Table des matières

0.1 Introduction

A partir des années trente,dans la théorie des équations aux dérivées partièlles,on a commencé à intoduire des espaces plus complexes comme l'espace de Holder et l'espace de Sobolev. Un peu plus tard,d'une manière intensive dans les années soixante et soixante dix ont été intoduits et études beaucoup de nouveaux espaces par exemple l'espace de Besov,les espaces de Hardy dans $\mathbb{R}^n$.

L'histoire des espaces fonctionnèls peut être considerée en trois étapes.

La première étape debute du 19 siècle jusqu'au milieu des années trente,durant ce temps ont été étudiés en détail les espaces L_p(espaces des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable)et les espaces C^m des fonctions m-fois différentiables.Pendant cette même période apparaissent les espaces de Holder et ceux de Hardy.

La seconde période a été marquée par les publications de S.L. Sobolev en 1935-1938,dans lesquelles ont été introduits les espaces notés W_p^l avec $l = 0, 1, 2, 3, ...$ connus actuèllement sous le nom d'espaces de Sobolev.Un peu plus tard sont apparus des analogues aux espaces de Sobolev par exemple les espaces Slobodevsky avec $l > 0$,et l non entier .

Et puis il y'a eu constructions d'autres espaces comme ceux de Nikolsky-Besov,Triebel-Lizorkin...etc.

Dans le présent travail on aborde le théme des équivalences des semi-normes et les quasi-normes dans les epaces de Nikolky-Besov,à l'aide des différences et du module de continuité.Il existe plusieures définitions de l'espace de Nikolsky-Besov mais celle qu'on va utiliser est équivalentes aux autres (voir chapitre "1") est la suivante :

Définition 0.1 *a)Soient $l > 0$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq +\infty$,$0 < \theta \leq +\infty$.*
On dit que la fonction f appartient à l'espace de Nikolsky-Besov $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ si
***1)** f est mesurable sur $\mathbb{R}^n$.*
***2)**$\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$, où*

$$\|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \right)^\theta \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad si\ 0 < \theta \leq +\infty. \tag{1}$$

$$\|f\|_{b^l_{p,+\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} \frac{\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \tag{2}$$

où $(\Delta_h^\sigma f)(x) = \sum_{s=0}^{\sigma} \binom{k}{s} (-1)^{k-s} f(x + sh)$. est la différence d'ordre σ et de pas h.

b) $f \in \widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ si f est mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\|f\|_{\widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty. \tag{3}$$

Où $\omega_\sigma(t,f)_p = \sup_{|h|\leq t} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ est le L_p module de continuité de f d'ordre σ.

Ce mémoire comprend une introduction,"6"chapitres et des références.
Dans le chapitre"1" on introduit les espaces de Nikolsky-Besov en donnant plusieures définitions équivalentes entre elles.Au chapitre"2" on rappelle des notions sur les différences et le module de continuité d'une fonction $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ qui présentent un outil fondamental.Dans le chapitre "3"on montre l'équivalence des normes (semi-normes) dans l'espace en question.
le chapitre"4" comprend la définition de l'espace $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ à l'aide de la notion de module de continuité d'une fonction $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$,de plus on montre l'équivalence des normes $\|\cdot\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ définies à l'aide des différences et celles définies à l'aide du module de continuité qu'on a noté par $\|.\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$.
Dans Le chapitre"5" on établit l'équivalence des quasi-normes dans l'espace cité cidessus.Dans le sixième chapitre on définit l'espace $B^l_{p,\theta}(a;b)$ (espace de Nikolsky-Besov pour un intervalle (a,b) de $\mathbb{R}$) et on montre l'équivalence des normes (semi-normes) dans ce dérnier,la méthode utilisée dans le chapitre"3" pour $\mathbb{R}^n$ n'est plus valable et par conséquent on a fait recours à une autre méthode liée à la notion d'opérateur d'extension.

Chapitre 1

DEFINITIONS DES ESPACES DE NIKOLSKY-BESOV

1.1 Préliminaires

Les diverses proprietés des espaces de Nikolsky-Besov sont étudiées par plusieurs auteurs dans de nombreux travaux.Dans ces derniers ont été utilisées différentes méthodes et approches pour définir ces espaces.Dans le présent chapitre on donne plusieurs définitions concernant ces espaces qui sont en réalité équivalentes entre elles ,mais avant de les formuler,il est nécessaire de préciser certaines notions comme les dérivées au sens de Sobolev et les espaces de Sobolev sans entrer dans les détails.

Définition 1.1 *Soient* Ω *un ouvert,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *,*$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *(un multi-indice),*$f, g \in L^{loc}(\Omega)$*.On dit que la fonction* g *est une dérivée de* f *au sens de Sobolev ou bien dérivée faible si :*$\forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g \varphi dx$$

Notation : $g = D_w^\alpha f$ (w : veut dire weak (faible) d'où l'appelation de dérivée faible).

Définition 1.2 *Soient* Ω *un ouvert tel que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*,*$l \in \mathbb{N}$*,*$1 \leq p \leq +\infty$*.On dit qu'une fonction* f *appartient à l'espace de Sobolev* $W_p^l(\Omega)$ *si :*
$f \in L_p(\Omega)$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$*,*$|\alpha| = l$*,il existe les dérivées au sens de Sobolev* $D^\alpha f$*,telles que* $D^\alpha f \in L_p^{loc}(\Omega)$ *et*

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} < \infty. \tag{1.1}$$

1.2 Définitions des espaces de Nikolsky-Besov

Définition 1.3 *Soient $l > 0, 1 \leq, \theta, p \leq \infty$.On dit que la fonction $f \in B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ (espace de Nikolsky-Besov) si*

i. $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$

ii. *il existe les dérivées* $\left(\dfrac{\partial^{\bar{l}} f}{\partial x_j^{\bar{l}}}\right)_w$ *,où $\bar{l} = [l]$ si l est non entier et $\bar{l} = l - 1$ si l est entier,telles que :*

$$\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{b^l_{p,\theta,j}(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{1.2}$$

où

$$\|f\|_{b^l_{p,\theta,j}(\mathbb{R}^n)} = \left[\int_0 \infty \left(\frac{\|\Delta^\sigma_{h,j}(\frac{\partial^{\bar{l}} f}{\partial x_j^{\bar{l}}})_w\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{h^{l-\bar{l}}}\right)^\theta \frac{dh}{h}\right]^{\frac{1}{\theta}} \quad si\ 1 \leq \theta < +\infty. \tag{1.3}$$

$$\|f\|_{b^l_{p,+\infty,j}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{0<h<\infty} \frac{\|\Delta^\sigma_{h,j}(\frac{\partial^{\bar{l}} f}{\partial x_j^{\bar{l}}})_w\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{h^{l-\bar{l}}}. \tag{1.4}$$

Par exemple si $\sigma = 1$,on a $\Delta_{h,j} g$ et la différence d'ordre 1 et de pas h par rapport à la variable x_j,c'est à dire

$$\Delta_{h,j} g(x) = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n).$$

si $\sigma = 2$,on a

$\Delta^2_{h,j} g(x) = g(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + 2h, x_{j+1}, .., x_n) - 2g(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_n) + g(x_1, ..., x_n)$.

Quelques cas particuliers

1. Si $0 < l < 1, \bar{l} = 0, \sigma = 1, n = 1, \theta = \infty$,alors

$$\|f\|_{B^l_{p,\infty}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \sup_{0<h<\infty} \frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R})}}{h^l} < \infty.$$

2. Si $0 < l < 1, 1 \leq p = \theta, \leq \infty, n = 1$,alors

$$\|f\|_{B^l_{p,p}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R})}}{h^l}\right)^p \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

3. Si $\bar{l} = 0, \sigma = 2, 1 \leq p = \theta \leq \infty, n = 1$,alors

$$\|f\|_{B^l_{p,p}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} + \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|\Delta^2_h f\|_{L_p(\mathbb{R})}}{h^l}\right)^p \frac{dh}{h}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

La définition suivante est fondée sur l'extension de fonction à $\mathbb{R}^{n+1}$.
Soit $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < y < \infty\}$.
La fonction

$$P(x,y) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}).y}{\pi^{\frac{n+1}{2}}(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

est appelée noyau de poisson de $\mathbb{R}_+^{n+1}$.
Soit $f(x) \in L_p$,$1 \leq p \leq \infty$.On dit que $f(x,y)$ est une intégrale de Poisson pour $f(x)$ si :

$$f(x,y) = f(x) * P(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)P(z,y)dz.$$

Les propriétés de $P(x,y)$ et $f(x,y)$ sont décrites dans [11].Taibleson [23, 24] a montré qu'on peut définir les espaces $B^l_{p,\theta}$ de la manière suivante

Définition 1.4 *Soient $r > 0, 1 \leq p, \theta \leq \infty$.On dit que $f \in B^l_{p,\theta}$ si*

$$\|f\|_{B^l_{p,\theta}} = \|f\|_{L_p} + \left(\int_0^\infty y^{(r-k)\theta} \|f^{(k)}_{(y)}(x,y)\|^\theta_{L_p} \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \tag{1.5}$$

où $k \in \mathbb{N}, k > r$ (pour différents $k > r$ les normes sont équivalentes).

Pour $p = \theta$,la définition a été considérée un peu avant par P.I.Lizorkin et S.V.ousspenskii.
La définition suivante est basée sur la transformation de Fourier.

Définition 1.5 *Soient $l > 0, p = \theta = 2$. on dit que la fonction $f \in B^l_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ si :*

$$\|f\|_{B^l_{2,2}(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^{2l})^{\frac{1}{2}}(Ff)(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.6}$$

Ici Ff désigne la transformation de Fourier.

conséquence : Si $l \in \mathbb{N}$,alors :

$$B^l_{2,2}(\mathbb{R}^n) = W^l_2(\mathbb{R}^n).$$

Remarques 1.1 ***1.*** *Il existe une définition plus générale des espaces $B^l_{p,\theta}$ à l'aide de la transformation de Fourier qui est valable pour $1 \leq p \leq \infty$.*
2.*Il y'a d'autres définitions des espaces $B^l_{p,\theta}$ à l'aide de la théorie d'approximation par les fonctions entières du type exponentiel,la théorie d'interpolation,des séries,...etc.*
3.*Tout au long de ce travail on considère seulement les espaces $B^l_{p,\theta}$ dits isotropes,c'est à dire l'ordre de régularité l est un réel positif,alors que dans les espaces anistropes l est un vecteur.*

Chapitre 2

NOTIONS SUR LES DIFFERENCES ET LE MODULE DE CONTINUITE

Ce chapitre est consacré aux différences,aux modules de continuité d'une fonction et leurs propriétés.

2.1 Préliminaire

On cite certaines inégalités nécessaires qui sont utilisées tout au long de ce travail.

