1}(V)}) \neq \emptyset$, donc $int(\overline{T^{-1}(V)}) \neq \emptyset$.
Soit $x \in int(\overline{T^{-1}(V)}) \neq \emptyset$, alors il existe U voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, tel que $x + U \subset \overline{T^{-1}(V)}$ et puisque $\overline{T^{-1}(V)}$ est absolument convexe, on aura $-x \in \overline{T^{-1}(V)}$ et

$$\begin{aligned} U &= -x + x + U \\ &\subset \overline{T^{-1}(V)} + \overline{T^{-1}(V)} \\ &\subset \overline{T^{-1}(V)} \end{aligned}$$

donc $\overline{T^{-1}(V)}$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. $\square$

**Définition 1.10.5.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques et*

$$T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire. Si Pour chaque suite $(x_n)_n$ de $\mathcal{G}$, on a*

$$\begin{cases} x_n & \to x_0 \\ T(x_n) & \to y_0 \end{cases} \Longrightarrow T(x_0) = y_0,$$

*alors $T$ est dit séquentiéllement fermé.*

**Theorem 1.10.6.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet et $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe qui admet un réseau absolument convexe de type $\mathcal{C}$. Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ est une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire séquentiéllement fermée, alors $T$ est continue.*

***Preuve***. Soit W un voisinage absolument convexe fermé de l'origine de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{W}$ un réseau absolument convexe de type $\mathcal{C}$. Puisque

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} C(n_1),$$

et

$$C(n_1, ..., n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} C(n_1, ..., n_k)$$

alors

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} T^{-1}(C(n_1)),$$

et

$$T^{-1}(C(n_1, ..., n_{k-1})) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} T^{-1}(C(n_1, ..., n_k)).$$

Comme $\mathcal{G}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet, donc est de Baire, il s'ensuit qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^\star$, tel que $int(\overline{T^{-1}(C(n_1))}) \neq \emptyset$. Comme

$$T^{-1}(c(n_1)) = \bigcup_{n_2=1}^{\infty} T^{-1}(C(n_1, n_2)),$$

et
$int(\overline{T^{-1}(C(n_1))}) \neq \emptyset$, alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}^\star$, tel que
$int(\overline{T^{-1}(C(n_1, n_2))}) \neq \emptyset$. Donc on peut construire une suite $(T^{-1}(C(n_1, ..., n_k)))_k$

tel que
$int(\overline{T^{-1}(C(n_1,...,n_k))}) \neq \emptyset$. Comme

$$\mathcal{H} = \bigcup_{m=1}^{\infty} [(\epsilon^{-m})_\epsilon]W,$$

car W est absorbant, alors

$$\begin{aligned} C(n_1,...,n_k) &= C(n_1,...,n_k) \cap \mathcal{H} \\ &= c(n_1,...,n_k) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} [(\epsilon^{-m})_\epsilon]W) \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} (C(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{-m})_\epsilon]W), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$T^{-1}(C(n_1,...,n_k)) = \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-1}(C(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{-m})_\epsilon]W),$$

nous pouvons extraire une sous-suite $(T^{-1}(C(n_1,...,n_k)\cap[(\epsilon^{-m_k})_\epsilon]W))_k$ absolument convexes de $\mathcal{G}$ tel que $int(\overline{T^{-1}(C(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{-m_k})_\epsilon]W)}) \neq \emptyset$. Pour tout $\rho_k$ associé au choix $n_k$ et $\lambda_k \geq \rho_k$ tel que $\lambda_k - m_k \geq 0$, pour tout k, on définie

$$M_k = T^{-1}([(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]C(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{\lambda_k - m_k})_\epsilon]W) \tag{1.19}$$

puisque
$M_k = [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]T^{-1}(C(n_1,...,n_k)\cap[(\epsilon^{-m_k})_\epsilon]W)$, donc $M_k$ est absolument convexe, d'autre part
$int(\overline{M_k}) = [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]int(\overline{T^{-1}(C(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{-m_k})_\epsilon]W)}) \neq \emptyset$, alors $M_k$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, car il existe $x \in int(\overline{M_k})$, et U voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, tel que $x + U \subset \overline{M_k}$ et $-x \in \overline{M_k}$, d'où

$$\begin{aligned} U &= -x + x + U \\ &\subset \overline{M_k} + \overline{M_k} \\ &\subset \overline{M_k}. \end{aligned}$$

Soit $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ une base de voisinage de l'origine $\mathcal{G}$, formée absolument convexes tel que $U_{k+1} \subset U_k$. Considérons $V_k = \overline{M_k} \cap U_k$.

Soit $x_0 \in \overline{T^{-1}(W)}$, $V_1$ un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ absolument convexe , alors $T^{-1}(W) \cap (x_0 + V_1) \neq \emptyset$. Donc

$$\exists x_1 \in T^{-1}(W), \tag{1.20}$$

tel que $x_0 - x_1 \in V_1$.
Comme $x_0 - x_1 \in V_1 \subset \overline{M_1}$ et $x_0 - x_1 + V_2$ est voisinage de $x_0 - x_1$, il existe $x_2 \in M_1$ tel que $x_0 - x_1 - x_2 \in V_2$.
Par itération on peut construire une suite $x_{k+1} \in M_k$, $k \geq 1$ tel que

$$x_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k \in V_n \subset U_n,$$

i.e.,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ converge vers } x_0 \text{ dans } \mathcal{G}. \tag{1.21}$$

En effet, si V voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{n_0} \subset U_{n_0} \subset V$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$x_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k \in V_n \subset U_n \subset U_{n_0} \subset V.$$

Puisque $x_{k+1} \in M_k$, alors

$$\begin{array}{rcl} T(x_{k+1}) & \in & [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] C(n_1, ..., n_k) \cap [(\epsilon^{\lambda_k - m_k})_\epsilon] W \\ [(\epsilon^{-\lambda_k})_\epsilon] T(x_{k+1}) & \in & C(n_1, ..., n_k) \cap [(\epsilon^{-m_k})_\epsilon] W, \forall k \geq 1. \end{array}$$

Puisque $\mathcal{W}$ est un réseau de type $\mathcal{C}$, $\lambda_k \geq \rho_k$, et
$[(\epsilon^{-\lambda_k})_\epsilon] T(x_{k+1}) \in C(n_1, ..., n_k)$, alors la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon][(\epsilon^{-\lambda_k})_\epsilon] T(x_{k+1}) \tag{1.22}$$

converge dans $\mathcal{H}$. Comme W est absolument convexe absolument et 1.20 on a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T(x_k) & = & T(x_1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} T(x_{k+1}) \\ & \in & W + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} [(\epsilon^{\lambda_k - m_k})_\epsilon] W \\ & \in & W, \forall n \geq 1, \end{array}$$

puisque W est fermé, d'où

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$$

converge dans W.
Comme T est séquentièllement fermé,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

converge vers $x_0$ et

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$$

converge dans W, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$$

converge vers $T(x_0) \in W$. D'où $x_0 \in T^{-1}(W)$, ce implique $\overline{T^{-1}(W)} = T^{-1}(W)$. Par le lemme 1.10.4 $T^{-1}(W)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, donc T est continue. $\square$

**Theorem 1.10.7.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet et $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe qui a un réseau de type $\mathcal{C}$. Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire séquentièllement fermé, alors T est continue.*

***Preuve***. Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet, alors a une base $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ de voisinage de l'origine formée absolument convexes tel que $U_{k+1} \subset U_k$ et W voisinage absolument convexe fermé de l'origine de $\mathcal{H}$. Comme dans la preuve 1.10.6 nous pouvons trouver une suite $(\overline{T^{-1}(c(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{-m_k})_\epsilon]W)})_k$ de sous-ensembles de $\mathcal{G}$, tel que $int(\overline{T^{-1}(c(n_1,...,n_k) \cap [(\epsilon^{-m_k})_\epsilon]W)}) \neq \emptyset$. Pour tout $\rho_k$ associé au choix $n_k$ et $\lambda_k \geq \rho_k$ tel que $\lambda_k - m_k \geq 0$, pour tout k, on définie $M_k$ comme dans 1.19. Puisque $int(\overline{M_k}) \neq \emptyset$, pour tout k, nous pouvons trouver $x_k \in M_k$ et $V_k$ un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G}$ tel que $V_k \subset U_k$ et $x_k + V_k \subset \overline{M_k}$. Soit $x_0 \in \overline{T^{-1}(W)}$, alors $T^{-1}(W) \cap (x_0 + V_1) \neq \emptyset$. Donc $\exists y_1 \in T^{-1}(W)$, tel que $x_0 - y_1 \in V_1$.
Montrons par récurrence pour $k \geq 2$ que $y_k \in M_{k-1}$ et

$$x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \in V_k \subset U_k \text{et } x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i \in \overline{M_k}. \qquad (1.23)$$

Pour $k = 2$ on a $x_0 - y_1 \in V_1$, donc $x_1 + x_0 - y_1 \in x_1 + V_1 \subset \overline{M_1}$. Or $x_1 + x_0 - y_1 + V_2$ est un voisinage $x_1 + x_0 - y_1$ dans $\mathcal{G}$, alors il existe $y_2 \in M_1$ tel que $x_0 - y_1 - y_2 + x_1 \in V_2$ et $x_0 - y_1 - y_2 + x_1 + x_2 \in x_2 + V_2 \subset \overline{M_2}$.
Supposons qu'elle est vraie à l'ordre k et montrons qu'elle est vraie à l'ordre k+1, ona

$$x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \in V_k \subset U_k \text{et } x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i \in \overline{M_k}, \tag{1.24}$$

alors $x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i + V_{k+1}$ est un voisinage de $x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i$ dans $\mathcal{G}$, alors il existe $y_{k+1} \in M_k$ tel que $x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i - y_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} x_i \in V_{k+1} \subset U_{k+1}$ et $x_{k+1} + x_0 - \sum_{i=1}^{k+1} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i \in x_{k+1} + V_{k+1} \subset \overline{M_{k+1}}$, i.e $x_0 - \sum_{i=1}^{k+1} y_i + \sum_{i=1}^{k+1} x_i \in \overline{M_{k+1}}$.
Par construction on a $T(x_i) \in [(\epsilon^{\lambda_i})_\epsilon]c(n_1, ..., n_i)$ et puisque le réseau est de type $\mathcal{C}$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)$$

converge dans $\mathcal{H}$.
De même , puisque $y_{i+1} \in M_i$ et $T(y_i) \in [(\epsilon^{\lambda_i})_\epsilon]c(n_1, ..., n_i)$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} T(y_i)$$

converge dans $\mathcal{H}$.
Par définition des $M_i$, on a $T(y_{i+1}) \in [(\epsilon^{\lambda_i - m_i})_\epsilon]W$ et $T(x_i) \in [(\epsilon^{\lambda_i - m_i})_\epsilon]W$, puisque W est absolument convexe fermé, alors

$$(\sum_{i=1}^{k} T(y_i) - \sum_{i=1}^{k-1} T(x_i))_k$$

converge vers $y_0 \in W$.
D'autre part 1.24 implique que

$$(\sum_{i=1}^{k} y_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i)_k$$

converge vers $x_0$

Comme T est séquentièllement fermé, alors $T(x_0) = y_0 \in W$. D'où $x_0 \in \overline{T^{-1}(W)}$, ce implique

$\overline{T^{-1}(W)} = T^{-1}(W)$. Par le lemme 1.10.4 $T^{-1}(W)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, donc T est continue. $\square$

**Définition 1.10.8.** *Soit $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire. On note par $G_T = \{u, T(u) : u \in \mathcal{G}\}$, $G_T$ est appelé graphe de T. T est dite à graphe fermé, si $G_T$ est un fermé de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.*

**Proposition 1.10.9.** *Soient $(\mathcal{G}, \tau_1)$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $(\mathcal{H}, \tau_2)$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique de Hausdorff. Si*

$$T : (\mathcal{G}, \tau_1) \longrightarrow (\mathcal{H}, \tau_2)$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire continue. Alors $G_T$ est fermé.*

***Preuve***. Soit $(u, v) \notin G_T$, alors il existe V et U voisinage de v et T(u) respectivement tel que $U \cap V = \emptyset$. Puisque T est continue, $T^{-1}(U)$ est un voisinage de u dans $\mathcal{G}$, donc $T^{-1}(U) \times V$ est un voisinage de $(u, v)$ dans $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$, pour la topologie produit. Par construction on a $(T^{-1}(U) \times V) \cap G_T = \emptyset$, donc $(u, v) \notin \overline{G_T}$. Ce qui implique que $G_T = \overline{G_T}$, i.e. $G_T$ est fermé. $\square$

**Theorem 1.10.10.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Baire et $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe qui a un réseau de type $\mathcal{C}$. Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire à graphe fermé, alors T est continue.*

***Preuve***. Soit W un voisinage absolument convexe fermé de l'origine de $\mathcal{H}$. Comme dans la preuve 1.10.6 nous pouvons trouver une suite $M_k$ comme dans 1.19 Pour tout $\rho_k$ associé au choix $n_k$ et $\lambda_k \geq \rho_k$ tel que $\lambda_k - m_k \geq 0$, pour tout k, tel que $int(\overline{M_k}) \neq \emptyset$, pour tout k, ce qui signifie l'existence de $z_k \in M_k$ et $U_k$ un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G}$ tel que $z_k + U_k \subset \overline{M_k}$. Comme $z_k \in \overline{M_k}$ et $z_k + U_k$ est un voisinage de $z_k$, alors, nous pouvons trouver $x_k \in M_k$ et $x_k \in z_k + U_k$. D'oú

$$\begin{aligned} x_k + U_k &\subset z_k + U_k + U_k \\ &\subset z_k + U_k \\ &\subset \overline{M_k} \end{aligned}$$

car $U_k$ est absolument convexe.

Soit $x_0 \in \overline{T^{-1}(W)}$, montrons que $x_0 \in T^{-1}(W)$.

Alors $T^{-1}(W) \cap (x_0 + U_1) \neq \emptyset$. Donc $\exists y_1 \in T^{-1}(W)$, tel que $x_0 - y_1 \in U_1$. Nous pouvons Montrer par récurrence que ; pour $k \geq 2$ que $y_k \in M_{k-1}$ et

$$x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \in U_k \text{et } x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i \in \overline{M_k}. \tag{1.25}$$

Puisque $\mathcal{W}$ est un réseau de type $\mathcal{C}$, alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} T(y_i),$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)$$

convergent dans $\mathcal{H}$. D'où

$$(\sum_{i=1}^{k} T(y_i) - \sum_{i=1}^{k-1} T(x_i))_k$$

converge dans $\mathcal{H}$.
Par définition des $M_i$, on a $T(y_i) \in [(\epsilon^{\lambda_{i-1}-m_{i-1}})_\epsilon]W$, pour $i \geq 2$ et $T(x_i) \in [(\epsilon^{\lambda_i - m_i})_\epsilon]W$, pour $i \geq 1$ et $T(y_1) \in W$, puisque W est absolument convexe fermé, alors

$$(\sum_{i=1}^{k} T(y_i) - \sum_{i=1}^{k-1} T(x_i))_k$$

converge vers $y_0 \in W$.
Montrons que $(x_0, y_0) \in \overline{graphe(T)}$.
Soit $(U, V)$ un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$. Du 1.25 et $x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i + U$ est un voisinage de $x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i$ dans $\mathcal{G}$, il existe $t_k \in M_k$ tel que $x_0 - \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i - t_k \in U$.
Posons $a = \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{k} x_i - t_k$, Puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(t_k),$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$$

convergent dans $\mathcal{H}$, il s'ensuit que $T(t_k) \to 0$ et $T(x_k \to 0$. Comme

$$(\sum_{i=1}^{k} T(y_i) - \sum_{i=1}^{k-1} T(y_i))_k$$

converge vers $y_0$, alors

$$\begin{aligned} y_0 - T(a) &= y_0 - \sum_{i=1}^{k} T(y_i) + \sum_{i=1}^{k} T(x_i) - T(t_k) \\ &= y_0 - \sum_{i=1}^{k} T(y_i) + \sum_{i=1}^{k-1} T(x_i) + T(x_k) - T(t_k) \to 0. \end{aligned}$$

donc $\exists k_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $y_0 - T(a) \in V, \forall k \geq k_0$.
On conclut

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) - (a, T(a)) &\doteq (x_0 - a, y_0 - T(a)) \\ &\in (U, V), \end{aligned}$$

d'où $(a, T(a)) \in graphe(T) \cap ((x_0, y_0) + (U, V))$, i.e. $(x_0, y_0) \in \overline{graphe(T)}$.
Comme graphe(T) est fermé, alors $(x_0, y_0) \in graphe(T)$, i.e. $y_0 = T(x_0)$, puisque $y_0 \in W$, donc $x_0 \in T^{-1}(W)$, ainsi T est continue. $\square$

**Proposition 1.10.11.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module, séquentièllement fermé $\mathcal{H}$ d'un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe $\mathcal{G}$ qui a un réseau $W$ de type $\mathcal{C}$, a un réseau $V$ de type $\mathcal{C}$. En outre si $W$ est absolument convexe, alors $V$ est absolument convexe.*

***Preuve***. Soit un réseau W de type $\mathcal{C}$, alors $(C(n_1, ..., n_k) \cap \mathcal{H})_k$ est un réseau de type $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{H}$. En effet, Pour tout $\rho_k$ associé au choix $n_k$ et $\lambda_k \geq \rho_k$ et $x_k \in c(n_1, ..., n_k) \cap \mathcal{H}$, alors

$$\sum_{k \doteq 1}^{\infty} [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] x_k, \text{converge dans } \mathcal{G}.$$

Comme $\mathcal{H}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module, alors

$$\sum_{k \doteq 1}^{n} [(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon] x_k \in \mathcal{H}.$$

Or $\mathcal{H}$ est séquentièllement fermé, ce qui implique que

$$\sum_{k\dot{=}1}^{\infty}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k, \text{converge dans } \mathcal{H}.$$

□

**Lemme 1.10.12.** *Un réseau $\mathcal{W} = \{(C(n_1,...,n_k)\}_k$ est de type $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{G}$, si conditions suivante est remplie. Pour toute suite $(n_k)_k$, il existe une suite $(\mu_k)_k \subset \mathbb{R}$ telle que la suite $([(\epsilon^{-\mu_k})_\epsilon]x_k)_k$ avec $x_k \in C(n_1,...,n_k)$ est contenue dans un sous-ensemble $M$ de $\mathcal{G}$, borné absolument convexe et séquentièllement complet.*

***Preuve***. Soit $(n_k)_k$ et $x_k \in C(n_1,...,n_k)$, choisissons $\rho_k$ associé au choix $n_k$ et $\lambda_k \geq \rho_k$ tel que $\lambda_k - \mu_k \geq k$, pour tout k, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k &= \sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{\lambda_k-\mu_k})_\epsilon][(\epsilon^{\mu_k})_\epsilon]x_k \\ &\in \sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{\lambda_k-m_k})_\epsilon]M \\ &\in M.\end{aligned}$$

La suite $(\sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{-\mu_k})_\epsilon]x_k)_N$ est de Cauchy dans M. En effet, soit U un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G}$. Comme M est borné, alors il existe $(a \in \mathbb{R}$ telle que $M \subset [(\epsilon^a)_\epsilon]U$. Pour $N+1+a \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+p}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k - \sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k &= \sum_{k=N+1}^{N+p}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k) \\ &= \sum_{k=N+1}^{N+p}[(\epsilon^{\lambda_k-\mu_k})_\epsilon][(\epsilon^{\mu_k})_\epsilon]x_k.\end{aligned}$$

Puisque $[(\epsilon^{\mu_k})_\epsilon]x_k \in M$, $\lambda_k - \mu_k \geq k \geq N+1$ et M absolument convexe, alors $[(\epsilon^{\lambda_k-\mu_k})_\epsilon]M \subset [(\epsilon^{N+1})_\epsilon]M$, ce qui implique

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+p}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k - \sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k &= \sum_{k=N+1}^{N+p}[(\epsilon^{\lambda_k})_\epsilon]x_k) \\ &\in [(\epsilon^{N+1})_\epsilon]M \\ &\in [(\epsilon^{N+1+a})_\epsilon]U \\ &\in U.\end{aligned}$$

Puisque M est séquentièllement complet, alors la suite $(\sum_{k=1}^{N}[(\epsilon^{-\mu_k})_\epsilon]x_k)_N$ converge dans M. $\square$

**Proposition 1.10.13.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes et $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire séquentiéllement continue. Si $\mathcal{W} = \{(C(n_1, ..., n_k)\}$ est un réseau de type $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{G}$, alors $T(\mathcal{W}) = \{T(C(n_1, ..., n_k)\}$ est un réseau de type $\mathcal{C}$ dans $T(\mathcal{G})$*

***Preuve**.* Facile. $\square$

**Proposition 1.10.14.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe , $M$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous module de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{W}$ est un réseau de type $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{G}$, alors l'espace quotient $\mathcal{G}/M$ muni par la topologie quotient a un réseau $\mathcal{V}$ de type $\mathcal{C}$. En outre si $\mathcal{W}$ est absolument convexe, alors $\mathcal{V}$ est absolument convexe.*

***Preuve**.* Par la définition de la topologie quotient , la surjection cannonique

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}/M \\ u & \longmapsto & u + M \end{array}$$

est continue. D'où par la proposition 1.10.13 $\pi(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ est un réseau de type $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{G}/M$. $\square$

## 1.11 Théorème de l'application ouverte

**Proposition 1.11.1.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module localement convexe qui a un réseau absolument convexe de type $\mathcal{C}$. et $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module ultra-bornologique séparé. Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire surjective et continue , alors $T$ est ouverte .*

***Preuve**.* Par la proposition 1.10.14, $\mathcal{G}/\ker T$ a un réseau $\mathcal{V}$ de type $\mathcal{C}$. Puisque T est continue , alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \overline{T} : \mathcal{G}/\ker T & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ u + \ker T & \longmapsto & T(u) \end{array}$$

est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue.
Comme $\overline{T}^{-1}$ existe, alors $\overline{T}^{-1}$ est séquentièllement fermé. En appliquant la proposition 1.12.18 à $\overline{T}^{-1}$, nous concluons que $\overline{T}^{-1}$ est continue. Alors $\overline{T}$ est

un homéomorphisme, ce qui implique que$\overline{T}$ est ouverte . Soit A un ouvert de $\mathcal{G}$, puisque

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}/\ker T \\ u &\longmapsto u + \ker T \end{aligned}$$

est ouverte, alors $A + \ker T$ est un ouvert de $\mathcal{G}/\ker T$. D'autre part
$\overline{T}(A + \ker T) = T(A)$, donc $T(A)$ est ouverte. Ce qui implique que T est ouverte . □

**Proposition 1.11.2.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques et $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue bijective. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

**(i)** *$T$ est un isomorphisme.*

**(ii)** *$T$ transforme tout voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ en un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$.*

