REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DES SCIENCES EXACTES

MÉMOIRE

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Maths

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

LES INÉGALITÉS DE HARDY ET LEURS VARIANTES

Par

Ouardani Abderrahmane

Sous la direction de Mr. Senouci Abdelkader

Soutenu publiquement le …………….. devant le jury composé de :

Pr.	**Aïssa Aïbeche**	**Université de Sétif**	**Président**
Mc A.	**AEK .Senouci**	**Université de Tiaret**	**Rapporteur**
Mc A.	**AEK. Mokhtari**	**Université de Laghouat**	**Examinateur**
Mc.	**A. Larabi**	**Université de Tiaret**	**Examinateur**

Promotion. 2008-2009

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DES SCIENCES EXACTES

MÉMOIRE

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de

MAGISTER

Spécialité : Maths

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

LES INÉGALITÉS DE HARDY ET LEURS VARIANTES

Par
Ouardani Abderrahmane

Sous la direction de Mr. Senouci Abdelkader

Soutenu publiquement le …………….. devant le jury composé de :

Pr.	**Aïssa Aïbeche**	**Université de Sétif**	**Président**
Mc A.	**AEK .Senouci**	**Université de Tiaret**	**Rapporteur**
Mc A.	**AEK. Mokhtari**	**Université de Laghouat**	**Examinateur**
Mc.	**A. Larabi**	**Université de Tiaret**	**Examinateur**

Remerciement

A travers ce travail

Tous mes remerciements à nos professeurs pour leurs accueils dans le cycle, leurs ensignements leurs aides, et leurs soutiens.

C'est un honneur pour moi d'être un de vos étudiants.

Je remercie Mr. Senouci Abdelkader pour ses conseils, ses encouragements et ses aides. Ce travail n'aurait jamais eu lieu sans lui.

Egalement je remercie mes collégues pour leur disponibilité, mais surtout pour leur amitié . . . j'espère que nos relations continueront à s'enrichir professionnellement et humainement.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le mémoire comprend six chapitres, une annexe, une conclusion et une bibliographie. Dans ce travail on aborde le thème des inégalités de Hardy et leurs différentes variantes. Au début on considére les inégalités classiques de Hardy, c'est à dire celles qui sont apparues au début (le début du vingtième siècle) [voir [1]] où sont décrits la plus part des premiers développements. Dans [1] Hardy a prouvé l'inégalité suivante (voir [Ch.IX,Th.327,P.240]) : Si $p > 1$, $f^p \in L_{1(0,\infty)}$ et $F(x) :=$ [*] $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ avec $f(t) \geq 0$, alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p\, dx, \tag{1.1}$$

avec $f \neq 0$. $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ est la constante optimale (la plus petite possible).
Et (voir[Ch.IX, Th.328,p.244]) pour $F(x) = \displaystyle\int_x^\infty f(t)\, dt$, on a

$$\int_0^\infty (F(x))^p\, dx < p^p \int_0^\infty (xf(x))^p\, dx, \tag{1.2}$$

avec $f \neq 0$. p^p est la constante optimale.
En outre, en 1928 (voir[Ch.IX, Th.330,p.245]) Hardy a prouvé une forme généralisée de (1.1) et (1.2) à savoir que, si $p > 1$, $\alpha \neq 1$, $0 < \displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p\, dt < \infty$ et $F(x)$ est définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, (\alpha > 1);\ F(x) = \int_x^\infty f(t)\, dt, (\alpha < 1);$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\, dx < \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p\, dt. \tag{1.3}$$

Ainsi (voir [Ch.IX, Th.347,p.256]) Hardy a fait remarquer que si α et $F(x)$ satisfont aux conditions précédentes mais $0 < p < 1$, alors

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\, dx > \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p\, dt. \tag{1.4}$$

[*]La notation := indique que $F(x)$ est définie de cette manière.

L'historique de l'inégalité classique de Hardy (1.1), a été décrit dans le récent article [11] par A.Kufner, L. Maligranda et L.-E.Persson.

Des inégalités analogues à (1.1) et (1.2) ont étè étudiées en détails.

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $f(x)$ une fonction non négative sur $(0;\infty)$, $x^{\alpha}f(xz)$ mesurable sur $(0;\infty)\times(0;1)$ pour presque tous les $z \in (0;1)$ et $x^{\alpha}f(x) \in L_{p(0;\infty)}$, alors

i : si $\alpha < \frac{1}{p'}$

$$\|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1} \|x^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}\,; \tag{1.5}$$

ii : si $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\|x^{\alpha}(H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}\,, \tag{1.6}$$

où

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy;$$

et

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^{\infty} f(y)\,dy,$$

et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

les dernières inégalités ont étè étendues à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{n}$.

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et $|x|^{\alpha} f(x) \in L_{p(\mathbb{R}^{n})}$, alors

i : Si $\alpha < \frac{n}{p'}$

$$\left\||x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1} f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^{n})}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}\, f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R}^{n})}}\,, \tag{1.7}$$

ii : Si $\alpha > \frac{n}{p'}$

$$\left\||x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_2} f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^{n})}} \leq \left(\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p'}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}\, f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R}^{n})}}\,; \tag{1.8}$$

où

$$\left(\widetilde{H_1} f\right)(x) := \frac{1}{mesB_r}\int_{B_r} f(y)\,dy;$$

et

$$\left(\widetilde{H_2} f\right)(x) := \frac{1}{mesB_r}\int_{\mathbb{R}^{n}\setminus B_r} f(y)\,dy,$$

avec

$$r = |x| > 0, B_r = \{y \in \mathbb{R}^{n} : |y| < r\},$$

et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Aussi est abordé le cas des quasi-normes $0 < p < 1$ pour les inégalités de Hardy, c'est à dire des inégalités analogues à (1.5) et (1.6) sont vérifiées pour les fonctions mesurables et monotones, par exemple : Si $\alpha < \frac{1}{p'}$ et $f(x)$ une fonction non négative, croissante sur $(0,\infty)$, alors

$$\|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{2^{-2\alpha p+p-1}}{1-2^{(\alpha-1)p+1}}\right)^{1/p} \|x^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}\,, \tag{1.9}$$

Ensuite on s'est intéréssé à un nouveau type de l'inégalité de Hardy (pour $p < 0$)(voir [3]).

Si $p < 0, \quad \alpha \neq 1, \quad f(t) \geq 0$ et $0 < \displaystyle\int_0^{\infty} t^{-\alpha} \left(tf(t)\right)^p \, dt < \infty$, $F(x)$ une fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, (\alpha < 1); \; F(x) = \int_x^{\infty} f(t)\, dt, (\alpha > 1). \tag{1.10}$$

Alors , on a

$$\int_0^{\infty} x^{-\alpha} F^p(x)\, dx < \left(\frac{-p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^{\infty} t^{-\alpha} \left(tf(t)\right)^p \, dt; \tag{1.11}$$

où le facteur $\left(\dfrac{-p}{|\alpha - 1|}\right)^p$ est la constante optimale .

Cette dernière inégalité à été généralisée :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left|(\widetilde{H}_1 f)(x)\right|^p \, dx \leq \left(\frac{np}{\alpha + n(p-1)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left(f(x)\right)^p \, dx. \tag{1.12}$$

Dans le chapitre 5 on considère les inégalités de poids. Par exemple l'inégalité de Hardy de poids :

$$\left(\int_0^{\infty} \left|\omega(x) \int_0^x f(t) dt\right|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^{\infty} |\nu(x) f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.13}$$

Dans l'article [13] (G.A.Bliss) a été trouvée la meilleure constante C, où (1.13) aquiert une forme plus simple, ($p = q$, $\nu(x) = 1$ et la fonction de poids $\omega(x)$ est une fonction de puissance) .

A été aussi considérée une inégalité du type inégalité inverse de Hölder où ont été eclaircies les conditions sur les fonctions de poids, telle que l'inégalité

$$\left(\int_0^{\infty} [f(x)]^q \, \omega(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^{\infty} [f(x)]^p \, \nu(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{1.14}$$

soit vérifiée. Finalement on a étudié une nouvelle variante de ladite inégalité (voir [2]). Certaines inégalités ont été obtenues en changeant certains données, d'autres ont été généralisées.

Remarque : Tout au long de ce travail, Ω est une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et l'espace $L_{p(\Omega)}$ (espace des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrables) est un espace semi-normé.