2.1.1 Inégalité de Holder dans les espaces L_p

Théorème 2.1 *Soit* E *un sous ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$,$0 < p \leq \infty$ *et soient* $f \in L_p(E)$,$g \in L_{p'}(E)$, p' *le conjugué de* p , $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$.*Alors*
1.*Si* $1 \leq p \leq +\infty$,*on a*

$$\int_E |f.g|dx \leq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}.$$

2.*Si* $0 < p < 1$,*avec les conditions* $mes(E) > 0$ *et pour tout* $x \in E$,$g(x) \neq 0$,*on a*

$$\int_E |f.g|dx \geq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}.$$

2.1.2 Inégalité de Minkovsky et ses variantes

Théorème 2.2 *Soit E un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et soit $0 < p \leq +\infty$.Alors,pour toutes $f, g \in L_p(E)$.*
1.*Si $1 \leq p \leq \infty$.*

$$\|f+g\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)}.$$

2.*Si $0 < p < 1$.*

$$\|f+g\|_{L_p(E)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)}).$$

Théorème 2.3 *(Variantes de l'inégalité de Minkovsky)*
1) *E un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$,$f_1, ...f_k \in L_p(E)$.Alors*

$$\|\sum_1^k f_k\|_{L_p(E)} \leq \sum_1^k \|f_k\|_{L_p(E)}.$$

2)*Soient $E \subset \mathbb{R}^m$,$F \subset \mathbb{R}^n$. Alors,pour toute fonction f mesurable de $E \times F$,on a*

$$\left\|\int_F f(.,y)dy\right\|_{L_p(E)} \leq \int_F \|f(.,y)\|_{L_p(E)}dy.$$

Lemme 2.1 *.Soit $1 < p < +\infty$,alors*
1)*$\forall \epsilon > 0, \forall a, b \geq 0$,*

$$(a+b)^p \leq (1+\epsilon)a^p + c(p,\epsilon)b^p$$

Où $c(p,\epsilon) = \left[1-(1+\epsilon)^{\frac{1}{1-p}}\right]^{1-p}$.
2)*Si $\epsilon = 2^{(p-1)} - 1$,l'inégalité précédente s'écrit*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

Preuve.
On pose

$$\varphi(t) = \frac{(1+t)^p - (1+\epsilon)}{(t)^p} \leq c(p,\epsilon)$$

Il suffit de montrer que φ admet un maximum pour $t = (1+\epsilon)^{\frac{1}{p-1}} - 1$ et ce max est égale à $c(p,\epsilon)$.L'inégalité est obtenue pour $t = ba^{-1}$.

Lemme 2.2 *Soit E un ensemble mesurable,$E \subset \mathbb{R}^n$.*
Si$0 < p < 1$,$\forall \epsilon > 0$,$\forall f_1, \dots, f_m \in L_p(E)$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{k=m} f_k\right\|_{L_p(E)} \leq (1+\epsilon)\|f_1\|_{L_p(E)} + \left[1-(1+\epsilon)^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}}(m-1)^{\frac{1}{p}-1}\sum_{k=2}^{k=m}\|f_k\|_{L_p(E)}$$

Preuve.
On a $1 < \frac{1}{p} < \infty$,$|f_1 + f_2|^p \le |f_1|^p + |f_2|^p$,car $0 < p < 1$.
Donc

$$\|f_1 + f_2\|_{L_p(E)} \le \left(\int_E |f_1|^p dx + \int_E |f_2|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = I_1$$

En vertu du lemme(2.1),on peut écrire

$$\begin{aligned} I_1 &\le (1+\epsilon)\left(\int_E |f_1|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + c(p,\epsilon)\left(\int_E |f_2|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (1+\epsilon)\|f_1\|_{L_p(E)} + c(p,\epsilon)\|f_2\|L_p(E). \end{aligned}$$

On pose $g = \sum_{k=2}^{k=m} f_k$, alors $\sum_{k=1}^{k=m} f_k = f_1 + g$.
Donc

$$\|\sum_{k=1}^{k=m} f_k\|_{L_p(E)} = \|f_1 + g\|_{L_p(E)} \le (1+\epsilon)\|f_1\|_{L_p(E)} + c(p,\epsilon)\|g\|_{L_p(E)},$$

mais d'aprés l'ingalité de Minkovsky

$$\|g\|_{L_p(E)} = \|\sum_{k=1}^{k=m} f_k\|_{L_p(E)} \le (m-1)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=2}^{k=m} \|f_k\|_{L_p(E)},$$

alors

$$\|\sum_{k=1}^{k=m} f_k\|_{L_p(E)} \le (1+\epsilon)\|f_1\|_{L_p(E)} + c(p,\epsilon)(m-1)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=2}^{k=m} \|f_k\|_{L_p(E)}$$

où $c(p,\epsilon) = \left[1 - (1+\epsilon)^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}\right]^{1-\frac{1}{p}} = (1 - (1+\epsilon)^{p'})^{\frac{1}{p'}}$
précisement cette inégalité est utilisée dans le chapitre "4"(cas de deux fonctions)

2.2 Différences

Définition 2.1 (12) *Soient* $x, h \in R^n$ *et* f*une fonction définie sur* $\mathbb{R}^n$*.On appelle différence d'ordre* 1 *et de pas* h*, la fonction notée* $\Delta_h f$ *définie par :*

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{2.1}$$

La différence d'ordre $\sigma \in \mathbb{N}$ *est définie par :*

$$\begin{aligned} \Delta_h^\sigma f(x) &= \Delta_h \Delta_h^{\sigma-1} f(x) &(2.2)\\ &= \sum_{s=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{s} (-1)^{\sigma-s} f(x+sh). &(2.3) \end{aligned}$$

Remarques 2.1 ***1****)Si on désigne par* I *l'opérateur identité et par* E_h *l'opérateur de translation de l'espace* $L_p(R^n)$ *dans lui même défini par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, E_h f(x) = f(x+h), \tag{2.4}$$

on a

$$\Delta_h f(x) = (E_h) f(x) - f(x), \tag{2.5}$$

qu'on écrit sous forme d'opérateurs

$$\Delta_h = E_h - I. \tag{2.6}$$

On a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= ((I+\Delta_h)^1 f)(x) &(2.7)\\ f(x+2h) &= ((I+\Delta_h)^2 f)(x) &(2.8)\\ f(x+\sigma h) &= ((I+\Delta_h)^\sigma f)(x) &(2.9)\\ &= \sum_{s=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{s} \Delta_h^s f(x). &(2.10) \end{aligned}$$

preuve*.On raisonne par recurence (2.7)résulte de(2.5)et(2.6)*

$$\begin{aligned} f(x+2h) = f(x+h+h) &= ((I+\Delta_h)^1 f)(x+h)\\ &= ((I+\Delta_h)^1 (I+\Delta_h)^1 f)(x)\\ &= ((I+\Delta_h)^2 f)(x). \end{aligned}$$

On suppose que $f(x+(\sigma-1)h) = ((I+\Delta_h)^{\sigma-1}f)(x)$,*montrons que s'est vraie à l'ordre* σ.

$$\begin{aligned} f(x+\sigma h) = f(x+(\sigma-1)h+h) &= ((I+\Delta_h)^{\sigma-1}f)(x+h) \\ &= (I+\Delta_h)^1(I+\Delta_h)^{\sigma-1}f(x) \\ &= ((I+\Delta_h)^{\sigma}f)(x) \\ &= \sum_{s=0}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}\Delta_h^s f(x). \end{aligned}$$

3*)*

$$\forall f \in L_p(R^n), E_{sh}f = E_h^s f. \tag{2.11}$$

4*)Les deux opérateurs* $E_.$, $\Delta_.$ *commutent.*
5*)La norme* $\|.\|_{L_p(R^n)}$ *est invariante par rapport à la translation.*

$$\|E_h f\|_{L_p(R^n)} = \|f\|_{L_p(R^n)}. \tag{2.12}$$

En effet

$$\begin{aligned} \|E_h f\|_{L_p(R^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{L_p(R^n)}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\|\Delta_h f\|_{L_p(R^n)} \leq 2\|f\|_{L_p(R^n)}. \tag{2.13}$$

D'aprés la définition de la norme d'opérateurs on obtient

$$\|E_h\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))} = \sup_{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\neq 0} \frac{\|E_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}} = 1 \tag{2.14}$$

et pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$

$$\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(R^n)} \leq ... \leq 2^{\sigma}\|f\|_{L_p(R^n)}. \tag{2.15}$$

l'inégalité (2.13) exprime la continuité de l'opérateur de différences Δ_h,*de* $L_p(R^n)$ *dans lui même et de plus on a :*

$$\|\Delta_h\|_{L(L_p(R^n))} \leq 2 \tag{2.16}$$

Lemme 2.3 (5) *Soient* $h \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathbb{N}$.*Alors*

$$\Delta_h^\sigma = (\sum_{s=0}^{k-1} E_{s\frac{h}{k}})\Delta_{\frac{h}{k}} \tag{2.17}$$

Preuve.On a :

$$\Delta_h^\sigma = (E_h - I)^\sigma$$

L'identité polynômiale

$$(x^k - 1)^\sigma = (x^{k-1} + \therefore + 1)^\sigma (x-1)^\sigma$$

permet d'obtenir l'identité (2.17) en remplaçant la variable x par l'opérateur de translation $E_{\frac{h}{k}}$.

Lemme 2.4 [4] *Soient* $\sigma \in \mathbb{N}, h, \eta \in \mathbb{R}^n$ *et* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$
.*Alors pour prèsque tout* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta_h^\sigma f(x) = \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}} f(x + (\sigma - k)h) + (-1)^{\sigma+1} \Delta_{h - \frac{k}{\sigma}\eta} f(x + k\eta)\right] \tag{2.18}$$

idée de la preuve
Il suffit de remplacer respectivement les variables y, z par les opérateurs de translation $E_h, E_{\frac{\eta}{\sigma}}$ dans l'identité polynômiale suivante

$$(y-1)^\sigma = \sum_{k=1} \sigma(-1)^{\sigma-k} \binom{\sigma}{k} (z^k - 1)^\sigma y^{\sigma-k} - \sum_{k=1}^{\sigma} (-1)^k \binom{\sigma}{k} (y - z^k)^\sigma \tag{2.19}$$

la preuve.
L'identité (2.19) est équivalente à l'identité suivante

$$\sum_{k=0}^{\sigma} (-1)^{\sigma-k} \binom{\sigma}{k} (z^k - 1)^\sigma y^{\sigma-k} = \sum_{k=0}^{\sigma} (-1)^{\sigma-k} \binom{\sigma}{k} (z^k - y)^\sigma \tag{2.20}$$

Les deux membres de (2.20) sont égaux chacun à l'expression suivante

$$\sum_{k=0,m=0}^{\sigma} (-1)^{k+m} \binom{\sigma}{k} \binom{\sigma}{m} z^{km} y^{\sigma-k}, \tag{2.21}$$

on a : $z^{km} y^{\sigma-k} = ((z^m))^k y^{\sigma-k}$ et

$$\sum_{k=o}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} z^{km} y^{\sigma-k} = (z^m - y)^\sigma$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0,m=0}^{\sigma}(-1)^{k+m}\binom{\sigma}{k}\binom{\sigma}{m}z^{km}y^{\sigma-k} &= \sum_{m=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-m}\binom{\sigma}{m}(z^m-y)^{\sigma}\\ &= \sum_{k=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(z^k-y)^{\sigma}\end{aligned}$$

De même on montre que le premier membre de l'identité(2.20) est égale à l'expression (2.21) et ceci en utilisant la formule du binôme de Newton et le fait que $z^{km}y^{\sigma-k} = ((z^k))^m y^{\sigma-k}$.
Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(z^k-1)^{\sigma}y^{\sigma-k} &= \sum_{k=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(\sum_{m=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-m}\tbinom{\sigma}{m}z^{km})y^{\sigma-k}\\ &= \sum_{k=0,m=0}(-1)^{2\sigma-k-m}\binom{\sigma}{m}\binom{\sigma}{k}z^{km}y^{\sigma-k}\\ &= \sum_{k=0,m=0}^{\sigma}(-1)^{k+m}\binom{\sigma}{k}\binom{\sigma}{m}z^{km}y^{\sigma-k}.\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{k=0,m=0}^{\sigma}(-1)^{k+m}\binom{\sigma}{k}\binom{\sigma}{m}z^{km}y^{\sigma-k} &= \sum_{k=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(z^k-1)^{\sigma}y^{\sigma-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(z^k-y)^{\sigma}\end{aligned}$$