**(iii)** *$T$ est une application ouverte.*

***Preuve.*** Facile. □

**Lemme 1.11.3.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques et*

$$T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire continue surjective. Si $\mathcal{H}$ est de Baire, alors pour tout $U$ voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, $\overline{T(U)}$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$.*

***Preuve.*** Soit U voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, alors , il existe V voisinage équilibré de l'origine de $\mathcal{G}$, tel que $V + V \subset U$. Il en résulte que nous pouvons écrire

$$\mathcal{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(\epsilon^{-n})_\epsilon] V$$

et

$$\mathcal{H} = T(\mathcal{G}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(\epsilon^{-n})_\epsilon] T(V).$$

Comme $\mathcal{H}$ est de Baire, alors ,il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $int(\overline{[(\epsilon^{-n})_\epsilon] T(V)}) \neq \emptyset$, d'où $int(\overline{T(V)}) \neq \emptyset$. Puisque $T(V)$ et $\overline{T(V)}$ sontéquilibrés , on a
$0 \in int(\overline{T(V)} + \overline{T(V)})$. D'autre part, la continuité de l'addition implique
$\overline{T(V)} + \overline{T(V)} \subset \overline{T(V) + T(V)}$.
Mais $T(V) + T(V) = T(V + V) \subset T(U)$, d'où $\overline{T(V)} + \overline{T(V)} \subset \overline{T(U)}$. Ce qui signifie $0 \in int(\overline{T(U)})$, donc $\overline{T(U)}$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$. □

**Lemme 1.11.4.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux espaces métriques , $\mathcal{G}$ est complet et $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application linéaire continue vérifiant :*
$\forall r > 0, \exists \rho > 0,\ \forall u \in \mathcal{G},\ T(B_r(u))$ *est dense dans* $B_\rho(T(u))$, *alors* $\forall a > r$, $B_\rho(T(u)) \subset T(B_a(u))$

***Preuve***. Voir [10]. □

**Theorem 1.11.5.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet et*

$$T : \mathcal{G} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H}$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire continue bijective. Alors $T$ est un isomorphisme .*

***Preuve***. Puisque $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont de Baire, le lemme 1.11.3 implique $\overline{T(B_r(0))}$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$. Par conséquent, il existe $\rho > 0$ tel que

$$B_\rho(0) \subset \overline{T(B_r(0))}.$$

Comme $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet , alors leurs distances sont invariante par translation. Ce qui implique

$$\begin{aligned} B_\rho(T(u)) \quad &\subset \quad \overline{T(B_r(0))} + T(u) \\ &\subset \quad \overline{T(B_r(u))}. \end{aligned}$$

Ce qui signifie $\forall u \in \mathcal{G}$, $T(B_r(u))$ est dense dans $B_\rho(T(u))$. Par le lemme 1.11.4, nous concluons que $\forall a > r$, $B_\rho(T(u)) \subset T(B_a(u))$. En particulier $B_\rho(0) \subset T(B_a(0))$, par conséqent $T(B_a(u))$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$. Puisque r est arbitraire, alors T transforme tout voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ en un voisinage de l'origine de $\mathcal{H}$. D'où T est un isomorphisme . □

**Corollaire 1.11.6.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet et*

$$T : \mathcal{G} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H}$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire à graphe fermé. Alors $T$ est continue.*

***Preuve***. Résulte de 1.10.3 et 1.10.10. □

**Theorem 1.11.7.** *Soient $(\mathcal{G}, \tau_1)$ , $(\mathcal{H}, \tau_2)$ deux espaces topologiques et*

$$T : (\mathcal{G}, \tau_1) \quad \longrightarrow \quad (\mathcal{H}, \tau_2)$$

*une application. On a*

**i)** *$G_T$ fermé implique $T$ séquentièllement fermé.*

**ii)** *Si $(\mathcal{G}, \tau_1)$ est séparable et $T$ séquentièllement fermé, alors $G_T$ est fermé.*

***Preuve.*** Voir[13] □

**Corollaire 1.11.8.** *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet*

$$T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire. Si $T$ est séquentièllement fermé,alors $T$ est continue.*

***Preuve.*** Puisque $\mathcal{G}$ est de Fréchet, alors il séparable et

$$T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$$

une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire séquentièllement fermé, alors $G_T$ est fermé. En appliquant le 1.11.6, on aura T est continue. □

**Theorem 1.11.9.** *Soient $(\mathcal{G}, \tau_1)$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module tonnélé et $(\mathcal{H}, \tau_2)$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet. Si*

$$T : (\mathcal{G}, \tau_1) \longrightarrow (\mathcal{H}, \tau_2)$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaire à graphe fermé. Alors $T$ est continue .*

***Preuve.*** Voir [8, thm 4.16] □

**Theorem 1.11.10.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet et $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module tonnélé de Hausdorff.Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue et bijective, alors $T$ est isomorphisme .*

***Preuve.*** Puisque $\mathcal{G}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet et $\ker T$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module topologique fermé. Alors $\mathcal{G}/\ker T$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet. Puisque T est continue, l'application associé à T, i.e l'application

$$\begin{aligned} \overline{T} : \mathcal{G}/\ker T &\longrightarrow \mathcal{H} \\ u + \ker T &\longmapsto T(u) \end{aligned}$$

est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue. D'apres la proposition 1.10.9 $G_{\overline{T}}$ est fermé.
Or $G_{\overline{T}^{-1}} = \{(u, v) : (u, v) \in G_{\overline{T}}\}$, donc $G_{\overline{T}^{-1}}$ est fermé. Donc l'application

$$\overline{T}^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}/\ker T$$

est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire à graphe fermé et $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module tonnélé et de plus $\mathcal{G}/\ker T$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet. En appliquant 1.11.9, alors $\overline{T}^{-1}$ est continue. Ce qui implique que T est un isomorphisme . □

## 1.12 Limites inductives

Soient $(\mathcal{G}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille d'espaces $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes , $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module et $i_\gamma : \mathcal{G}_\gamma \longrightarrow \mathcal{G}$ des applications $\tilde{\mathbb{C}}$- linéaires . On supposera toujours que

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_\gamma.$$

**Theorem 1.12.1.** *Soit $\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{G}$ absolument convexe :$\forall\gamma \in \Gamma$ $i_\gamma^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}_\gamma\}$. La topologie $\tau$ induite par les jauges $(\mathcal{P}_\mathcal{U})_{U\in\mathcal{U}}$ est la topologie la plus fine qui rend les $i_\gamma$ continues. Cette topologie est dite limite inductive des $(\mathcal{G}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, et elle noté*

$$\mathcal{G} = \varinjlim_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_n,$$

***Preuve**.* Montrons $\forall U \in \mathcal{U}$ est absorbant. Soit $U \in \mathcal{U}$, alors $i_\gamma^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}_\gamma$, donc absorbant dans $\mathcal{G}_\gamma$, d'où U absorbe tout élément de $i_\gamma(\mathcal{G}_\gamma)$. Maintenant soient $u_1 \in \mathcal{G}_{\gamma_1}$, $u_2 \in \mathcal{G}_{\gamma_2}$ et $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} i_{\gamma_1}(u_1) &\in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]U, \forall b_1 \le a_1 \\ i_{\gamma_2}(u_2) &\in [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]U, \forall b_2 \le a_2, \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} i_{\gamma_1}(u_1) + i_{\gamma_2}(u_2) &\in [(\epsilon^{b_1})_\epsilon]U + [(\epsilon^{b_2})_\epsilon]U \\ &\in [(\epsilon^{\min(b_1,b_2)})_\epsilon]([(\epsilon^{b_1-\min(b_1,b_2)})_\epsilon]U + [(\epsilon^{b_2-\min(b_1,b_2)})_\epsilon]U), \end{aligned}$$

comme $0 \in U$ et U convexe, alors $[(\epsilon^{b_1-\min(b_1,b_2)})_\epsilon]U + [(\epsilon^{b_2-\min(b_1,b_2)})_\epsilon]U \subset U$. Donc $i_{\gamma_1}(u_1) + i_{\gamma_1}(u_2) \in [(\epsilon^c)_\epsilon]U$, $\forall c \le \min(a_1, a_2) = a$, d'où U est absorbant dans $\mathcal{G}$. D'apres la poposition 1.6.6 et le théorème 1.6.8 la opologie $\tau$ dans $\mathcal{G}$ induit par $(\mathcal{P}_u)_U$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe , dont la base est $\mathcal{U}$. Par construction $\forall\gamma$, $i_\gamma : \mathcal{G}_\gamma \longrightarrow \mathcal{G}$ est continue. Montrons que $\tau$ est la plus fine qui rend $i_\gamma$ continue, $\forall\gamma$ . Soit $\tau'$ une autre topologie sur $\mathcal{G}$ qui rend $i_\gamma$ continue, $\forall\gamma$. $\tau$ est plus fine que $\tau'$, car si $U'$ est absolument convexe voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ pour $\tau'$, alors $i_\gamma^{-1}(U')$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}_\gamma$, $\forall\gamma$, donc $U'$ est voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ pour $\tau$. □

**Proposition 1.12.2.** *Soient $\mathcal{G}$ limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes $(\mathcal{G}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire. Alors $T$ est continue si et seulement si $T \circ i_\gamma$ continue, $\forall\gamma \in \Gamma$, i.e. $T : \mathcal{G}_\gamma \longrightarrow \mathcal{H}$ est continue, $\forall\gamma \in \Gamma$.*

***Preuve***. Supposons T est continue, d'où $T \circ i_\gamma$ continue sur $\mathcal{G}_\gamma$.
Réciproquement, soit V absolument convexe voisinage de l'origine dans $\mathcal{H}$, alors $i_\gamma^{-1}(T^{-1}(V)) = (T \circ i_\gamma)^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}_\gamma$, $\forall\gamma$, car $T \circ i_\gamma$ continue, $\forall\gamma$. Puisque T est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire, alors $T^{-1}(V)$ est absolument convexe. D'où $T^{-1}(V)$ voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$, i.e. T est continue à l'origine , donc T est continue. □

**Corollaire 1.12.3.** *Soient $\mathcal{G}$ limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet $(\mathcal{G}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe qui a un réseau de type $\mathcal{C}$.*
*Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire séquentiéllement fermé, alors T est continue.*

***Preuve***. D'apres le théorème 1.12.2, T est continue si et seulement si $T \circ i_\gamma$ continue, $\forall\gamma \in \Gamma$. Donc il suffit de prouver que $T \circ i_\gamma$ continue, $\forall\gamma \in \Gamma$. Puisque $i_\gamma$ est continue et T est séquentièllement fermé, alors $T \circ i_\gamma$ est séquentièllement fermé. D'apres le théorème 1.10.7 $T \circ i_\gamma$ est continue, d'où T est continue. □

**Définition 1.12.4.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module et $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\tilde{\mathbb{C}}$-sous modules de $\mathcal{G}$ tels que*

**i)** *Chaque $(\mathcal{G}_n, \tau_{n\in\mathbb{N}})$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe*

**ii)** $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**iii)** $\mathcal{G} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{G}_n$.

**iv)** $\tau_{n+1}/\mathcal{G}_n = \tau_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

*La limite inductive des $\mathcal{G}_n$ est appelée limite inductive stricte des $\mathcal{G}_n$.*

**Lemme 1.12.5.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe , M un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous module de $\mathcal{G}$ et V un voisinage convexe de l'origine dans M. Alors il existe W voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$, tel que $W \cap M = V$.*

***Preuve***. Par définition de la topologie induite dans M, il existe U voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$, tel que $U \cap M \subset V$. Posons
$W = U + V = \Gamma(U \cup V)$, puisque $U \subset W$, alors W voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $V \subset W \cap M$. Montrons $W \cap M \subset V$. Soit $\omega \in W \cap M$, alors $\omega = u + v$ où $u \in U$ et $v \in V$, donc $u = \omega - v \in M$, d'où $u \in U \cap M$, puisque $U \cap M \subset V \Rightarrow u \in V$, comme V est convexe et $\omega = u + v$, alors $\omega \in V$
i.e. $W \cap M = V$. □

**Proposition 1.12.6.** *Si $\mathcal{G}$ est limite inductive stricte des $\mathcal{G}_n$, alors $\tau/\mathcal{G}_n = \tau_n$.*

***Preuve***. Notons $\tau/\mathcal{G}_n = \tau'_n$. $\tau'_n$ est moins fine que $\tau_n$ d'apres la définition de la topologie induite dans $\mathcal{G}_n$. Réciproquement soit $V_n$ voisinage absolument convexe de l'origine pour $\tau_n$. Montrons qu'il existe un voisinage V de l'origine pour $\tau$ tel que $V \cap \mathcal{G}_n = V_n$. Par le lemme 1.12.5, il existe $V_{n+1}$ voisinage absolument convexe de l'origine pour $\tau_{n+1}$ tel que $V_{n+1} \cap \mathcal{G}_n = V_n$. On continue cette procédure, on voit qu'il existe, pour $k = 1, 2, ...$ un $V_{n+k+1}$ voisinage absolument convexe de l'origine pour $\tau_{n+k+1}$ tel que
$V_{n+k+1} \cap \mathcal{G}_{n+k} = V_{n+k}$. Posons

$$V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_{n+k}.$$

Montrons $V \cap \mathcal{G}_n = V_n$, on a

$$\begin{aligned} V \cap \mathcal{G}_n = V_n &= (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_{n+k}) \cap \mathcal{G}_n \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (V_{n+k} \cap \mathcal{G}_n), \end{aligned}$$

donc il suffit de montrer $V_{n+k} \cap \mathcal{G}_n = V_n$, raisonnons par récurrence ;
Pour $k = 0$, on a $V_n \cap \mathcal{G}_n = V_n$, car $V_n \subset \mathcal{G}_n$. Supposons qu'elle vraie à l'ordre k et montrons qu'elle vraie à l'ordre k+1,

$$\begin{aligned} V_{n+k+1} \cap \mathcal{G}_n &= V_{n+k+1} \cap (\mathcal{G}_{n+k} \cap \mathcal{G}_n) \\ &= (V_{n+k+1} \cap \mathcal{G}_{n+k}) \cap \mathcal{G}_n \\ &= V_{n+k} \cap \mathcal{G}_n \\ &= V_n \end{aligned}$$

D'autre part, V un est voisinage de l'origine pour $\tau$, car V est un absolument convexe (étant reunion croissante de convexes) et $V \cap \mathcal{G}_n = V_n$ est un voisinage de l'origine pour $\tau_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

**Corollaire 1.12.7.** *Si $\mathcal{G}$ est limite inductive stricte des $\mathcal{G}_n$, alors $\mathcal{G}$ est séparé si les $\mathcal{G}_n$ sont séparés.*

***Preuve***. Soit $x \in \mathcal{G}$ et $x \neq 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathcal{G}_n$, puisque $\mathcal{G}_n$ est séparé, alors il existe $V_n$ voisinage de l'origine pour $\tau_n$ tel que $x \notin V_n$, donc il existe $V$ voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $V \cap \mathcal{G}_n = V_n$ (car $\tau/\mathcal{G}_n = \tau_n$). D'où $x \notin V$. □

**Corollaire 1.12.8.** *Si $\mathcal{G}$ est limite inductive stricte des $\mathcal{G}_n$, alors $\mathcal{G}_n$ est un fermé dans $\mathcal{G}$ pour $\tau$.*

***Preuve***. Montrons par récurrence que $\mathcal{G}_n$ est un fermé dans $\mathcal{G}_{n+p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Pour $p = 1$, $\mathcal{G}_n$ est un fermé dans $\mathcal{G}_{n+1}$, par hypothèse. Supposons qu'elle vraie pour p. Alors il existe F un fermé dans $\mathcal{G}_{n+p+1}$ tel que
$\mathcal{G}_n = F \cap \mathcal{G}_{n+p}$, comme $\mathcal{G}_{n+p}$, est fermé de $\mathcal{G}_{n+p+1}$, alors $\mathcal{G}_n$ est fermé dans $\mathcal{G}_{n+p+1}$. Soit $x \in \mathcal{G}$ et $x \notin \mathcal{G}_n$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathcal{G}_{n+p}$. Comme $\mathcal{G}_n$ est un fermé dans $\mathcal{G}_{n+p}$ pour $\tau_{n+p}$, il existe $V_{n+p}$ voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}_{n+p}$ tel que $(x+V_{n+p})\cap\mathcal{G}_n = \emptyset$. Comme $\tau/\mathcal{G}_{n+p} = \tau_{n+p}$, il existe $V$ voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $V \cap \mathcal{G}_{n+p} = V_{n+p}$. Mais alors $(x + V) \cap \mathcal{G}_n = \emptyset$,( car, si non $\omega = x + v \in (x + V) \cap \mathcal{G}_n$, alors $\omega - x \in \mathcal{G}_n$, donc $\omega - x \in \mathcal{G}_{n+p}$, et $\omega - x = v \in \mathcal{G}_{n+p} \cap V = \mathcal{G}_{n+p}$, ce qui implique $\omega \in (x + V_{n+p}) \cap \mathcal{G}_n$, contradiction). Alors $(x + V) \subset \mathbf{C}^{\mathcal{G}_n}$, i.e. $\mathbf{C}^{\mathcal{G}_n}$ est un ouvert dans $\mathcal{G}$ pour $\tau$. □

**Lemme 1.12.9.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe , $M$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous module de $\mathcal{G}$ et $V$ un voisinage convexe de l'origine dans $M$. Si $M$ est fermè, alors $\forall u_0 \notin M$, il existe $W_0$ voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $W_0 \cap M = V$ et $u_0 \notin W_0$.*

***Preuve***. M est fermè, donc $\mathcal{G}/M$ est séparé, il existe $U_0$ voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $[u_0] \notin \pi(U_0)$ et $(u_0+M)\cap U_0 = \emptyset$, si non $z \in [u_0]$ et $z \in U_0$, ce qui implique $[z] \in \pi(U_0)$ contradiction. Par le lemme 1.12.5, il existe W voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $W\cap M = V$. Prenons $W\cap U_0$, il existe $U'_0$ voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $(u_0 + M) \cap U'_0 = \emptyset$, $U'_0 \subset W \cap U_0$ et $M \cap U'_0 \subset V$. Posons $W_0 = U'_0 + V = \Gamma(U'_0 \cup V)$, puisque $U'_0 \subset W_0$, alors $W_0$ est un voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que $V \subset W_0 \cap M$. Montrons $W_0 \cap M \subset V$. Soit $\omega \in W_0 \cap M \Rightarrow \omega = u + v$ où $u \in U'_0$, $v \in V$, ainsi $u = \omega - v \in M$, d'où $u \in U'_0 \cap M$. Puisque $M \cap U'_0 \subset V$, alors $u \in V$, comme $\omega = u + v$ et V convexe , ce qui implique $\omega \in V$. Donc $W_0 \cap M = V$ et $u_0 \notin W_0$. □

**Theorem 1.12.10.** $(\mathcal{G}, \tau)$ *une limite inductive stricte d'espaces* $(\mathcal{G}_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *$\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes . Alors $A \subset \mathcal{G}$ est bornée pour $\tau$ si et seleument si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $A \subset \mathcal{G}_{n_0}$ est bornée pour $\tau_{n_0}$*

***Preuve***. ($\Rightarrow$) Si $A \subset \mathcal{G}_n$, comme $i_n : \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{G}$ est continue, alors A est borné dans $\mathcal{G}$.
($\Leftarrow$) Raisonnons par l'absurde, supposons qu 'il n'existe pas de $\mathcal{G}_{n_0}$ contenant

A, donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in A \cap (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n)$. On construit un voisinage de l'origine dans $\mathcal{G}$ qui n'absorbe pas A. On construit par récurrence une suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'absolument convexes tel que

$$(P_n) \begin{cases} V_n \text{un voisinage de l'origine dans } \mathcal{G}_n \\ V_n = V_{n+1} \cap \mathcal{G}_n \\ [(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \notin V_{n+1}, \forall i : 0 \leq i \leq n \end{cases} \tag{1.26}$$

pour $n = 0$, $V_0$ un voisinage arbitraire de 0 dans $\mathcal{G}_0$, comme $v_0 \notin \mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_0$ est fermé $\mathcal{G}_1$, il existe $V_1$ un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}_1$ tel que $V_0 = V_1 \cap \mathcal{G}_0$ et $v_0 = [(\epsilon^0)_\epsilon]v_0 \notin V_1$.
Supposons que $(P_n)$ est déja construite et montrons que $(P_{n+1})$ est vériffié. Comme $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \notin V_{n+1}$ pour chaque $0 \leq i \leq n$ et $\mathcal{G}_{n+1}$ est fermé $\mathcal{G}_{n+2}$, il existe $W^i_{n+2}$ un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}_{n+2}$ que tel
$V_{n+1} = W^i_{n+2} \cap \mathcal{G}_{n+1}$ et $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \notin W^i_{n+2}$ (si $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \in \mathcal{G}_{n+1}$ est imédiate car $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \in W^i_{n+2} \Rightarrow [(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \in V_{n+1}$ contradiction, si non utiliser le lemme). Prenons

$$W_{n+2} = \bigcap_{i=1}^{n} W^i_{n+2}$$

est un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}_{n+2}$ tel que $V_{n+1} = W_{n+2} \cap \mathcal{G}_{n+1}$ et $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \notin W_{n+2}$. Comme $[(\epsilon^{n+1})_\epsilon]v_{n+1} \notin \mathcal{G}_{n+1}$ et $\mathcal{G}_{n+1}$ est fermé dans $\mathcal{G}_{n+2}$, il existe $W^{n+1}_{n+2}$ un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}_{n+2}$ tel que $V_{n+1} = W^{n+1}_{n+2} \cap \mathcal{G}_{n+1}$ et $[(\epsilon^{n+1})_\epsilon]v_{n+1} \notin W^{n+1}_{n+2}$. En posant $V_{n+2} = W_{n+2} \cap W^{n+1}_{n+2}$, alors $V_{n+2}$ est un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}_{n+2}$ tel que $V_{n+1} = V_{n+2} \cap \mathcal{G}_{n+1}$ et $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \notin V_{n+2}$; pour tout $0 \leq i \leq n+1$.
Posons

$$V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$$

est un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}$. En éffet

I. V est absolument convexe car la reunion croissante de convexe est convexe

II. $V \cap \mathcal{G}_n = V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

D'où V est un voisinage absolument convexe de 0 dans $\mathcal{G}$. Montrons
$[(\epsilon^k)_\epsilon]v_k \notin V$; $\forall k \in \mathbb{N}$. En éffet s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $[(\epsilon^k)_\epsilon]v_k \in V$, alors il existe $s \in \mathbb{N}$ et $s \geq k+1$ où $[(\epsilon^i)_\epsilon]v_i \notin V_s$; pour tout $0 \leq i \leq s-1$; d'où $[(\epsilon^k)_\epsilon]v_k \notin V_s$ contradiction. D'autre part $[(\epsilon^k)_\epsilon] \to 0$, dans $\tilde{\mathbb{C}}$ car$\left|[(\epsilon^k)_\epsilon]\right|_e =$

$e^{-k} \to 0$, quand $k \to +\infty$ et $v_k \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$. D'apres le lemme 1.9.13 A n'est pas bornée dans $\mathcal{G}$. $\square$

**Corollaire 1.12.11.** *Avec les même hypothèses du théorème 1.12.10 $(u_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{G}$, si et seulement si*

*I.* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $(u_n)_n \subset \mathcal{G}_{n_0}$.