Chapitre 2

Inégalités classiques de Hardy

Dans l'inégalité de Hölder, souvent on souleve la question suivante :
A quelle condition les deux membres de l'inégalité citée sont éguaux ?.
Chose qu'on éclaircit à l'aide du théorème suivant :
Théorème (H). Soit l'inégalité de Hölder (en détails voir l'annexe),

$$\|fg\|_{L_{1(\Omega)}} \leq \|f\|_{L_{p(\Omega)}} \|g\|_{L_{p'(\Omega)}} . \qquad (\star)$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Dans $(\star)$ il y'a égalité si, et seulement, si existent les constantes $A \geq 0$ et $B \geq 0$, $A^2+B^2 \neq 0$ telles que :

$$A.\left|f(x)\right|^p = B.\left|g(x)\right|^{p'} \; p.psur\Omega. \qquad (\star\star)$$

1.a) Si la condition $(\star)$ est vérifiée et $A=0$, alors $g(x) \sim 0$ sur Ω et les deux membres de $(\star)$ sont nuls. D'une manière analogue on raisonne si $B=0$.
b) Soit dans $(\star\star)$ $A>0$ et $B>0$. Alors

$$|g(x)| = C\left|f(x)\right|^{p-1}$$

où $C = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/p'}$,
et chacun des deux membres de (1.15) est égal a $\|f\|^p_{L_{p(\Omega)}}$.
2.On suppose qu'il existe un sou- ensemble $E \subset \Omega$, $mesE > 0$ et pour lequel $(\star\star)$ n'est pas vérifiée.
On pose

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_{L_{p(\Omega)}}}$$

et

$$G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_{L_{p'(\Omega)}}};$$

on obtient

$$|F(x)|^p \neq |G(x)|^{p'}, \forall x \in E,$$

et d'aprés l'inégalité de Young

$$|F(x).G(x)| \leq \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^{p'}}{p'}, \forall x \in \Omega, \tag{Φ}$$

sur E (Φ) est stricte.

Lemme. Si les fonctions f et g à valeurs réelles sont intégrables sur un ensemble Ω mesurable et $f(x) \leq g(x)$, p.p, alors

$$\int_\Omega f(x)\,dx \leq \int_\Omega g(x)\,dx.$$

si $f(x) < g(x)$ sur le sous-ensemble E avec $mesE > 0$, alors

$$\int_\Omega f(x)\,dx < \int_\Omega g(x)\,dx.$$

Par application du lemme on obtient

$$\int_\Omega |F(x).G(x)|\ dx < \frac{1}{p}\int_\Omega |F(x)|^p\ dx + \frac{1}{p'}\int_\Omega |G(x)|^{p'}\ dx = 1$$

d'où on déduit que l'inégalité dans $(\star)$ est stricte.

Pour $0 < p < 1$ et $p = \infty$ on raisonne de la même manière.

Les théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 et leurs preuves figurent dans [1].

Théorème 2.1 *Soient $p > 1$, $f(x) \geq 0$, $f \in L_{p(0,x}$ $(x > 0)$ et $f^p \in L_{1(0,\infty)}$. $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, x > 0;$$

alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p\,dx, \tag{2.1}$$

avec $f \neq 0$. La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale.

Pour la preuve du théorème on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Si $p > 1$, $f \in L_{p(0,a)}$, $\forall a \geq x$ et*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt;$$

alors

$$F(x) = o(x^{\frac{1}{p'}}),$$

pour x suffisamment petit.

Preuve du lemme : d'après l'inégalité de Hölder,

$$(F(x))^p \leq \int_0^x (f(t))^p\,dt \left(\int_0^x dt\right)^{p-1} = x^{p-1}\int_0^x (f(t))^p\,dt,$$

d'où

$$F(x) = o(x^{\frac{1}{p'}}).$$

Preuve du théorème 2.1 : Si $0 < \xi < \eta$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\xi^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &= -\frac{1}{p-1}\int_\xi^\eta (F(x))^p \left(\frac{d}{dx}x^{1-p}\right) dx \\
&= \frac{\xi^{1-p}F^p(\xi)}{p-1} - \frac{\eta^{1-p}F^p(\eta)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_\xi^\eta x^{1-p}(F(x))^{p-1}f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

D'aprés le lemme 2.1

$\xi^{1-p}F^p(\xi) \longrightarrow 0$ quand f^p est intégrable et $\xi \longrightarrow 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)\,dx \\
&\leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\eta (f(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\eta (f(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Si $f(x)$ est non nulle sur $(0,\eta)$, le membre gauche de (2.2) est strictement positif, d'où de (2.2) on déduit

$$\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\eta (f(x))^p\,dx; \tag{2.3}$$

quand $\eta \longrightarrow \infty$ on obtient (2.1) , sauf que $<$ est remplacé par $\leq$. En particulier , l'intégrale du membre gauche de (2.1) est fini.

Par conséquent, toutes les intégrales dans (2.2) sont finies lorsque η tend vers ∞ et

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty (f(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

dans (2.4) le signe $\leq$ peut être remplacé par $<$, à moins que $x^{-p}(F(x))^p et (f(x))^p$ soient effectivement proportionnelles . Ceci transformerait $f(x)$ en une puissance de x, alors $\displaystyle\int_0^\infty (f(x))^p dx$ serait divergente.

Alors si f est non nulle , on déduit de (2.4)

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p\,dx.$$

Pour démontrer que la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale, on considère la fonction $f_\varepsilon(x)$, $0<\varepsilon<(p-1)/p$ définie par :

$$f_\epsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in(0;1)\\ x^{-\varepsilon-\frac{1}{p}}, & \text{si } x\in[1;\infty)\end{cases}$$

on trouve que

$$\int_0^\infty\left(x^{-1}\int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx=\frac{1}{\varepsilon p\left(-\varepsilon-\frac{1}{p}+1\right)^p};$$

et

$$\int_0^\infty (f_\varepsilon(t))^p\,dt=\frac{1}{\varepsilon p}.$$

Si la constante $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ dans (2.1) n'est pas optimale, alors, il existe une constante K, avec $K<\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ telle que (2.1) reste valable si l'on remplace $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ par K.
En particulier, on a

$$\int_0^\infty\left(x^{-1}\int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx<K\int_0^\infty (f_\varepsilon(t))^p\,dt,$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon p\left(-\varepsilon-\frac{1}{p}+1\right)^p}<K\frac{1}{\varepsilon p},$$

il s'ensuit que $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p\leq K$, quand $\varepsilon\longrightarrow 0$. de Cette contradiction on déduit que $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (2.1).
Le théorème 2.1 est prouvé.

Théorème 2.2 *Soient $p>1$, $f(x)\geq 0$ et $f^p\in L_{1(0,\infty)}$, $f(x)\in L_{p(x,\infty)}$. $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x)=\int_x^\infty f(t)\,dt, x>0,$$

alors

$$\int_0^\infty (F(x))^p\,dx<p^p\int_0^\infty (xf(x))^p\,dx, \tag{2.5}$$

avec $f\neq 0$. La constante p^p est optimale.

La preuve est analogue à 2.1.

Théorème 2.3 *Soient $p>1$, $\alpha\neq 1$, $0<\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p\,dt<\infty$ et $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt,(\alpha>1);\ \ F(x)=\int_x^\infty f(t)\,dt,(\alpha<1);$$

alors
$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\, dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} \left(tf(t)\right)^p \, dt. \tag{2.6}$$

Preuve : Pour la démonstration on utilise le lemme suivant

<u>lemme :</u> Soient $p > 1$ et $K(x,y) \geq 0$ une fonction homogène* de degré -1 telle que
$$\int_0^\infty K(x,1) x^{-1/p}\, dx = \int_0^\infty K(1,y) y^{-1/p'}\, dy = k$$
alors
$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy \leq k \left(\int_0^\infty (f(x))^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty (g(y))^{p'}\, dy\right)^{1/p'} \tag{2.7}$$
avec $f \neq 0$ ou $g \equiv 0$, si $K(x,y)$ est positive,
$$\int_0^\infty dy \left(\int_0^\infty K(x,y) f(x)\, dx\right)^p \leq k^p \int_0^\infty (f(x))^p\, dx \tag{2.8}$$
avec $f \neq 0$, si $K(x,y)$ est positive,
$$\int_0^\infty dx \left(\int_0^\infty K(x,y) g(y)\, dy\right)^{p'} \leq k^{p'} \int_0^\infty (g(y))^{p'}\, dy. \tag{2.9}$$
avec $g \neq 0$, si $K(x,y)$ est positive.

Maintenant on passe à la preuve du théorème 2.3.

On prend
$$\begin{cases} K(x,y) = \dfrac{y^{r-1}}{x^r}, & \text{si } x \leq y; \\ K(x,y) = 0, & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Pour $r < \dfrac{1}{p'}$. On a
$$k = \int_0^\infty x^{-r-1/p}\, dx = \int_0^1 x^{-r-1/p}\, dx = \frac{p}{p-pr-1}.$$
Dans ce cas les inégalités (2.8) et (2.9) donnent
$$\int_0^\infty y^{p(r-1)} \left(\int_0^y x^{-r} f(x)\, dx\right)^p dy \leq \left(\frac{p}{p-pr-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p\, dx, \tag{2.10}$$
et
$$\int_0^\infty x^{-rp'} \left(\int_x^\infty y^{r-1} g(y)\, dy\right)^{p'} dx \leq \left(\frac{p}{p-pr-1}\right)^{p'} \int_0^\infty (g(y))^{p'}\, dy. \tag{2.11}$$

*Une fonction $M(x,y)$ est appele homogène de degré s si :
$$\forall k > 0; M(x,y) = k^s M(x,y).$$

En changeant la notation dans (2.10) et (2.11) . Pour cela on note

$$h(x) = x^{-r} f(x) \ et \ p(r-1) = -\alpha$$

puisque $r < 1/p'$ alors $\alpha = p(1-r) > p(1-1/p') \geq 1$ et (2.10) devient

$$\int_0^\infty y^{-\alpha} \left(\int_0^y h(x)\, dx \right)^p dy \leq \left(\frac{p}{\alpha - 1} \right)^p \int_0^\infty x^{-\alpha} (xh(x))^p \, dx. \tag{2.12}$$

D'une manière analogue on note

$$H(y) = y^{r-1} g(y) \ et \ rp' = \alpha$$

donc on a $\alpha = rp' < 1$ (car $r < 1/p'$) et (2.11) devient

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(\int_x^\infty H(y)\, dy \right)^{p'} dx \leq \left(\frac{p'}{1 - \alpha} \right)^{p'} \int_0^\infty y^{-\alpha} (yH(y))^{p'} \, dy, \tag{2.13}$$

car $\dfrac{p}{p - pr - 1} = \dfrac{p'}{1 - rp'} = \dfrac{p'}{1 - \alpha}$.