D'aprés l'identité (2.20) on a :

$$\begin{aligned}0+\sum_{k=1}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(z^k-1)^{\sigma}y^{\sigma-k} &= (-1)^{\sigma}(1-y)^{\sigma}+\sum_{k=1}^{\sigma}(-1)^{\sigma-k}\binom{\sigma}{k}(z^k-y)^{\sigma}\\ &= (y-1)^{\sigma}+\sum_{k=1}^{\sigma}(-1)^{k}\binom{\sigma}{k}(y-z^k)^{\sigma}\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'identité(2.19).
On remplace respectivement dans (2.21)les variables y, z par les opérateurs de translation E_h, $E_{\frac{\eta}{\sigma}}$
1) L'expréssion $(y-1)^{\sigma}$ est remplacée par

$$(E_h - I)^{\sigma} = \Delta_h^{\sigma}$$

2) L'expréssion $y^{\sigma-k}(z^k-1)^\sigma$ est remplacée par

$$\begin{aligned} E_h^{\sigma-k}(E_{\frac{\eta}{\sigma}}^k - I)^\sigma &= E_h^{\sigma-k}\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma \\ &= \Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma E_h^{\sigma-k} \end{aligned}$$

car les opérateurs de translation $E_.$ et de différence $\Delta_.$ commutent
3) L'expréssion $(y-z^k)^\sigma$ est remplacée par

$$\begin{aligned} (E_h - E_{\frac{k\eta}{\sigma}})^\sigma &= E_{\frac{k\eta}{\sigma}}(E_{h-\frac{k\eta}{\sigma}} - I))^\sigma \\ &= E_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma(E_{h-\frac{k\eta}{\sigma}} - I)^\sigma \\ &= E_{k\eta}\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma \\ &= \Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma E_{k\eta} \end{aligned}$$

Chacun des opérateurs ci dessus est appliqué à la fonction $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$,alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,on obtient l'identité (2.18)

$$\Delta_h^\sigma f(x) = \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+(\sigma-k)h) + (-1)^{\sigma+1}\Delta_{h-\frac{k}{\sigma}\eta}^\sigma f(x+k\eta)\right]$$

On obtient en particulier pour $\sigma = 1$, $h,\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta_h f(x) = \Delta_\eta f(x) + \Delta_{h-\eta}(x+\eta)$$

Corollaire 2.1 [5] *Soient $\sigma \in \mathbb{N}$, $h,\eta \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(R^n)$.Alors*

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[\left\|\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right] \tag{2.22}$$

idee de la preuve
On applique l'inégalité de Minkovsky à l'identité (2.18),en tenant compte de l'invariance de la norme $\|.\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ par rapport à la translation.
preuve
D'aprés (2.18),et par application de l'inégalité de Minkovsky on a :

$$|\Delta_h^\sigma f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[|\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+(\sigma-k)h)| + |\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+k\eta)|\right]$$

$$|\Delta_h^\sigma f(x)|^p \leq \left[\sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[|\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+(\sigma-k)h)| + |\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+k\eta)|\right]\right]^p,$$

d'où

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\sigma f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[|\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+(\sigma-k)h)| \ + |\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+k\eta)|\right]\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_h^\sigma f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k}$$

$$\left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+(\sigma-k)h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f(x+k\eta)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Donc

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} \left[\left\|\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right]$$

2.3 Différences relatives à un ouvert

Définition 2.2 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,$h, \in \mathbb{R}^n$,$\sigma \in \mathbb{N}$.*
On définit l'ensemble $\Omega_{\sigma|h|}$ par

$$\Omega_{\sigma|h|} = \{\, x \in \Omega \mid dis(x, \partial\Omega) > \sigma|h|\}$$

Définition 2.3 *La différence d'ordre σ et de pas h relativement à l'ensemble Ω notée par $\Delta^{\sigma}_{h,\Omega} f$ est définie pour $x \in \Omega$ par*

$$(\Delta^{\sigma}_{h,\Omega} f)(x) = \begin{cases} (\Delta^{\sigma}_{h} f)(x) & si\ x \in \Omega_{\sigma|h|}, \\ 0 & si\ x \notin \Omega_{\sigma|h|} \end{cases} \tag{2.23}$$

Proposition 2.1 *Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^n), \sigma \in \mathbb{N}$.Alors*

$$\|\Delta^{\sigma}_{h} f\|_{L_p(\Omega_{\sigma|h|})} \leq 2^{\sigma} \|f\|_{L_p(\Omega)} \tag{2.24}$$

**En particulier pour un intervalle (a, b),on a :*

$$\|\Delta^{\sigma}_{h} f\|_{L_p((a,b)_{\sigma|h|})} \leq 2^{\sigma} \|f\|_{L_p(a,b)} \tag{2.25}$$

preuve.On Raisonne par recurrence
Pour $\sigma = 0$ on a $\Omega_{|h|0} = \Omega$, $\Delta^0_h f = f$

$$\begin{aligned} \|\Delta^0_h f\|_{L_p(\Omega_{0|h|})} &= \|f\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq 2^0 \|f\|_{L_p(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} \|\Delta^1_h f(x)\|_{L_p(\Omega_{|h|})} &= \|f(x + h) - f(x)\|_{L_p(\Omega_{|h|})} \\ &\leq \|f(x + h)\|_{L_p(\Omega_{|h|})} + \|f(x)\|_{L_p(\Omega_{|h|})} \\ &\leq 2\|f(x)\|_{L_p(\Omega)} \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre σ.Montrons qu'elle est vraie à l'ordre $\sigma+1$

$$\begin{aligned} \|\Delta^{\sigma+1}_h f(x)\|_{L_p(\Omega_{(\sigma+1)|h|})} &= \|\Delta^{\sigma}_h f(x + h) - \Delta^{\sigma}_h f(x)\|_{L_p(\Omega_{(\sigma+1)|h|})} \\ &\leq \|\Delta^{\sigma}_h f(x + h)\|_{L_p(\Omega_{(\sigma+1)|h|})} + \|\Delta^{\sigma}_h f(x)\|_{L_p(\Omega_{(\sigma+1)|h|})} \\ &\leq \|\Delta^{\sigma}_h f(x + h)\|_{L_p(\Omega_{\sigma|h|})} + \|\Delta^{\sigma}_h f(x)\|_{L_p(\Omega_{\sigma|h|})} \\ &\leq 2\|\Delta^{\sigma}_h f(x)\|_{L_p(\Omega_{\sigma|h|})} \\ &\leq 2(2^{\sigma} \|f(x)\|_{L_p(\Omega)}) \\ &= 2^{(\sigma+1)} \|f(x)\|_{L_p(\Omega)} \end{aligned}$$

2.4 Module de continuité d'une fonction

Définition 2.4 [5], [7] *Soient f une fonction de $L_p(\mathbb{R}^n)$,$h \in \mathbb{R}^n$,$\sigma \in \mathbb{N}$.*
On appelle module de continuité de la fonction f d'ordre σ ,l'application notée $\omega_\sigma(.,f)_p$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\omega_\sigma(\delta,f)_p = \sup_{|h|\leq\delta} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.26}$$

Proposition 2.2 *Le module de continuité possède les propriétés suivantes :*
p1*) La fonction $\omega(\delta,f)_p$ est nulle en 0 et est croissante.*
p2*) Pour tout $\delta_1,\delta_2 \in \mathbb{R}^+$:*

$$\omega(\delta_1+\delta_2,f)_p \leq \omega(\delta_1,f)_p + \omega(\delta,f)_p$$

p3*) Si f est uniformément continue alors $\omega_\sigma(\delta,f)_p$ est continue en 0et même continue*
p4*) Pour tout λ,$\delta \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$:*

$$\omega(\lambda\delta,f)_p \leq (\lambda+1)\omega(\delta,f)_p$$

$$\omega_\sigma(\lambda\delta,f)_p \leq (\lambda+1)^\sigma\omega(\delta,f)_p$$

p5*) Pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$*

$$\omega_\sigma(\delta,f)_p \leq 2^\sigma\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.27}$$

preuve 1) Notons par
$A_\delta = \{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R})} : h \in \mathbb{R}, |h| \leq \delta\}$ donc

$$\begin{aligned}\omega(0,f)_p &= \sup_{|h|\leq 0}\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R})}\\ &= \sup A_0\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\delta_1 < \delta_2$ entraîne $A_{\delta_1} \subset A_{\delta_2}$ alors $\sup A_{\delta_1} < \sup A_{\delta_2}$

$$\omega(\delta_1,f)_p \leq \omega(\delta_2,f)_p$$

2) Soient $\delta_1,\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ on a $[0,\delta_1+\delta_2] = [0,\delta_1] + [0,\delta_2]$ donc

$$A_{\delta_1+\delta_2} \subset A_{\delta_1} + A_{\delta_2},$$

et par suite,on a

$$\sup A_{\delta_1+\delta_2} \leq \sup A_{\delta_1} + \sup A_{\delta_2}.$$

$$\omega(\delta_1+\delta_2, f)_p \leq \omega(\delta_1, f)_p + \omega(\delta_2, f)_p$$

. **3**) supposons f uniformément continue,alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon,$$

soit encore

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, h \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |h| < \alpha \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \epsilon,$$

et par suite

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, h \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |h| < \alpha \Rightarrow |\Delta_h f| \leq \epsilon$$

. Donc,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, h \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |h| < \alpha \Rightarrow \sup_{|h|\leq\alpha} |\Delta_h f| \leq \epsilon,$$

comme la fonction $\omega(., f)_p$ est croissante ,alors
$0 \leq t < \alpha$ entraîne $|\omega(t, f)_p - \omega(0, f)_p| = |\omega(t, f)_p| \leq \omega(\alpha, f)_p \leq \epsilon$
Ce qui traduit la continuité de $\omega(., f)_p$ en 0.
la continuité en 0 se prolonge en tout point $t_0 \in \mathbb{R}^+$
car pour $t_0 < t$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\omega(t, f)_p = \omega(t - t_0 + t_0, f)_p \leq \omega(t - t_0, f)_p + \omega(t_0, f)_p$$

$$\omega(t, f)_p - \omega(t_0, f)_p \leq \omega(t - t_0, f)_p$$

$$|\omega(t, f)_p - \omega(t_0, f)_p| \leq \omega(|t - t_0|, f)_p.$$

4) Soient $\delta, \lambda \in \mathbb{R}^+$ On a $\lambda = [\lambda] + \{\lambda\}, [\lambda]$ désigne la partie entière de λ et $0 < \{\lambda\} < 1$
on a $[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$
D'aprés les propriétés(p1),(p2)on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\omega(n\delta, f)_p &\leq n\omega(\delta, f)_p \\
\omega(\lambda\delta, f)_p &\leq \omega(([\lambda]+1)\delta, f)_p \\
&\leq \omega([\lambda]\delta, f)_p + \omega(\delta, f)_p \\
&\leq [\lambda]\omega(\delta, f)_p + \omega(\delta, f)_p \\
&= ([\lambda]+1)\omega(\delta, f)_p \\
&\leq (\lambda+1)\omega(\delta, f)_p
\end{aligned}$$

De même pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}\omega_\sigma(\lambda\delta, f) &\leq (\lambda+1)\omega_\sigma(\delta, f)_p \\ &\leq (\lambda+1)^\sigma \omega_\sigma(\delta, f)_p\end{aligned}$$

5)Soit $\sigma \in \mathbb{N}, \delta > 0$

$$\begin{aligned}\omega_\sigma(\delta, f)_p &= \sup_{|h|\leq\delta} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R})} \\ &\leq 2^\sigma \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

2.5 Module de continuité relatives à un ouvert

Définition 2.5 (15) *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,$\sigma \in \mathbb{N}$.*
Le module de continuité d'ordre σ relativement à l'ensemble Ω noté $\omega_\sigma(\delta, f, \Omega)_p$ est défini par

$$\begin{aligned}\omega_\sigma(\delta, f)_p &= \omega_\sigma(\delta, f, \Omega)_p \\ &= \sup_{|h|\leq\delta} \|\Delta_{h,\Omega}^\sigma f\|_{L_p(\Omega)} \\ &= \sup_{|h|\leq\delta} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\Omega_{\sigma|h|})}\end{aligned}$$

Chapitre 3

EQUIVALENCES DES NORMES EN TERMES DE DIFFERENCES DANS $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$

3.1 Définition

Définition 3.1 [5] *Soient* $l > 0$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$,$1 \leq \theta \leq +\infty$.
On dit que la fonction f *appartient à l'espace de Nikolsky-Besov* $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *si*
1) f *est mesurable sur* $\mathbb{R}^n$.
2) $\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$, *où*

$$\|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \right)^\theta \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad si\ 1 \leq \theta \leq +\infty. \tag{3.1}$$

$$\|f\|_{b^l_{p,+\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \tag{3.2}$$

Cette définition est indépendante de $\sigma > l$,autrement dit les semi normes (3.1) et (3.2) sont équivalentes pour les différentes valeurs de σ,comme le montre le lemme suivant.