*II.* $(u_n)_n$ *converge vers o dans* $\mathcal{G}_{n_0}$.

**Lemme 1.12.12.** *Soit $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy dans la limite inductive stricte $(\mathcal{G}, \tau)$. Soit $\mathcal{O}$ un filtre de cauchy dont la base est formée par $M+V$ où $M \in \mathcal{F}$ et $V$ un voisinages de l'origine dans $\mathcal{G}$. Alors il existe $n$ tel que $\mathcal{O}$ induit un filtre de cauchy dans $\mathcal{G}_n$*

***Preuve**.* S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(M + V) \cap \mathcal{G}_n \neq \emptyset$ pour tout $M \in \mathcal{F}$ et V un voisinages de l'origine dans $\mathcal{G}$, d'où le lemme est prouvé.
Nous supposons que ce n'est pas le cas ; alors $\forall n$, $\exists M_n \in \mathcal{F}$ et $V_n$ un voisinages de l'origine dans $\mathcal{G}$ tel que

$$(M_n + V_n) \cap \mathcal{G}_n = \emptyset; \tag{1.27}$$

supposons que $M_n - M_n \subset V_n$ et $(V_n)_n$ est une suite décroissante absoluments convexes voisinages de l'origine. Considérons

$$\Gamma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_n \cap \mathcal{G}_n)) = W.$$

Nous devons montrer qu'il n'existe pas $Q \in \mathcal{F}$ tel que $Q - Q \subset W$,
$W_n = V_0 \cap \mathcal{G}_0 + ... + V_{n-1} \cap \mathcal{G}_{n-1} + V_n$, d'où

$$W_n = \Gamma_e((\bigcup_{0\leq i\leq n-1}(V_i \cap \mathcal{G}_i)) \cup V_n)$$

est un voisinages de l'origine dans $\mathcal{G}$ et $W \subset W_n$; $\forall n$ car $(V_n)_n$ est une suite décroissante et

$$\bigcup_{k=n}^{+\infty}(V_k \cap \mathcal{G}_k) \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} V_k \subset V_n.$$

Puisque $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy, il existe $P_n \in \mathcal{F}$ tel que $P_n - P_n \subset W_n$; cela implique $(P_n + W_n) \cap \mathcal{G}_n = \emptyset$. En effet pour $u_0 \in P_n \cap M_n$, nous avons $P_n \subset u_0 + W_n$; comme conséquence $\forall y \in P_n$ :

$$y = u_0 + \sum_{i=0}^{n} v_i$$

où $v_i \in (V_i \cap \mathcal{G}_i)$ ; $0 \leq i \leq n-1$, $v_n \in V_n$, alors

$$z \in P_n + W_n \Rightarrow z = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(v_i + v'_i) + v_n + v'_n;$$

remarquons que $u_0 \in M_n$, car $u_0 \in P_n \cap M_n$,

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(v_i + v'_i)}_{g} \in \mathcal{G}_n$$

car $(\mathcal{G}_n)_n$ est croissante et $\underbrace{v_n + v'_n}_{v} \in V_n$ car $V_n$ est convexe. Alors $z \notin \mathcal{G}_n$; car $z - g = u_0 + v \Rightarrow z - g \in (P_n + W_n) \cap \mathcal{G}_n$, ce qui contredit 1.27 .
Supposons il qu' existe $Q \in \mathcal{F}$ tel que $Q - Q \subset W$ et $y_0 \in Q$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y_0 \in \mathcal{G}_n$. Montrons que $Q \cap P_n = \emptyset$, $\forall n$; soit $y \in P_n$, alors $(y + W_n) \cap \mathcal{G}_n \subset (P_n + W_n) \cap \mathcal{G}_n = \emptyset$. Ce qui implique $y_0 \notin (y + W_n) \Rightarrow y_0 - y \notin W_n \Rightarrow y_0 - y \notin W$, donc $y_0 - y \notin Q - Q$, d'où $y \notin Q$. □

**Theorem 1.12.13.** $(\mathcal{G}, \tau)$ *une limite inductive stricte d'espaces* $(\mathcal{G}_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\tilde{\mathbb{C}}$*-modules topologiques localement convexes . Alors* $\mathcal{G}$ *est complet si et seulement si* $\mathcal{G}_n$ *est complet* $\forall n \in \mathbb{N}$.

***Preuve***. $(\Rightarrow)$ Comme $(\mathcal{G}, \tau)$ une limite inductive stricte d'espaces $(\mathcal{G}_n, \tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes et $\mathcal{G}_n$ est un fermé dans $\mathcal{G}_{n+1}$ pour $\tau_{n+1}$, alors $\mathcal{G}_n$ est un fermé dans $\mathcal{G}$ pour $\tau$ et comme $\mathcal{G}$ est complet , donc $\mathcal{G}_n$ est complet $\forall n \in \mathbb{N}$.
$(\Leftarrow)$Soit $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy dans $\mathcal{G}$, le filtre $\mathcal{O}$ induit un filtre de cauchy $\mathcal{O}_n$ dans $\mathcal{G}_n$. D'où $\mathcal{O}_n$ converge vers $u \in \mathcal{G}_n$, comme $\tau_n = \tau/\mathcal{G}_n$, alors u adhère $\mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ converge vers $u \in \mathcal{G}$, puisque $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{F}$ converge vers u. □

**Proposition 1.12.14.** *Si* $\mathcal{G}$ *limite inductive de* $\tilde{\mathbb{C}}$*-modules topologiques localement convexes et bornologiques* $(\mathcal{G}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$*, alors il est un bornologique.*

***Preuve***. Soit $i_\gamma : \mathcal{G}_\gamma \longrightarrow \mathcal{G}$ la famille des injections $\tilde{\mathbb{C}}$ linéaires , par définition de la limite inductive les $i_\gamma$ sont continue. Soit U un absolument convexe et bornivore de $\mathcal{G}$, montrons que U est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. Alors $i_\gamma^{-1}(U)$ est absolument convexe, d'autre-part soit $A_\gamma$ un borné de $\mathcal{G}_\gamma$, alors

$i_\gamma(A_\gamma)$ est un borné de $\mathcal{G}$, car $i_\gamma$ continue. Donc $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $i_\gamma(A_\gamma) \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]U$, $\forall b \leq a$. D'où $A_\gamma \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]i_\gamma^{-1}(U)$, $\forall b \leq a$ i.e. $i_\gamma^{-1}(U)$ est bornivore de $\mathcal{G}_\gamma$, comme $\mathcal{G}_\gamma$ est bornologique, alors $i_\gamma^{-1}(U)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}_\gamma$, $\forall \gamma \in \Gamma$. D'où U est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. $\square$

**Proposition 1.12.15.** *La limite inductive d'espaces tonnelés est tonnelée.*

***Preuve***. Soit B un tonneau, $\forall \gamma \in \Gamma$, $i_\gamma : \mathcal{G}_\gamma \longrightarrow \mathcal{G}$ est continue, donc $i_\gamma^{-1}(B)$ est un tonneau. Comme $\mathcal{G}_\gamma$ est un tonnelé, alors $i_\gamma^{-1}(B)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}_\gamma$, donc B est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. $\square$

**Proposition 1.12.16.** *Tout $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe $\mathcal{G}$ bornologique est la limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules ultra- pseudo-seminormes .*

**i)** *Si $\mathcal{G}$ est séparé, alors il est une limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules ultra-pseudo- normés.*

**ii)** *Si $\mathcal{G}$ est séparé et complet, alors il est une limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Banach.*

***Preuve***. Soit $\emptyset \neq A \subset \mathcal{G}$ absolument convexe fermée borné . Alors $\mathcal{G}_A$ est topologisé par ultra- pseudo-seminorme $\mathcal{P}_A$. Soit $i_A : \mathcal{G}_A \longrightarrow \mathcal{G}$ l'injection canonique. On note par $\tau$ la topologie initiale de $\mathcal{G}$ et $\tau'$ la topologie la plus fine qui rend les $(i_A)_A$ continues. Soit V un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G}$ pour $\tau$, comme est A borné, alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $[(\epsilon^{-a})_\epsilon]A \subset V$. Donc $[(\epsilon^{-a})_\epsilon]A \subset i_A^{-1}(V)$. Ce qui signifie que V est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ pour $\tau'$.

Réciproquement. Soit V un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G}$ pour $\tau'$. Alors, pour toute $\emptyset \neq A \subset \mathcal{G}$ absolument convexe fermée borné , $i_A^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}_A$. Ainsi , pour A, il $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $[(\epsilon^{-a})_\epsilon]A \subset i_A^{-1}(V)$. Donc $[(\epsilon^{-a})_\epsilon]A \subset V$. Il s'entuit que V est un bornivore absolument convexe, comme $\mathcal{G}$ est bornologique, nous concluons que V un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ pour $\tau$.

**i)** Supposons de plus qu'il est séparé. D'apres la proposition1.9.24 les $\mathcal{P}_A$ sont d'ultra- pseudo-normés.

**ii)** Supposons de plus qu'il est complet . D'apres la proposition1.9.24 les $\mathcal{G}_A$ sont des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Banach.

$\square$

**Proposition 1.12.17.** **i)** *$\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé est bornologique si et seulement s'il est la limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_A)_A$, où $A$ est un disque borné de $\mathcal{G}$.*

**ii)** *$\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé est ultra-bornologique si et seulement s'il est la limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_A)_A$, où A est un disque borné de Banach.*

**iii)** *Tout bornologique séparé et complet est un ultra-bornologique.*

***Preuve.*** **i)** La condition nécéssaire résulte de la proposition 1.12.16.
Réciproquement. Supposons $(\mathcal{G},\tau)$ est est la limite inductive des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_A)_A$ et montrons qu'il est bornologique. Soit V un bornivore absolument convexe, de $\mathcal{G}$. Pour tout A, $i_A^{-1}(V)$ est un absolument convexe de $\mathcal{G}_A$ et puisque $i_A$ est continue, alors, Pour tout borné D de $\mathcal{G}_A$, $i_A(D)$ est un borné de $\mathcal{G}$. Comme V est bornivore, alors, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $i_A(D) \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]V$, $\forall b \leq a$. Par conséquent on a $D \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]i_A^{-1}(V)$, $\forall b \leq a$. Ce qui signifie que $i_A^{-1}(V)$ est un bornivore de $\mathcal{G}_A$. Comme $\mathcal{G}$ est séparé, alors $(\mathcal{G}_A,\mathcal{P}_A)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module ultra- pseudo- normé, donc bornologique. Ce qui implique que $i_A^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}_A$. Ainsi V un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}$ est bornologique.

**ii)** Comme dans la proposition 1.12.16, on peut prouver que tout ultra-bornologique est la limite inductive des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_A)_A$, où A un disque borné de Banach.
Réciproquement. Supposons $(\mathcal{G},\tau)$ est est la limite inductive des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_A)_A$, où A un disque de Banach borné et montrons qu'il est ultra-bornologique. Soit V un ultra-bornivore absolument convexe, de $\mathcal{G}$. Soit D un disque de Banach borné de $\mathcal{G}_A$, ce qui signifie que D est absolument convexe, borné de $\mathcal{G}_A$ et $((\mathcal{G}_A)_D,\mathcal{P}_D) = (\mathcal{G}_D,\mathcal{P}_D)$ est un Banach. D'où $i_A(D)$ est un disque de Banach borné de $\mathcal{G}$ et puisque V un ultra-bornivore, alors, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $i_A(D) \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]V$, $\forall b \leq a$. Par conséquent on a $D \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]i_A^{-1}(V)$, $\forall b \leq a$. Ce qui signifie que $i_A^{-1}(V)$ est un ultra-bornivore absolument convexe, de $\mathcal{G}_A$. Puisque $\mathcal{G}_A$ est un Banach, il est ultra-bornologique. Ce qui implique que $i_A^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}_A$. Ainsi V un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}$ est ultra-bornologique.

**iii)** Supposons $\mathcal{G}$ est bornologique, séparé, alors, d'apres la proposition1.12.17$\mathcal{G}$ est la limite inductive des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_A)_A$, où A un disque borné de $\mathcal{G}$. La proposition 1.12.16 implique que les $\mathcal{G}_A$ sont des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Banach. D'apres iii) $\mathcal{G}$ est ultra-bornologique.

□

**Proposition 1.12.18.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module ultra-bornologique séparé. $\mathcal{H}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe qui a un réseau $W$ de type $\mathcal{C}$. Si $T : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire séquentiéllement fermé, alors $T$ est continue.*

***Preuve.*** D'apres 1.12.17 $\mathcal{G}$ est la limite inductive de $(\mathcal{P}_B)_B$, oú B un disque de Banach borné, donc $(\mathcal{G}_B, \mathcal{P}_B)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Banach. Ce qui nous donne que $\mathcal{G}$ est la limite inductive de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules de Fréchet. En appliquant le corrollaire 1.12.3, nous obtenons que T est continue. □

## 1.13 Limites projectives

Soient $(E_\alpha, \xi_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de $\tilde{\mathbb{C}}$-modules topologiques localement convexes et $u_\alpha : E \longrightarrow E_\alpha$ des applications $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaires, où E est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module

**Définition 1.13.1.** *La topologie limite projective définie sur E par les $(E_\alpha, \xi_\alpha)_{\alpha\in A}$ est définie par la base de voisinages de l'origine de E donnée par les intersections finies des $u_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, où $V_\alpha$ parcourt une base $B_\alpha$ de voisinages de l'origine de $E_\alpha$.*

**Corollaire 1.13.2.** *Limite projective est la topologie la moins fine sur E pour laquelle les $u_\alpha$ sont continues.*

***Preuve.*** Soit $\tau$ une topologie sur E pour la quelles les $u_\alpha$ sont continues. Soit V un voisinage de l'origine de E pour la topologie limite projective, alors

$$\bigcap_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \subset V,$$

où $V_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i}$. Comme les $u_\alpha$ sont continues pour $\tau$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$$

est un voisinage de l'origine de E pour $\tau$, donc V est un voisinage de l'origine de E pour $\tau$, ainsi limite projective est moins fine que $\tau$. □

**Exemple 1.13.3.** *Si E est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique, M un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module de E et*

$$\begin{aligned} i : M &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

*Dans ce cas, la topologie limite projective n'est rien que la topologie induite de E sur M.*

**Proposition 1.13.4.** *Si les $E_\alpha$ sont séparés et*

$$\bigcap_{\alpha\in A} u_\alpha^{-1}(0) = \{0\},$$

*alors E est séparé.*

***Preuve***. Soit $x \in E$, $x \neq 0$, donc $\exists \alpha_0 \in A$ tel que $x \notin u_{\alpha_0}^{-1}(0)$, i.e. $u_{\alpha_0}(x) \neq 0$. Comme $E_{\alpha_0}$ est séparé, alors il existe $V_{\alpha_0}$ voisinage de l'origine de $E_{\alpha_0}$ tel que $u_{\alpha_0}(x) \notin V_{\alpha_0}$. D'où $x \notin u_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$, ce implique que E est séparé. $\square$

**Proposition 1.13.5.** *Soit la limite projective définie sur E par les $E_\alpha$ et*

$$v : F \longrightarrow E$$

*une application $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire, avec F un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique, alors v est continue si et seulement si $\forall\alpha \in A : v_\alpha = v \circ u_\alpha$ est continue, i.e $v_\alpha : F \longrightarrow E_\alpha$ est continue.*

***Preuve***. $\forall\alpha \in A$ ,

$$v_\alpha = v \circ u_\alpha : F \longrightarrow E_\alpha$$

Si $v$ est continue, alors $v_\alpha$ est continue.
Inversement, supposons que les $v_\alpha$ sont continue. Soit $V$ voisinage de l'origine de $E$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) &\subset V \\
v^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})) &\subset v^{-1}(V) \\
\bigcap_{i=1}^{n} v^{-1}(u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})) &\subset v^{-1}(V) \\
\bigcap_{i=1}^{n} (u_{\alpha_i} \circ v)^{-1}(V_{\alpha_i}) &\subset v^{-1}(V),
\end{aligned}$$

or $(u_{\alpha_i} \circ v)^{-1}(V_{\alpha_i})$ est voisinage de l'origine de F, donc $v^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine de E, ce qui affirme que $v$ est continue. $\square$

**Proposition 1.13.6.** *Soit la limite projective définie sur E par les $E_\alpha$ et B une partie de E, alors B est $\tilde{\mathbb{C}}$-bornée de E si et seulement si $\forall\alpha \in A$ , $u_\alpha(B)$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-bornée dans $E_\alpha$.*

***Preuve***. Si B est $\tilde{\mathbb{C}}$-bornée de E, alors $\forall\alpha \in A$ , $u_\alpha(B)$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-bornée de $E_\alpha$, car $u_\alpha$ est continue.
Inversement, supposons B une partie de E telle que $\forall\alpha \in A$ , $u_\alpha(B)$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-bornée de $E_\alpha$. Soit

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$$

où $V_{\alpha_i}$ est un voisinage de l'origine $E_\alpha$, alors V est un voisinage de l'origine de E. Comme $u_\alpha(B)$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-bornée de $E_\alpha$, alors, il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} u_\alpha(B) & \subset & [(\epsilon^b)_\epsilon]V_{\alpha_i}, \forall b \leq a_i \\ B & \subset & [(\epsilon^b)_\epsilon]u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}), \forall b \leq a_i \\ B & \subset & [(\epsilon^b)_\epsilon]\bigcap_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}), \forall b \leq a, \end{array}$$

où

$$a = \min_{1\leq i\leq n} a_i.$$

D'où $B \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]V, \forall b \leq a$. □

**Définition 1.13.7.** *La famille $(p_i)_{i\in I}$ de d'ultra-pseudo-seminormes sur $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$ est dite filtrante si pour toute $J \subset I$, finie $\sup_{i\in J} p_i$ est une ultra-pseudo-seminormes sur $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$.*

**Lemme 1.13.8.** *Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille d'ultra-pseudo-seminormes filtrante sur $\tilde{\mathbb{C}}$-module $\mathcal{G}$ et $M$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module de $\mathcal{G}$. Si $\tau$ est la topologie quotient sur $\mathcal{G}/M$ et $\tau'$ la topologie définie sur $\mathcal{G}/M$ par les ultra-pseudo-seminormes*

$$\bar{p_i}(\bar{x}) = \inf_{x\in\bar{x}} p_i(x),$$

*alors les deux topologies coïncides.*

***Preuve***. Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}/M \\ x & \longmapsto & \bar{x}. \end{array}$$

Si $U_{i,\epsilon} = \{x \in \mathcal{G} : p_i(x) < \epsilon\}$, alors $\varphi(U_{i,\epsilon}) = \{\bar{x} : \bar{p}_i(\bar{x}) < \epsilon\}$. En effet ,

$$\begin{aligned} \bar{x} \in \{\bar{x} : \bar{p}_i(\bar{x}) < \epsilon\} &\iff \inf_{x \in \bar{x}} p_i(x) < \epsilon \\ &\iff \exists x \in \bar{x} \text{ tel que } p_i(x) < \epsilon \\ &\iff \varphi(x) = \bar{x} \text{ et } x \in U_{i,\epsilon} \\ &\iff \bar{x} \in \varphi(U_{i,\epsilon}) \end{aligned}$$

Montrons que les deux topologies coïncides. $(U_{i,\epsilon})_{i,\epsilon}$ forme une base de voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, où $U_{i,\epsilon} = \{x \in \mathcal{G} : p_i(x) < \epsilon\}$.
Par la définition de la topologie quotient, $(\varphi(U_{i,\epsilon}))_{i,\epsilon}$ forme une base de voisinage de l'origine de $\mathcal{G}/M$ pour $\tau$.
D'autre part $(\{\bar{x} : \bar{p}_i(\bar{x}) < \epsilon\})_{i,\epsilon}$ forme une base de voisinage de l'origine pour $\tau'$, comme $\varphi(U_{i,\epsilon}) = \{\bar{x} : \bar{p}_i(\bar{x}) < \epsilon\}$, alors $\tau'$ coïncide avec $\tau$. □

**Proposition 1.13.9.** *Tout* $(\mathcal{G}, p_i)_{i\in I}$ $\tilde{\mathbb{C}}$*-module topologique localement convexe séparé est une limite projective d'espaces* $\tilde{\mathbb{C}}$*-modules normés.*

***Preuve***. $\forall i \in I$, $p_i$ est une ultra-pseudo-seminorme continue sur $\mathcal{G}$, $p_i^{-1}(0)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-sous-module de $\mathcal{G}$. Considérons l'espace quotient $\mathcal{G}_{p_i} = \mathcal{G}/p_i^{-1}(0)$, $p_i$ définie une ultra-pseudo-norme sur $\mathcal{G}_{p_i}$ comme suit

$$\|X\|_{p_i} = \inf_{x \in X} p_i(x)$$

Montrons que $\|X\|_{p_i} = p_i(x)$, où $x$ est un représentant de X.
Soient $x, x'$ deux représentants de X, alors $|p_i(x) - p_i(x')| \leq p_i(x - x')$.
Or $p_i(x - x') = 0$ puisque $x, x' \in X$, ce qui implique $p_i(x) = p_i(x')$, donc $\|X\|_{p_i} = p_i(x)$.
Montrons que $\|.\|_{p_i}$ est une ultra-pseudo-norme sur $\mathcal{G}_{p_i}$.

$$\begin{aligned} \|X\|_{p_i} = 0 &\iff p_i(x) = 0 \\ &\iff x \in p_i^{-1}(0) \\ &\iff X = \bar{0}, \end{aligned}$$

d'où $\|.\|_{p_i}$ est une ultra-pseudo-norme sur $\mathcal{G}_{p_i}$. Notons $\tau_{p_i}$ la topologie sur $\mathcal{G}_{p_i}$ définie par $\|.\|_{p_i}$ , or d'apres le lemme 1.13.8 $\tau_{p_i}$ est la topologie quotient sur $\mathcal{G}_{p_i}$. Considérons les surjections cannoniques

$$\begin{aligned} \varphi_{p_i} : \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}_{p_i} \\ x &\longmapsto \varphi_{p_i}(x) = \bar{x}, \end{aligned}$$

Notons $\tau$ la topologie initiale de $\mathcal{G}$ et $\tau'$ la topologie limite projective définie sur $\mathcal{G}$ par les $(\mathcal{G}_{p_i}, \tau_{p_i})_{i\in I}$. Comme $\tau'$ est la moins fine qui rend $\varphi_{p_i}$ continue, donc $\tau'$ est moins fine que $\tau$.
Inversement, soit U un ouvert de $(\mathcal{G}, \tau)$, comme $\varphi_{p_i}$ est une application ouverte, alors $\varphi_{p_i}(U)$ est un ouvert de $\tau_{p_i}$.
D'autre part

$$\varphi_{p_i} : (\mathcal{G}, \tau') \longrightarrow (\mathcal{G}_{p_i}, \tau_{p_i})$$

est continue, car $\tau'$ la topologie limite projective définie sur $\mathcal{G}$ par les $(\mathcal{G}_{p_i}, \tau_{p_i})_{i\in I}$, donc $U = \varphi_{p_i}^{-1}(\varphi_{p_i}(U))$ est un ouvert de $\tau'$, i.e. $\tau$ est moins fine que $\tau'$. Ainsi les deux topologies coïncides □

## 1.14 Dualité

Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ est le dual topologique de $\mathcal{G}$ .