Donc de (2.12) et (2.13), on obtient

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\, dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - 1|} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p \, dt$$

pour $p > 1$ et

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, (\alpha > 1); \ F(x) = \int_x^\infty f(t)\, dt, (\alpha < 1),$$

d'où l'inégalité (2.6).
L'inégalité classique de Hardy pour les quasi-normes , est exprimée à l'aide du théorème suivant .

Théorème 2.4 *Soient* $0 < p < 1$, $\alpha \neq 1$, $0 < \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p \, dt < \infty$ *et* $F(x)$ *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, (\alpha > 1); \ F(x) = \int_x^\infty f(t)\, dt, (\alpha < 1),$$

alors ;

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)\, dx > \left(\frac{p}{|\alpha - 1|} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p \, dt. \tag{2.14}$$

Preuve : On obtient le même resultat en changeant le signe dans les inégaliyés (2.7), (2.8) et (2.9) et on considère la fonction elle même. Dans ce qui suit on se propose de donner d'autres démonstrations des inégalités classiques de Hardy.

On considère la fonction f à une seule variable définie sur $(0;\infty)$.
Considérons les deux opérateurs H_1 et H_2 définis de la manière suivante :

$$(H_1f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy \forall x > 0,$$

(C'est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $(0;x)$)

et

$$(H_2f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy \forall x > 0.$$

Théorème 2.5 *(voir [37]) Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f(x) \geq 0$, $x^\alpha f(xz)$ mesurable sur $(0;\infty)\times(0;1)$ et $x^\alpha f(xz) \in L_{p(0;\infty)}$ pour presque tous les $z \in (0;1)$, alors*

$$\|x^\alpha (H_1f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}; \tag{2.15}$$

si $\alpha < \frac{1}{p'}$
et

$$\|x^\alpha (H_2f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}, \tag{2.16}$$

si $\alpha > \frac{1}{p'}$.

Remarque 2.1 $\left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}$ *et* $\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}$, *sont les constantes optimales dans* (2.15) *et* (2.16)
(i.e. les plus petites possibles).

Cas particulier :
Si $\alpha = 0$ dans (2.15) , on aura :

$$\|(H_1f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq p' \|f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}, \tag{2.17}$$

on retrouve (2.1) seulement l'inégalité est stricte.
preuve du théoréme 2.5 :
1 : Cas $\alpha < \frac{1}{p'}$.
Posons $I = \|x^\alpha (H_1f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}$.
Le fait que le borne supérieure de l'intégrale est la variable x, on ne peut pas appliquer l'inégalité intégrale de Minkowsky (voir annexe) et pour cela on effectue un changement de variable $y = xz$, d'où

$$\begin{aligned} I = \|x^\alpha (H_1f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} &= \left\| x^{\alpha-1}\int_0^x f(y)\,dy \right\|_{L_{p(0;\infty)}} \\ &= \left\| \int_0^1 x^\alpha f(xz)\,dz \right\|_{L_{p(0;\infty)}}. \end{aligned}$$

La fonction $x^\alpha f(xz)$ est mesurable sur $(0;\infty)\times(0;1)$, donc on peut appliquer l'inégalité intégrale de Minkowsky. On obtient

$$I \leq \int_0^1 \|x^\alpha f(xz)\|_{L_{p(0;\infty)}}\, dz.$$

On remplace x par t en posant $t = xz$, alors

a : Le cas $1 \leq p < \infty$.

$$\begin{aligned}\|x^\alpha f(xz)\|_{L_{p,x(0;\infty)}} &= \left(\int_0^\infty x^{\alpha p}\,|f(xz)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}\,|f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\,\|t^\alpha f(t)\|_{L_{p(0;\infty)}}.\end{aligned}$$

D'où

$$I \leq \int_0^1 z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\,\|t^\alpha f(t)\|_{L_{p(0;\infty)}}\, dz = \left(1-\frac{1}{p}-\alpha\right)^{-1}\|t^\alpha f(t)\|_{L_{p(0;\infty)}}$$

Donc :

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1}\|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}.$$

b : Le cas $p = \infty$.

$$\begin{aligned}\|x^\alpha f(xz)\|_{L_{\infty,x(0;\infty)}} &= ess\sup_{x\in(0;\infty)}|x^\alpha f(xz)| \\ &= z^{-\alpha} ess\sup_{t\in(0;\infty)}|t^\alpha f(t)| \\ &= z^{-\alpha}\,\|t^\alpha f(t)\|_{L_{\infty,t(0;\infty)}}\end{aligned}$$

on conclut

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{\infty(0;\infty)}} \leq (1-\alpha)^{-1}\,\|x^\alpha f(x)\|_{L_{\infty(0;\infty)}}.$$

2 : Cas $\alpha > \frac{1}{p'}$.

On pose $J = \|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}$.

D'une maniére analogue à **(1 :)** on fait un changement de variable $y = \dfrac{x}{z}$ et en appliquant l'inégalité intégrale de Minkowsky, on obtient

$$\begin{aligned}J = \left\|x^\alpha \int_1^0 -z^{-2} f(x/z)\, dz\right\|_{L_{p(0;\infty)}} &= \left\|x^\alpha \int_0^1 z^{-2} f(x/z)\, dz\right\|_{L_{p(0;\infty)}} \\ &\leq \int_0^1 \left\|\frac{x^\alpha}{z^2} f(\frac{x}{z})\right\|_{L_{p(0;\infty)}} dz.\end{aligned}$$

En remplaçant x par t, posons $t = \frac{x}{z}$, alors

a' : Le cas $1 \leq p < \infty$.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x^\alpha}{z^2} f(\frac{x}{z}) \right\|_{L_{p,x(0;\infty)}} &= \left(\int_0^\infty x^{\alpha p} z^{-2p} \left| f(x/z) \right|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} z^{(\alpha-2)p+1} \left| f(t) \right|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= z^{\alpha-2+\frac{1}{p}} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L_{p(0;\infty)}}
\end{aligned}$$

on déduit

$$J \leq \int_0^1 z^{\alpha-2+\frac{1}{p}} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L_{p(0;\infty)}} dz = \left[\alpha - (1 - \frac{1}{p}) \right]^{-1} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L_{p(0;\infty)}}$$

D'où

$$\left\| x^\alpha (H_2 f)(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'} \right)^{-1} \left\| x^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}}.$$

b' : Le cas $p = \infty$.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x^\alpha}{z^2} f(\frac{x}{z}) \right\|_{L_{\infty,x(0;\infty)}} &= ess \sup_{x \in (0;\infty)} \left| \frac{x^\alpha}{z^2} f(\frac{x}{z}) \right| \\
&= z^{\alpha-2} ess \sup_{t \in (0;\infty)} \left| t^\alpha f(t) \right| \\
&= z^{\alpha-2} \left\| t^\alpha f(t) \right\|_{L_{\infty,t(0;\infty)}}
\end{aligned}$$

donc

$$\left\| x^\alpha (H_2 f)(x) \right\|_{L_{\infty(0;\infty)}} \leq (\alpha - 1)^{-1} \left\| x^\alpha f(x) \right\|_{L_{\infty(0;\infty)}}.$$

Le calcul de la constante dans (2.15) **:**

On suppose qu'il existe une constante $A > 0$ telle que ;

$$\left\| x^\alpha (H_1 f)(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \left\| x^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}}$$

ce qui implique

$$\frac{\left\| x^\alpha (H_1 f)(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}}}{\left\| x^\alpha f(x) \right\|_{L_{p(0;\infty)}}} \leq A. \tag{2.18}$$

On considère la fonction f_ϵ , $\epsilon > 0$ définie par :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (0;1) \\ x^{-\alpha - \frac{1+\epsilon}{p}}, & \text{si } x \in [1;\infty) \end{cases}$$

$f_\epsilon(x)$ est une fonction intégrable sur l'intervalle $(0;1)$ et aussi sur $[1;\infty)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|x^\alpha (H_1 f_\epsilon)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} &= \left[\int_0^1 x^{(\alpha-1)p+p}\,dx + \int_1^\infty x^{(\alpha-1)p}\left|\int_0^x y^{-\alpha-\dfrac{1+\epsilon}{p}}\,dy\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{1}{\alpha p+1} + \int_1^\infty \frac{x^{(\alpha-1)p}x^{-\alpha p-(1+\epsilon)+p}}{(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1)^p}\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1)^p}\right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\|x^\alpha f_\epsilon(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} &= \left[\int_0^1 x^{\alpha p}\,dx + \int_1^\infty x^{\alpha p}x^{-\alpha p-(1+\epsilon)}\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

on sait que le nombre $\left[\frac{1}{\alpha p+1} + \frac{1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{p}}$ est non nul, dans ce cas on peut revenir à l'inégalité (2.18) comme suit.