3.2 Normes équivalentes

Lemme 3.1 [5] *Soient* $l > 0$,$1 \leq p, \theta \leq +\infty$. *Alors les normes* $\|.\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ *corréspondantes aux différentes valeurs de* $\sigma \in \mathbb{N}$ *avec* $\sigma > l$ *sont équivalentes.*

Idée de la preuve

On désigne temporairement les semi-normes (3.1)et (3.2) coréspondantes à σ par $\|.\|^{(\sigma)}$. Il suffit donc de prouver que $\|.\|^{(\sigma)}$ et $\|.\|^{(\sigma+1)}$ sont équivalentes dans l'espace $L_p(R^n)$ où $\sigma > l$.

D'aprés l'inégalité (2.13) $\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(R^n)} \leq 2\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(R^n)}$ ce qui entraîne $\|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2\|f\|^{(\sigma)}$.

Pour demontrer l'inégalité inverse $\|f\|^{(\sigma)} \leq c\|f\|^{(\sigma+1)}$, où c est une constante positive indépendante de la fonction f,on procéde en deux étapes.

Première étape : $\sigma = 1$.

On applique l'identité suivante pour les différences

$$\Delta_h f = 2^{-1}\Delta_{2h} f - 2^{-1}\Delta_h^2 f \tag{3.3}$$

L'identité (3.3) découle de l'identité polynômiale suivante.

$$x - 1 = 2^{-1}(x^2 - 1) - 2^{-1}(x-1)^2$$

où il suffit de remplaçer la variable x par l'opérateur de translation E_h.

Deuxième étape : $\sigma \geq 2$.

On complète la preuve en déduisantt une identité similaire liant les différences d'ordre supérieur $\Delta_h^{\sigma} f, \Delta_{2h}^{\sigma} f$ et$\Delta_h^{\sigma+1} f$

Preuve

étape 1. $\sigma = 1$.

On suppose que $0 < l < 1$ et $\|f\|^{(2)} < +\infty$

En vertu de (3.3) et par application de l'inégalité de Minkowski on obtient :

$$\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)=} \leq 2^{-1}\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + 2^{-1}\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.4}$$

cas 1 : $\theta = +\infty$.

On pose

$$\|f\|^{(2)} = \sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0} \frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l},$$

et

$$\varphi(h) = |h|^{-l}\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$; $\varphi(h) < +\infty$.

En vertu de l'inégalité (3.4) on a

$$\varphi(h) \leq \frac{\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(R^n)}}{2|h|^l} + \frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(R^n)}}{2|h|^l} \tag{3.5}$$

comme $\varphi(2h) = \dfrac{\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(R^n)}}{2^l |h|^l}$
Il suit que

$$\varphi(h) \leq 2^{l-1}\varphi(2h) + 2^{-1}\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(R^n)}}{|h|^l},$$

d'où

$$\varphi(h) \leq 2^{l-1}\varphi(2h) + 2^{-1}\sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0}\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(R^n)}}{|h|^l},$$

alors on obtient

$$\varphi(h) \leq 2^{l-1}\varphi(2h) + 2^{-1}\|f\|^{(2)}, \tag{3.6}$$

et par suite

$$\varphi(2h) \leq 2^{l-1}\varphi(2^2h) + 2^{-1}\|f\|^{(2)} \leq 2^{l-1}(2^{l-1}\varphi(2^3h) + 2^{-1}\|f\|^{(2)}) + 2^{-1}\|f\|^{(2)},$$

donc

$$\varphi(h) \leq 2^{3(l-1)}\varphi(2^3h) + 2^{-1}\|f\|^{(2)}(1 + 2^{l-1} + 2^{2(l-1)}),$$

et par consequent,pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\varphi(h) \leq 2^{k(l-1)}\varphi(2^kh) + 2^{-1}\|f\|^{(2)}(1 + 2^{l-1} + ... + 2^{(k-1)(l-1)}).$$

La série $1 + 2^{l-1} + ... + 2^{(k-1)(l-1)}...$ est convergente car $l < 1$ et a pour somme $2(2-2^l)^{-1}$,il vient donc

$$\varphi(h) \leq 2^{k(l-1)}\varphi(2^kh) + (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)}, \tag{3.7}$$

choisissons k tel que :$2^k|h| \geq 1$, alors

$$\varphi(2^kh) = (2^k|h|)^{-l}\|\Delta_{2^kh} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Delta_{2^kh} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

d'où

$$\varphi(h) \leq 2^{k(l-1)+1}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)}. \tag{3.8}$$

Par passage à la limite quand $k \to +\infty$ dans (2.8) on obtient

$$\varphi(h) \leq (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)},$$

soit encore

$$\sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0}\varphi(h) \leq (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)}$$

d'où

$$\|f\|^{(1)} \leq (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)}.$$

Finalement on a :

$$(2-2^l)\|f\|^{(1)} \leq \|f\|^{(2)} \leq 2\|f\|^{(1)}. \tag{3.9}$$

cas 2 : $1 \leq \theta < +\infty$.

On pose pour tout $\epsilon > 0$

$$\Psi(\epsilon) = \left[\int_{|h|\geq\epsilon} (\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l})^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

On a $\Psi(\epsilon) < +\infty$. En effet

$$\Psi(\epsilon) \leq 2\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \int_{|h|\geq\epsilon} |h|^{-l\theta-n} dh < \infty$$

car $l\theta + n > n$.

De l'inégalité (3.4) il suit que

$$\left(\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \leq \left(\frac{\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{2|h|^l} + \frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{2|h|^l}\right)^\theta$$

on intégre les deux membres dans $(\mathbb{R}^n, \frac{d\mathbb{h}}{|\mathbb{h}|^n})$ et on élève à la puissance $\frac{1}{\theta}$.

Par application de l'inégalité de Minkowsky on obtient

$$\begin{aligned}\left[\int_{|h|\geq\epsilon} \left(\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}} \leq \frac{1}{2}&\left[\int_{|h|\geq\epsilon} \left(\frac{\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}} \\ &+ \frac{1}{2}\left[\int_{|h|\geq\epsilon} \left(\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Donc

$\Psi(\epsilon) \leq I_1 + I_2$ où

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\int_{|h|\geq\epsilon} \left(\frac{\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[\int_{|h|\geq\epsilon} \left(\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

On a

$$\begin{aligned}I_2 &\leq \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}} \\ &= 2^{-1}\|f\|^{(2)}\end{aligned}$$

Dans l'intégrale I_1 on fait le changement de variables $t = 2h$,on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2}\Big[\int_{|t|\geq 2\epsilon}\Big(\frac{\|\Delta_t f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|t|^l}2^l\Big)^\theta \frac{2^{-n}}{2^{-n}}\frac{dt}{|t|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\int_{|t|\geq 2\epsilon}\Big(\frac{\|\Delta_t f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|t|^l}2^l\Big)^\theta \frac{dt}{|t|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}} \\
&= 2^{l-1}\Psi(2\epsilon),
\end{aligned}$$

et par conséquent on a :

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{l-1}\Psi(2\epsilon) + 2^{(-1)}\|f\|^{(2)}. \tag{3.11}$$

Ainsi on a obtenu une inégalité similaire à l'inégalité (3.6).
En suivant le même procédé comme dans le premier cas on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{k(l-1)}\Psi(2^k\epsilon) + (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)} \tag{3.12}$$

on fait tendre $k \to +\infty$ dans(3.12) on obtient

$$\Psi(\epsilon) \leq (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)},$$

comme ϵ est arbitraire et

$$\|f\|^{(1)} = \Bigg[\int_{\mathbb{R}^n}\Bigg(\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Bigg)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\Bigg]^{\frac{1}{\theta}},$$

alors on a

$$\|f\|^{(1)} \leq (2-2^l)^{-1}\|f\|^{(2)},$$

soit encore

$$(2-2^l)\|f\|^{(1)} \leq \|f\|^{(2)} \leq 2\|f\|^{(1)}.$$

On conclu que pour tout $0 < l < \sigma = 1$ Les semi normes $\|f\|^{(1)}, \|f\|^{(2)}$ sont équivalentes.
étape 2. $\sigma \geq 2$.
Considérons l'identité polynômiale

$$\begin{aligned}
(x-1)^\sigma &= 2^{-\sigma}(x^2-1)^\sigma + (x-1)^\sigma - 2^{-\sigma}(x^2-1)^\sigma \\
&= 2^{-\sigma}(x^2-1)^\sigma + (x-1)^\sigma - 2^{-\sigma}(x-1)^\sigma(x+1)^\sigma \\
&= 2^{-\sigma}(x^2-1)^\sigma + 2^\sigma 2^{-\sigma}(x-1)^{\sigma+1}(x-1)^{-1} - 2^{-\sigma}(x-1)^{\sigma+1}(x-1)^{-1}(x+1)^\sigma \\
&= 2^{-\sigma}(x^2-1)^\sigma - 2^{-\sigma}(x-1)^{\sigma+1}(x-1)^{-1}((x+1)^\sigma - 2^\sigma).
\end{aligned}$$

Posons

$$P_{\sigma-1}(x) = -2^{-\sigma}(x-1)^{-1}((x+1)^{\sigma} - 2^{\sigma}),$$

alors

$$(x-1)^{\sigma} = 2^{-\sigma}(x^2-1)^{\sigma} + P_{\sigma-1}(x)(x-1)^{\sigma+1} \tag{3.13}$$

En écrivant : $(x+1) = (x-1)+2$,on a
$(x+1)^{\sigma} - 2^{\sigma} = (((x-1)+2)^{\sigma} - 2^{\sigma}) = \sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}(x-1)^s 2^{\sigma-s}$,
donc

$$P_{\sigma-1}(x) = -2^{-\sigma}\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}(x-1)^{s-1}2^{\sigma-s} = -\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}(x-1)^{s-1}2^{-s}. \tag{3.14}$$

On remplace x par l'opérateur de translation E_h dans (3.13),on obtient pour tout $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$,

$$\Delta_h^{\sigma} f = 2^{-\sigma}\Delta_{2h}^{\sigma} f + P_{\sigma-1}(E_h)\Delta_h^{\sigma+1} f, \tag{3.15}$$

où

$$P_{\sigma-1}(E_h) = -\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}2^{-s}(E_h - I)^{s-1}.$$

Par application de l'inégalité de Minkowsky à (2.15),on obtient

$$\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\sigma}\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|P_{\sigma-1}(E_h)\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))}\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

comme

$$\|P_{\sigma-1}(E_h)\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))} \leq 2^{-\sigma}\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}2^{\sigma-s}\|E_h - I\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))}^{s-1} \leq 2^{-1}(2^{\sigma}-1), \tag{3.16}$$

finalement on a l'estimation

$$\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\sigma}\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + 2^{-1}(2^{\sigma}-1)\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.17}$$

Cette dérnière inégalité généralise l'inégalité(3.4).
cas 1. $\theta = +\infty$.
Posons

$$\varphi(h) = |h|^{-l}\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \text{ et } c_1 = 2^{-1}(2^{\sigma}-1)$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $\varphi(h) < +\infty$.
En vertu de (3.17) on a :

$$\varphi(h) \leq 2^{-\sigma}\frac{\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} + c_1\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}.$$

On a d'aprés la définition de φ

$$\varphi(2h) = \frac{\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{2^l |h|^l},$$

d'où

$$\varphi(h) \leq 2^{l-\sigma}\varphi(2h) + c_1 \frac{\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l},$$

soit encore

$$\varphi(h) \leq 2^{l-\sigma}\varphi(2h) + c_1\|f\|^{(\sigma+1)}, \tag{3.18}$$

et par conséquent pour tout $k \in \mathbb{N}$,on a

$$\varphi(h) \leq 2^{k(l-\sigma)}\varphi(2^k h) + c_1\|f\|^{(\sigma+1)}(1 + 2^{l-\sigma} + ... + 2^{(k-1)(l-\sigma)}),$$

comme $l < \sigma$ la série $1 + 2^{l-\sigma} + ... + 2^{(k-1)(l-\sigma)}...$ est convergente et a pour somme $2^{\sigma}(2^{\sigma} - 2^l)^{-1}$.