**Proposition 1.14.1.** *Soient $v_1, ..., v_n$ des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} p_{v_1,\ldots,v_n} : \mathcal{G} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & p_{v_1,\ldots,v_n}(u) = \sup\limits_{1\leq i\leq n} |< u, v_i >|_e \end{array}$$

*est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}$.*

***Preuve***. Pour tous $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, $u \in \mathcal{G}$, $c \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$. On a

**i)**

$$\begin{array}{rcl} p_{v_1,\ldots,v_n}(0) & = & \sup\limits_{1\leq i\leq n} |< 0, v_i >|_e \\ & = & 0 \end{array}$$

**ii)**

$$\begin{array}{rcl} p_{v_1,\ldots,v_n}(\lambda u) & = & \sup\limits_{1\leq i\leq n} |< \lambda u, v_i >|_e \\ & = & \sup\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda < u, v_i >|_e \\ & \leq & |\lambda|_e \sup\limits_{1\leq i\leq n} |< u, v_i >|_e \\ & \leq & |\lambda|_e p_{v_1,\ldots,v_n}(u) \end{array}$$

**iii)**

$$\begin{aligned} p_{v_1,\ldots,v_n}(c[(\epsilon^a)_\epsilon]u) &= \sup_{1\leq i\leq n} |< c[(\epsilon^a)_\epsilon]u, v_i >|_e \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} |c[(\epsilon^a)_\epsilon] < u, v_i >|_e \\ &\leq |c[(\epsilon^a)_\epsilon]|_e \sup_{1\leq i\leq n} |< u, v_i >|_e \\ &\leq |c[(\epsilon^a)_\epsilon]|_e p_{v_1,\ldots,v_n}(u) \end{aligned}$$

**iv)**

$$\begin{aligned} p_{v_1,\ldots,v_n}(u+w) &= \sup_{1\leq i\leq n} |< u+w, v_i >|_e \\ &= \sup_{1\leq i\leq n} |< u, v_i > + < w, v_i >|_e \\ &\leq \sup_{1\leq i\leq n} (\max(|< u, v_i >|_e, |< w, v_i >|_e)) \\ &\leq \max(\sup_{1\leq i\leq n} |< u, v_i >|_e, \sup_{1\leq i\leq n} |< u, v_i >|_e)) \\ &\leq \max(p_{v_1,\ldots,v_n}(u), p_{v_1,\ldots,v_n}(w)) \end{aligned}$$

□

**Définition 1.14.2.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ est le dual topologique de $\mathcal{G}$ . La topologie faible sur $\mathcal{G}$ est la topologique définie par $(p_{v_1,\ldots,v_n})_n$, noté $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$.*

**Proposition 1.14.3.** *Soit $A$ une parties finie de $\mathcal{G}$ , alors l'application*

$$\begin{aligned} p_A : \mathcal{G} &\longrightarrow \tilde{\mathbb{C}} \\ v &\longmapsto p_A(v) = \sup_A |< u, v >|_e, \end{aligned}$$

*est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ .*

***Preuve.*** Voir la preuve de la proposition 1.14.1 □

**Définition 1.14.4.** *La topologie faible sur $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ est la topologique définie par $(p_A)_{A\in B}$, noté $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$.*

**Proposition 1.14.5.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe, alors $((\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}))$est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé.*

***Preuve***. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$ et $v \neq 0$, alors , il existe $u_0 \in \mathcal{G}$ tel que $v(u_0) \neq 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$. D'où

$$p_{x_0}(v) = |v(u_0)|_e > 0,$$

car $|.|_e$ est une ultra-pseudo-norme sur $\tilde{\mathbb{C}}$. Ce qui implique notre affirmation.

□

**Définition 1.14.6.** *Soient $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique et $A$ un sous-ensemble de $\mathcal{G}$. On appelle polaire de $A$, noté $A^0$, le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}})$ défini par*
$A^0 = \{v \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}) : |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A\}$

**Proposition 1.14.7. i)** *Si $A_1 \subset A_2$, alors $A_2^0 \subset A_1^0$.*
**ii)** *$A^0$ est absolument convexe de $\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}})$ et fermé pour $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$.*
**iii)** *$A^0$ est absorbant si et seulement si $A$ est $\sigma(\mathcal{G},\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}})))$-borné.*
**iv)** *$\forall\lambda$ inversible de $\tilde{\mathbb{C}}$, $(\lambda A)^0 = \lambda^{-1}A^0$.*
**v)** *On a*

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)^0 = \bigcap_{i\in I} A_i^0$$

***Preuve***. **i)**

$$\begin{aligned} A_2^0 &= \{v \in \mathcal{H} : |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A_2\} \\ &\subset \{v \in \mathcal{H} : |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A_1\} \\ &\subset A_1^0 \end{aligned}$$

.

**ii)** Montrons que $A^0$ est équilibré, soient $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$, $|\lambda|_e \leq 1$ et $v \in A^0$ on a
$|< u, \lambda v >|_e = |\lambda < u, v >|_e \leq |\lambda|_e |< u, v >|_e \leq 1$, $\forall u \in A$.
Montrons que $A^0$ est convexe, soient $v_1, v_2 \in A^0$
$|< u, v_1 + v_2 >|_e = |< u, v_1 > + < u, v_2 >|_e \leq \max(|< u, v_1 >|_e, |< u, v_2 >|_e) \leq 1$ i.e. $A^0 + A^0 \subset A^0$, puisque $A^0$ est équilibré, soient $\lambda, \mu \in \tilde{\mathbb{C}}$, tel que $\max(|\lambda|_e \leq 1, |\mu|_e \leq 1) \leq 1$, alors $\lambda A^0 + \mu A^0 \subset A^0 + A^0 \subset A^0$; d'où $A^0$ est convexe.
Montrons que $A^0$ est un fermé pour $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$. On sait que

$$A^0 = \bigcap_{u\in A} A_u$$

où $A_u = \{v \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : |< u, v >|_e \leq 1\} = A_u = \{v \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : \mathcal{P}_u(v) \leq 1\} = \mathcal{P}_u^{-1}(]-\infty, 1])$ est un fermé car $]-\infty, 1]$ est un fermé et $\mathcal{P}_u$ est continue, d'où $A^0$ est un fermé.

**iii)**

$$\begin{aligned} v \in (\lambda A)^0 &\iff |< \lambda u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A \\ &\iff |< u, \lambda v >|_e \leq 1, \forall u \in A \\ &\iff \lambda v \in A^0 \\ &\iff v \in \lambda^{-1} A^0. \end{aligned}$$

D'où $(\lambda A)^0 = \lambda^{-1} A^0$

**iv)** Supposons $A^0$ est absorbant, alors $\forall v \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$; $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $v \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A^0 = ([(\epsilon^{-b})_\epsilon]A)^0$, $\forall b \leq a$ considérons

$$\begin{aligned} U &= \{u \in \mathcal{G} : \max_{0 \leq i \leq n} \mathcal{P}_{v_i}(u) \leq \eta\} \\ &= \{u \in \mathcal{G} : \max_{0 \leq i \leq n} \eta^{-1} \mathcal{P}_{v_i}(u) \leq 1\} \\ &= \{u \in \mathcal{G} : \max_{0 \leq i \leq n} e^{-\ln \eta} \mathcal{P}_{v_i}(u) \leq 1\} \\ &= \{u \in \mathcal{G} : \max_{0 \leq i \leq n} \mathcal{P}_{v_i}([(\epsilon^{\ln \eta})_\epsilon]u) \leq 1\} \end{aligned}$$

cherchons une condition pour que $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]A \subset U$, soit $u \in A$, alors $\left|< [(\epsilon^{\ln \eta})_\epsilon][(\epsilon^{-b})_\epsilon]u, v_i >\right|_e \left|< [(\epsilon^{\ln \eta - b})_\epsilon]u, v_i >\right|_e \leq 1$ si $v_i \in ([(\epsilon^{\ln \eta - b})_\epsilon]A)^0$, i.e. si $b - \ln \eta \leq a$ donc si $b \leq \ln \eta + a$, ce qui prouve que A est $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$-borné

Réciproquement si A est $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$-borné, alors $\forall v \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$; $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset [(\epsilon^b)_\epsilon]\{u \in \mathcal{G} : |< u, v >|_e \leq 1\}$, $\forall b \leq a$. D'où

$$\begin{aligned} [(\epsilon^{-b})_\epsilon]v &\in [(\epsilon^{-b})_\epsilon](\{u \in \mathcal{G} : |< u, v >|_e \leq 1\})^0, \\ &\in ([(\epsilon^b)_\epsilon]\{u \in \mathcal{G} : |< u, v >|_e \leq 1\})^0 \subset A^0 \\ &\in A^0, \forall b \leq a. \end{aligned}$$

donc $v \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A^0$, $\forall b \leq a$; i.e. $A^0$ est absorbant.

**v)**

$$\begin{aligned} v \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^0 &\iff |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A_i, i \in I \\ &\iff v \in \bigcap_{i \in I} A_i^0. \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.14.8.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique ,alors*

*I.*

$$[(\epsilon^{-b})_\epsilon]v \in A^0 \Longleftrightarrow \sup_{x\in A} |< u, v >|_e \leq e^{-b}$$

*II.* $\mathcal{P}_{A^0}(v) \doteq \sup_{x\in A} |< u, v >|_e$*, où $A$ est $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$-borné.*

***Preuve.*** I.

$$\begin{aligned}
[(\epsilon^{-b})_\epsilon]v \in A^0 &\Longleftrightarrow v \in [(\epsilon^{b})_\epsilon]A^0 \\
&\Longleftrightarrow v \in ([(\epsilon^{-b})_\epsilon]A)^0 \\
&\Longleftrightarrow \left|< [(\epsilon^{-b})_\epsilon]u, v >\right|_e \leq 1, \forall u \in A \\
&\Longleftrightarrow \left|[(\epsilon^{-b})_\epsilon]\right|_e |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A \\
&\Longleftrightarrow e^b |< u, v >|_e \leq 1, \forall u \in A \\
&\Longleftrightarrow |< u, v >|_e \leq e^{-b}, \forall u \in A
\end{aligned}$$

II. Par définition on a $\mathcal{P}_{A^0}(v) = e^{-V_{A^0}(v)}$

$$\begin{aligned}
V_{A^0}(v) &= \sup\{b \in \mathbb{R} : v \in [(\epsilon^b)_\epsilon]A^0\} \\
&= \sup\{b \in \mathbb{R} : \sup_{u\in A} |< u, v >|_e \leq e^{-b}\} \\
&= \sup\{b \in \mathbb{R} : \ln(\sup_{u\in A} |< u, v >|_e) \leq -b\} \\
&= \sup\{b \in \mathbb{R} : b \leq -\ln(\sup_{u\in A} |< u, v >|_e)\} \\
&= -\ln(\sup_{u\in A} |< u, v >|_e);
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{A^0}(v) &= e^{-(-\ln(\sup_{u\in A} |<u,v>|_e))} \\
&= \sup_{u\in A} |< u, v >|_e
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.14.9.** *Le polaire d'un ensemble $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})))$-borné est absolument convexe, absorbant et sa jauge est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$.*

**Définition 1.14.10.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et $\mathcal{B}$ l'ensemble de tous les $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$-borné de $\mathcal{G}$. Alors la topologie sur $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$ définie par les $(\mathcal{P}_{B^0})_{B\in\mathcal{B}}$ est dite topologie forte, et elle notée $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})), \mathcal{G})$.*

**Proposition 1.14.11.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module bornologique localement convexe, alors $(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}))$ est complet.*

***Preuve***. Soit $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy dans $(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}))$, pour tout $u \in \mathcal{G}$, $\mathcal{F}_u$ est le filtre a comme base la famille $\{X_u\}_{X\in\mathcal{F}}$ où $X_u = \{T(u) : T \in X\}$, est un filtre de cauchy dans $\tilde{\mathbb{C}}$. En effet, comme $\mathcal{F}$ un filtre de cauchy dans $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$. Pour $u \in \mathcal{G}$, $\forall\epsilon > 0$, $\exists X \in \mathcal{F}$ tel que $|T(u) - T'(u)|_e \leq \epsilon$, $\forall T, T' \in X$, donc il suffit de prendre $X_u \in \mathcal{F}_u$. Puisque $\tilde{\mathbb{C}}$ est complet, alors $\mathcal{F}_u$ concerge vers $F(u) \in \tilde{\mathbb{C}}$. Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{G} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & F(u) \end{array}$$

Montrons que F est une forme$\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire .

I. Soient $u, v \in \mathcal{G}$ et $\forall\epsilon > 0, \exists X \in \mathcal{F}$ tel que $|T(u) - F(u)|_e \leq \epsilon, \forall T \in X$ et $\exists Y \in \mathcal{F}$ tel que $|T(v) - F(v)|_e \leq \epsilon, \forall T \in Y$, alors $Z = X \cap Y \in \mathcal{F}$ et on a $|T(u+v) - F(u) - F(v)|_e = |T(u) + T(v) - F(u) - F(v)|_e \leq \max(|T(u) - F(u)|_e, |T(v) - F(v)|_e) < \epsilon, \forall T \in Z$,

$$\lim_{\rightarrow} \mathcal{F}_{u+v} = F(u) + F(v)$$

i.e. $F(u+v) = F(u) + F(v)$

II. Soit $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}, u \in \mathcal{G}$ et $\forall\epsilon > 0$,

$$\epsilon' = \begin{cases} \epsilon & \text{si } |\lambda|_e = 0 \\ \frac{\epsilon}{|\lambda|_e} & \text{si } |\lambda|_e \neq 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

$\exists X \in \mathcal{F}$ tel que $|T(u) - F(u)|_e < \epsilon', \forall T \in X$. D'où $|T(\lambda u) - \lambda F(u)|_e = |\lambda(T(u) - F(u))|_e \leq |\lambda|_e |T(u) - F(u)|_e$, donc $|T(\lambda u) - \lambda F(u)|_e < \epsilon, \forall T \in X$. Ainsi

$$\lim_{\rightarrow} \mathcal{F}_{\lambda u} = \lambda F(u).$$

Montrons que F est continue . Soit A un borné de $\mathcal{G}$, alors A est $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$-borné de $\mathcal{G}$, car $\tau$ plus fine que $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$ dans $\mathcal{G}$. $A^0$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ pour $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$. Comme $\mathcal{F}$ est un filtre de cauchy pour $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$, alors $\exists X \in \mathcal{F}$ tel que $X - X \subset A^0$, ce qui signifie $\forall T, T' \in X$, $\forall u \in A$ on a $|T(u) - T'(u)|_e \leq 1$. En particulier, pour $T'$ fixé on a

$$\begin{aligned} |T(u)|_e &= |T(u) - T'(u) + T'(u)|_e \\ &\leq \max(|T(u) - T'(u)|_e, |T'(u)|_e), \forall T \in X, \forall u \in A \\ &\leq C, \forall T \in X, \forall u \in A. \end{aligned}$$

D'autre-part pour tout $u \in \mathcal{G}$, $F(u)$ adhère $\mathcal{F}_u$, alors il existe $T' \in X$, tel que $|F(u) - T'(u)|_e \leq C$, $\forall u \in A$, nous pouvons écrire
$|F(u)|_e \leq \max(|F(u) - T'(u)|_e, |T'(u)|_e) \leq C$, ce qui prouve que $F(A)$ est borné dans $\tilde{\mathbb{C}}$. Puisque $\mathcal{G}$ est bornologique, F alors est continue. Reste à prouver que $\mathcal{F} \longrightarrow F$ pour la topologie $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$. Soit A $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}))$-borné de $\mathcal{G}$ et $\eta > 0$, considérons

$$\begin{aligned} V &= \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : \mathcal{P}_{A^0}(T) < \eta\} \\ &= \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : \sup_{u \in A} |T(u)|_e < \eta\}, \end{aligned}$$

alors $\exists X \in \mathcal{F}$ tel que $X - X \subset V$, ce qui signifie $\forall T, T' \in X$, $\forall u \in A$ on a $|T(u) - T'(u)|_e < \eta$. Puisque $\mathcal{F}_u$ concerge vers $F(u) \in \tilde{\mathbb{C}}$, alors il existe $T' \in X$, tel que $|F(u) - T'(u)|_e < \eta$, donc $\forall T \in X$, $\forall u \in A$ on a $|F(u) - T(u)|_e \leq \max(|F(u) - T'(u)|_e, |T'(u) - T(u)|_e) < \eta$, d'où $\forall T \in X$, $\sup_{u \in A} |F(u) - T(u)|_e \leq \eta\}$ i.e. $\forall T \in X$, $\mathcal{P}_{A^0}(F - T) < \eta$, ainsi

$$\begin{aligned} X &\subset F + V = F + \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : \mathcal{P}_{A^0}(T) < \eta\} \\ &\subset F + [(\epsilon^{-\ln \eta})_\epsilon] A^0. \end{aligned}$$

Soit W un voisinage de F pour la strong topologie, alors

$$F + \{T : \max_{0 \leq i \leq N} \mathcal{P}_{A_i^0}(T) \leq \eta\} \subset W.$$

Pour chaque $A_i$, alors $\exists X_i \in \mathcal{F}$ tel que$X_i \subset F + [(\epsilon^{-\ln \eta})_\epsilon] A_i^0$. Prenons

$$X = \bigcap_{i \doteq 1}^{N} X_i \in \mathcal{F},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} X &\subset F + [(\epsilon^{-\ln \eta})_\epsilon] \bigcap_{i=1}^{N} A_i^0 \\ &\subset F + \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : \mathcal{P}_{\bigcap_{i=1}^{N} A_i^0}(T) \leq \eta\} \\ &\subset F + \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) : \max_{1 \leq i \leq N} \mathcal{P}_{A_i^0}(T) \leq \eta\} \subset W, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}$ concerge vers F. □

## 1.15 Théorème de Banach-Steinhaus

**Définition 1.15.1.** *Soit $H \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$, $u_0 \in \mathcal{G}$*

- *$H$ est dite équi-continue en $u_0$ si $\forall W$ un voisinage de l'origine de $\tilde{\mathbb{C}}$, $\exists U$ un voisinage de $u_0$ dans $\mathcal{G}$ tel que $T(u) - T(u_0) \in W$, $\forall u \in U$, $\forall T \in H$.*
- *$H$ est dite équi-continue si elle est équi-continue en tout point de $\mathcal{G}$.*

**Proposition 1.15.2.** – *Dans un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe $\mathcal{G}$. Si $H \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ et $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné, alors il existe un tonneau $B$ dans $\mathcal{G}$ tel que $H \subset B^0$*

- *Si $\mathcal{G}$ est tonnelé, alors tout $H \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ et $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné est équi-continue.*

***Preuve***. – Si A est $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné par la proposition 1.14.7 $A^0$ est absorbant et absolument convexe. De plus

$$A^0 = \bigcap_{T \in A} A_T$$

où $A_T = \{u \in \mathcal{G} : |T(u)|_e) \leq 1\}$, alors $A^0$ est fermé car T est continue. Prenons $B = A^0$, puisque $A \subset A^{00}$, alors $A \subset A^{00} \doteq B^0$.

- D'apres l'assertion précédente tout $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné est contenu dans $B^0$ où B un tonneau dans $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{G}$ est tonnelé, alors B est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$. Soit $\eta > 0$ prenons $W = [(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]B$ est un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, alors $\left|T([(\epsilon^{-\log \eta})_\epsilon]u)\right|_e = \eta |T(u)|_e \leq \eta$, $\forall T \in A$, $\forall u \in B$. D'où A est équi-continue.

□

**Lemme 1.15.3.** *Si $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique, M équi-continue de $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ et $\mathcal{F}$ un filtre de M. Supposons que pour tout $u \in \mathcal{G}$, $\mathcal{F}_u$ concerge vers $F(u) \in \tilde{\mathbb{C}}$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{G} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & F(u) \end{array}$$

*est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue*

***Preuve***. D'apres la preuve de 1.14.11 F est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire, reste à montrer que F est continue. Puisque M équi-continue, alors $\forall \eta > 0$, il existe U un voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$ tel que $|T(u)|_e \leq \eta$, $\forall T \in M$, $\forall u \in U$. Comme $\mathcal{F}_u$ converge vers $F(u)$, alors $\forall \eta > 0, \forall u \in U$, $\exists T \in M$ tel que $|T(u) - F(u)|_e \leq \eta$. D'où $|F(u)|_e \leq \max(|F(u) - T(u)|_e, |T(u)|_e) \leq \eta$, $\forall u \in U$. Ce qui prouve que la continuité en 0 de $\mathcal{G}$ donc la continuité sur $\mathcal{G}$. □

**Proposition 1.15.4.** *Soient $\mathcal{G}$ un tonnelé , $\mathcal{F}$ un filtre de $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ qui contient un $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné et supposons que $\mathcal{F}_u$ converge vers $F(u)$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{G} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & F(u) \end{array}$$

*appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$.*

***Preuve***. Nous savons que $\mathcal{F}$ contient un équi-continue M.
$\mathcal{O} \doteq \{Y \subset M : \exists X \in \mathcal{F}, X \cap M \subset Y\}$ est le filtre induit par $\mathcal{F}$ sur M. Donc $\mathcal{O}_u$ converge vers $F(u)$, pour tous $u \in \mathcal{G}$, par le lemme 1.15.3 $F \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$. □

**Corollaire 1.15.5.** *Soient $\mathcal{G}$ un tonnelé, $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ et $\forall u \in \mathcal{G}$ la suite $(T_n(u))_n$ converge vers $T(u)$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{G} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & T(u) \end{array}$$

*appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$.*

***Preuve***. Le filtre élémentaire associé à lasuite $(T_n)_n$ i.e. le filtre engendré par $X_N \doteq \{T_n, n \geq N\}$, $N \in \mathbb{N}$, contient un $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné. En effet, puisque $(T_n(u))_n$ converge vers $T(u)$, alors $X_N$ est $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$-borné et par construcion Comme $\mathcal{F}_u$ converge vers $F(u)$, $\forall u \in \mathcal{G}$. Par la proposition 1.15.4 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$. □

**Proposition 1.15.6.** *Soit $\mathcal{G}$ un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe ,*

**1)** *Si $A$ est un voisinage absolument convexe de l'origine de $\mathcal{G}$, alors $A^0$ est équicontinue.*

**2)** *Si $D \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ et équicontinue , alors $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}))$-borné*

***Preuve.*** **1)** Puisque $A^0 \subset \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$, il suffit de montrer qu'elle équicontinue à origine . Soit $\eta > 0$, prenons $U = [(\epsilon^a)_\epsilon], A$ avec $e^{-a} < \eta$. Alors $|T(u)|_e < \eta$, $\forall u \in U$, $\forall T \in A$, ce qui implique que $A^0$ est équicontinue.