$$\frac{\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}}{\|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}} \le A \Leftrightarrow \frac{\left[\dfrac{1}{\alpha p+1} + \dfrac{1}{\epsilon(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1)^p}\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\dfrac{1}{\alpha p+1} + \dfrac{1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{p}}} \le A,$$

c'est à dire

$$(2.18)\quad \Leftrightarrow\quad \frac{\left[\dfrac{1}{\alpha p+1}+\dfrac{1}{\epsilon(-\alpha-\frac{1+\epsilon}{p}+1)^{p}}\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\dfrac{1}{\alpha p+1}+\dfrac{1}{\epsilon}\right]^{\frac{1}{p}}}\leq A$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\frac{\dfrac{1}{\alpha p+1}+\dfrac{1}{\epsilon(-\alpha-\dfrac{1+\epsilon}{p}+1)^{p}}}{\dfrac{1}{\alpha p+1}+\dfrac{1}{\epsilon}}\right]^{\frac{1}{p}}\leq A$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\frac{\dfrac{\epsilon}{\alpha p+1}+\dfrac{1}{(-\alpha-\dfrac{1+\epsilon}{p}+1)^{p}}}{\dfrac{\epsilon}{\alpha p+1}+1}\right]^{\frac{1}{p}}\leq A$$

quand $\epsilon\to 0$, on trouve $\left(-\alpha+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\leq A$. Alors ; $\left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1}$ est la constante optimale dans (2.15).

Le calcul de la constante dans (2.16) **:**

Soit la constante $B>0$ telle que

$$\|x^{\alpha}(H_2f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}\leq B\,\|x^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}$$

considèrons la fonction $f_\epsilon,\ \epsilon>0$ définie par :

$$f_\epsilon(x)=\begin{cases} x^{-\alpha-\frac{1-\epsilon}{p}}, & \text{si } x\in(0;1]\\ 0, & \text{si } x\in(1;\infty)\end{cases}$$

On a

$$\|x^{\alpha}(H_2f_\epsilon)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}\leq B\,\|x^{\alpha}f_\epsilon(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}$$

D'après des calculs analogues aux précédents, on obtient

$$\|x^{\alpha}(H_2f_\epsilon)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}=\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\alpha-\frac{1}{p'}-\frac{\epsilon}{p}\right)^{-1}$$

car

$$\left|-\alpha+\frac{1}{p'}+\frac{\epsilon}{p}\right|^{p}=\left(\alpha-\frac{1}{p'}-\frac{\epsilon}{p}\right)^{p}$$

pour $-\alpha+\frac{1}{p'}+\frac{\epsilon}{p}<0$

et

$$\|x^\alpha f_\epsilon(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où l'on déduit que

$$\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{p'} + \frac{\epsilon}{p}\right)^{-1} \leq B \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$$

alors

$$\left(\alpha - \frac{1}{p'} + \frac{\epsilon}{p}\right)^{-1} \leq B$$

pour $\epsilon \to 0$, on conclut

$$\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \leq B.$$

Ce qui fait que $\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}$ est la constante optimale dans (2.16) .

Remarque : Soient X et Y deux espace semi-normés, l'opérateur A défini de X vers Y .
On rappelle qu'un opérateur A est dit borné si :
il éxiste un nombre réel $M > 0$, tel que ,

$$\forall f \in X : \ \|Af\|_Y \leq M \|f\|_X , \tag{2.19}$$

(en particulier si $\|f\|_X = 0$, alors $\|Af\|_Y = 0$).
On note

$$M^\star = \inf_M \mu$$

(μ l'ensemble de tous les nombres M pour les quels (2.19) est vérifiée)
de (2.19) on obtient

$$\forall f \in X : \ \|Af\|_Y \leq M^\star \|f\|_X , \tag{2.20}$$

le nombre $M^\star$ est appelé semi-norme de l'opérateur A . On note

$$\|A\|_{X \to Y} = M^\star.$$

(si Y est un espace normé, alors $M^\star$ est une norme).
On conclut que la semi-norme (norme) de l'opérateur A est la constante optimale (la plus petite possible) dans (2.19) .
Si l'opérateur A satisfait à la condition suivante :
pour $f \in X$ telle que $\|f\|_X \neq 0$ et $\|Af\|_Y \neq 0$, alors linégalité (2.19) est équivalente à

$$\forall f \in X : \|f\|_X \neq 0, \ \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} \leq M^\star \tag{2.21}$$

c'est à dire $M^\star$ est la borne supériere de l'ensemble

$$\left\{ \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} : f \in X, \|f\|_X \neq 0 \right\}.$$

Donc, en vertu de la définition la borne supériere (sup [†]) on aura

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{f\in X, \|f\|_X\neq 0} \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X}. \tag{2.22}$$

Considérons pour $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ l'espace $L_{p,\alpha(0,\infty)}$ est l'éspace de toutes les fonctions mesurables sur $(0,\infty)$ pour lesquelles, $x^\alpha f(x) \in L_{p(0;\infty)}$ et

$$\|f\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)}} = \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} < \infty. \tag{2.23}$$

Alors conpte tenu de ceci, on peut reformuler la première partie du théorème 2.5 comme suit :
si $\alpha < \frac{1}{p'}$, alors

$$\|H_1\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)}\to L_{p,\alpha(0,\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}, \tag{2.24}$$

du fait que la constante est optimale , on peut écrire

$$\|H_1\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)}\to L_{p,\alpha(0,\infty)}} = \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}, \tag{2.25}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
De même pour la deuxième partie du théorème 2.5 par rapport à l'opérateur H_2, on a
Si $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\|H_2\|_{L_{p,\alpha(0,\infty)}\to L_{p,\alpha(0,\infty)}} = \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}, \tag{2.26}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 2.6 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $x^\alpha f(x) \in L_{p(0;\infty)}$, il n'existe pas de $A > 0$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :*
si $\alpha \geq \frac{1}{p'}$

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \tag{2.27}$$

et si $\alpha \leq \frac{1}{p'}$

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \tag{2.28}$$

Preuve : La démonstration comprend deux parties :
i- Soient $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
1) Si $\alpha \geq \frac{1}{p'}$ et $\varphi_\delta(x)$, $\delta > 0$ une fonction définie par :

$$\varphi_\delta(x) = x^{-\alpha - \frac{1+\delta}{p}} \chi_{(1,\infty)}(x),$$

[†]Si A est un opérateur linéaire, alors

$$\|A\|_{X\to Y} = \sup_{f\in X, \|f\|_X\neq 0} \frac{\|Af\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{f\in X, \|f\|_X = 1} \|Af\|_Y .$$

où $\chi_{(1,\infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervale $(1,\infty)$. Alors pour $x \geq 2$

$$\begin{aligned}(H_1\varphi_\delta)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \varphi_\delta(t)\,dt \\ &= \frac{1}{x}\int_1^x t^{-\alpha-\dfrac{1+\delta}{p}}\,dt \geq \frac{C_1}{x} \qquad (I)\end{aligned}$$

où $C_1 = \displaystyle\int_1^2 t^{-\alpha-\dfrac{1+\delta}{p}}\,dt$

Comme $\alpha \geq 1/p'$, on a $\alpha p - p \geq -1$ et alors

$$\|x^\alpha \varphi_\delta(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \delta^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

En vertu de l'inégalité (I) on déduit que

$$\|x^\alpha (H_1\varphi_\delta)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \geq C_1 \left(\int_1^\infty x^{\alpha p - p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \infty,$$

donc on conclut que l'inégalité (2.27) n'a pas lieu.

2. Si $\alpha \leq \frac{1}{p'}$ et $\psi_\delta(x)$, $\delta > 0$ une fonction définie par :

$$\psi_\delta(x) = x^{-\alpha-\frac{1-\delta}{p}}\chi_{(0,1)}(x),$$

alors $\alpha + (1-\delta)/p < 1$ et quand $0 < x < 1/2$, on a

$$(H_2\psi_\delta)(x) = \frac{1}{x}\int_x^1 y^{-\alpha-\left(\frac{1-\delta}{p}\right)}\,dy \geq \frac{C_2}{x},$$

où $C_2 = \displaystyle\int_{1/2}^1 y^{-\alpha-\left(\frac{1-\delta}{p}\right)}\,dy$.