Donc

$$\varphi(h) \leq 2^{k(l-\sigma)})\varphi(2^k h) + c_1 2^{\sigma}(2^{\sigma} - 2^l)^{-1}\|f\|^{(\sigma+1)},$$

comme dans la première étape $\sigma = 1, \theta = +\infty$ les mêmes arguments nous conduisent à l'estimation

$$\|f\|^{\sigma} \leq c_1 2^{\sigma}(2^{\sigma} - 2^l)^{-1}\|f\|^{(\sigma+1)},$$

et par consequent

$$c_1^{-1}2^{-\sigma}(2^{\sigma} - 2^l)\|f\|^{(\sigma)} \leq \|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2\|f\|^{(\sigma)}. \tag{3.19}$$

cas 2. $1 \leq \theta < +\infty$.

On pose dans ce cas pour tout $\epsilon > 0$

$$\Psi(\epsilon) = \left[\int_{|h|\geq\epsilon} \left(\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^{\theta} \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3.20}$$

comme $\|\Delta_h^{\sigma}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\sigma}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$ et $l\theta + n > n$,

on a :

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{\sigma}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big(\int_{|h|\geq\epsilon} |h|^{-l\theta-n} dh\Big)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty. \tag{3.21}$$

En vertu de (3.17)on obtient

$$\left(\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^{\theta} \leq \Big(2^{-\sigma}\frac{\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} + c_1\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^{\theta}.$$

On intégre dans $(\mathbb{R}^n, \dfrac{dh}{|h|^n})$,et on élève à la puissance $\dfrac{1}{\theta}$,
on obtient

$$\Big[\int_{|h|\geq\epsilon}(\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l})^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}} \leq \Big[\int_{|h|\geq\epsilon}\big(2^{-\sigma}\frac{\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}+c_1\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\big)^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

Par application de l'inégalité de Minkowsky, on obtient

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{-\sigma}\Big[\int_{|h|\geq\epsilon}\Big(\frac{\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}}+c_1\Big[\int_{|h|\geq\epsilon}\Big(\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}}. \quad (3.22)$$

Notons I_1 et I_2 réspectivement la première et la deuxième intégrale du second membre de l'inégalité (3.22).
On a

$$I_2 \leq c_1\|f\|^{\sigma+1},$$

et à l'aide du changement de variables $t = 2h$,on obtient

$$I_1 = 2^{l-\sigma}\Psi(2\epsilon).$$

Il suit que

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{l-\sigma}\Psi(2\epsilon)+c_1\|f\|^{(\sigma+1)}, \quad (3.23)$$

et par conséquent pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{k(l-\sigma)}\Psi(2^k\epsilon)+c_1\|f\|^{(\sigma+1)}2^{\sigma}(2^{\sigma}-2^l)^{-1}.$$

Posons $c_2 = c_1 2^{\sigma}(2^{\sigma}-2^l)^{-1}$ on a pour tout $\epsilon > 0$, $\Psi(2^k\epsilon) < +\infty$.
Faisons tendre $k \to +\infty$ dans l'inégalité

$$\Psi(\epsilon) \leq 2^{k(l-\sigma)}\Psi(2^k\epsilon)+c_2\|f\|^{(\sigma+1)},$$

alors on obtient pour tout $\epsilon > 0$, $\Psi(\epsilon) \leq c_2\|f\|^{(\sigma+1)}$,
comme

$$\|f\|^{(\sigma)} = \Big[\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\Big)^{\theta}\frac{dh}{|h|^n}\Big]^{\frac{1}{\theta}},$$

et ϵ étant arbitraire,alors on a

$$\|f\|^{(\sigma)} \leq c_2\|f\|^{(\sigma+1)},$$

soit encore

$$c_2^{-1}\|f\|^{(\sigma+1)} \leq \|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2\|f\|^{(\sigma)}. \quad (3.24)$$

Ainsi l'équivalence des semi normes $\|.\|^{(\sigma)}$, $\|.\|^{(\sigma+1)}$ est établie pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma > l$.

Chapitre 4

NORMES EQUIVALENTES EN TERMES DE MODULE DE CONTINUITE DANS $B^l_{p,\theta}(R^n)$

4.1 Définition

Définition 4.1 (5) *Soient* $l > 0$,$\sigma \in \mathbb{N}$,$\sigma > l$,$1 \leq p, \theta \leq +\infty$.
On dit que la fonction f appartient à l'espace de Nikolsky-Besov $B^l_{p,\theta}(R^n)$ si
***1**) f est mesurable sur* $\mathbb{R}^n$.
***2**)* $\|f\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|^{(1)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$.
où

$$\|f\|^{(1)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad si\ 1 \leq \theta \leq +\infty. \tag{4.1}$$

$$\|f\|^{(1)}_{b^l_{p,+\infty}(\mathbb{R}^n)} = \frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l} \tag{4.2}$$

On se propose dans cette section d'établir l'équivalence des normes $\|.\|_{B^l_{p,\theta}(R^n)}$ et $\|.\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(R^n)}$.
Pour cela on a besoin de plusieurs arguments auxilliairs.

Lemme 4.1 *(Inegalite de Hardy)[5]*
Soient $1 \leq p \leq +\infty, \alpha < \frac{1}{p'}$.*Alors pour chaque fonction f mesurable sur* $(0,+\infty)$.

$$\left\|t^\alpha \frac{1}{t}\int_0^t |f(x)|dx\right\|_{L_p(0,+\infty)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,+\infty)} \tag{4.3}$$

Idée de la preuve
On fait le changement de variables $x = yt$,on applique l'inégalité de Minkovsky et puis de nouveau un changement de variables $t = \frac{x}{y}$.
Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
\left\| t^{\alpha}\frac{1}{t}\int_0^t |f(x)|dx \right\|_{L_p(0,+\infty)} &= \left\| \int_0^1 t^{\alpha}|f(yt)|dy \right\|_{L_p(0,+\infty)} \\
&\le \int_0^1 \|t^{\alpha}f(yt)\|_{L_{p,t}(0,+\infty)} \\
&= \int_0^1 y^{-\alpha+\frac{1}{p}}\|x^{\alpha}f(x)\|_{L_p(0,+\infty)} \\
&= \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1}\|x^{\alpha}f(x)\|_{L_p(0,+\infty)}.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.1 [5] *Soient* $1 \le p \le +\infty, \alpha < n - \frac{1}{p}$.*Alors pour chaque fonction* f *mesurable sur* $\mathbb{R}^n$.

$$\left\| t^{\alpha}\frac{1}{v_n t^n}\int_{|x|\le t} |f(x)|dx \right\|_{L_p(0,+\infty)} \le c_3 \left\| |x|^{\alpha-\frac{n-1}{p}} f(x) \right\|_{L_p(R^n)}. \tag{4.4}$$

Idée de la preuve
Si $n = 1$,on applique l'inégalité (4.3) et sa variante laquelle est obtenue en remplaçant dans le membre de gauche de (4.3) l'intervalle $(0, t)$ par $(-t, 0)$ et la norme $\|.\|_{L_p(0,+\infty)}$ par $\|.\|_{L_p(-\infty,0)}$.Si $n > 1$,on utilise les coordonnées sphériques,on applique l'inégalité de Minkovsky,l'inégalité de Hardy (4.3) et l'inégalité de Holder.
Preuve. Soit $n > 1$.Alors

$$\left\| t^{\alpha}\frac{1}{v_n t^n}\int_{|x|\le t} |f(x)|dx \right\|_{L_p(0,+\infty)} = \left\| t^{\alpha}\frac{1}{v_n t^n}\int_{S^{n-1}} \left(\int_0^t \varrho^{n-1}|f(\varrho\xi)|d\varrho\right) d\xi \right\|_{L_p(0,+\infty)}$$

$$\left\| t^{\alpha}\frac{1}{v_n t^n}\int_{S^{n-1}} \left(\int_0^t \varrho^{n-1}|f(\varrho\xi)|d\varrho\right) d\xi \right\|_{L_p(0,+\infty)} \le v_n^{-1}\int_{S^{n-1}} \left\| t^{\alpha-n}\int_0^t \varrho^{n-1}|f(\varrho\xi)|d\varrho \right\|_{L_p(0,+\infty)} d\xi$$

$$v_n^{-1}\int_{S^{n-1}}\left\|t^{\alpha-n}\int_0^t \varrho^{n-1}|f(\varrho\xi)|d\varrho\right\|_{L_p(0,+\infty)} d\xi$$
$$= v_n^{-1}\int_{S^{n-1}}\left\|t^{\alpha-n+1}\frac{1}{t}\int_0^t \varrho^{n-1}|f(\varrho\xi)|d\varrho\right\|_{L_p(0,+\infty)} d\xi,$$

on applique l'inégalité (4.3) où α est remplacée par $\alpha-n+1$,on obtient

$$v_n^{-1}\int_{S^{n-1}}\left\|t^{\alpha-n+1}\frac{1}{t}\int_0^t \varrho^{n-1}|f(\varrho\xi)|d\varrho\right\|_{L_p(0,+\infty)} d\xi \le$$
$$\left(v_n\left(1-\frac{1}{p}-\alpha+n-1\right)\right)^{-1}\int_{S^{n-1}}\|\varrho^{\alpha}|f(\varrho\xi)d\varrho\|_{L_p(0,+\infty)}d\xi$$

on a

$$\left(v_n\left(1-\frac{1}{p}-\alpha+n-1\right)\right)^{-1}\int_{S^{n-1}}\|\varrho^{\alpha}|f(\varrho\xi)d\varrho\|_{L_p(0,+\infty)}d\xi$$
$$=\left(v_n\left(n-\frac{1}{p}-\alpha\right)\right)^{-1}\int_{S^{n-1}}\|\varrho^{\alpha}|f(\varrho\xi)d\varrho\|_{L_p(0,+\infty)}d\xi$$

d'où

$$\left(v_n\left(n-\frac{1}{p}-\alpha\right)\right)^{-1}\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty}\varrho^{\alpha p}|f(\varrho\xi)|^p d\varrho\right)^{\frac{1}{p}}d\xi$$
$$=\left(v_n\left(n-\frac{1}{p}-\alpha\right)\right)^{-1}\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty}(\varrho^{\alpha-\frac{n-1}{p}})^p|f(\varrho\xi)|^p\varrho^{n-1}d\varrho\right)^{\frac{1}{p}}d\xi.$$

par application de l'inégalité de Holder,on obtient

$$\left(v_n\left(n-\frac{1}{p}-\alpha\right)\right)^{-1}\sigma^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty}\varrho^{\alpha p}|f(\varrho\xi)|^p d\varrho\right)d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(v_n\left(n-\frac{1}{p}-\alpha\right)\right)^{-1}\sigma^{\frac{1}{p'}}\left\||x|^{\alpha-\frac{n-1}{p}}f(x)\right\|_{L_p(R^n)}.$$

ainsi l'inégalité est démontrée.