**2)** Soit B un borné de $\mathcal{G}$. Puisque D est équicontinue , alors, il existe U voisinage de l'origine de $\mathcal{G}$, tel que $|T(u)|_e < 1$, $\forall u \in U$, $\forall T \in D$. Puisque B est borné , il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $[(\epsilon^{-b})_\epsilon]B \subset U$. Ce qui signifie que $\forall T \in D$,

$$\begin{aligned}\sup_{u\in B} |T(u)|_e &= e^{-b} \sup_{u\in B} \left|T([(\epsilon^{-b})_\epsilon]u)\right|_e \\ &\leq e^{-b}\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.15.7.** *Soit $\mathcal{G}$ la limite inductive des $\tilde{\mathbb{C}}$-modules $(\mathcal{G}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ métrisables . Alors $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$ muni de la topologie $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G})$ admet un réseau absolument convexe, fermé et de type $\mathcal{C}$*

***Preuve.*** Soit $U_1^P \supset U_1^P \supset U_1^P \supset ...$ une base dénombrable de voisinages de l'origine de $\mathcal{G}$. Posons

$$C(n_1, ..., n_k) = \bigcap_{j=1}^{k} (U_{n_j}^j)^0.$$

Montrons

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m^p)^0, \forall p \in \mathbb{N}.$$

En effet , soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$, alors $T_{|\mathcal{G}_p} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_p, \tilde{\mathbb{C}})$. Comme $T_{|\mathcal{G}_p}$ est continue, alors, il existe $U_m^p$ tel que $|T(u)|_e < 1$, $\forall u \in U_m^p$, i.e., $T \in (U_m^p)^0$.
Montrons que $W = (C(n_1, ..., n_k))_k$ est un réseau absolument convexe, fermé et de type $\mathcal{C}$de $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}})$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\bigcup_{n_1=1}^{\infty} C(n_1) &= \bigcup_{n_k=1}^{\infty} (U_{n_1}^1)^0 \\ &= \mathcal{L}(\mathcal{G}, \tilde{\mathbb{C}}).\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n_k=1}^{\infty} C(n_1,...,n_k) &= \bigcup_{n_k=1}^{\infty}(\bigcap_{j=1}^{k}(U_{n_j}^{j})^0) \\
&= \bigcup_{n_k=1}^{\infty}(\bigcap_{j=1}^{k-1}(U_{n_j}^{j})^0 \cap (U_{n_k}^{k})^0) \\
&= (\bigcap_{j=1}^{k-1}(U_{n_j}^{j})^0) \cap (\bigcup_{n_k=1}^{\infty}(U_{n_k}^{k})^0) \\
&= \bigcap_{j=1}^{k-1}(U_{n_j}^{j})^0 \\
&= C(n_1,...,n_{k-1}).
\end{aligned}$$

Donc W est un réseau, or d'apres la proposition 1.14.7 $C(n_1,...,n_k)$ sont absolument convexes et $(U_{n_j}^{j})^0$ est $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$-fermé, comme $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$ est plus fine , alors $(U_{n_j}^{j})^0$ est $\beta_b(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$-fermé.
Reste a montrer qu'il est de type $\mathcal{C}$. Soit $(n_k)_k$ une suite de $\mathbb{N}$ et $T_k \in C(n_1,...,n_k)$. Pour tous $p \in \mathbb{N}$, il existe $m_p$ telque $(T_k)_k \subset (U_{m_p}^{p})^0$. En effet, pour $k \geq p$ on a

$$\begin{aligned}
T_k &\in C(n_1,...,n_k) \\
&\in \bigcap_{j=1}^{k}(U_{n_j}^{j})^0 \\
&\in \bigcap_{j=1}^{p}(U_{n_j}^{j})^0 \\
&\in (U_{n_p}^{p})^0.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}) = \bigcup_{m=1}^{\infty}(U_m^p)^0,$$

et $k \leq p$, alors , existe $l_p$ tel que $(T_k)_k \subset (U_{l_p}^{p})^0$.
Prenons $m_p = \max(n_p, l_p)$, alors $(T_k)_k \subset \bigcap_{p\in\mathbb{N}}(U_{m_p}^{p})^0$. Posons $M = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}(U_{m_p}^{p})^0$, alors M est absolument convexe et $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$-fermé.

Puisque $(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G})$ est complet, alors M est complet. Posons $A = \Gamma(\bigcup_{p=1}^{\infty}(U^{p}_{m_p})$, alors A voisinages de l'origine de $\mathcal{G}$ et $A^0 = M$. La proposition 1.15.6 implique que M est équicontinue , alors $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G}))$-borné. Conclusion M est absolument convexe, complet, $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G},\tilde{\mathbb{C}}),\mathcal{G}))$-borné et contient $(T_k)_k$. La proposition 1.10.12 implique que W est un réseau de type $\mathcal{C}$. $\square$

# Chapitre 2

# L'algèbre de Colombeau

## 2.1 Définition

Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{E}^s(\Omega) = (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^I$, où $I = ]0,1]$.

**Définition 2.1.1.** *Définissons*

$$\mathcal{E}_M^s(\Omega) = \{(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega) \mid \forall K \subset\subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists N \in \mathbb{N}, \sup_{x \in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid = O(\varepsilon^{-N}), \varepsilon \to 0\}$$

*est appelé l'espace des éléments modérés de* $\mathcal{E}^s(\Omega)$, *et*

$$\mathcal{N}^s(\Omega) = \{(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}^s(\Omega) \mid \forall K \subset\subset \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \forall m \in \mathbb{N}_0, \sup_{x \in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid = 0(\varepsilon^m), \varepsilon \to 0\}$$

*est appelé l'espace des élements négligables de* $\mathcal{E}^s(\Omega)$.

**Proposition 2.1.2. I)** *L'espace* $\mathcal{E}^s(\Omega)$ *est une algébre commutative , associative, unitaire et différentielle.*

**II)** *L'éspace* $\mathcal{E}_M^s(\Omega)$ *est un sous-algébre de* $\mathcal{E}^s(\Omega)$.

**III)** *L'espace* $\mathcal{N}^s(\Omega)$ *est un idéal de* $\mathcal{E}_M^s(\Omega)$.

***Preuve***. I est facile
II Soient$(u_\epsilon)_\epsilon, (v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, K \subset\subset \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, par définition

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}_0, \exists \eta_1 > 0, \exists c_1 > 0, \sup_{x \in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid \leq c_1 \epsilon^{-N_1}, \forall \varepsilon \in ]0, \eta_1[ \quad (2.1)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}_0, \exists \eta_2 > 0, \exists c_2 > 0, \sup_{x \in K} \mid \partial^\alpha v_\epsilon(x) \mid \leq c_2 \epsilon^{-N_2}, \forall \varepsilon \in ]0, \eta_2[ \quad (2.2)$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(\lambda_1 u_\epsilon + \lambda_2 v_\epsilon)(x)| &\leq |\lambda_1| \, |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| + |\lambda_2| \, |\partial^\alpha v_\epsilon(x)| \\
&\leq |\lambda_1| \, c_1 \epsilon^{-N_1} + |\lambda_2| \, c_2 \epsilon^{-N_2} \\
&\leq c\epsilon^{-N}, \forall x \in K, \forall \epsilon \in ]0, \eta[
\end{aligned}$$

où $N = \max(N_1, N_2)$, $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et $c = |\lambda_1| \, c_1 + |\lambda_2| \, c_2$
Pour le produit on a

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha(u_\epsilon v_\epsilon)(x)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta (\partial^\beta u_\epsilon)(x) \partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon(x) \right| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \left|\partial^\beta u_\epsilon(x)\right| \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon(x)\right| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \mathcal{C}_\beta \varepsilon^{-N_\beta} \\
&\leq c\varepsilon^{-N}, \forall x \in K, \forall \epsilon \in ]0, \eta[
\end{aligned}$$

où

$$N = \max_{\beta \leq \alpha} N_\beta,$$

$$\eta = \min_{\beta \leq \alpha} \eta_\beta$$

et

$$c = \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \mathcal{C}_\beta$$

III Soient $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega)$, $(v_\epsilon) \in \mathcal{N}^s(\Omega), K \subset\subset \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et $m \in \mathbb{N}$

$$|\partial^\alpha(u_\epsilon v_\epsilon)(x)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \left|\partial^\beta u_\epsilon(x)\right| \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon(x)\right|$$

par définition pour chaque $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ et $\beta \leq \alpha$ on a

I. $\exists N_\beta \in \mathbb{N}_0, \exists \epsilon_\beta > 0, \exists c'_\beta > 0$ tel que $\left|\partial^\beta u_\epsilon(x)\right| \leq c'_\beta \epsilon^{-N_\beta} \forall x \in K, \forall \epsilon \in ]0, \varepsilon_\beta[$

II. $\exists \varepsilon'_\beta > 0, \exists c''_\beta > 0$ tel que $\left|\partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon(x)\right| \leq c''_\beta \varepsilon^{m+N_\beta} \forall x \in K, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon'_\beta[$
D'où $\left|\partial^\beta u_\epsilon(x)\right| \left|\partial^{\alpha-\beta} v_\epsilon(x)\right| \leq C_\beta \varepsilon^m$ posons

$$C = \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{C}_\alpha^\beta \mathcal{C}_\beta, \varepsilon_0 = \min_{\beta \leq \alpha}(\varepsilon_\beta, \epsilon'_\beta)$$

ainsi $|\partial^\alpha u_\epsilon v_\epsilon(x)| \leq C\varepsilon^m \forall x \in K, \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ d'où $(u_\epsilon)_\epsilon (v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$ $\square$

**Définition 2.1.3.** $\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{E}^s_M(\Omega)/\mathcal{N}^s(\Omega)$ *est appelé l'algebre des fontions génèraliseés de Colombeau.*

**Remarque 2.1.4.** *On écrit* $u = [(u_\epsilon)_\epsilon]$, *si* $(u_\epsilon)_\epsilon$ *est un representant de* $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$.

**Theorem 2.1.5.** *Un élément* $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$ *est négligeable si et seulement s'il vérifié la conition suivante*

$$\forall K \subset\subset \Omega, \forall m \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in K} |u_\epsilon(x)| = O(\epsilon^m), \epsilon \to 0 \tag{2.3}$$

***Preuve***. Supposons 2.3 est vérifié, il suffit de montrer qu'elle est vraie pour $(\partial_i u_\epsilon)_\epsilon$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Supposons que $u_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$,
soit $K \subset\subset \Omega$ et $\sigma = \min(1, dist(K, \partial\Omega)), L = K + \overline{B}_{\sigma/2}(0)$. Alors $K \subset\subset L \subset\subset \Omega$, puisque $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in L} \left|\partial_i^2 u_\epsilon(x)\right| = O(\epsilon^{-N}), \epsilon \to 0$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in L} |u_\epsilon(x)| = O(\epsilon^{2m+N}), \epsilon \to 0$$

par le théorème de Taylor nous avons

$$u_\epsilon(x + \epsilon^{m+N} e_i) = u_\epsilon(x) + \partial_i u_\epsilon(x)\epsilon^{m+N} + \frac{1}{2}\partial_i^2 u_\epsilon(x_\theta)\epsilon^{2m+2N}$$

pour $x \in K, 0 < \epsilon < \frac{\sigma}{2}$ et $x_\theta = x + \theta\epsilon^{m+N} e_i$ pour $\theta \in ]0, 1[$. D'où $x_\theta \in L$.
En conséquence

$$\partial_i u_\epsilon(x) = \underbrace{(u_\epsilon(x + \epsilon^{m+N} e_i) - u_\epsilon(x))}_{0(\epsilon^{2m+N})}\epsilon^{-m-N} - \frac{1}{2}\underbrace{\partial_i^2 u_\epsilon(x_\theta)}_{0(\epsilon^{-N})}\epsilon^{m+N}$$

D'où

$$\sup_{x \in K} |\partial_i u_\epsilon(x)| = 0(\varepsilon^m)$$

$\square$

## 2.2 Le faisceau $\mathcal{G}^s$ et l'njection de $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Définition 2.2.1.** *Soit $u = [(u_\epsilon)_\epsilon] \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $\Omega'$ un ouvert de $\Omega$*

*I. La restriction de $u$ à $\Omega'$ , notée $u_{|_{\Omega'}}$ est définie par $((u_\epsilon)_{|_{\Omega'}})_\epsilon + \mathcal{N}^s(\Omega')$*

*II. on dit que $u = 0$ sur $\Omega'$, si $u_{|_{\Omega'}} = 0$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega')$.*

**Theorem 2.2.2.** *Soient $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouverment ouvert de $\Omega$, $u_\lambda \in \mathcal{G}^s(\Omega_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, alors on a les propriétés suivantes*

*$F_1$ si $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $u \mid_{\Omega_\lambda} = v \mid_{\Omega_\lambda}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors $u = v$ sur $\Omega$.*

*$F_2$ si pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, on a $u_\lambda \mid_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu} = u_\mu \mid_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$ avec $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$, alors il existe un élément unique $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ tel que $u \mid_{\Omega_\lambda} = u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$*

***Preuve**.* $F_1$ Nous devons montrer que $(u_\epsilon - v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$, soit $K \subset\subset \Omega$, puisque $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouverment ouvert de $K$ , il existe des compacte $K_1, K_2, ..., K_n$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tel que

$$K = \bigcup_{k=1}^{n} K_k$$

et $K_k \subset \Omega_{\lambda_k}$ par hypothèse $(u_\epsilon - u_\epsilon)$ satisfait $\mathcal{N}^s$-estimation pour tout $K_k$, donc elle le satisfait sur $K$

$F_2$ L'unicité resulte de $(s_1)$, pour montrer l'existence , considérons $(\chi_j)_{j=1}^{\infty}$ une $\mathcal{C}^\infty$-partition de l'unité subordonnée au recouverment ouvert $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, il resulte que $(\Omega_{\lambda_i})_{i=1}^{\infty}$ est un recouverment ouvert de $\Omega$.
Posons

$$u = (\sum_j \chi_j u_{\lambda j\epsilon}) + \mathcal{N}^s(\Omega),$$

où $(u_{\lambda j\epsilon})_\epsilon$ est représantant de $u_{\lambda j}$, posons $u_{\lambda j\epsilon} = 0$ sur $\Omega\backslash\Omega_{\lambda j}$ de sorte que $\chi_j u_{\lambda j\epsilon}$ soit $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega$, tout d'abord nous devons montrer que $u$ satisfait $\mathcal{E}_M^s$-estimation sur tout $K \subset\subset \Omega$. $K$ rencontre un nombre fini $N$ de $supp\chi_j$, posons $K_j = K \cap supp\chi_j$, nous avons seulement a envisager $j \leq N$, alors tout $\chi_j u_{\lambda j}$ remplit la conditions sur $K_j$ car $u_{\lambda j} \in \mathcal{G}^s(\Omega_{\lambda j})$ donc sur $K$ car $\chi_j = 0$ sur $K_j^c$ dans $K$, comme la somme est finie alors $\mathcal{E}_M^s$-estimation sur $K$.
Il reste à montrer que $u \mid_{\Omega_\lambda} = u_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Soit $K \subset\subset \Omega_\lambda$ et choisissans $M \in \mathbb{N}$ de tel manière que

$$\sum_{j=1}^{M} \chi_j(x) = 1$$

sur un voisinage $\Omega'$ de $K, \overline{\Omega'} \subset\subset \Omega_\lambda$ pour $x \in \Omega'$, on a

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) - u_{\lambda\epsilon}(x) &= \sum_{j=1}^{M} \chi_j u_{\lambda j\epsilon}(x) - u_{\lambda\epsilon}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{M} \chi_j (u_{\lambda j\epsilon} - u_{\lambda\epsilon})(x) \end{aligned}$$

puisque la somme est finie il suffit de $\mathcal{N}^s$-estimation pour tout membre de la somme .
Pour $1 \leq j \leq M$, fixe et $x \in K \cap supp(\chi_j) \subset \Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda j}$, alors $u_{\lambda j\epsilon} - u_{\lambda\epsilon} \in \mathcal{N}^s(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda j})$ par hypothése, d'où notre affirmation.

$\square$

**Définition 2.2.3.** *On appelle support de $u \in \mathcal{G}(\Omega)$, noté supp u, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel u est nul, i.e.*

$$suppu = \Omega \backslash (\cup \{\Omega' \subset \Omega, \Omega' \text{ un ouvert}, u_{|_{\Omega'}} = 0\}).$$

**Définition 2.2.4.** *On désigne par $\sum$ le sous ensemble de $S$ constitué des éléments $\rho$ qui verifient*

$$\int \rho(x)dx = 1 \tag{2.4}$$

*et*

$$\int x^\alpha \rho(x)dx = 0, pour\ |\alpha| \geq 1. \tag{2.5}$$

**Proposition 2.2.5.** $\sum \neq \emptyset$.

***Preuve***. Considérons $\varphi \in S$ tel que $\varphi \equiv 1$ dans un voisinage de 0 et définissons $\rho$ par $\hat{\rho} = \varphi$, d'où $\rho \in \sum$ $\square$

**Proposition 2.2.6.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'application*

$$\begin{aligned} i_0 : \mathcal{E}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{G}^s(\Omega) \\ w &\mapsto ((w * \rho_\epsilon) \mid_\Omega)_\epsilon + \mathcal{N}^s(\Omega) \end{aligned}$$

*est une injection linéaire.*

***Preuve.*** Tout d'abord, nous devons montrer $((w * \rho_\epsilon)\mid_\Omega)_\epsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$ il suffit d'examiner le cas $w = \partial^\alpha f$ avec $f \in \mathcal{C}^0_0(\Omega)$. Soit $K \subset\subset \Omega$ et $\epsilon$ suffisament petit,

$$\begin{aligned}
(w * \rho_\epsilon)(x) &= (\partial^\alpha f * \rho_\epsilon)(x) \\
&= (f * \partial^\alpha \rho_\epsilon)(x) \\
&= \int f(x-y)\partial^\alpha \rho_\epsilon(y)dy \\
&= \int f(x-y)\epsilon^{-n}\partial^\alpha \rho(\frac{y}{\epsilon})dy \\
&= \int f(x-\epsilon y)\epsilon^{-|\alpha|}(\partial^\alpha \rho)(y)dy.
\end{aligned}$$

Posons

$$c' = \sup_{\substack{x \in K \\ z \in L}} |f(x+z)|$$

où L est un compact contenant le $supp\rho$

$$\begin{aligned}
|(w * \rho_\epsilon)(x)| &\leq c'\|\partial^\alpha \rho\|_1 \epsilon^{-|\alpha|} \\
&\leq c\epsilon^{-|\alpha|},
\end{aligned}$$

$\forall x \in K$ et $\epsilon$ suffisament petit
$2^{eme}$ étape soit $\beta \in \mathbb{N}^n$, on a $\partial^\beta(f * \partial^\alpha \rho_\epsilon) = f * \partial^{\alpha+\beta}\rho_\epsilon$, alors d'apres la $1^{ere}$ étape

$$\sup_{x \in K}\left|\partial^\beta(f * \partial^\alpha \rho_\epsilon)(x)\right| = 0(\epsilon^{-(|\alpha|+|\beta|)})$$

il en resulte que $((w * \rho_\epsilon)|\Omega)_\epsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$.
Montrons que $i_o$ est injective soit $((w * \rho_\epsilon)\mid_\Omega)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons

$$< (w * \rho_\epsilon)\mid_\Omega), \varphi >=< w * \rho_\epsilon, \varphi > \to < w, \varphi >, \epsilon \to 0$$

d'autre part ,$< (w * \rho_\epsilon)\mid_\Omega), \varphi > \to 0$. D'où $< w, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i.e. $w = 0$ □

**Proposition 2.2.7.** *L'application*

$$\begin{aligned}
\sigma : \mathcal{C}^\infty(\Omega) &\to \mathcal{G}^s(\Omega) \\
f &\mapsto (f)_\epsilon + \mathcal{N}^s(\Omega)
\end{aligned}$$

*est une injection linéaire , vérifie*

*I.* $i_0 \mid_{\mathcal{D}(\Omega)} = \sigma$

*II.* $i_0$ *est homomorphisme d'algébres sur* $\mathcal{D}(\Omega)$.

***Preuve***. II. Soient $f, g \in \mathcal{D}(\Omega)$ $i_0(fg) = \sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g) = i_0(f)i_0(g)$, d'apres (I)

I. Montrons que $i_0 \mid_{\mathcal{D}(\Omega)} = \sigma$. Soit $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et montrons $((f * \rho_\epsilon) \mid_\Omega - f)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$

$$\begin{aligned}
((f * \rho_\epsilon) - f)(x) &= \int (f(x-y) - f(x))\rho_\epsilon(y)dy \\
&= \int (f(x-\epsilon y) - f(x))\rho(y)dy \\
&= \int [\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}(((-\epsilon y)D)^k f)(x)\rho(y)dy \\
&+ \int \frac{1}{m!}(((-\epsilon y)D)^m f)(x - \theta\epsilon y)\rho(y)dy \\
&= O(\epsilon^m).
\end{aligned}$$

La première intégral est nulle d'apres 2.5 et la dernière égalitée du fait que $\partial^m f$ est borné et $\rho \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

**Proposition 2.2.8.** *Si* $w \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *alors* $supp(i_0(w)) = supp(w)$

***Preuve***. Afin de prouver $supp(i_0(w)) \subset sup(w)$ nous devons montrer

$$i_0(w) \mid_{(suppw)^c} = 0$$

dans $\mathcal{G}^s((supp(w)^c))$.

Soit $K \subset\subset (suppw)^c$, posons $w = \partial^\alpha f$ où $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ et $suppf \subset (\mathbb{R}^n \setminus K)$ (car $suppf \subset \forall$ voisinage de $suppw$).