Donc quand $\alpha \leq 1/p'$ on a $\alpha p - p \leq -1$, alors

$$\|x^\alpha \psi_\delta(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \delta^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

d'autre part on a

$$\|x^\alpha (H_2\psi_\delta)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \geq C_2 \left(\int_0^{1/2} x^{\alpha p - p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \infty,$$

donc on conclut que l'inégalité (2.28) n'a pas lieu.

ii- Si $p = \infty$, d'une manière analogue on prouve qu'il n'existe pas des constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{\infty(0;\infty)}} \leq A\,\|x^\alpha f(x)\|_{L_{\infty(0;\infty)}} \tag{2.29}$$

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_{\infty(0;\infty)}} \leq B\,\|x^\alpha f(x)\|_{L_{\infty(0;\infty)}}. \tag{2.30}$$

Définition 2.1 *Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, l'espace $L_{P,\alpha(0,\infty)}$ est l'espace de toutes les fonctions mesurables sur $(0,\infty)$ telles que :*

$$\|f\|_{L_{P,\alpha(0,\infty)}} = \|x^\alpha f(x)\|_{L_{P,\alpha(0,\infty)}} < \infty.$$

Soit $0 < a < b < \infty$, on pose

$$(H_3 f)(x) = \frac{1}{x}\int_{ax}^{bx} f(y)dy, \forall x > 0.$$

Théorème 2.7 *.Soient $1 \leq p \leq \infty$, $0 < a < b < \infty$, $f(xz) \geq 0$ une fonction mesurable sur $(0;\infty) \times (a;b)$ et $x^\alpha f(xz) \in L_{p(0;\infty)}$ pour presque tous les $z \in (a;b)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Alors l'opérateur H_3 en tant qu'opérateur agissant de $L_{p,\alpha(0,\infty)}$ dans $L_{p,\alpha(0,\infty)}$, est borné.*

Preuve : On pose

$$J = \|x^\alpha (H_3 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} = \left\|\int_{ax}^{bx} x^{\alpha-1} f(y)\, dy\right\|_{L_{p(0;\infty)}},$$

on fait un changement de variable $z = y/x$ pour pouvoir appliquer l'inégalité intégrale de Minkowsky.

D'où $J = \left\|\int_a^b x^\alpha f(xz)\, dz\right\|_{L_{p(0;\infty)}}$.

La fonction $x^\alpha f(xz)$ est mesurable sur $(0;\infty) \times (a;b)$, alors en vertu de l'inégalité intégrale de Minkowsky on obtient

$$J \leq \int_a^b \|x^\alpha f(xz)\|_{L_{p(0;\infty)}} \, dz = \int_a^b \|t^\alpha f(t)\|_{L_{p(0;\infty)}} .z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\, dz,$$

on a effectué le changement de variable $t = xz$.

$$\int_a^b \|t^\alpha f(t)\|_{L_{p(0;\infty)}} .z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\, dz = C_{(\alpha,p)} \|t^\alpha f(t)\|_{L_{p(0;\infty)}},$$

où

$$C_{(\alpha,p)} = \frac{1}{\frac{1}{p'} - \alpha}\left(b^{\frac{1}{p'} - \alpha} - a^{\frac{1}{p'} - \alpha}\right) \; si \; \alpha \neq \frac{1}{p'}$$

et

$$C_{(\alpha,p)} = \ln(\frac{b}{a}) \; si \; \alpha = \frac{1}{p'},$$

et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

En conclusion

$$\|x^\alpha (H_3 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq C_{(\alpha,p)} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}}. \tag{2.31}$$

2.1 Analogues discrets

Définition 2.2 *Soient* $0 < p < \infty$, $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{C}$.
On dit que $a \in l_p$ *si*

$$\|a\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p},$$

et pour $p = \infty$, *si*

$$\|a\|_{l_p} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| < \infty.$$

(c'est à dire a *est une suite bornée.)*

Lemme 2.2 *Quel que soit le nombre réel* α, *il éxiste des constantes* C_1, C_2 *telles que ; pour toute fonction* $f(x)$ *non négative et monotone définie sur* $(0;\infty)$, *l'inégalité suivante est vérifiée*

$$C_1 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k) \leq \int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx \leq C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k).$$

Preuve :
1 : Si $f(x)$ décroissante.
a) Si $\alpha \geq 0$.
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(x)\, dx \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} 2^{(k+1)\alpha} f(2^k)\, dx.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} 2^{(k+1)\alpha} f(2^k)\, dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{(k+1)\alpha} 2^k f(2^k) \\ &= 2^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k).\end{aligned}$$

D'autre part ; comme f est décroissante , alors

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx \geq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k\alpha+k} f(2^{k+1}),$$

on fait le changement de variables $m = k+1$, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k\alpha+k} f(2^{k+1}) = 2^{-\alpha-1} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k),$$

on déduit que $C_1 = 2^{-\alpha-1}$ et $C_2 = 2^{\alpha}$.

b) Si $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(x)\, dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(2^k)\, dx \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx \geq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} x^{\alpha} f(2^{k+1})\, dx \geq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{(k+1)\alpha+k} f(2^{k+1}),$$

en faisant le même changement de variables, $m = k+1$, on obtient

$$2^{-1} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k) \leq \int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\, dx \leq \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} 2^{k(\alpha+1)} f(2^k).$$

Où $C_1 = 2^{-1}$ et $C_2 = 1$.

2 : Si $f(x)$ croissante.

D'une manière analogue que 1 : on prouve l'inégalité qui est signalée dans le lemme 2.2, dans ce cas on trouve $C_1 = 2^{\alpha}$ et $C_2 = 2^{-\alpha-1}$.

2.1.1 les analogues discrets de l'inégalité de Hardy

Les analogues discrets de (2.15) et (2.16).

Pour $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$, $a_k \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\|a\|_{\ell_p} = \|\{a_k\}\|_{\ell_p} := \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} ; 1 \leq p \leq \infty$$

et on démontre qu'il existe $c = c_{(p,\beta)} > 0$, $d = d_{(p,\beta)} > 0$, telles que :

$$\left\| \{2^{k\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=k} b_\ell\} \right\|_{\ell_p} \leq c \left\| \{2^{k\beta} b_\ell\} \right\|_{\ell_p}, \beta < 0, \tag{2.32}$$

$$\left\| \{2^{k\beta} \sum_{\ell=k}^{\ell=\infty} b_\ell\} \right\|_{\ell_p} \leq d \left\| \{2^{k\beta} b_\ell\} \right\|_{\ell_p}, \beta > 0. \tag{2.33}$$

On montre que les inégalités (2.31) et (2.32) découlent de (2.15) et (2.16) et donc sont leurs analogues discrets.
Supposons que $\forall \ell \in \mathbb{Z}$ $b_\ell \geq 0$ (si (2.31) et (2.32) sont valables pour $|b_\ell|$ alors elles le sont pour b_ℓ quel que soit son signe car $\left| \sum_\ell b_\ell \right| \leq \sum_\ell |b_\ell|$.
Pour obtenir l'inégalité (2.31) on pose

$$\alpha := \beta + 1/p'; f(x) := \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k 2^{-k} \chi_{(2^{k-1}, 2^k)}(x),$$

où $\chi_{(2^{k-1}, 2^k)}(x)$ est la fonction caracréristique. Alors

$$\begin{aligned} \|x^\alpha f\|_{L_{p(0,\infty)}} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k^p 2^{-kp} \int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{\alpha p} \, dx \right)^{1/p} \\ &= c_1 \left(\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k^p 2^{\beta p k} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

où c_1 dépend seulement de β et p.
Ensuite $(H_1 f)(x) = x^{-1} F(x)$, où $F(x) := \int_0^x f(y) \, dy \geq 0$, fonction non décroissante. Par conséquent en vertu du lemme précédent, on a :

$$\left\| \{2^{\beta k} F(2^k)\} \right\|_{\ell_p} \leq c_2 \left(\int_0^\infty x^{\beta p - p} F(x)^p \, dx \right)^{1/p} = c_2 \left\| x^\beta (H_1 f)(x) \right\|_{L_{p(0,\infty)}},$$

où c_2 dépend seulement de β et p
comme

$$F(2^k) = \int_0^{2^k} f(y) \, dy = \sum_{\ell=-\infty}^{k} b_\ell 2^{-\ell} \int_{2^{\ell-1}}^{2^\ell} dy = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-\infty}^{k} b_\ell$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \left\| \{2^{k\beta} \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=k} b_\ell\} \right\|_{\ell_p} &= 2 \left\| \{2^{k\beta} F(2^k)\} \right\|_{\ell_p} \\ &\leq 2c_2 \left\| x^\beta (H_1 f)(x) \right\|_{L_{p(0,\infty)}}. \end{aligned}$$

Donc on voit que (2.31) est déduite de (2.15).
D'une manière analogue on peut déduire (2.32) de (2.16).

Chapitre 3

Éxtension de certaines inégalités et quasi-normes

On se propose d'étendre les inégalités (2.15) et (2.16) qui sont définis dans $(0,\infty)$ à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$. Jusqu'a présent on a considéré les inégalités de Hardy pour $1 \leq p \leq \infty$, dans la deuxième partie de ce chapitre on retrouve les analogues de (2.15) et (2.16) pour $0 < p < 1$,(résultats connus).

3.1 Éxtension de certaines inégalités de Hardy

I. Extension à $\mathbb{R}$:

On pose

$$\left(\widetilde{H_1} f\right)(x) := \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)\,dy$$

et

$$\left(\widetilde{H_2} f\right)(x) := \frac{1}{2x}\int_{|y|\geq x} f(y)\,dy.$$

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $x^{\alpha} f(xz)$ mesurable sur $\mathbb{R}\times(-1;1)$ et $x^{\alpha} f(xz) \in L_{p(\mathbb{R})}$ pour presque tous les $z \in (-1;1)$, alors

i. Si $\alpha < \dfrac{1}{p'}$, on a :

$$\left\| |x|^{\alpha}\, (\widetilde{H_1} f)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1} \left\| |x|^{\alpha} f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \tag{3.1}$$

ii. Si $\alpha \geq \dfrac{1}{p'}$, on a :

$$\left\| |x|^{\alpha}\, (\widetilde{H_2} f)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)^{-1} \left\| |x|^{\alpha} f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}}. \tag{3.2}$$

D'une manière générale la preuve s'effectue de la même manière que celle du théorème 2.5 . Par exemple démontrons (3.1).