Lemme 4.2 *Soient $\sigma\in\mathbb{N}, 1\le p\le+\infty$.Alors pour toutes les fonctions f mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout $h\in\mathbb{R}^n$.*

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\le\frac{c_4}{v_n|h|^n}\int_{|\eta|\le|h|}\|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}d\eta. \tag{4.5}$$

c_4 est une constante positive indépendante de la fonction f.

idee de la preuve
On intégre les deux membres de l'inégalité (2.23) avec $\eta \in B(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2})$.
preuve
Soit $\eta \in B(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2})$ alors $\frac{k\eta}{\sigma}, h - \frac{k\eta}{\sigma} \in B(0, |h|)$ pour tout$k = 1, \ldots, \sigma$ en vertu de l'inégalité (2.23), on obtient

$$\int_{B(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2})} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta \leq \sum_{k=1}^{\sigma} \binom{\sigma}{k}$$
$$\left(\int_{B(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2})} \|\Delta_{\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta + \int_{B(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2})} \|\Delta_{h-\frac{k\eta}{\sigma}}^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta \right), \quad (4.6)$$

on a

$$\int_{B(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2})} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta = mes\left(B\left(\frac{h}{2}, \frac{|h|}{2}\right)\right) \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$
$$= v_n \left(\frac{|h|}{2}\right)^n \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

v_n : désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Dans le deuxieme membre de l'inégalité (4.6),on fait respectivement le changement de variables $\xi = \frac{k\eta}{\sigma}, \xi = h - \frac{k\eta}{\sigma}$,
alors on obtient

$$\sum_{k=1} \sigma \binom{\sigma}{k} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^n \left[\int_{B(0,|h|)} \|\Delta_\xi^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\xi + \int_{B(0,|h|)} \|\Delta_\xi^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\xi \right]$$
$$= 2 \sum_{k=1} \sigma \binom{\sigma}{k} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^n \int_{B(0,|h|)} \|\Delta_\xi^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\xi.$$

Donc

$$v_n \frac{|h|^n}{2^n} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \sum_{k=1} \sigma \binom{\sigma}{k} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^n \int_{B(0,|h|)} \|\Delta_\xi^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\xi$$
$$= 2(2^\sigma - 1)\sigma^n \int_{|\xi| \leq |h|} \|\Delta_\xi^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\xi,$$

soit encore

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{2(2\sigma)^n (2^\sigma - 1)}{v_n |h|^n} \int_{|\xi| \leq |h|} \|\Delta_\xi^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\xi$$

Si on pose $c_4 = 2(2\sigma)^n(2^\sigma - 1)$ on obtient :

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c_4}{v_n |h|^n} \int_{|\eta| \leq |h|} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta.$$

Corollaire 4.2 (5) *Soient* $\sigma \in \mathbb{N}, 1 \le p \le +\infty, f \in L_p(\mathbb{R}^n)$*.Alors*

$$\omega_\sigma(t,f)_p \le \frac{c_4}{v_n}\int_{|\eta|\le t} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \frac{d\eta}{|\eta|^n}. \tag{4.7}$$

Idee de la preuve

On applique l'inégalité (4.5).

preuve

On sait que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{c_4}{v_n}\frac{1}{|h|^n}\int_{|\eta|\le |h|} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta,$$

alors

$$\begin{aligned}\omega_\sigma(t,f)_p &\le \frac{c_4}{v_n}\sup_{|h|\le t}\frac{1}{|h|^n}\int_{|\eta|\le |h|} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta \\ &= \frac{c_4}{v_n}\sup_{|h|\le t}\int_{|\eta|\le |h|} \frac{1}{|h|^n}\|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\eta,\end{aligned}$$

et par suite ,on obtient

$$\omega_\sigma(t,f)_p \le \frac{c_4}{v_n}\int_{|\eta|\le t} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \frac{d\eta}{|\eta|^n}.$$

4.2 Normes équivalentes

Lemme 4.3 [5] *soient* $l > 0, \sigma \in \mathbb{N}, 1 \leq p, \theta \leq +\infty$.*Alors les normes* $\|.\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ *et* $\|.\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ *sont équivalentes.*

idee de la preuve

L'inégalité $\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq c_5 \|f\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ (*) découle à la suite d'un changement de variables en coordonnées sphériques.

L'inégalité inverse $\|f\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq c_6 \|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ (**) est obtenue par application de l'inégalité (4.4) et l'inégalité (4.7).

preuve

On démontre (*), **cas 1.** $\theta = +\infty$. on désigne temporairement les semi normes (4.1),(4.2) coréspondantes à σ par $\|.\|^{(1),(\sigma)}$. comme $\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \omega_\sigma(|h|, f)_p$,

alors

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(\sigma)}_{b^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{h\neq 0, h\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \\
&\leq |h|^{-l}\omega_\sigma(|h|, f)_p \\
&= \|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

on montre l'inégalité inverse (**),

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(1),(\sigma)}_{b^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &= t^{-l}\omega_\sigma(t, f)_p \\
&= \frac{\sup_{|h|\leq t} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{t^l} \\
&\leq \sup_{h\neq 0, h\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \\
&= \|f\|^{(\sigma)}_{b^l_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

cas 2. $1 \leq \theta < +\infty$,alors

$$\|f\|^{(\sigma)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{R^n} \left(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \right)^\theta \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4.8}$$

On fait le changement de variables en coordonnées sphériques $h = t\xi$, $t > 0$, $\xi \in S^{n-1}$, où S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$.

Alors

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(\sigma)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}} \frac{t^{n-1}\|\Delta_h^\sigma f\|^\theta_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{(t^l)^\theta}\frac{dt}{t^n}d\xi\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&= \left(\int_0^{+\infty}\int_{S^{n-1}} \left(\frac{\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}d\xi\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&\leq \int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} d\xi\\
&\leq \int_{S^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} d\xi,
\end{aligned}$$

comme la fonction $t \to \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{1}{t}$ est localement intégrable dans $(0,+\infty)$, alors d'aprés le théoreme de Fubuni on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{b^lp,\theta(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{S^{n-1}} d\xi \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&= mes(S^{n-1})\|f\|^{(1)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

avec $mes(S^{n-1}) = nv_n$,$v_n = \pi^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)^{-1}$,où Γ est la fonction d'Euler.
A présent on va prouver l'inégalité inverse.D'aprés l'inégalité(4.7).

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(1)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^l}\frac{c_4}{v_n}\int_{|\eta|\leq t} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}|\eta|^{-n}d\eta\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}}\\
&= c_4 \left\| \frac{t^{\frac{-1}{\theta}}}{t^l}\frac{1}{v_n}\int_{|\eta|\leq t} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}|\eta|^{-n}d\eta\right\|_{L_\theta(0,+\infty)}\\
&= c_4 \left\| t^{n+\frac{-1}{\theta}-l}\frac{1}{v_n t^n}\int_{|\eta|\leq t} \|\Delta_\eta^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}|\eta|^{-n}d\eta\right\|_{L_\theta(0,+\infty)}
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité (4.4) avec $\alpha = n - \dfrac{1}{\theta} - l$, alors

$$\begin{aligned}
\|f\|^{(1)}_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} &\leq c_7 \left\| |\eta|^{n+\frac{-1}{\theta}-l-\frac{n-1}{\theta}} |\eta|^{-n} \|\Delta^\sigma_\eta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L_\theta(\mathbb{R}^n)} \\
&= c_7 \left\| |\eta|^{-l-\frac{n}{\theta}} \|\Delta^\sigma_\eta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\|_{L_\theta(\mathbb{R}^n)} \\
&= c_7 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta^\sigma_\eta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|\eta|^l} \right)^\theta \frac{d\eta}{|\eta|^n} \right)^{\frac{1}{\theta}} \\
&= c_7 \|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

où la constante $c_7 = c_4 \left(v_n \left(n - \dfrac{1}{\theta} - \alpha \right) \right)^{-1} = c_4 (v_n l)^{-1}$

Lemme 4.4 *Soient $l > 0$, $1 \leq p,\theta \leq +\infty$.*
Alors les normes $\|.\|^{(1)}_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ corréspondantes aux différentes valeurs de $\sigma \in \mathbb{N}$ avec $\sigma > l$ sont équivalentes.

Preuve.
Les semi-normes $\|.\|^{(\sigma)}, \|.\|^{(\sigma+1)}$ correspondantes aux différentes valeurs de $\sigma \in \mathbb{N}$ sont équivalentes(voir le lemme(3.1) chapitre"3") et comme les semi-normes $\|.\|^{(1)(\sigma)}$ et $\|.\|^{(\sigma)}$ sont aussi équivalentes ,alors ceci entraîne l'équivalence des semi-normes $\|.\|^{(1),(\sigma)}, \|.\|^{(1)(\sigma+1)}$ pour les différents $\sigma > l > 0$.

Chapitre 5

EQUIVALENCE DES QUASI-NORMES EN TERME DE DIFFERENCE ET MODULE DE CONTINUITE

5.1 Définition

Définition 5.1 [7] *Soient* $l > 0$, $\sigma \in \mathbb{N}, 0 < p \leq +\infty, 0 < \theta \leq +\infty$.
On dit que la fonction f *appartient à l'espace de Nikolsky-Besov* $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *si*
1*)* f *est mesurable sur* $\mathbb{R}^n$.
2*)*$\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} < +\infty,$, *où*

$$\|f\|_{b^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} \right)^\theta \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad si\ 0 < \theta \leq +\infty. \tag{5.1}$$

$$\|f\|_{b^l_{p,+\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}, \tag{5.2}$$

et $\Delta^\sigma_h f$ *est la différence d'ordre* σ *et de pas* h*.De plus* $f \in \widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ *si* f *est mesurable sur* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\|f\|_{\widetilde{B}^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_\sigma(t,f)_p}{t^l} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty, \tag{5.3}$$

où $\omega_\sigma(t,f)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ *est le* L_p *module de continuité de* f *d'ordre* σ.

5.2 Quasi-normes équivalentes pour différent $\sigma > l$

Lemme 5.1 [5] *Soient $l > 0$,$0 < p < 1, 0 < \theta \leq +\infty$.Alors les quasi-normes normes $\|.\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)}$ corréspondantes aux différentes valeurs de $\sigma \in \mathbb{N}$avec $\sigma > l$ sont équivalentes.*

Idée de la preuve
On désigne temporairement les semi-normes (5.1)et (5.2) coréspondantes à σ par $\|.\|^{(\sigma)}$. Il suffit donc de prouver que $\|.\|^{(\sigma)}$ et $\|.\|^{(\sigma+1)}$ sont équivalentes dans l'espace $L_p(R^n)$ où $\sigma > l$.
On va utiliser l'analogue de l'inégalité de Minkovsky

$$\|f + g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}),$$

on obtient

$$\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(R^n)} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(R^n)},$$

il suit que $\|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|^{(\sigma)}$.
Pour demontrer l'inégalité inverse $\|f\|^{(\sigma)} \leq c' \|f\|^{(\sigma+1)}$, où c' est une constante positive indépendante de la fonction f,on procéde en deux étapes.
Première étape : $\sigma = 1, 0 < l < 1$.
On applique l'identité suivante pour les différences

$$\Delta_h f = 2^{-1}\Delta_{2h} f - 2^{-1}\Delta_h^2 f, \tag{5.4}$$

et le lemme (2.2) (voir preliminaire)
Pourtout $\epsilon > 0$, si $0 < p < 1$,$\forall f, g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\|f + g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq (1 + \epsilon)\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + c(p, \epsilon)\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{5.5}$$

Où $c(p, \epsilon) = \left(1 - (1 + \epsilon)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$
Deuxième étape. $\sigma \geq 2$
On applique une identité analogue à (5.4) liant les différences $\Delta_h^{\sigma} f, \Delta_{2h}^{\sigma} f, \Delta_h^{\sigma+1} f$.
Preuve
étape 1. $\sigma = 1$.Suposons $0 < l < 1, \|f\|^{(2)} < +\infty$. Par application de (5.5)à(5.4),on obtient

$$\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-1}(1 + \epsilon)\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + c_8(p, \epsilon)\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.6}$$

où $c_8(p,\epsilon) = 2^{-1}c(p,\epsilon)$

cas 1. $\theta = +\infty$.