$(\partial^\alpha f * \rho_\epsilon \mid_\Omega)_\epsilon$ un representant de $i_0(w)$ nous avons

$$\begin{aligned}
(\partial^\alpha f * \rho_\epsilon)(x) &= (f * \partial^\alpha \rho_\epsilon)(x) \\
&= \int f(x-y)\partial^\alpha \rho_\epsilon(y)dy \\
&= \epsilon^{-|\alpha|} \int f(x-\epsilon y)\partial^\alpha \rho(y)dy \\
&= \int_{|y| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \epsilon^{-|\alpha|} f(x-\epsilon y)\partial^\alpha \rho(y)dy \\
&+ \int_{|y| \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \epsilon^{-|\alpha|} f(x-\epsilon y)\partial^\alpha \rho(y)dy.
\end{aligned}$$

pour $x \in K$ et $\epsilon$ suffisament petit la première integral est nulle , la seconde est estimer par $\epsilon^{-|\alpha|} \|f\|_\infty \int \partial^\alpha \rho(y)dy$ puisque $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que $|\partial^\alpha \rho(y)| \leq C_m(1+|y|)^{-2m-n-1}$ posons $A = \|f\|_\infty \int_{|y| \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \epsilon^{-|\alpha|} |\partial^\alpha \rho(y)| \, dy$
or $(1+|y|)^{-2m} = \frac{1}{(1+|y|)^{2m}} \leq \frac{1}{|y|^{2m}}$
et $|y| \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Rightarrow \frac{1}{|y|} \leq \sqrt{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{(1+|y|)^{2m}} \leq \epsilon^m$.
D'où

$$\begin{aligned}
A &\leq C_m \|f\|_\infty \int_{|y| \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} (1+|y|)^{-2m}(1+|y|)^{-n-1} dy \times \epsilon^{-|\alpha|} \\
&\leq \epsilon^{-|\alpha|} C_m \|f\|_\infty \epsilon^m \int (1+|y|)^{-n-1} dy \\
&\leq \underbrace{(C_m \|f\|_\infty \int (1+|y|)^{-n-1} dy)}_{C} \epsilon^{m-|\alpha|} \\
&\leq C\epsilon^{m-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Pour les dériveés peuvent étre traiter de la même maniére.
Réciproquement ; soit $x_0 \in suppw$, pour tout $\eta > 0$ il existe $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $supp\varphi \subset B_\eta(x_0)$ et $|< w, \varphi >| = c > 0$ puisque $w * \rho_\epsilon \to w$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ce qui implique $|< w * \rho_\epsilon, \varphi >| > \frac{c}{2}$ pour $\epsilon$ suffisament petit donc
$i_0(w) \mid_{B_\eta(x_0)} = [((w * \rho_\epsilon) \mid_{B_\eta(x_0)})_\epsilon] \neq 0$ dans $\mathcal{G}^s(B_\eta(x_0))$, d'où $x_0 \in suppi_0(w)$
□

**Notation** : Soit $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de $\Omega$ tel que chaque $\overline{\Omega}_\lambda$ est un compact de $\Omega$.
Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ une famille d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi_\lambda \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega}_\lambda$. Pour chaque $\lambda \in \Omega$ on définit $i_\lambda$ comme suit

$$\begin{aligned}
i_\lambda : \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega_\lambda) \\
w &\longmapsto (((\psi_\lambda w) * \rho_\epsilon) \mid_{\Omega_\lambda})_\epsilon + \mathcal{N}^s(\Omega_\lambda)
\end{aligned}$$

**Proposition 2.2.9.** *Pour chaque $w \in \mathcal{D}'(\Omega), (i_\lambda(w))_\lambda$ est une famille cohérente*

***Preuve.*** Nous devons montrer que $(((\psi_\lambda - \psi_\mu)w) * \rho_\epsilon \mid_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu})_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)$. Posons $v = (\psi_\lambda - \psi_\mu)w \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \subset (suppv)^c$ par la proposition 2.2.8 il s'entuit que $i_0(v) \mid_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} = 0$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)$. D'apres le théoreme

2.2.2 il existe un unique $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ tel que
$u\,|_{\Omega_\lambda}= i_\lambda(w), \forall\lambda \in \Omega$. En outre, de la preuve du Théoreme, nous avons *même* une forme explicite pour $u$ si $(\chi_j)_{j=1}^{+\infty}$ une partition de l'unite subordonné au $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ alors

$$u = (\sum_{j=1}^{+\infty} \chi_j((\psi_{\lambda j} w) * \rho_\epsilon))_\epsilon + \mathcal{N}^s(\Omega)$$

Ainsi on a défini une application

$$\begin{array}{rcl} i : \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}^s(\Omega) \\ w & \longmapsto & i(w) = u \end{array}$$

□

**Theorem 2.2.10.** $i : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{G}^s(\Omega)$ *est une injectoin lineaire.*

***Preuve***. I. )$i$ es lineaire car le $i_\lambda$ le sont

II. ) reste a montrer l'injectivité.
Soit $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $i(w) = 0$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $K = supp(w)$ choisissons $M \in \mathbb{N}$ suffisament grand tel que $K \cap supp(X_j) = \emptyset$ pour $j \geq M$, alors

$$\sum_{j=1}^{M} \chi_j = 1$$

sur $K$ et $K_j = K \cap supp\chi_j$

$$< w, \varphi > = < w, \sum_{j=1}^{M} \chi_j \varphi > = \sum_{j=1}^{M} < \chi_j \psi_{\lambda j} w, \varphi > .$$

Puisque $(i(w)|_{\Omega_{\lambda_j}} - (\psi_{\lambda_j} w) \star \rho_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega) car(i(w\,|_{\Omega\lambda j}) = i_{\lambda j}(w))$, d'où $i(w)_\epsilon - (\psi_{\lambda j} w) \star \rho_\epsilon \to 0$ sur $K_j$ par hypothèse $i(w)_\epsilon \to 0$ sur $K_j$, alors $(\psi_{\lambda j} w \star \rho_\epsilon \to 0$ sur $K_j$, par consequent $< \chi_j(\psi_{\lambda j} w) \star \rho_\epsilon, \varphi > \to 0$ d'où $< \chi_j(\psi_{\lambda j} w), \varphi > = 0$ il s'entuit que $< w, \varphi > = 0$ i.e. $w = 0$

□

## 2.3 Valeurs ponctuelles

**Définition 2.3.1.** *Pour $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, la valeur ponctuelle de $u$ en $x_0$, notée $u(x_0)$ est $[(u_\epsilon(x_0))_\epsilon]$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$.*

**Exemple 2.3.2.** *On sait que $x\delta = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, par contre $i(x)i(\delta) \neq 0$ dans $\mathcal{G}^s(\mathbb{R})$, cependant $i(x)i(\delta)(x_0) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, puisque $i(x)i(\delta) = [(x\rho_\epsilon)_\epsilon]$, il suffit de montrer que $(x\rho_\epsilon)_\epsilon \notin \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$. Choisissons $x_0 \neq 0$ tel que $\rho(x_0) \neq 0$, posons $x = \epsilon x_0$, alors $x\rho_\epsilon(x) = x_0\rho(x_0) \neq 0$, d'où*

$$\sup_{x\in[-1,1]} |x\rho_\epsilon(x)| \not\to 0 \textit{ quand } \epsilon \to 0,$$

*d'où $(x\rho_\epsilon)_\epsilon \notin \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$. On a $(i(x)i(\delta))(x_0) = [(x_0\rho_\epsilon(x_0))_\epsilon] = [(\frac{x_0}{\epsilon}\rho(\frac{x_0}{\epsilon}))_\epsilon]$. Il est clair que $(i(x)i(\delta))(x_0) = 0$, pour $x_0 = 0$. Si $x_0 \neq 0$, alors $\left|\frac{x_0}{\epsilon}\rho(\frac{x_0}{\epsilon})\right| \leq C\left|\frac{x_0}{\epsilon}\right|(1 + \left|\frac{x_0}{\epsilon}\right|)^{-m} \leq C'\epsilon^m$, pour tout $m \in \mathbb{Z}_+$, car $\rho \in S$. Donc $(\frac{x_0}{\epsilon}\rho(\frac{x_0}{\epsilon})_\epsilon) \in \mathcal{N}^s(\mathbb{R})$, i.e. $(i(x)i(\delta))(x_0) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$.*

Cet exemple montre que les fonctions généralisées ne sont pas caractériser par la connaissance de toutes leurs valeurs ponctuelles. Pour remédier à ce problème, on introduit la notion de point généralisé.

**Définition 2.3.3.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. posons $\Omega_M = \{(x_\epsilon)_\epsilon \in \Omega^I | \exists N \in \mathbb{N} : |x_\epsilon| = O(\epsilon^{-N}), \epsilon \to 0\}$, sur $\Omega_M$ on définit une relation d'équivalence par $(x_\epsilon)_\epsilon \sim (y_\epsilon)_\epsilon \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N} : |x_\epsilon - y_\epsilon| = O(^m)$ et on note par*

***i)*** $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}/\sim$ *l'ensemble des points généralisés de $\Omega$*

***ii)*** $\tilde{\Omega}_c = \{\tilde{x} \in \tilde{\Omega} | \exists K \subset\subset \Omega, \exists \eta > 0$ *tel que* $x_\epsilon \in K$ *pour* $0 < \epsilon < \eta\}$ *l'ensemble des points généralisés à support compact.*

**Remarque 2.3.4.** *Si $\tilde{\Omega}_c-$propriété est vérifié pour un représentant de $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}$, alors elle est vérifiée pour tout représentant de $\tilde{x}$*

**Proposition 2.3.5.** *Soit $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$, alors la valeur ponctuelle généralisée de $u$ en $\tilde{x} = [(x_\epsilon)_\epsilon]$, donnée par $u(\tilde{x}) = [(u_\epsilon(x_\epsilon))]$, est un élément bien défini de $\tilde{\mathbb{C}}$*

***Preuve.*** Si $\tilde{x} = [(x_\epsilon)_\epsilon] \in \tilde{\Omega}_c$, alors il existe un $K \subset\subset \Omega$ tel que $x_\epsilon \in K$, pour $\epsilon$ suffisament petit, puisque $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, il s'ensuit que

$$|u_\epsilon(x_\epsilon)| \leq \sup_{x\in K} |u_\epsilon(x_\epsilon)| \leq C\epsilon^{-N}$$

*d'où* $(u_\epsilon(x_\epsilon))_\epsilon \mathcal{E}_M^s$, i.e. $[(u_\epsilon(x_\epsilon))] \in \tilde{\mathbb{C}}$.
Si $\tilde{x} = [(x_\epsilon)_\epsilon] = [(y_\epsilon)_\epsilon]$ *ie* $(x_\epsilon)_\epsilon \sim (y_\epsilon)_\epsilon$, montrons que $(u_\epsilon(x_\epsilon))_\epsilon \sim (u_\epsilon(y_\epsilon))$ dans $\mathcal{N}^s$

$$|u_\epsilon(x_\epsilon) - u_\epsilon(y_\epsilon)| \leq |x_\epsilon - y_\epsilon| \int_0^1 |(Du_\epsilon)(x_\epsilon + \sigma(y_\epsilon - x_\epsilon))| d\sigma$$

Puisque $x_\epsilon + \sigma(y_\epsilon - x_\epsilon)$ reste à l'intérieur d'un certain compact de $\Omega$ pour $\epsilon$ suffisament petit, alors $|x_\epsilon - y_\epsilon| \leq C'\epsilon^m$ pour $\epsilon$ suffisament petit,

$$\int_0^1 |(Du_\epsilon)(x_\epsilon + \sigma(y_\epsilon - x_\epsilon))| d\sigma \leq C''\epsilon^{-N}$$

*d'où* $(u_\epsilon(x_\epsilon) - u_\epsilon(y_\epsilon))_\epsilon \in \mathcal{N}^s$ *ie* $u(\tilde{x}) = u(\tilde{y})$. □

**Theorem 2.3.6.** *Soit* $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, *alors*

$$u{=}0 \ \ \textit{dans } \mathcal{G}^s(\Omega) \Leftrightarrow u(\tilde{x}) = 0 \ \textit{dans } \tilde{\mathbb{C}}, \textit{ pour tout } \tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c.$$

***Preuve***. $(\Rightarrow)$ Supposons $u = 0$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$, alors $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$, *d'où* $(u_\epsilon(x_\epsilon)_\epsilon \sim 0$ dans $\mathcal{N}^s$ *i.e.* $u(\tilde{x}) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_c$
$(\Leftarrow)$ Si $u \neq 0$dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ alors par le téorème 2.1.5 nous avons

$$\exists K \subset\subset \Omega, \exists m > 0, \forall \eta > 0, \exists 0 < \epsilon < \eta, \sup_{x \in K} |u_\epsilon(x)| > \epsilon^m$$

donc il existe une suite $\epsilon_k \to 0$ et $x_k \in K$ tel que $|u_{\epsilon_k}(x_k)| \geq \epsilon_k^m$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Posons $x_\epsilon = x_k$ pour $\epsilon_{k+1} < \epsilon \leq \epsilon_k, k \in \mathbb{N}$, alors $(x_\epsilon) \in \Omega_M$ car

$$\eta = \sup_{x \in K} |x| < \infty$$

prenons $\eta = \frac{1}{\alpha}$

$$\begin{aligned} \epsilon < \eta \quad &\Rightarrow \quad \epsilon < \frac{1}{\alpha} \\ &\Rightarrow \quad \alpha < \epsilon^{-1} \\ &\Rightarrow \quad |x_\epsilon| \leq \alpha < \epsilon^{-N}, \text{pour } \epsilon < \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

*i.e.* $(x_\epsilon)_\epsilon \in \Omega_M$ et
$x_\epsilon \in K, \forall \epsilon$ par construction *d'où* $\tilde{x} = [(x_\epsilon)_\epsilon] \in \tilde{\Omega}_c$, ainsi $u(\tilde{x}) \neq 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$. □

## 2.4 Intégration

**Proposition 2.4.1.** *Soit $M$ un ensemble Lebesgue-mesurable tel que $\bar{M} \subset\subset \Omega$ et $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, alors*

$$\int_M u(x)dx = (\int_M u_\epsilon(x)dx)_\epsilon + \mathcal{N}^s$$

*est un élément bien défini dans $\tilde{\mathbb{C}}$, appelé l'intégrale de $u$ sur $M$.*

***Preuve***. Puisque $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s(\Omega)$,$\bar{M} \subset\subset \Omega$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_\epsilon(x)| \leq C\epsilon^{-N}, \forall x \in M$ , pour $\epsilon$ suffisament petit , *d'où*

$$\left|\int_M u_\epsilon(x)dx\right| \leq \left|\int_M |u_\epsilon(x)|dx\right| \leq C'\epsilon^{-N}$$

*i.e.*

$$(\int_M u_\epsilon(x)dx)_\epsilon \in \mathcal{E}_M^s$$

ce qui montre que

$$\int_M u(x)dx \in \tilde{\mathbb{C}}.$$

Soit $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$, $\bar{M} \subset\subset \Omega$. Alors $\forall m \in \mathbb{N}$,$\exists \eta > 0$,$\exists C > 0$ tel que $|u_\epsilon(x)| \leq C\varepsilon^m$,$\forall x \in \bar{M}$, $\forall 0 < \epsilon < \eta$ *d'où*

$$(\int_M u_\epsilon(x)dx)_\epsilon \in \mathcal{N}^s$$

□

**Proposition 2.4.2.** *Soit $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, à support compact $K$ et $L_1, L_2 \subset\subset \Omega$ tels que $K \subset int(L_1)$, $L_1 \subset L_2$, alors*

$$\int_{L_1} u(x)dx = \int_{L_2} u(x)dx$$

***Preuve***. Soient $L_1, L_2$ deux compacts tels que $L_1 \subset L_2$ et $K \subset int(L_1)$

$$\int_{L_2} u_\epsilon(x)dx - \int_{L_1} u_\epsilon(x)dx = \int_{L_2 - int(L_1)} u_\epsilon(x)dx.$$

Puisque $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega - K)$ et $L_2 - int(L_1)$ est un compact de $(\Omega - K)$, alors $\forall m \in |N|, \exists \eta > 0, \exists C > 0$, tel que
$|u_\epsilon(x)| \leq C\epsilon^m, \forall x \in L_2 - int(L_1), \forall \epsilon \in ]0, \eta[$

$$\left| \int_{L_2 - int(L_1)} u_\epsilon(x)dx \right| \leq \int_{L_2 - in(L_1)} |u_\epsilon(x)|dx \leq C\epsilon^m,$$

ce qui montre que

$$\int_{L_1} u(x)dx = \int_{L_2} u(x)dx$$

. □

**Définition 2.4.3.** *On désigne par $\mathcal{G}_c^s(\Omega)$, où $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, le sous -espace $\mathcal{G}_c^s(\Omega)$ de $\mathcal{G}^s(\Omega)$ constitué des éléments à supports compacts .*

**Proposition 2.4.4.** *Si $u \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ et $K = suppu$, alors il existe un compact $L \Subset \Omega$ tel que $K \subset int(L)$ et un représentant $(u_\epsilon)_\epsilon$ de $u$ tel que $\forall \epsilon \in ]0, 1], suppu_\epsilon \subset L$.*

***Preuve***. Soit $u = [(u_\epsilon)] \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ et $K = suppu$, si $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$ tel que $\psi = 1$ sur un voisinage de K, alors

$$u = \psi u + (1 - \psi)u.$$

Il est clair $supp\psi u_\epsilon \subset supp\psi$, $\forall \epsilon \in ]0, 1]$, alors $(\psi u_\epsilon)_\epsilon$ est autre représentant de u. En effet , soit H un compact de $\Omega$, puisque $(u_\epsilon)$est nul sur un voisinage de $H \setminus K$, alors $\forall m \in \mathbb{N}, \exists c > 0, \exists \eta \in ]0, 1[$ tel que $\forall \epsilon \leq \eta$

$$\sup_{x \in H} |(1 - \psi)u_\epsilon(x)| = \sup_{x \in H \setminus K} |(1 - \psi)(x)| \sup_{x \in H \setminus K} |u_\epsilon(x)| \leq c\epsilon^m.$$

□

**Définition 2.4.5.** *Soit $u \in \mathcal{G}_c^s(\Omega)$ et $K = suppu$. on définit l'intégrale de u sur $\Omega$ par*

$$\int_\Omega u(x)dx = \int_L u(x)dx,$$

*où $L$ est un compact de $\Omega$ tel que $K \subset int(L)$*

**Remarque 2.4.6.** *Cette définition est indépendane du choix de L.*

**Proposition 2.4.7.** *Soient $u \in \mathcal{G}_c^s(\Omega)$ et $v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on a*

$$\int_\Omega u(x)\partial^\alpha v(x)dx = (-)^{|\alpha|}\int_\Omega \partial^\alpha u(x)v(x)dx \text{ dans } \widetilde{\mathbb{C}} \tag{2.6}$$

***Preuve***. Il suffit de prouver 2.6 pour $\partial^\alpha = \partial_{x_i}$ supposons $K = suppu$, choisissons $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $\Omega$ où $K \subset supp\chi \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset\subset \Omega$, alors $\sigma(\chi)u = u$ dans $\mathcal{G}^s(\Omega)$ , $u = [(\chi u_\epsilon)_\epsilon]$, d'où u admet un représentant $(w_\epsilon)_\epsilon$ où $w_\epsilon = \chi u_\epsilon$ et $suppw_\epsilon \subset \Omega'$ pour tout $\epsilon$ posons $L = \bar{\Omega}$, alors

$$(\int_L w_\epsilon(x)\partial_{x_i}v_\epsilon(x)dx)_\epsilon = (-\int_L \partial_{x_i}w_\epsilon(x)v_\epsilon(x)dx)_\epsilon$$

ainsi on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x)\partial v(x)dx &= (-\int_L \partial_{x_i}w_\epsilon(x)v_\epsilon(x)dx)_\epsilon + \mathcal{N}^s \\ &= -\int_\Omega \partial_{x_i}u(x)v(x)dx\end{aligned}$$

□

## 2.5 Égalités

**Définition 2.5.1.** *Un élément $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ est dit associé à 0 , on note $u \approx 0$, si*

$$\lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega u_\epsilon(x)\varphi(x)dx = 0, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Deux éléments u et $v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ sont dits associés et on note $u \approx v$, si $u-v \approx 0$. Soit $u \in \mathcal{G}^s(\Omega)$, s'il existe $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $u \approx i(w)$, on dit que u admet w comme distribution associée.*

**Proposition 2.5.2.** *Si $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $i(w) \approx 0$, alors $w = 0$*

***Preuve***. $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega i(w)_\epsilon(x)\varphi(x)dx = 0,$$

nous savons que

$$\lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega i(w)_\epsilon(x)\varphi(x)dx = < w, \varphi >$$

d'où $w = 0$ □

**Définition 2.5.3.** *Un élément $z \in \tilde{\mathbb{C}}$ est dit associé à 0 et on note $z \approx 0$, si $z_\epsilon \to 0$, $\epsilon \to 0$, où $(z_\epsilon)_\epsilon$ est un représentant de z.*
*Deux éléments $z_1, z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$ sont dits associés et on note $z_1 \approx z_2$ si $z_1 - z_2 \approx 0$.*
*S'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $z \approx a$, a est appelé nombre associé à z*

**Proposition 2.5.4.**
***i)*** *Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $i(f)i(w) \approx i(fw)$.*
***ii)*** *Si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$, alors $i(f)i(g) \approx i(fg)$*
***iii)*** *Si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, alors $i(f)(x_0) \approx f(x_0)$*

***Preuve.*** ***i)*** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $K = supp\varphi$ et $(\Omega_\lambda)_\lambda$ un recouvrement ouvert de $\Omega$, $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(\chi_j)_{j=1}^\infty$. Choisissons un voisinage compact $L$ de $K$ dans $\Omega$. $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{M} \chi_j = 1 \text{ sur} L,$$

alors il suffit de prouver

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_L f(x) i(w)_\epsilon \varphi(x)\chi_j(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_L i(fw)_\epsilon(x)\varphi(x)\chi_j(x)dx$$

pour $1 \le j \le M$, $K \subset L \subset \Omega_{\lambda_j}$

$$\begin{aligned}\int_L i(w)f(x)\varphi(x)dx &= \int_L ((\psi_{\lambda_j} w) * \rho_\epsilon)(x)f(x)\varphi(x)dx \\ &= <\psi_{\lambda_j} w * \rho_\epsilon, f\varphi> \to <w, f\varphi>, \epsilon \to 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_L i(fw)_\epsilon(x)\varphi(x)dx &= \int ((x)\varphi(x)dx \\ &= <(\psi_{\lambda_j} fw) * \rho_\epsilon), \varphi> \to <\psi_{\lambda_j} fw, \varphi> = <w, f\varphi>, \epsilon \to 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve notre affirmation.