On a $\forall x \neq 0$;

$$\left(\widetilde{H_1}f\right)(x) := \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)\,dy = \frac{1}{2\,|x|}\int_{-|x|}^{|x|} f(y)\,dy$$

et

$$\left\| |x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left||x|^{\alpha-1}\int_{-|x|}^{|x|} f(y)\,dy\right|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour appliquer l'inégalité intégrale de Minkowsky, on fait un changement de variable $z = \dfrac{y}{x}$, donc :

$$\begin{aligned}\left\| |x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left||x|^{\alpha}\int_{-1}^{1} f(xz)\,dz\right|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{\mathbb{R}}\left||x|^{\alpha}\,f(xz)\right|^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\,dz.\end{aligned}$$

Avec le changement de variable $t = xz$ en prenant en compte que $dx = \dfrac{dt}{z}$, si $z > 0$ et $dx = -\dfrac{dt}{z}$ si $z < 0$ et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\left\| |x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \left\||t|^{\alpha}\,f(t)\right\|_{L_p(\mathbb{R})}\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|z|^{-\alpha-\dfrac{1}{p}}\,dz. \tag{3.3}$$

mais on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|z|^{-\alpha-\dfrac{1}{p}}\,dz &= \int_{-1}^{0}-z^{-\alpha-\dfrac{1}{p}}\,dz + \int_{0}^{1} z^{-\alpha-\dfrac{1}{p}}\,dz\\ &= -\left[\frac{(-z)^{-\alpha+\dfrac{1}{p'}}}{-\alpha+\dfrac{1}{p'}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{z^{-\alpha+\dfrac{1}{p'}}}{-\alpha+\dfrac{1}{p'}}\right]_{0}^{1}\\ &= 2\left(-\alpha+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\end{aligned}$$

donc (3.3) devient

$$\left\| |x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \left(-\alpha+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\left\||t|^{\alpha}\,f(t)\right\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

C'est à dire

$$\left\| |x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \left(-\alpha+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\left\||x|^{\alpha}\,f(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

II. Extension à $\mathbb{R}^n$:

Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x| > 0, B_r = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| < r\}, 1 \leq p \leq \infty$, $f(x)$ une fonction mesurable sur B_r . Considérons les deux opérateures suivants :

$$\left(\widetilde{H_1} f\right)(x) := \frac{1}{mesB_r} \int_{B_r} f(y)\, dy$$

et

$$\left(\widetilde{H_2} f\right)(x) := \frac{1}{mesB_r} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} f(y)\, dy.$$

Théorème 3.1 *Soient* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *et* $f(r, \xi) \in L_{p(S_{n-1})}$ *(*S_{n-1} *désigne la sphére unité dans* $\mathbb{R}^n$*), alors*

i. *Si,* $\alpha < \frac{n}{p'}$

$$\left\| |x|^\alpha\, (\widetilde{H_1} f)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n} \right)^{-1} \| |x|^\alpha\, f(x) \|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \tag{3.4}$$

ii. *Si* $\alpha > \frac{n}{p'}$.

$$\left\| |x|^\alpha\, (\widetilde{H_2} f)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p'} \right)^{-1} \| |x|^\alpha\, f(x) \|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}. \tag{3.5}$$

Preuve :

On démontre l'inégalité (3.4).

On introduit les coordonnées sphériques (coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$) (ρ, ξ) où $\rho = |y|$, $\xi = \frac{y}{|y|} \in S_{n-1}$ (S_{n-1} désigne la sphére unité dans $\mathbb{R}^n$) et on pose

$$\overline{f}(\rho) = \int_{S_{n-1}} f(\rho, \xi)\, d\xi$$

alors

$$\begin{aligned} (\widetilde{H_1} f(x) &= \frac{1}{v_n r^n} \int_0^r \rho^{n-1}\, d\rho \int_{S_{n-1}} f(\rho, \xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{v_n r^n} \int_0^r \rho^{n-1} \overline{f}(\rho)\, d\rho, \end{aligned}$$

où $v_n = \pi^{\frac{n}{2}} \left(\Gamma(\frac{n}{2} + 1)\right)^{-1}$ est le volume de la boule unité et La fonction Γ est définie par :

$$\Gamma(\delta) = \int_0^\infty t^{\delta - 1} e^{-t}\, dt.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\left\||x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)\,d\rho\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(nv_n\int_0^\infty r^{n-1}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)\,d\rho\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(nv_n\int_0^\infty r^{n-1+p(\alpha-n+1)}v_n^{-p}\left|\frac{1}{r}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)\,d\rho\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}\left(H_1(\rho^{n-1}\overline{f})\right)(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\||x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}\left(H_1(\rho^{n-1}\overline{f})\right)(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha-\frac{n-1}{p'}}\left(H_1(\rho^{n-1}\overline{f})\right)(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha_1}\left(H_1(\rho^{n-1}\overline{f})\right)(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left\|r^{\alpha_1}\left(H_1(\rho^{n-1}\overline{f})\right)(r)\right\|_{L_{p(0;\infty)}},
\end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p'}$.
D'aprés (2.15) du théorème 2.5, on obtient

$$\left\|r^{\alpha_1}\left(H_1(\rho^{n-1}\overline{f})\right)(r)\right\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\alpha_1\right)^{-1}\left\|r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\overline{f}(r)\right\|_{L_{p(0;\infty)}}$$

pour $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p'} < \frac{1}{p'}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\left\||x|^{\alpha}\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} &\leq n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\tfrac{1}{p'}-\alpha_1\right)^{-1}\left\|r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\overline{f}(r)\right\|_{L_{p(0;\infty)}} \\
&\leq n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\tfrac{1}{p'}-\alpha_1\right)^{-1}\left\|r^{\alpha_1+n-1}\overline{f}(r)\right\|_{L_{p(0;\infty)}} \\
&= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\tfrac{n}{p'}-\alpha\right)^{-1}\left(\int_0^\infty r^{\alpha p+n-1}\left|\overline{f}(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left|\overline{f}(r)\right| = \left|\int_{S_{n-1}} f(r,\xi)\,d\xi\right| &\leq \int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|\,d\xi \\ &\leq \left(\int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|^p\,d\xi\right)^{\frac{1}{p}} (mesS_{n-1})^{\frac{1}{p'}} \\ &= (nv_n)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|^p\,d\xi\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On utilise cette estimation et on revient aux coordonnées cartisiennes. Alors

$$\begin{aligned}\left\||x|^\alpha\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} &\leq n^{\frac{1}{p}} v_n^{-\frac{1}{p'}} \left(\tfrac{n}{p'}-\alpha\right)^{-1} \left((nv_n)^{\frac{p}{p'}} \int_0^\infty r^{\alpha p+n-1} \int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|^p\,d\xi\,dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n\left(\tfrac{n}{p'}-\alpha\right)^{-1} \left(\int_0^\infty \int_{S_{n-1}} r^{n-1}\left(r^\alpha\,|f(r,\xi)|\right)^p\,d\xi\,dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\tfrac{1}{p'}-\tfrac{\alpha}{n}\right)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |r^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\tfrac{1}{p'}-\tfrac{\alpha}{n}\right)^{-1} \left\||x|^\alpha f(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}\end{aligned}$$

doù

$$\left\||x|^\alpha\,(\widetilde{H_1}f)(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \left\||x|^\alpha f(x)\right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}.$$

Avec les mêmes arguments que (3.4) on démontre (3.5).

Remarque : En utilisant ce raisonement, on peut obtenir (3.1) et (3.2).

Soit $n=1$, alors on a

$$I = \{y \in \mathbb{R}; |y| < r\} = [-|x|\,;|x|]$$

et $mesI = 2\,|x|$

on pose

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{H_1}f\right)(x) :&= \frac{1}{2\,|x|}\int_{[-|x|;|x|]} f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\,|x|}\int_{-|x|}^{|x|} f(y)\,dy\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{H_2}f\right)(x) :&= \frac{1}{2\,|x|}\int_{\mathbb{R}\setminus[-|x|;|x|]} f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\,|x|}\int_{y>|x|} f(y)\,dy\end{aligned}$$

d'où
Si $\alpha < \dfrac{1}{p'}$;

$$\left\| |x|^{\alpha} (\widetilde{H_1} f)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1} \| |x|^{\alpha} f(x) \|_{L_{p(\mathbb{R})}}$$

et si $\alpha > \dfrac{1}{p'}$;

$$\left\| |x|^{\alpha} (\widetilde{H_2} f)(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'} \right)^{-1} \| |x|^{\alpha} f(x) \|_{L_{p(\mathbb{R})}} .$$

Théorème 3.2 *Soit $f(x)$ une fonction mesurable sur $(0;\infty)$. Considérons pour tout $x \in (0;\infty)$ les deux opérateurs suivants :*

$$(T_1 f)(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

et

$$(T_2 f)(x) = \int_x^{\infty} f(y)\, dy$$

1) *Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions non négatives, mesurables sur (0 ;∞), $\psi f \in L_{p(0;\infty)}$ et*

$$\| \varphi(T_1 f) \|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A_1 \| \psi f \|_{L_{p(0;\infty)}} . \tag{3.6}$$