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$,on pose

$$\varphi(h) = |h|^{-l}\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$; $\varphi(h) < +\infty$.

Alors en vertu de l'inégalité (5.6) ,on obtient

$$\varphi(h) \leq 2^{l-1}(1+\epsilon)\varphi(2h) + c_8(p,\epsilon)\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(R^n)}}{|h|^l},$$

d'où

$$\varphi(h) \leq 2^{l-1}(1+\epsilon)\varphi(2h) + c_8(p,\epsilon)\sup_{h\in\mathbb{R}^n, h\neq 0}\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(R^n)}}{|h|^l},$$

alors on obtient

$$\varphi(h) \leq 2^{l-1}(1+\epsilon)\varphi(2h) + c_8(p,\epsilon)\|f\|^{(2)}, \tag{5.7}$$

et par suite

$$\varphi(2h) \leq 2^{l-1}(1+\epsilon)\varphi(2^2h) + c_8(p,\epsilon)\|f\|^{(2)},$$

donc

$$\varphi(h) \leq (2^{l-1}(1+\epsilon))^2\varphi(2^2h) + c_8(p,\epsilon)\|f\|^{(2)}(1+2^{l-1}(1+\epsilon)),$$

et par consequent,pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\varphi(h) \leq (2^{l-1}(1+\epsilon))^k\varphi(2^kh) + c_8(p,\epsilon)\|f\|^{(2)}(1+2^{l-1}(1+\epsilon)+...+(2^{(l-1)}(1+\epsilon))^{(k-1)}).$$

Il suit que

$$\varphi(h) \leq (2^{(l-1)}(1+\epsilon))^k\varphi(2^kh) + c_8(p,\epsilon)\sum_0^{+\infty}\left(2^{l-1}(1+\epsilon)\right)^k\|f\|^{(2)},$$

on choisit $0 < \epsilon < 1$ de telle sorte que $2^{l-1}(1+\epsilon) < 1$,

soit $\epsilon = 2^{-l} - 2^{-1}$, posons $c_9(p,l) = c_8(p, 2^{-l} - 2^{-1})(1-(1+\epsilon)2^{l-1})^{-1}$,

donc

$$\varphi(h) \leq (2^{l-1}(2^{-l} - 2^{-1}))^k\varphi(2^kh) + c_9(p,l)\|f\|^{(2)}.$$

On choisit k tel que $2^k|h| > 1$,alors $\varphi(2^kh) \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.

On a donc

$$\varphi(h) \leq (2^{l-2} + 2^{-1})^k 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + c_9(p,l)\|f\|^{(2)}, \tag{5.8}$$

on fait tendre $k \to +\infty$ dans (5.8) on obtient

$$\|f\|^{(1)} = \sup_{h \neq 0} \varphi(h) \leq c_9(p,l)\|f\|^{(2)},$$

soit encore

$$(c_9(p,l))^{-1}\|f\|^{(1)} \leq \|f\|^{(2)} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|^{(1)} \tag{5.9}$$

cas 2. $0 < \theta < \infty$,posons pour tout $\delta > 0$

$$\Psi(\delta) = \left[\int_{|h|\geq\delta} (\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l})^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}} \tag{5.10}$$

$\Psi(\delta) < +\infty$. En effet $\forall\delta > 0$

$$\Psi(\delta) \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \int_{|h|\geq\delta} |h|^{-l\theta-n}dh < \infty.$$

L'inégalité(5.6) permet d'écrire

$$\left[\int_{|h|\geq\delta} \left(\frac{\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\leq \left[\int_{|h|\geq\delta} \left(2^{-1}(1+\epsilon)\frac{\|\Delta_{2h} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} + c_8(p,\epsilon)\frac{\|\Delta_h^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta \frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}} \tag{5.11}$$

Si $1 \leq \theta < +\infty$,alors

$$\psi(\delta) \leq 2^{l-1}(1+\epsilon)\psi(2\delta) + c_8(p,\epsilon)\|f\|^{(2)} \tag{5.12}$$

Le même raisonnement comme dans le cas($\sigma = 1, \theta = +\infty$),avec le même ϵ conduit à l'estimation (5.9).
Si $0 < \theta < 1$,alors d'aprés(5.5) on obtient

$$\psi(\delta) \leq 2^l \left(\int_{|\eta|\geq 2\delta} \left(2^{-1}(1+\epsilon)\frac{\|\Delta_\eta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|\eta|^l} + 2^{-1}c(p,\epsilon)\frac{\|\Delta_{\frac{\eta}{2}}^2 f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|\eta|^l}\right)^\theta \frac{d\eta}{|\eta|^n}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{5.13}$$

D'aprés l'inégalité (5.5)on a

$$\psi(\delta) \leq 2^{l-1}(1+\epsilon)^2\psi(2\delta) + c_8(p,\epsilon)c(\theta,\epsilon)\|f\|^{(2)}, \tag{5.14}$$

on choisit $0 < \epsilon < 1$ de telle sorte que

$$2^{l-1}(1+\epsilon)^2 < 1,$$

soit

$$\epsilon = 2^{\frac{-l-1}{2}} - 2^{-1}.$$

le reste est similaire à la première étape($\sigma = 1, \theta = \infty$).
Donc

$$2\left(c(p,\epsilon)c(p,\theta)\right)^{-1}\left(1-(1+\epsilon)^2 2^{l-1}\right)\|f\|^{(1)} \leq \|f\|^{(2)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\|f\|^{(1)}. \tag{5.15}$$

étape 2. $\sigma \geq 2$.Supposons que $0 < l < \sigma$ et $\|f\|^{(\sigma+1)} < +\infty$.
Considérons l'identité

$$\Delta_h^{\sigma} f = 2^{-\sigma}\Delta_{2h}^{\sigma} f + P_{\sigma-1}(E_h)\Delta_h^{\sigma+1} f,$$

où

$$P_{\sigma-1}(E_h) = -\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}2^{-s}(E_h - I)^{s-1}.$$

Par application de l'inégalité (5.5) pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\sigma}(1+\epsilon)\|\Delta_{2h}^{\sigma} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + c(p,\epsilon)\|P_{\sigma-1}(E_h)\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))}\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.16}$$

Il résulte par application de l'inégalité élémentaire ($a_i > 0, i = 1, \therefore, \sigma$

$$(a_1 + \therefore + a_\sigma)^p \leq \sigma^{\frac{1}{p}-1}(a_1^p + \therefore + a_\sigma^p),$$

que

$$\left\|\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}(E_h - I)^{s-1} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \sigma^{\frac{1}{p}-1}\left(\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}\|E_h - I\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))}^{s-1}\right)\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

comme

$$\begin{aligned}
\|E_h - I\|_{L(L_p(\mathbb{R}^n))} &= \sup_{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=1}\|\Delta_h f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sup_{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|f(x+h)|^p + |f(x)|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\sup_{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=1}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= 2^{\frac{1}{p}-1}2\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= 2^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

nous avons

$$\left\|\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}(E_h-I)^{s-1}f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \sigma^{\frac{1}{p}-1}\sum_{s=1}^{\sigma}\binom{\sigma}{s}2^{\frac{1}{p}(s-1)}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

et par conséquent

$$\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\sigma}(1+\epsilon)\|\Delta_{2h}^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + c_{10}(p,\epsilon,\sigma)\|\Delta_h^{\sigma+1}f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{5.17}$$

où $c_{10} = c(p,\epsilon)\sigma^{\frac{1}{p}-1}2^{\frac{1}{p}(\sigma-1)}(2^\sigma-1)$.

Cas 1. $\theta = +\infty$.

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ On pose

$$\varphi(h) = |h|^{-l}\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$; $\varphi(h) < +\infty$.

Alors en vertu de l'inégalité (5.17) on obtient

$$\varphi(h) \leq 2^{l-\sigma}(1+\epsilon)\varphi(2h) + c_{10}(p,\epsilon,\sigma)\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1}f\|_{L_p(R^n)}}{|h|^l},$$

d'où

$$\varphi(h) \leq 2^{l-\sigma}(1+\epsilon)\varphi(2h) + c_{10}(p,\epsilon,\sigma)\sup_{h\in\mathbb{R}^n,h\neq 0}\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1}f\|_{L_p(R^n)}}{|h|^l}.$$

Le même raisonnement que l'étape"1"permet d'obtenir l'inégalité

$$\|f\|^{(\sigma)} \leq c_{10}(1-2^{l-\sigma}(1+\epsilon))^{-1}\|f\|^{(\sigma+1)},$$

on choisit $\epsilon > 0$ tel que $2^{l-\sigma}(1+\epsilon) < 1$,soit $\epsilon = 2^{\sigma-l-1} - 2^{-1}$.

Posons $c_{11} = c_{10}(p, 2^{\sigma-l-1}-2^{-1},\sigma)(1-2^{l-\sigma}(1+\epsilon))^{-1}$, on obtient donc une inégalité analogue à (5.9)

$$c_{11}^{-1}\|f\|^{(\sigma)} \leq \|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|^{(\sigma)}$$

cas 2. $0 < \theta < \infty$ pour tout $\delta > 0$,on pose

$$\Psi(\delta) = \left[\int_{|h|\geq\delta}\left(\frac{\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta\frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}, \tag{5.18}$$

comme $\|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^\sigma(1+\sigma)^{(\frac{1}{p}-1)}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$,alors $\psi(\delta) < \infty$,pour tout $\delta > 0$,
de l'ingalité(5.17)on a

$$\Psi(\delta) \leq \left[\int_{|h|\geq\delta}\left(\frac{\|\Delta_{2h}^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l} + c_{10}(p,\epsilon,\sigma)\frac{\|\Delta_h^{\sigma+1}f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}{|h|^l}\right)^\theta\frac{dh}{|h|^n}\right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Si $1 \leq \theta < \infty$,alors par la substitution $t = 2h$ et application de (5.17),on a

$$\psi(\delta) \leq 2^{l-\sigma}(1+\epsilon)\psi(2\delta) + c_{10}(p,\epsilon,\sigma)\|f\|^{(\sigma+1)}, \tag{5.19}$$

par un raisonnement similaire à celui de l'étape"1" avec le même $\epsilon(\epsilon = 2^{\sigma-l-1} - 2^{-1})$.
on obtient

$$c_{11}^{-1}\|f\|^{(\sigma)} \leq \|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|^{(\sigma)}, \tag{5.20}$$

où $c_{11} = c_{10}(p, 2^{\sigma-l-1} - 2^{-1}, \sigma)(1 - 2^{l-\sigma}(1+\epsilon))^{-1}$.
Si $0 < \theta < 1$, par application de (5.17) on obtient

$$\psi(\delta) \leq 2^{l-\sigma}(1+\epsilon)^2\psi(2\delta) + c_{10}(p,\epsilon,\sigma)c(\theta,\epsilon,\sigma)\|f\|^{(\sigma+1)}, \tag{5.21}$$

on choisit $\epsilon = 2^{\frac{\sigma-l-2}{2}} - 2^{-1}$.
les mêmes arguments conduisent à une inégalité analogue à (5.9),alors

$$(c_{12}(p,\theta,\sigma,l))^{-1}\|f\|^{(\sigma)} \leq \|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|^{(\sigma)}$$

où $c_{12}(p,\theta,\sigma,l) = c_{10}(p,\epsilon,\sigma)c(\theta,\epsilon,\sigma)(1 - 2^{l-\sigma}(1+\epsilon)^2)^{-1} > 0$ depend seulement de p, θ, l et σ.