***ii)*** Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $supp\varphi = K \subset L \subset \Omega_{\lambda_j}$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_L i(f)_\epsilon(x)i(g)_\epsilon(x)\varphi(x)dx &= \lim_{\epsilon\to 0}((\psi_{\lambda_j} f) * \rho_\epsilon)(x)((\psi_{\lambda_j} g) * \rho_\epsilon)(x)\varphi(x)dx \\ &= \int (\psi_{\lambda_j} f)(x)(\psi_{\lambda_j} g)(x)\varphi(x)dx \\ &= \int f(x)g(x)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

où nous avons uiluser le téorème de convergence dominée de Lebesgue $\left\|(\psi_{\lambda_j} f) * \rho_\epsilon\right\|_\infty \leq \left\|\psi_{\lambda_j f}\right\|_\infty \|\rho_\epsilon\|_1 = \left\|\psi_{\lambda_j} f\right\|_\infty$. De la *même* amanière on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_L i(fg)_\epsilon(x)\varphi(x)dx = \int f(x)g(x)dx$$

***iii*)** Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} i(f)_\epsilon(x_0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{j=1}^{M} \chi_j(x_0)((\psi_{\lambda_j} f) \star \rho_\epsilon)(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^{M} \chi_j(x_0)(\psi_{\lambda_j} f)(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^{M} \chi_j(x_0) f(x_0) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.5.5.** *Si $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ et $u \approx v$, alors*

***i*)** $\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$

***ii*)** $fu \approx fv, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

***Preuve***. ***i*** Il suffit de prouver que $u \approx 0 \Rightarrow \partial^\alpha u \approx 0$, on a
$\int \partial_\alpha u_\epsilon(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int u_\epsilon(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx$

***ii*** Si $u \approx o$, alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int (i(f))_\epsilon(x) u_\epsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int u_\epsilon(x)(fg)(x)dx = 0.$$

□

**Définition 2.5.6.** *On dit que $u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ sont égaux au sens des distributions et on note $u \sim v$ si*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega (u - v)(x)\varphi(x)dx = 0 \textit{ dans } \tilde{\mathbb{C}}.$$

**Proposition 2.5.7.** $\forall u, v \in \mathcal{G}^s(\Omega) : u = v \Rightarrow u \sim v \Rightarrow u \approx v$

***Preuve***. $u = v \Longrightarrow$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega (u - v)(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ dans } \tilde{\mathbb{C}},$$

donc $u \sim v$

$$u \sim v \Longleftrightarrow (\int_\Omega (u_\epsilon - v_\epsilon)(x)\varphi(x)dx)_\epsilon \in \mathcal{N}^s$$

$$u \sim v \Longrightarrow \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} (\int_\Omega (u_\epsilon - v_\epsilon)(x)\varphi(x)dx) \doteq 0$$

$$u \sim v \Longrightarrow u \approx v$$

□

L'inverse est faux en général. Car si $u = (\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}^s$, alors on a $u \approx 0$ et $u \not\sim 0$
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(0) = 0$, $\int \varphi(x)dx = 1$ et $\int \varphi^2(x)dx \neq 0$. Posons $u = [(u_\epsilon)]$ avec $u_\epsilon = (\varphi_\epsilon * \varphi_\epsilon) - \varphi_\epsilon$, où $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$, alors on a $u \sim 0$ et $u \neq 0$ dans $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

## 2.6 Composition

**Proposition 2.6.1.** *Soient $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ et $v \in \mathcal{O}_M(\mathbb{C})$ alors*
*$v \circ u = [(v \circ u_\epsilon)_\epsilon]$ est un élement bien défini dans $\mathcal{G}(\Omega)$*

***Preuve***. Montrons que $(v \circ u_\epsilon)_\epsilon$ est un modéré. Soit $K \subset\subset \Omega$ et $\alpha = 0$, puisque $(u_{k\epsilon})_\epsilon$ est un modéré, alors il existe $N \in \mathbb{N}, \exists c > 0, \exists \eta > 0$ tel que

$$|u_\epsilon(x)| \leq c\epsilon^{-N}, \forall x \in K, \forall \epsilon \in ]0, \eta[ \tag{2.7}$$

comme $v \in \mathcal{O}_M(\mathbb{C})$ alors

$$\begin{aligned} |(v \circ u_\epsilon)(x)| &= |v(u(x))| \\ &\leq c(1 + |u(x)|)^r \\ &\leq c' \sup_{|\alpha'| \leq r} \left|u_\epsilon^{2\alpha}(x)\right|, \forall x \in K. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Alors

$$|(v \circ u_\epsilon)(x)| \leq c" \epsilon^{-Nr}, \forall x \in K, \forall \epsilon \in ]0, \eta[. \qquad (2.9)$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v(u_\epsilon(x)) = \frac{\partial v}{\partial z}(u_\epsilon(x)) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}(x)$$

puisque $(u_\epsilon)_\epsilon$ et$(\frac{\partial}{\partial x_i} u_\epsilon)_\epsilon$ sont des modérés, alors, il vérifient des estimation de type(2.7).
D'autre part $\frac{\partial v}{\partial z} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{C})$, alors, $\frac{\partial v}{\partial x_i} \circ u_\epsilon)$ vérifie une estimation de type(2.9). Ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v(u_\epsilon(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v \circ u_\epsilon)(x)$$

vérifie une estimation de type(2.9). De la *même* manière on démontre que $\partial^\alpha(v \circ u_\epsilon), \alpha \in \mathbb{N}^n$, vérifie une estimation de type(2.9). ce qui implique que $(v \circ u_\epsilon)_\epsilon \in \epsilon^s_M(\Omega)$
Montrons que $v \circ u$ est bien défini dans $\mathcal{G}(\Omega)$, i.e., ne dépent du représentant de u. Soit $(\widetilde{u}_{k\epsilon})$ un autre représentant de u et $\eta_{k\epsilon} = u_{k\epsilon} - \widetilde{u}_{k\epsilon}$ le Théoreme de la valeur moyenne donne

$$v(u_\epsilon(x)) - v(\widetilde{u}_\epsilon(x)) \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \frac{\partial v}{z}(u_\epsilon(x) + \theta \eta_\epsilon(x)) \right| |\eta_\epsilon(x)|$$

Soit $K \subset\subset \Omega$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, r > 0, \forall m, \exists \eta > 0, \exists c_1, c_2, c_3 > 0$ tel que

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial v}{\partial z}(y)\right| \leq c_1(1 + |y|)^r & \forall y \in \mathbb{C} \\ |u_\epsilon(x)| \leq c_2 \varepsilon^{-N} & \forall x \in K, \forall \varepsilon \in ]0, \eta[ \\ |\eta_\epsilon(x)| \leq c_3 \varepsilon^{m-N} & \forall x \in K, \forall \varepsilon \in ]0, \eta[. \end{cases}$$

On obtient $|v(\eta_\epsilon(x))| \leq c_4 \varepsilon^{m-N-rN}$. D'autre part on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v(u_\epsilon(x)) - v(\widetilde{u}_\epsilon(x))) = \frac{\partial v}{\partial z}(\eta_\epsilon(x)) \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial v}{\partial z}(\widetilde{u}_\epsilon(x)) \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_i}(x).$$

Montrons que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v(u_\epsilon(x)) - v(\widetilde{u}_\epsilon(x)))$$

vérifie une estimation de type(2.9). Puisque $(\eta_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$ et $\frac{\partial v}{\partial z} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{C})$, alors la première partie donne

$$\frac{\partial v}{\partial z}(\eta_\epsilon(x))$$

vérifie une estimation de type(2.9). Comme $(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i})_\epsilon$ est un modéré , alors

$$\frac{\partial v}{\partial z}(\eta_\epsilon)\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}$$

vérifie une estimation de type(2.9). De la *même* manière on démontre que le seconde menbre vérifie une estimation de type(2.9) , ce qui implique notre affirmation. De la *même* manière on démontre que $\partial^\alpha(v \circ \eta_\epsilon), \alpha \in \mathbb{N}^n$, vérifie une estimation de type(2.9). On obtient $(v \circ u_\epsilon)_\epsilon - (v \circ \widetilde{u}_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}^s(\Omega)$. $\square$

# Chapitre 3

# Topologie des algèbres de Colombeau

## 3.1 Topologie de $\mathcal{G}(\Omega)$

Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ est topologisé par les semi-normes

$$p_i(f) = \sup_{\substack{x \in K_i \\ |\alpha| \leq i}} |\partial^\alpha f(x)|,$$

où $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts $\Omega$.

**Lemme 3.1.1.** *L'application*

$$\begin{array}{rcl} V_{p_i} : (\mathbf{C}^\infty(\Omega))^{]0,1]} & \longrightarrow & (-\infty, +\infty] \\ (u_\epsilon)_\epsilon & \longmapsto & \sup\{b \in \mathbb{R} : p_i(u_\epsilon) = O(\epsilon^b), \epsilon \longrightarrow 0\} \end{array} \quad (3.1)$$

*sur* $(\mathbf{C}^\infty(\Omega))^{]0,1]}$ *vérifie, pour tous* $(\lambda_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_\mathcal{M}$ *et* $(u_\epsilon)_\epsilon, (u_\epsilon)_\epsilon \in (\mathbf{C}^\infty(\Omega))^{]0,1]}$,
**i)** $V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon) = +\infty, \forall i \in I$ *si et seulement si* $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$.
**ii)** $V_{p_i}((\lambda_\epsilon)_\epsilon(v_\epsilon)_\epsilon) \geq V((\lambda_\epsilon)_\epsilon) + V_{p_i}((v_\epsilon)_\epsilon)$.
**iii)** $V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon + (v_\epsilon)_\epsilon) \geq \min\{V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon), V_{p_i}((v_\epsilon)_\epsilon)\}$
*où (ii) devient une égalitée si* $\lambda$ *est de la forme* $(c\epsilon^b)_\epsilon$.

***Preuve***. Tout d'abord, remarquons que $V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon) = V(p_i((u_\epsilon)_\epsilon))$, où V est la valuation dans $\mathcal{E}_\mathcal{M}$

**i)** Elle résulte de la définition de $\mathcal{N}(\Omega)$

**ii)** Pour ii) on a

$$\begin{aligned}
V_{p_i}((\lambda_\epsilon)_\epsilon(v_\epsilon)_\epsilon) &= V(p_i((\lambda_\epsilon v_\epsilon)_\epsilon)) \\
&= V((|\lambda_\epsilon|\, p_i(v_\epsilon))_\epsilon) \\
&\geq V((|\lambda_\epsilon|)_\epsilon) + V((p_i(v_\epsilon))_\epsilon) \\
&\geq V((\lambda_\epsilon)_\epsilon) + V_{p_i}((v_\epsilon)_\epsilon)
\end{aligned}$$

**iii)** Soient $a \in \{a \in \mathbb{R} : p_i(u_\epsilon) = O(\epsilon^a), \epsilon \longrightarrow 0\}$ et $b \in \{b \in \mathbb{R} : p_i(u_\epsilon) = O(\epsilon^b), \epsilon \longrightarrow 0\}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
p_i(u_\epsilon + v_\epsilon) &= \sup_{\substack{x \in K_i \\ |\alpha| \leq i}} |\partial^\alpha(u_\epsilon + v_\epsilon)(x)| \\
&\leq \sup_{\substack{x \in K_i \\ |\alpha| \leq i}} (|\partial^\alpha(u_\epsilon)(x)| + |\partial^\alpha(v_\epsilon)(x)|) \\
&\leq \sup_{\substack{x \in K_i \\ |\alpha| \leq i}} |\partial^\alpha(u_\epsilon)(x)| + \sup_{\substack{x \in K_i \\ |\alpha| \leq i}} |\partial^\alpha(v_\epsilon)(x)| \\
&= O(\epsilon^a) + O(\epsilon^b), \epsilon \longrightarrow 0 \\
&= O(\epsilon^{\min(a,b)}), \epsilon \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon + (v_\epsilon)_\epsilon) \geq \min\{V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon), V_{p_i}((v_\epsilon)_\epsilon))\}$

$\square$

**Définition 3.1.2.** *L'aplication*

$$\begin{aligned}
V_{p_i} : (\mathbf{C}^\infty(\Omega))^{]0,1]} &\longrightarrow (-\infty, +\infty] \\
u &\longmapsto V_{p_i}(u)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

*$V_{p_i}$ est appelé la $p_i$-valuation dans $(\mathbf{C}^\infty(\Omega))^{]0,1]}$.*

**Définition 3.1.3.** *L'aplication*

$$\begin{aligned}
V_{p_i} : \mathcal{G}(\Omega) &\longrightarrow (-\infty, +\infty] \\
u &\longmapsto V_{p_i}(u) = V(p_i((u_\epsilon)_\epsilon))
\end{aligned} \tag{3.3}$$

*est appeleé valuation sur $\mathcal{G}(\Omega)$*

**Proposition 3.1.4.** *$\mathcal{P}_i(u) = e^{-V_{p_i}(u)}$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}(\Omega)$.*

***Preuve***. Puisque $V_{p_i}$ est une valuation sur $\mathcal{G}(\Omega)$, alors la proposition 1.6.5 implique que $\mathcal{P}_i$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}(\Omega)$. □

**Remarque 3.1.5.** *D'aprés le théorème 1.6.8, $\mathcal{G}(\Omega)$ sera dôté de la topologie définie par $(\mathcal{P}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et noté $\tau_\sharp$.*

**Proposition 3.1.6.** $(\mathcal{G}(\Omega), \tau_\sharp)$ *est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé .*

***Preuve***. Soit $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ tel que $u \neq 0$, alors $(u_\epsilon)_\epsilon \notin \mathcal{N}(\Omega)$, d'où $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $V_{p_i}((u_\epsilon)_\epsilon) \neq +\infty$, ce quiimplique que $\mathcal{P}_i(u) > 0$, par la proposition 1.6.9 $\tau_\sharp$ est séparé. □

**Proposition 3.1.7.** *Soit* $(\mathcal{G}(\Omega), \tau_\sharp)$

*I. Tout $\mathcal{P}_i$ est une ultra-pseudo-norme sur $\mathcal{G}(\Omega)$.*

*II. $(\mathcal{G}(\Omega), \tau_\sharp)$ est mérisable.*

***Preuve***. D'apres 3.1.4, $\mathcal{P}_i(u) = e^{-V_{p_i}(u)}$ est une ultra-pseudo-seminorme sur $\mathcal{G}(\Omega)$. Reste a motrer que

$$\mathcal{P}_i(u) = 0 \implies u = 0, \text{dans } \mathcal{G}(\Omega).$$

Soient K un compact de $\Omega$ et $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de $\Omega$, où $K_0 = K$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(u) = 0 &\implies V_{p_i}(u) = +\infty \\ &\implies p_i(u_\epsilon) = O(\epsilon^q), \forall q \in \mathbb{N}, \epsilon \to 0. \end{aligned}$$

Puisque $K_0 \subset K_i$, en appliquant le théorème 2.1.5, on obtient

$$\begin{aligned} p_0(u_\epsilon) \leq p_i(u_\epsilon) &\implies p_0(u_\epsilon) = O(\epsilon^q), \forall q \in \mathbb{N}, \epsilon \to 0. \\ &\implies (u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega), \\ &\implies u = 0, \text{dans } \mathcal{G}(\Omega). \end{aligned}$$

D'aprés la proposition 3.1.6 $\mathcal{G}(\Omega)$ est séparé. Comme il a une base dénombrable de voisinage de l'origine, alors par le théorème 1.8.2 $\mathcal{G}(\Omega)$ est mérisable. □

**Proposition 3.1.8.** $(\mathcal{G}(\Omega), \tau_\sharp)$ *est complèt.*

***Preuve.*** D'aprés la proposition 3.1.7 $\mathcal{G}(\Omega)$ est mérisable, alors il suffit de montrer qu'il séquentiellement complet. Supposons que $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ est topologiser par la suite croissante $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, soit $(u_n)_n$ une suite de cauchy dans $\mathcal{G}(\Omega)$, nous pouvons extraire une sous- suite $(u_{n_k})_{n_k}$ tel que $V_{p_k}((u_{n_{k+1},\epsilon} - u_{n_k,\epsilon})_\epsilon) > k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Cela signifie que nous pouvons trouver $\epsilon_k \searrow 0$, $\epsilon_k \leq \frac{1}{2^k}$ telle que $p_k(u_{n_{k+1},\epsilon} - u_{n_k,\epsilon}) \leq \epsilon^k$ sur $(o, \epsilon_k)$. Soit

$$h_{k,\epsilon} = \begin{cases} u_{n_{k+1},\epsilon} - u_{n_k,\epsilon} & \text{si } \epsilon \in (o, \epsilon_k) \\ 0 & \text{si } \epsilon \in [\epsilon_k, 1] \end{cases} \tag{3.4}$$

$(h_{k,\epsilon})_\epsilon \in \mathcal{E}^s_M(\Omega)$, car pour k suffisament grand on a $p_i(h_{k,\epsilon}) \leq p_k(h_{k,\epsilon}) \leq \epsilon^k$ sur $(o, 1]$. En plus

$$u_\epsilon = u_{n_0,\epsilon} + \sum_{k\doteq 0}^{+\infty} h_{k,\epsilon}$$

est locallement finie et $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$-modéré puisque pour tout $\bar{k} \in \mathbb{N}$ on a

$$p_{\bar{k}}(u_\epsilon) \leq p_{\bar{k}}(u_{n_0,\epsilon}) + \sum_{k=0}^{\bar{k}} p_{\bar{k}}(h_{k,\epsilon}) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{+\infty} p_{\bar{k}}(h_{k,\epsilon}) \leq p_{\bar{k}}(u_{n_0,\epsilon}) + \sum_{k\doteq 0}^{\bar{k}} p_{\bar{k}}(h_{k,\epsilon}) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k};$$

Montrons que $(u_{n_k})_{n_k}$ converge vers u dans $\mathcal{G}(\Omega)$. $\forall \bar{k} \geq 1$ on a

$$p_{\bar{k}}(u_{n_{\bar{k}},\epsilon} - u_\epsilon) = p_{\bar{k}}(-\sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} h_{k,\epsilon}) \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} p_{\bar{k}}(h_{k,\epsilon}).$$

D'où

$$p_{\bar{k}}(u_{n_{\bar{k}},\epsilon} - u_\epsilon) \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \epsilon^k \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \epsilon^{k-1}\epsilon_k \leq \sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \epsilon^{\bar{k}-1} \frac{1}{2^k}$$

sur $(o, \epsilon_{\bar{k}-1})$, on conclut que pour $\forall \bar{k} \geq 1$, pour tout $k \geq \max(\bar{k}, q+1)$, alors il existe $\eta \in (0, 1]$ tel que $p_{\bar{k}}(u_{n_k,\epsilon} - u_\epsilon) \leq \epsilon^q$ sur $(0, \eta)$, i.e. $(u_{n_k,\epsilon} - u_\epsilon) \in \mathcal{N}(\Omega)$. Ce qui implique $[(u_{n_k})]$ converge vers u dans $\mathcal{G}(\Omega)$. D'autre part on a $(u_n)_n$ est de cauchy et $(u_{n_k})_k$ une sous- suite convergente vers u, alors $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{G}(\Omega)$. □

**Corollaire 3.1.9.** $(\mathcal{G}(\Omega), \tau_\sharp)$ *est un*

**i)** $\tilde{\mathbb{C}}$-*module de Fréchet.*

**ii)** *bornologique.*

**iii)** *tonnelé.*

***Preuve***. $\mathcal{G}(\Omega)$ muni de $(\mathcal{P}_{K_i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est un

- $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet. En effet, d'apres la proposition 3.1.6 $\mathcal{G}(\Omega)$ est séparé, puisque $(\mathcal{E}(\Omega), p_{K_i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est un espace localement convexe qui admet une base dénombrable de voisinages de l'origine, alors d'apres la proposition 3.1.7 $\mathcal{G}(\Omega)$ est mérisable. En appliquant la proposition 3.1.8, $\mathcal{G}(\Omega)$ est complet. Ce qui implique que $\mathcal{G}(\Omega)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet.
- bornologique, d'apres la proposition 1.9.11
- est tonnelé, en effet , puisque $\mathcal{G}(\Omega)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet., donc est de Baire, alors d'apres la proposition 1.5.9 est tonnelé.

□

## 3.2 Topologie de $\mathcal{G}_c(\Omega)$

Pour $K \subset\subset \Omega$, considérons $\mathcal{G}_K(\Omega) = \{u \in \mathcal{G}(\Omega) : suppu \subset K\}$.

**Proposition 3.2.1.** *Si $K' \subset\subset \Omega$ tel que $K \subset int(K')$, alors*

*I.* $\mathcal{G}_K(\Omega) \subset \mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$

*II.* $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \subset \mathcal{N}(\Omega)$

***Preuve***. I. Soit $u \in \mathcal{G}_K(\Omega)$, alors $suppu \subset K$ et $K \subset int(K')$, par 2.4.4 il existe un $\mathcal{D}_{K'}(\Omega)$-moderé $(u_\epsilon)_\epsilon$ représentant de u, donc $u \in \mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$

II. Soit $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$, alors $\forall\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall m \in \mathbb{N}$ :

$$\sup_{x\,\in\,K'} |\partial^\alpha u(x)| = O(\epsilon^m), \epsilon \to 0$$

Soit $L \subset\subset \Omega$

$$\begin{aligned}\sup_{x\,\in\,L} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| &= \sup_{x\,\in\,L\,\cap\,K'} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| \\ &\leq \sup_{x\,\in\,K'} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| \\ &= O(\epsilon^m), \epsilon \to 0\end{aligned}$$

car $\partial^\alpha u_\epsilon$ est nulle sur $L - K'$,

d'où $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$. □

**Proposition 3.2.2.** *L'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}_K(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \\ u & \longmapsto & (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \end{array}$$

*où $K \subset int(K')$ est bien définie et injective.*

***Preuve***. I. On peut toujours trouvrer des représentants $(u_\epsilon)_\epsilon$, $(v_\epsilon)_\epsilon$ de u tels que $(u_\epsilon - v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$

II.

$$\begin{array}{rcl} (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} & = & \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \\ (u_\epsilon)_\epsilon & \in & \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \\ u & = & 0 \text{ dans } \mathcal{G}_K(\Omega), \end{array}$$

car $\mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \subset \mathcal{N}(\Omega)$ et $suppu \subset K$.