Pour que l'inégalité (3.6) soit vérifiée pour une certaine constante $A_1 > 0$,
(quelle que soit $f(x)$ mesurable et non négative sur (0 ;∞)), il faut et il suffit que

$$B_1 := \sup_{x>0} \| \varphi \|_{L_{p(x;\infty)}} . \left\| \frac{1}{\psi} \right\|_{L_{p'(0;x)}} < \infty.$$

Si A_1^* est la constante optimale dans (3.6), alors

$$B_1 \leq A_1^* \leq p'^{\frac{1}{p'}} . p^{\frac{1}{p}} . B_1 .$$

Si $p = 1$ ou $p = \infty$, $A_1^* = B_1$

2) *Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions non négatives, mesurables sur (0 ;∞) , $\psi f \in L_{p(0;\infty)}$ et*

$$\| \varphi(T_2 f) \|_{L_{p(0;\infty)}} \leq A_2 \| \psi f \|_{L_{p(0;\infty)}} \tag{3.7}$$

Pour que l'inégalité (3.7) soit vérifiée pour une certaine constante $A_2 > 0$,
(Quelle que soit $f(x)$ mesurable sur (0 ;∞)), il faut et il suffit que

$$B_2 := \sup_{x>0} \| \varphi \|_{L_{p(0;x)}} . \left\| \frac{1}{\psi} \right\|_{L_{p'(x;\infty)}} < \infty.$$

Si A_2^* est la constante optimale dans (3.7), alors

$$B_2 \leq A_2^* \leq p'^{\frac{1}{p'}} . p^{\frac{1}{p}} . B_2 .$$

preuve :
C'est un cas particulier du théorème 5.2 (voir chapitre 5) avec $q = p$.

Maintenant on se propose de résoudre le problème suivant :
A partir de ce théorème obtenir en tant que conséquences les inégalités (2.15) et (2.16).
Soit $\varphi(x) := x^{\alpha-1}$, $\psi(x) = x^{\alpha}$, $\alpha < 1/p'$. Alors d'aprés le théorème on a

$$B_1 = \sup_{x>0} \left\|t^{\alpha-1}\right\|_{L_{p(x;\infty)}} \left\|t^{-\alpha}\right\|_{L_{p'(0;x)}} = \left(\frac{1}{(p(1-\alpha)-1)^{1/p}}\right)\left(\frac{(p-1)^{1/p'}}{(p(1-\alpha)-1)^{1/p'}}\right)$$

$$= \frac{(p')^{-1/p'}p^{-1/p}}{1/p'-\alpha} < \infty.$$

En vertu du théorème, l'inégalité (2.15) est vérifieé avec comme constante A_1.
De plus en ce qui concerne la constante optimale $A_1^{\star}$ le théorème nous permet d'obtenir l'éstimation suivante :

$$B_1 \leq A_1^{\star} \leq (p')^{1/p'}(p)^{1/p} B_1,$$

mais d'aprés (2.15)

$$A_1^{\star} = \frac{1}{1/p'-\alpha} = (p')^{1/p'}(p)^{1/p} B_1.$$

D'une manière analogue, on traite le cas $\alpha > 1/p'$.

3.2 Inégalités de Hardy pour les quasi-normes

• Pour les quasi-normes dans L_p $(0 < p < 1)$ les inégalités (2.15) et (2.16) ne sont plus valables pour les fonctions seulement mesurables. Pour obtenir l'analogue de (2.15) et (2.16) on peut considérer la classe des fonctions monotones. C'est ce qui est exprimé dans le théorème suivant :

Théorème 3.3 *:(voir* [37]*)*

i : *Soient* $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha < \frac{1}{p'}$, $f(x) \geq 0$ *une fonction monotone définie sur* $(0;\infty)$, *alors ; il éxiste une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\left\|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\right\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq C \left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_{p(0;\infty)}}. \tag{3.8}$$

ii : *Soient* $0 < p < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > \frac{1}{p'}$, $f(x) \geq 0$ *une fonction décroissante définie sur* $(0;\infty)$, *alors ; il éxiste une constante* $C' > 0$ *telle que :*

$$\left\|x^{\alpha}(H_2 f)(x)\right\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq C' \left\|x^{\alpha} f(x)\right\|_{L_{p(0;\infty)}}. \tag{3.9}$$

Preuve : Pour la démonstration on utilisera le lemme 2.2 (chapitre 2).
Soient $\alpha < 1/p'$, $f(x)$ une fonction croissante, $f(x) \geq 0$. $F(x)$ est une fonction définie comme suit :

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt, \forall x \in (0;\infty).$$

$F(x)$ est aussi croissante et par conséquent en vertu du lemme 2.2 et de l'inégalité suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{k=\infty} |a_k|\right)^p \leq \sum_{k=1}^{k=\infty} |a_k|^p .$$

(C'est un cas particulier de l'inégalité de Jensen [voir annexe] lorsque $q = 1$)

$$\begin{aligned}
J := \|x^\alpha (H_1 f)(x)\|^p_{L_{p(0;\infty)}} &= \int_0^\infty x^{(\alpha-1)p} F^p(x)\,dx \\
&\leq C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} F^p(2^k) \\
&= C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \left(\int_0^{2^k} f(t)\,dt\right)^p \\
&= C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \left(\sum_{m=-\infty}^{m=k} \int_{2^{m-1}}^{2^m} f(t)\,dt\right)^p \\
&\leq C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \left(\sum_{m=-\infty}^{m=k} \int_{2^{m-1}}^{2^m} f(2^m)\,dt\right)^p \\
&= C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \left(\sum_{m=-\infty}^{m=k} 2^m f(2^m)\right)^p \\
&\leq C_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \sum_{m=-\infty}^{m=k} 2^{mp} f^p(2^m),
\end{aligned}$$

où $C_2 = 2^{-(\alpha-1)p-1}$ car f est croissante et $(\alpha-1)p < 0$.
En changeant l'ordre de la sommation, en calculant la somme de la progréssion géométrique et en appliquant encore une fois le lemme 2.2, on obtient

$$
\begin{aligned}
J = \|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|^p_{L_{p(0;\infty)}} &\leq C_2 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 2^{mp} \left(\sum_{k=m}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \right) f^p(2^m) \\
&= C_2 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 2^{mp} \left(2^{m[(\alpha-1)p+1]} \sum_{k=0}^{k=\infty} 2^{k[(\alpha-1)p+1]} \right) f^p(2^m) \\
&= C_2 \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 2^{mp} \left(\frac{2^{m[(\alpha-1)p+1]}}{1-2^{(\alpha-1)p+1}} \right) f^p(2^m) \\
&= \frac{C_2}{1-2^{(\alpha-1)p+1}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 2^{m(\alpha p+1)} f^p(2^m).
\end{aligned}
$$

Encore une fois on applique le lemme 2.2 et on obtient ;

$$
\begin{aligned}
J = \|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|^p_{L_{p(0;\infty)}} &\leq \frac{C_2 2^{-\alpha p}}{1-2^{(\alpha-1)p+1}} \int_0^{\infty} x^{\alpha p} f^p(x)\, dx \\
&= \frac{C_2 2^{-\alpha p}}{1-2^{(\alpha-1)p+1}} \|x^{\alpha} f(x)\|^p_{L_{p(0;\infty)}} \\
&= \frac{2^{-2\alpha p+p-1}}{1-2^{(\alpha-1)p+1}} \|x^{\alpha} f(x)\|^p_{L_{p(0;\infty)}}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\|x^{\alpha}(H_1 f)(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} \leq \left(\frac{2^{-2\alpha p+p-1}}{1-2^{(\alpha-1)p+1}} \right)^{1/p} \|x^{\alpha} f(x)\|_{L_{p(0;\infty)}} .
$$

Les autres cas possibles peuvent être considérés et prouvés d'une manière analogue.

Chapitre 4

Nouveau type de l'inégalité intégrale de Hardy ($p < 0$)

Les enoncés des théorèmes suivants et leurs preuves ont fait l'objet de la publication de Bicheng Yang (voir [3]).
Ensuite on a étudié des inégalités analogues à celles de l'auteur de la publication, de plus ces dernières ont été étendues à $\mathbb{R}^n$.
On sait que si $p > 1$ et $0 < \int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt < \infty$ on a l'inégalité suivante

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p(x)\,dx < \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt; \tag{4.1}$$

où la constante $\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p$ est optimale (voir détails dans le chapitre 2).
Dans ce chapitre on considère une nouvelle inégalité intégrale du type de Hardy, c'est-à-dire l'analogue de (4.1) pour $p < 0$ avec une constante optimale.

Théorème 4.1 *Si $p < 0$, $r \neq 1$, $f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt < \infty$, $F(x)$ une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, (r < 1);\; F(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt, (r > 1),$$

alors, on a

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p(x)\,dx < \left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt; \tag{4.2}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{|r-1|}\right)^p$ est la constante optimale .

Pour démontrer le theoreme 4.1, nous avons besoin de ce type d'inégalité intégrale de Hölder.