Chapitre 6

EQUIVALENCES DES NORMES DANS L'ESPACE $B^l_{p,\theta}(a,b)$

On se propose de prouver l'analogue du lemme (3.1) du chapitre"3"pour les domaines et en particulier pour un intervalle.
Soit (a,b) un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$, $h > 0$,$\sigma \in \mathbb{N}$.On rappelle (voir définition(2.3)chapitre "2")que que

$$(a, b-(\sigma+1)h) \subset (a, b-\sigma h) \subset (a,b)$$

La différence d'ordre σ et de pas h relativement à l'ensemble (a,b) est définie sur l'ensemble

$$(a,b)_{\sigma h} \subset (a, b-\sigma h).$$

Pour tout $x \in (a,b)$

$$(\Delta^\sigma_{h,(a,b)} f)(x) = \begin{cases} (\Delta^\sigma_h f)(x) & \text{si } x \in (a, b-\sigma h), \\ 0 & \text{si } x \notin (a, b-\sigma h) \end{cases} \tag{6.1}$$

On note ici cette différence pour tout$\sigma \in \mathbb{N}$ par

$$\widetilde{\Delta}^\sigma_h f = \Delta^\sigma_{h,(a,b)} f$$

la différence $\Delta^\sigma_h f$ est la différence usuelle définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\Delta^k_h f)(x) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^{k-s} f(x+sh)$$

.

6.1 Définition

Définition 6.1 [6] *Soient* $l > 0$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$,$1 \leq \theta \leq +\infty$,$-\infty < a < b < +\infty$
On dit que la fonction f *appartient à l'espace de Nikolsky-Besov* $B^l_{p,\theta}(a,b)$*si*
1) f *est mesurable sur* (a,b).
2) $\|f\|_{B^l_{p\theta}(a,b)} = \|f\|_{L_p(a,b)} + \|f\|_{b^l_{p\theta}(a,b)} < +\infty$.
où

$$\|f\|_{b^l_{p\theta}(a,b)} = \left(\int_0^{\frac{b-a}{\sigma}} \left(\frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(a,b-\sigma h)}}{h^l} \right)^\theta \frac{dh}{h} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{6.2}$$

$$\|f\|_{b^l_{p,+\infty}(a,b)} = \sup_{0<h<\frac{b-a}{\sigma}} \frac{\|\Delta^\sigma_h f\|_{L_p(a,b-\sigma h)}}{h^l} \tag{6.3}$$

On veut montrer que cette définition est indépendante de $\sigma > l$, autrement dit les semi normes (6.2) et (6.3) sont équivalentes pour les différentes valeurs de $\sigma > l$.

6.2 Normes équivalentes

On veut utiliser le même schema de démonstration que celui du lemme (3.1) mais l'identité

$$\widetilde{\Delta}_h f = 2^{-1}\widetilde{\Delta}_{2h} f - 2^{-1}\widetilde{\Delta}^2_h f, \tag{6.4}$$

n'est pas verifiée ;pour s'en assurer on donne le contre exemple suivant.Soit $x \in (a,b)$,on a

$$(\widetilde{\Delta}_h f)(x) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) & \text{si } x \in (a, b-h), \\ 0 & \text{si } x \in (b-h, b) \end{cases} \tag{6.5}$$

et

$$(\widetilde{\Delta}_{2h} f)(x) = \begin{cases} f(x+2h) - f(x) & \text{si } x \in (a, b-2h), \\ 0 & \text{si } x \in (b-2h, b) \end{cases} \tag{6.6}$$

et

$$(\widetilde{\Delta}^2_h f)(x) = \begin{cases} f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) & \text{si } x \in (a, b-2h), \\ 0 & \text{si } x \in (b-2h, b) \end{cases} \tag{6.7}$$

Si $x \in (b-2h, b)$,alors on a
$(\widetilde{\Delta}_h f)(x) = f(x+h) - f(x)$ et $2^{-1}\widetilde{\Delta}_{2h} f(x) - 2^{-1}\widetilde{\Delta}^2_h f(x) = 0$
Puisque la methode utilisée jusqu'à présent pour démontrer l'équivalence ,des normes (semi-normes) n'est plus valable quand on remplace $\mathbb{R}^n$ par (a,b),alors on fait appel à

la théorie des opérateurs d'extension pour les espaces fonctionnels et ceci sous certaines conditions sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (par exemple $\partial\Omega \in Lip1$),pour plus de details voir $[4, 5, 11,]$ et [14].

Lemme 6.1 *Soient $l > 0, 1 \leq p, \theta \leq +\infty$.*
Alors les normes $\|.\|_{B^l_{p,\theta}(a,b)}$ corespondantes aux différentes valeurs de $\sigma \in \mathbb{N}$ avec $\sigma > l$ sont équivalentes.

Preuve
On désigne temporairement les semi-normes (6.2)et (6.3) coréspondantes à σ par $\|.\|^{(\sigma)}$.
Il suffit donc de prouver que $\|.\|^{(\sigma)}$ et $\|.\|^{(\sigma+1)}$ sont équivalentes dans l'espace $L_p(a, b)$ où $\sigma > l > 0$.
D'aprés la proposition (2.1) chapitre "2" $\|\Delta_h^{\sigma+1} f\|_{L_p(a,b-(\sigma+1)h)} \leq 2\|\Delta_h^{\sigma} f\|_{L_p(a,b-\sigma h)}$ ce qui entraine $\|f\|^{(\sigma+1)} \leq 2\|f\|^{(\sigma)}$.
on démontre l'inégalité inverse.
L'opérateur

$$T : B^l_{p,\theta}(a, b) \rightarrow B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}) \tag{6.8}$$

est dit opérateur d'extension si

$$(Tf/(a, b))(x) = f(x), \text{ pour tout} f \in B^l_{p,\theta}(a, b). \tag{6.9}$$

D'une manière génerale le théoreme d'extension assure l'existence de l'opérateur T (linéaire et borné) tel que :pour $p, \theta \geq 1$,

$$\|Tf\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{B^l_{p,\theta}(a,b)}, \tag{6.10}$$

où c est une constante positive indépendante de la fonction f.
De (6.10) découle

$$\|Tf\|^{(\sigma+1)}_{(\mathbb{R})} \leq c\|f\|^{(\sigma+1)}_{(a,b)}. \tag{6.11}$$

En vertu du lemme (3.1) (pour $n = 1$) on a :

$$\|Tf\|^{(\sigma)}_{(\mathbb{R})} \leq c'\|Tf\|^{(\sigma+1)}_{(\mathbb{R})}. \tag{6.12}$$

En utilisant (6.11),(6.12) et l'inégalité évidente :

$$\|Tf\|^{(\sigma)}_{(a,b)} \leq \|Tf\|^{(\sigma)}_{(\mathbb{R})},$$

on obtient
$\|Tf\|_{(a,b)}^{(\sigma)} \leq \|Tf\|_{(\mathbb{R})}^{(\sigma)} \leq c'\|Tf\|_{(\mathbb{R})}^{(\sigma+1)} \leq cc'\|f\|_{(a,b)}^{(\sigma+1)}$,
d'où
$$\|Tf\|_{(a,b)}^{(\sigma)} \leq k\|f\|_{(a,b)}^{(\sigma+1)}$$
où $k = cc'$,
ou bien
$$\|f\|_{(a,b)}^{(\sigma)} \leq k\|f\|_{(a,b)}^{(\sigma+1)}.$$

Chapitre 7

Bibliographie

[**1**] A.Kolmogorov, S.Fomine.Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnèlle(2.Edition).
[**2**] A.Senouci,T.Tararykova.Hardy type inequality for $0 \prec p \prec 1$. Eurasian mathematical journal N° 2 Astana 2008,page 112-116.
[**3**] Adams,R.A.Sobolev spaces.Academic Press ;New York,San Francisco,London,1975.
[**4**]Besov,O.V.,II'in,V.P.,Nikol'skii,S.M.Integral representations of function and embedding theorems.Nauka.Moscow,1975(inrussian).Sec,ed,Nauka,Moscow,1996 (inrussian).(English.Transof 1st.Edition,Vol.1,2,Wiley,Chichester,1979).
[**5**] Burenkov.V.I.Sobolev spaces on domains,Teubner-Texte zur Mathematik,Band 77,Stuttgart-Lepzig,1998.
[**6**] Burenkov.V.I.Senouci.A. On integral ineqalities involving differences.Journal of computational and applied Mathematics 171(2004) 141-149.
[**7**] Burenkov.V.I.Senouci.A.T.Tararykova.Equivalent quasi-norms involving differences and moduli of continuity.Journal ofcomplex variables and elliptic equations.
[**8**] E.David.Edmunds.W.Evans.and Georgi E.Karadzhov.Sharp Estimates of the embedding Constants for Besov spaces.Rev.Mat.Complut 19(2006).
[**9**] E.M.Stein and G.Weiss,Introduction to Fourier analysis on euclidean space.Princeton university,press,princeton,1971.
[**10**] E.M.Stein.Singular integrals,and Differentiability proprieties of Functions,Princeton Uniersity Press,Princeton,1970.
[**11**] E.M.Stein and G.Weiss,on thetheory of harmonic functions of sevral variables,the theory of H^p-spaces.Acta.Math,1960,103,1-2,25-62
[**12**] Edwards.R.E.Functional Analysis.New York.Chicago.SanFrancisco.Toronto,LondonHolt

Rincherdt and Winston (1965).
[**13**] H.Brezis.Analyse Fonctionnelle,Théorie et applications.Masson,Paris, (1983).
[**14**] H.Triebel,Theory of Function Spaces.Birkhauser.Basel,Boston,Stuttgart and Geest Portig ,Leipzig,1983.
[**15**] H.Triebel.Theory of Function Spaces. Vol.II,Birkhauser.Basel,Boston,Stuttgart and Geest Portig ,Leipzig,1992.
[**16**] H.Triebel.Theory of Function SpacesIII,2006,Birkhauser.Basel,Boston,Berlin.
[**17**] K.Yosida,Functional analysis.Springer,Berlin,1965.
[**18**] M.NIkol'skii.Approximation of functions of sevral variables and embedding theorems.Nauka,Moskva,1969.(in russian).
[**19**] R.A.Devore.G.C.Kyriazis,and P.Wang.Multiscale characterization of Besov spaces on bounded domains.Journal of Approximation Theory 93,(1998) 273-292.
[**20**] R.Devore and K.Sharpley,Besov spaces on Domains in $\mathbb{R}^n$;Trans.Amer.Math.Soc.335.(1993).
[**21**] R.Devore and V.popoV.Iterpolation of Besov spaces.Trans.Amer.Math.Soc.335.1988 ;397-414.
[**22**] Rudin.W.Principles of Mathematical Analysis,N.Y.,McGraw-Hill,1953.
[**23**] Taibleson m.H.,Lipschitz classes of functions and distributions in $\mathbb{R}^n$,Bull.Amer Math.Soc.,1963,69,487-493.
[**24**] Taibleson m.H.,On the theory of Lipschitz spaces of distributions on euclidean n-spaces.Principal proprieties.J.Math and mech.,1964,13,407-479.