□

**Proposition 3.2.3.** $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \cap \mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$

***Preuve***. Soit$(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \cap \mathcal{N}(\Omega)$, alors $(u_\epsilon)_\epsilon \in (\mathcal{D}_{K'}(\Omega))^{(0,1]}$ et comme $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$, on a $\forall K' \subset\subset \Omega\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall m \in \mathbb{N}$ :

$$\sup_{x\, \in\, K'} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| = O(\epsilon^m), \epsilon \to 0,$$

d'où $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$. □

**Proposition 3.2.4.** *L'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} & \longrightarrow & \mathcal{G}(\Omega) \\ (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} & \longmapsto & (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega) \end{array}$$

*est bien définie et injective.*

***Preuve***. Par laproposition 3.2.1 on déduit qu'elle est bien définie.
$u = [(u_\epsilon)_\epsilon] = 0$ dans $\mathcal{G}(\Omega)$, alors $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$ et comme $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$, d'où $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)} \cap \mathcal{N}(\Omega)$, ce qui implique $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$. □

**Définition 3.2.5.** *Pour $K \subset\subset \Omega$, on définit la $p_{K,n}$ valuation de $u$ dans $\mathcal{G}_K(\Omega)$ par $V_{K,n}(u) = V_{p_{K',n}}(u)$ où $K'$ est un compact de $\Omega$ tel que $K \subset int(K')$ et*

$$p_{K,n}(u_\epsilon) = \sup_{\substack{x \in K' \\ |\alpha| \leq n}} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)| .$$

**Remarque 3.2.6.** *Cette définition est indépendante du choix de $K'$. En effet, puisque $V_{p_{K',n}}(u) \geq \inf\{V_{p_{K'\setminus int(K'_1 \cap K'_2),n}(u)}, V_{p_{K'_2,n}}(u)\}) = V_{p_{K'_2,n}}(u)$.*

**Proposition 3.2.7.** *La famille des ultras-pseudos-seminormes $(\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),n}(u))_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-V_{K,n}(u)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe et coincide avec la topologie induite par $\mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$ sur $\mathcal{G}_K(\Omega)$.*

***Preuve.*** Il suffit de remarquer que $V_{K,n}(u) = V_{p_{K',n}}(u)$ dans $\mathcal{G}_K(\Omega)$ □

**Proposition 3.2.8.** $(\mathcal{G}_K(\Omega), (\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),n}(u))_{n\in\mathbb{N}})$ *est un $\tilde{\mathbb{C}}$- module de Fréchet.*

***Preuve.***

I. Par la proposition 3.1.6 $\mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$ est séparé, alors la topologie induite est séparé i.e. $(\mathcal{G}_K(\Omega)$ est séparé

II. $\mathcal{G}_K(\Omega)$ est métrisable d'pres le théorème 1.8.2

III. Montrons $\mathcal{G}_K(\Omega)$ est complet. Comme $\mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$ est complet d'pres la proposition 3.1.8, il suffit de montrer que $\mathcal{G}_K(\Omega)$ est un fermé. Soit $u \in \mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$ adhère $\mathcal{G}_K(\Omega)$, pour $\eta = e^{-n}$ où $n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in \mathcal{G}_K(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} e^{-V_{p_{K',0}}(u-u_n)} &\leq e^{-n} \\ -V_{p_{K',0}}(u-u_n) &\leq -n \\ V_{p_{K',0}}(u-u_n) &\geq n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Prenons $V = \Omega \setminus K$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{V}_c$ on a $u_n(\tilde{x}) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$, alors

$$\begin{aligned} V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u(\tilde{x})) &= V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u(\tilde{x}) - u_n(\tilde{x}) + u_n(\tilde{x})) \\ &\geq \min(V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u(\tilde{x}) - u_n(\tilde{x})), V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u_n(\tilde{x}))) \\ &\geq \min(V_{p_{K',0}}(u-u_n), V_{\tilde{\mathbb{C}}}(u_n(\tilde{x}))) \\ &\geq V_{p_{K',0}}(u-u_n). \end{aligned}$$

D'où $u(\tilde{x}) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$, donc $u = 0$ dans $\mathcal{G}(V)$,i.e. *suppu* $\subset K$, ce qui prouve que $\mathcal{G}_K(\Omega)$ est un fermé de $\mathcal{G}_{\mathcal{D}_{K'}(\Omega)}$, ainsi $\mathcal{G}_K(\Omega)$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module de Fréchet.

□

**Proposition 3.2.9.** *Si $K_1 \subset K_2 \subset\subset \Omega$ et $K_1 \subset int(K_2)$, alors $\mathcal{G}_{K_2}(\Omega)$ induit sur $\mathcal{G}_{K_1}(\Omega)$ sa topologie initiale et $\mathcal{G}_{K_1}(\Omega)$ est un fermé de $\mathcal{G}_{K_2}(\Omega)$.*

***Preuve.*** $\forall u \in \mathcal{G}_{K_1}(\Omega)$, on a $V_{K_1,n}(u) = V_{K_2,n}(u)$ i.e. $\mathcal{P}_{\mathcal{G}_{K_1}(\Omega),n}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{G}_{K_2}(\Omega),n}(u)$. D'où $\mathcal{G}_{K_2}(\Omega)$ induit sur $\mathcal{G}_{K_1}(\Omega)$ sa topologie initiale. D'autre part $\mathcal{G}_{K_2}(\Omega)$ est séparé et $\mathcal{G}_{K_1}(\Omega)$ est complet, alors il est un fermé de $\mathcal{G}_{K_2}(\Omega)$. □

**Notation** :Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de $\Omega$ et notons $\mathcal{G}_{K_n}(\Omega) = \mathcal{G}_n$

**Proposition 3.2.10.** *$\mathcal{G}_C(\Omega)$ muni de la limite inductive stricte des $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un $\tilde{\mathbb{C}}$-module topologique localement convexe séparé et complet .*

***Preuve.*** On a
- $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{G}_c(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n$
- $\mathcal{G}_{n+1}$ induit sur $\mathcal{G}_n$ sa topologie intiale,

alors $\mathcal{G}_c(\Omega)$ dôté de la limite inductive stricte des $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
- séparé car les $\mathcal{G}_n$ le sont
- par la proposition 3.2.9
  $\mathcal{G}_n$ est fermé de $\mathcal{G}_{n+1}$
- $\mathcal{G}_n$ sont Fréchet $\tilde{\mathbb{C}}$- modules.

D'où par 1.12.13 $\mathcal{G}_c(\Omega)$est complet. □

**Corollaire 3.2.11.** *Si $(u_n)_n$ une suite de $\mathcal{G}_c(\Omega)$, alors $(u_n)_n$ converge si et seulement s'il existe un conpact $K$ tel que*

*I. $(u_n)_n \subset \mathcal{G}_K(\Omega)$.*

*II. $(u_n)_n$ converge dans $\mathcal{G}_K(\Omega)$.*

***Preuve.*** En appliquant le corrollaire 1.12.11. □

**Theorem 3.2.12.** $\mathcal{G}_c(\Omega)$, *est est la limite inductive stricte de $(\mathcal{G}_K(\Omega), (\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),n}(u))_{n\in\mathbb{N}})$, alors il est*

**i)** *séparé et complet .*

**ii)** *bornologique.*

**iii)** *tonnelé.*

***Preuve.*** **i)** La proposition 3.2.10 implique que $\mathcal{G}_c(\Omega)$ séparé et complet.

**ii)** La proposition 1.12.14 implique que $\mathcal{G}_c(\Omega)$ est bornologique.

**iii)** Puisque $(\mathcal{G}_K(\Omega), (\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),n}(u))_{n\in\mathbb{N}})$ sont tonnelé, alors la proposition 1.9.11 implique que $\mathcal{G}_c(\Omega)$ esttonnelé.

□

## 3.3 Dualité

**Définition 3.3.1.** *Soit $\Omega'$ un ouvert de $\Omega$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$ La restriction de $T$ à $\Omega'$ , notée $T_{|_{\Omega'}}$ est définie par*

$$\begin{array}{rcl} T_{|_{\Omega'}} : \mathcal{G}_c(\Omega') & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & T(u) \end{array}$$

**Theorem 3.3.2.** $\Omega \longrightarrow T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$ *est un faisseau.*

***Preuve***. Il est clair que pour tous $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$ et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$, on a $(T_{|_{\Omega'}})_{|_{\Omega''}} = T_{|_{\Omega'}}$.
Il reste à prouver que pour tous recouverment ouvert $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\Omega$, , alors on a les propriétés suivantes

$(F_1)$ si $T, T' \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$, et $T_{|_{\Omega_\lambda}} = T'_{|_{\Omega_\lambda}}$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors $T = T'$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$,.

$(F_2)$ si pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ et $T_\lambda \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega_\lambda), \tilde{\mathbb{C}})$ tel que

$$(T_\lambda)_{|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu}} = (T_\mu)_{|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu}}$$

avec $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$, alors il existe un élément unique $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$, tel que $T_{|_{\Omega_\lambda}} = T_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Montrons $(F_1)$. Pour tous $(\chi_j)_{j=1}^{\infty}$ $\mathcal{C}^\infty$-partition de l'unite subordonnée au recouverment ouvert $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et soit $u \in \mathcal{G}_c(\Omega)$, alors

$$u = \sum_{j=0}^{n_0} \chi_j u,$$

puisque $supp\chi_j \subset \Omega_{\lambda j}$, nous savons que $supp(\chi_j u) \subset \Omega_{\lambda j}$, alors

$$(\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_{\lambda j}) \in \mathcal{G}_c(\Omega_{\lambda j}),$$

D'où

$$\begin{aligned}
T(u) &= T(\sum_{j=0}^{n_0} \chi_j u) \\
&= \sum_{j=0}^{n_0} T(\chi_j u) \\
&= \sum_{j=0}^{n_0} T_{|\Omega_{\lambda_j}}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_{\lambda j})) \\
&= \sum_{j=0}^{n_0} T'_{|\Omega_{\lambda_j}}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_{\lambda j})) \\
&= \sum_{j=0}^{n_0} T'(\chi_j u) = T'(u).
\end{aligned}$$

Montrons $(F_2)$. Pour tous $(\chi_j)_{j=1}^{\infty}$ $\mathcal{C}^\infty$-partition de l'unite subordonnée au recouverment ouvert $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et par hypothèse , on a

$$\forall j, T_{\lambda_j} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega_{\lambda_j}), \tilde{\mathbb{C}})$$

et un nombre fini de $\chi_j u$ qui sont différent de o, pour tout u Alors

$$T(u) = \sum_{j=0}^{\infty} T_{\lambda_j}(\chi_j u)$$

est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire .
Pour tout compact K de $\Omega$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$T(u) = \sum_{j=0}^{n_0} T_{\lambda_j}(\chi_j u)$$

sur $\mathcal{G}_K(\Omega)$. Puisque la multiplication

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_K(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{G}_c(\Omega_{\lambda_j}) \\
u &\longmapsto \chi_j u
\end{aligned}$$

est continue. Ce qui prouve que T est continue sur $\mathcal{G}_K(\Omega)$, pour tout compact K. Comme $\mathcal{G}_c(\Omega)$ est muni de la limite inductive des $\mathcal{G}_{K_n}(\Omega)$, alors T est

continue sur $\mathcal{G}_c(\Omega)$.
Il reste à prouver que $T_{|\Omega_\lambda} = T_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $\Omega_\lambda$ et $(u_\epsilon)_\epsilon$ un représentant de $u \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ tel que $suppu_\epsilon \subset K \subset\subset \Omega_\lambda$, pour tous $\epsilon \in (0,1]$ et $K \cap \Omega_{\lambda_j} = \emptyset$ pour $j > n_0$, on a

$$T_{|\Omega_\lambda}(u) = \sum_{j=0}^{n_0} T_{\lambda_j}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega))$$

La fonction généralisée

$$(\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j}) \in \mathcal{G}_c(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j})$$

et

$$(T_{\lambda_j})_{|\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j}}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j})) = T_{\lambda_j}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j})).$$

Alors

$$\begin{aligned} T_{|\Omega_\lambda}(u) &= \sum_{j=0}^{n_0} (T_{\lambda_j})_{|\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j}}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j})) \\ &= \sum_{j=0}^{n_0} (T_\lambda)_{|\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j}}((\chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_{\lambda_j})) \\ &= T_\lambda((\sum_{j=0}^{n_0} \chi_j u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda)) \\ &= T_\lambda(u). \end{aligned}$$

D'où notre affirmation. □

**Définition 3.3.3.** *On appelle support de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$, noté supp u, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $T$ est nul, i.e.*
*supp $T = \Omega \backslash (\cup \{\Omega' \subset \Omega, \Omega'$ un ouvert, $T_{|\Omega'} = 0\})$*

**Remarque 3.3.4.** *$u \notin suppT$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert $V$ de $u$ tel que $T_{|V} = 0$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{G}_c(V), \tilde{\mathbb{C}})$.*

**Lemme 3.3.5.** *Soit l'injection*

$$\begin{array}{rcl} i : \mathcal{G}_c(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\Omega) \\ u & \longmapsto & u, \end{array}$$

*alors $Im(i)$ est dense dans $\mathcal{G}(\Omega)$.*

***Preuve***. Soit $u_0 \in \mathcal{G}(\Omega)$ U est un voisinage de $u_0$ dans $\mathcal{G}(\Omega)$, i.e., $U = \{u \in \mathcal{G}(\Omega) : \mathcal{P}_{K,m}(u - u_0) \leq \eta\}$, où K est un compact , $m \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$. . Prenons $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de K. Posons $u = \chi u_0$, alors $suppu \subset supp\chi$, ce qui implique que $u \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ et $V_{p_{K,m}}(u - u_0) = \infty$, d'où $\mathcal{P}_{K,m}(u - u_0) = 0$ dans $\tilde{\mathbb{C}}$, i.e. ; $u \in \mathcal{G}(\Omega) \cap U$. Ce qui prouve que $Im(i)$ est dense dans $\mathcal{G}(\Omega)$. □

**Theorem 3.3.6. i)** *La restriction*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathcal{L}(\mathcal{G}(\Omega), \tilde{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}}) \\ T & \longmapsto & T_{|_{\mathcal{G}_c(\Omega)}} \end{array}$$

*est injective.*

**ii)** $u \in \mathcal{L}(\mathcal{G}(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$ *si est seulement si* $u \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$ *et suppu compact.*

***Preuve***. **i)** Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$, montrons que $\gamma(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$. Puisque est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue. Alors $\gamma(T) = T \circ i$ $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire continue, i.e., $\gamma(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$.

Montrons que $\gamma$ est injective. Supposons $\gamma(T) = 0$, alors $T_{|_{\mathcal{G}_c(\Omega)}} = 0$, $\forall v \in \mathcal{G}_c(\Omega)$. Comme $i(u) \in \mathcal{G}_c(\Omega)$, $\forall u \in \mathcal{G}(\Omega)$. Donc $T(i(u)) = 0$, $\forall u \in \mathcal{G}(\Omega)$. Ce qui implique que T est nulle sur $Im(i)$, puisque $Im(i)$, est dense dans $\mathcal{G}(\Omega)$, alors T est nulle sur $\mathcal{G}_c(\Omega)$. Ce qui prouve que $\gamma$ est injective.

**ii)** ($\Longrightarrow$) Supposons que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$, alors d'apres i) $u \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$ et montrons que $suppT$ est compact de $\Omega$. Supposons le contraire, soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive des compacts de $\Omega$. Alors pour tous $n \in \mathbb{N}$, on a $suppT \cap (\Omega \backslash K_n) \neq \emptyset$, si non $suppT \subset K_n$, ce qui contredit la non compacité de $suppT$. En d'autre terme, il existe une suite $(u_n)_n \subset \mathcal{G}_c(\Omega)$ tels que $suppu_n\Omega\backslash K_n$ et $Tu_n \neq 0$. Posons $V_{\tilde{\mathbb{C}}}(Tu_n) = a_n$ et $v_n = [(\epsilon^{-a_n})_\epsilon]u_n$. Alors $suppv_n = suppu_n \subset \Omega\backslash K_n$ et

$$\begin{array}{rcl} |Tu_n|_e & = & \left|[(\epsilon^{-a_n})_\epsilon]\right|_e |Tu_n|_e \\ & = & e^{a_n} e^{-a_n} = 1. \end{array}$$

La suite $(v_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{G}(\Omega)$. En effet , soit K un compact, alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_{n_0}$ et $\forall n \geq n_0$, $K_{n_0} \subset \Omega\backslash suppv_n$. D'où, pour $q \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha v_{n,\epsilon}(x)| . & \leq & \sup\limits_{\substack{x \in K_{n_0} \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha v_{n,\epsilon}(x)| \\ & = & O(\epsilon^q), \epsilon \to 0. \end{array}$$

Ce qui implique $V_{K,m}(v_n) = +\infty$, $\forall n \geq n_0$, donc $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}_{K,m}(v_n) = 0$. Ce qui signifie que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{G}(\Omega)$. Puisque T est continue, alors la suite $(T(v_n))_n$ converge vers 0 dans $\tilde{\mathbb{C}}$, ce qui contredit $|Tu_n|_e = 1$.
$(\Longleftarrow)$ Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$. Supposons que *suppT* est compact et $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de *suppT*. Alors , pour tous $u \in \mathcal{G}(\Omega)$, on a $\chi u \in \mathcal{G}_c(\Omega)$, car $supp\chi u \subset supp\chi$. On définie l'application

$$\begin{array}{rcl} T' : \mathcal{G}(\Omega) & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{C}} \\ u & \longmapsto & T(\chi u). \end{array}$$

$T'$ est $\tilde{\mathbb{C}}$-linéaire sur $\mathcal{G}(\Omega)$. Montrons que $T'_{|_{\mathcal{G}_c(\Omega)}} = T$. Pour $u \in \mathcal{G}_c(\Omega)$, on a $(\chi - 1)u \equiv 0$ sur *suppT*. Donc $(\chi - 1)u \in \mathcal{G}_c(\Omega \backslash suppT)$ et

$$\begin{array}{rcl} T'(u) - T(u) & = & T(\chi u) - T(u) \\ & = & T((\chi - 1)u) \\ & = & 0 \end{array}$$

Ce qui implique que $T'_{|_{\mathcal{G}_c(\Omega)}} = T$. Montrons que $T'$ est continue. Puisque T est continue, alors, pour $u \in \mathcal{G}(\Omega)$, on a Pour $\chi u \in \mathcal{G}_K(\Omega)$, où $K = supp\chi$ et il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} |T'(u)|_e & = & |T(\chi u)|_e \\ & \leq & \mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),m}(\chi u). \end{array}$$

Or $\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),m}(\chi u) = e^{-V_{K,m}(\chi u)}$

$$\begin{array}{rcl} V_{K,m}(\chi u) & = & V_{p_{K,m}}((\chi u_\epsilon)_\epsilon) \\ & = & V((p_{K,m}(\chi u_\epsilon))_\epsilon) \\ & = & V((\sup\limits_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} \left| \chi(x)\partial^\alpha u_\epsilon(x) + \sum\limits_{|\beta|=1}^{|\alpha|} C_\beta \partial^{\alpha-\beta}\chi(x)\partial^{\alpha-\beta}u_\epsilon(x) \right|)_\epsilon) \\ & = & V((\sup\limits_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\chi(x)\partial^\alpha u_\epsilon(x)|)_\epsilon) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
V_{K,m}(\chi u) &\geq V\Big(\big(\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\chi(x)\partial^\alpha u_\epsilon(x)|\big)_\epsilon\Big) \\
&\geq V\Big(\big(\sup_{x \in K} |\chi(x)|\big)_\epsilon\big(\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)|\big)_\epsilon\Big) \\
&\geq V\Big(\big(\sup_{x \in K} |\chi(x)|\big)_\epsilon\Big) + V\Big(\big(\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)|\big)_\epsilon\Big).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),m}(\chi u) &= \exp -V\big((\sup_{x\in K} |\chi(x)|)_\epsilon\big) - V\Big(\big(\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)|\big)_\epsilon\Big) \\
&\leq e^{-V((\sup_{x \in K} |\chi(x)|)_\epsilon)} e^{-V((\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha u_\epsilon(x)|)_\epsilon)} \\
&\leq C\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),m}(u).
\end{aligned}
$$

□

**Corollaire 3.3.7.** $\mathcal{G}_c(\Omega)$ *et* $\mathcal{G}(\Omega)$ *sont*

**i)** *métrisables .*

**ii)** *complet.*

**ii))** *admet un réseau absolument convexe, fermé et de type* $\mathcal{C}$.

***Preuve***. Puisque $\mathcal{G}_c(\Omega)$ et $\mathcal{G}(\Omega)$ sont $\tilde{\mathbb{C}}$-module bornologique, alors, la proposition 1.14.11, implique que $(\mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}}), \beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}))$
et $(\mathcal{L}(\mathcal{G}(\Omega), \tilde{\mathbb{C}}), \beta(\mathcal{L}((\Omega), \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}))$ sont complets. Comme $\mathcal{G}_c(\Omega)$ est la limite inductive stricte des$(\mathcal{G}_K(\Omega), (\mathcal{P}_{\mathcal{G}_K(\Omega),n}(u))_{n\in\mathbb{N}})$. Qui sont des $\tilde{\mathbb{C}}$- module de Fréchet, donc métrisables . Alors, la proposition 1.15.7, implique que $\mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}})$ muni de la opologie $\beta(\mathcal{L}(\mathcal{G}_c(\Omega), \tilde{\mathbb{C}}), \mathcal{G}_c(\Omega))$ admet un réseau absolument convexe, fermé et de type $\mathcal{C}$. □

# Bibliographie


[1] K. Benmeriem, C. Bouzar. Affine ultraregular generalized functions. Banach Center Publications, vol. 88, p. 39-53, (2010).

[2] J. F. Colombeau. Elementary Introduction to New Generalized Functions and Multiplication of Distributions. North Holland, (1985.)

[3] J. F. Colombeau. New Generalized Functions and Multiplication of Distributions. North Holland, (1984.)

[4] C. Garetto. Topological structures in Colombeau algebras : topological $\widetilde{\mathbb{C}}$-modules and duality theory. Acta. Appl. Math., 88 :1, p. 81-123, (2005.)

[5] C. Garetto. Topological structures in Colombeau algebras : investigation into the duals of $G_c(\Omega)$, $G(\Omega)$ and $G_{\mathbb{S}}(R^n)$. Monatsh. Math., 146 :3, p. 203-226, (2005.)

[6] Garetto C., Microlocal analysis in the dual of a Colombeau algebra : generalized wave front sets and noncharacteristic regularity. New York J. Math., 12, 275-318, (2006).

[7] C. Garetto. Closed graph and open mapping theorems for topological $\widetilde{\mathbb{C}}$-modules and applications. Math. Nachr., 282, p. 1159-1188, (2009).

[8] M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, R. Steinbauer . Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. Kluwer. (2001).

[9] M. Oberguggenberger. Multiplication of distributions and applications to partial differential equations. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 259. Longman, (1992).

[10] J. Horváth. Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley, (1966.)

[11] A. P. Robertson and W. Robertson. Topoogical vector spaces . Cambridge University Press, (1980.)

[12] D. Scarpalezos. Topologies dans les espaces de nouvelles fonctions généralisées de Colombeau. $\overline{\mathbb{C}}$-modules topologiques. Preprint. Université Paris 7, (1992).

[13] L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, (1966).

[14] L. Schwartz. Topologie Générale. Analyse Fonctionnelle . Hermann (1970).

[15] L. Schwartz. Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. C. R. Acad. Sci. Paris, 239, p. 847-848, (1954.)

[16] S.L. Sobolev, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales. Math. Sbornik, 1,p. 39-71, (1936).

[17] F. Trèves. Topoogical vector spaces, distributions and kernels. Academic Press, (1967).