Proposition : Si $p<0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $f(t),\, g(t)\geq 0$ et $f\in L_{p(E)}$, $g\in L_{q(E)}$, alors

$$\int_E f(t)g(t)\,dt \geq \left(\int_E f^p(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^q(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.3}$$

On a une égalité si et seulement si, il existe des constantes c et d, telles quelles ne soient pas nulles simultanément et

$$cf^p(t)=dg^q(t),\ dans E.$$

Preuve de la proposition : On sait que si $p<0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, alors $0<q<1$.
D'aprés l'inégalité suivante :
si $a,b\geq 0$, $0<q<1$ et $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, alors

$$ab\geq \frac{a^p}{p}+\frac{q^q}{q}.$$

on prend $a=\frac{|f(t)|}{\|f\|_{L_p(E)}}$ et $b=\frac{|g(t)|}{\|g\|_{L_q(E)}}$
alors,ona

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_q(E)}}\geq \frac{|f(t)|^p}{p\,\|f\|^p_{L_p(E)}}+\frac{|g(t)|^q}{q\,\|g\|^q_{L_q(E)}},$$

puis en intégrant par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_E \frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_q(E)}}\,dt \ &\geq\ \int_E \frac{|f(t)|^p}{p\,\|f\|^p_{L_p(E)}}\,dt+\int_E \frac{|g(t)|^q}{q\,\|g\|^q_{L_q(E)}}\,dt\\ &=\ \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_E |f(t)g(t)|\ dt\geq \|f\|_{L_p(E)}\,\|g\|_{L_q(E)}\,.$$

On a une égalité si et seulement si, il existe des constantes c et d, telles quelles ne soient pas nulles simultanément et

$$cf^p(t)=dg^q(t),\ dans E.$$

(pour la preuve voir théorème(H),ch.2)
Conséquence : De (4.3) si $p<0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $\ f(t),\, g(t)\geq 0$ et $f\in L_{p(E)}$, $\ g\in L_{q(E)}$, on obtient

$$\left(\int_E f(t)g(t)\,dt\right)^p \leq \left(\int_E f^p(t)\,dt\right) \left(\int_E g^q(t)\,dt\right)^{p-1}. \tag{4.4}$$

Dans ce qui suit on démontre (4.2) pour la fonction $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt, (r<1)$.

Lemme 4.1 *Si* $p < 0,\ \ r < 1,\ \ f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt < \infty$, *alors*

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx < \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt, \tag{4.5}$$

où le facteur $\left(\dfrac{p}{r-1}\right)^p$ *est la constante optimale. En particulier,*
(i) *pour* $r = 0$, *on a*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx < (-p)^p \int_0^\infty (tf(t))^p\,dt; \tag{4.6}$$

(ii) *pour* $r = p$, *on a*

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(t)\,dt; \tag{4.7}$$

(iii) *pour* $r = 1 + p$, *on a*

$$\int_0^\infty x^{-1}\left(\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}\right)^p dx < \int_0^\infty t^{-1} f^p(t)\,dt \tag{4.8}$$

où les facteurs dans les inégalités (4.6), (4.7) , (4.8) *sont les constantes optimales.*

Preuve du lemme : En vertu de (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p &= \left(\int_0^x \left(t^{\frac{1+p-r}{pq}} f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pq}}\right) dt\right)^p \\
&\leq \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \left(\int_0^x t^{-\frac{1+p-r}{p}}\,dt\right)^{p-1} \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt. \qquad (II)
\end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1} x^{\frac{1-r}{p}+r-1} \int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt. \tag{4.9}$$

Si l'inégalité (4.9) n'est pas stricte, c'est à dire que l'égalité est possible. on suppose qu'il y'a égalité, dans ce cas on aura

$$ct^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t) = dt^{-\frac{1+p-r}{p}}, p.p, dans(0,\infty), \qquad (III)$$

où c et d des constantes qui ne sont pas nulles(voir th(H),ch.2).
Et par conséquent $\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt$ est divergente et pour cette raison au niveau de (II)

l'inégalité est stricte.

Puisque $c \neq 0$, alors on trouve

$$t^{-r}\left(tf(t)\right)^p = \frac{d}{c}t^{-1},\ dans(0,\infty)$$

puisque $0 < \int_0^\infty t^{-r}\left(tf(t)\right)^p\,dt < \infty$. Ainsi d'aprés (4.9), on a.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx &< \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}\int_0^x t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt\,dx \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p-1}\int_0^\infty \left(\int_t^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}\,dx\right) t^{\frac{1+p-r}{q}} f^p(t)\,dt \\
&= \left(\frac{p}{r-1}\right)^{p}\int_0^\infty t^{-r}\left(tf(t)\right)^p\,dt.
\end{aligned}$$

donc on obtient (4.5).

Pour $0 < \varepsilon < 1-r$, $f_\varepsilon(t)$ définie par :

$$f_\varepsilon(t) = t^{\frac{r-1+\varepsilon}{p}-1},\ pour t \in (0,1];\ f_\varepsilon = 0,\ pour t \in (1,\infty),$$

on trouve que

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r-1+\varepsilon}\right)^p;$$

et

$$\int_0^\infty t^{-r}\left(tf_\varepsilon(t)\right)^p\,dt = \frac{1}{\varepsilon}.$$

S'il existe $r < 1$, telle que la constante $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ dans (4.5) n'est pas optimale, alors, il existe une constante K, avec $K < \left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ telle que (4.5) reste valable si l'on remplace $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ par K.

En particulier, on a

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx < K\int_0^\infty t^{-r}\left(tf_\varepsilon(t)\right)^p\,dt,$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{r-1+\varepsilon}\right)^p < K\frac{1}{\varepsilon},$$

il s'ensuit que $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p \leq K$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. de Cette contradiction on déduit que $\left(\frac{p}{r-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (4.5).

Ici on prouve (4.2) pour la fonction $F(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt, (r > 1)$.

Lemme 4.2 *Si $p<0$, $r>1$, $f(t)\geq 0$ et $0<\displaystyle\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\,dt<\infty$, alors*

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx<\left(\frac{p}{1-r}\right)^p\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\;dt; \tag{4.10}$$

où le facteur $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ est la constante optimale. En particulier ,
(i) *pour $r=2$, on a*

$$\int_0^\infty x^{-2}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx<(-p)^p\int_0^\infty t^{p-2}f^p(t)\,dt; \tag{4.11}$$

(ii) *pour $r=1-p$, on a*

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx<\int_0^\infty t^{2p-1}f^p(t)\,dt; \tag{4.12}$$

où les facteurs dans les inégalités (4.11) *et* (4.12) *sont les constantes optimales.*

Preuve du lemme : En vertu de (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p &= \left(\int_x^\infty \left(t^{\frac{1+p-r}{pq}}f(t)\right)\left(t^{-\frac{1+p-r}{pq}}\right)\,dt\right)^p\\ &\leq \int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}}f^p(t)\,dt\left(\int_x^\infty t^{-\frac{1+p-r}{p}}\,dt\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}x^{\frac{1-r}{p}+r-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}}f^p(t)\,dt.\end{aligned}$$

$$\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p\leq\left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}x^{\frac{1-r}{p}+r-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}}f^p(t)\,dt. \tag{4.13}$$

Par le même raison que le lemme précédent on a l'inégalité stricte.
puisque $0<\displaystyle\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\;dt<\infty$. Ainsi d'aprés (4.13), on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx &< \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty x^{\frac{1-r}{p}-1}\int_x^\infty t^{\frac{1+p-r}{q}}f^p(t)\,dt\,dx\\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^{p-1}\int_0^\infty\left(\int_0^t x^{\frac{1-r}{p}-1}\,dx\right)t^{\frac{1+p-r}{q}}f^p(t)\,dt\\ &= \left(\frac{p}{1-r}\right)^p\int_0^\infty t^{-r}\,(tf(t))^p\;dt.\end{aligned}$$

donc on obtient (4.10).
Pour $0<\varepsilon<r-1$, $f_\varepsilon(t)$ définie par :

$$f_\varepsilon(t)=t^{\frac{r-1-\varepsilon}{p}-1},\ pourt\in[1,\infty);\ f_\varepsilon=0,\ pourt\in(0,1),$$

on trouve que

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{1-r+\varepsilon}\right)^p;$$

et

$$\int_0^\infty t^{-r}\left(tf_\varepsilon(t)\right)^p dt = \frac{1}{\varepsilon}.$$

S'il existe $r>1$, telle que la constante $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ dans (4.10) n'est pas optimale, alors, il existe une constante K, avec $K<\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ telle que (4.10) reste valable si l'on remplace $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ par K.

En particulier , on a

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f_\varepsilon(t)\,dt\right)^p dx < K\int_0^\infty t^{-r}\left(tf_\varepsilon(t)\right)^p dt,$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p}{1-r+\varepsilon}\right)^p < K\frac{1}{\varepsilon}$$

il s'ensuit que $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p \leq K$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. De Cette contradiction on déduit que $\left(\dfrac{p}{1-r}\right)^p$ est la constante optimale dans (4.10).

Preuve du theoreme 4.1 :

En conclusion d'aprés (4.5) et (4.10) on déduit (4.2).

Remarques :

(**i**) Étant donné que pour $p=1$, les deux membres de (4.1) (ou (3.2)) sont égaux, on conclut que nous avons les types inégalités intégrales de Hardy (4.1) et (4.2) pour $p \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(**ii**) En remplacent $f^p(t)$ par $f(t)$ et p par $\frac{1}{r}$ dans (4.7) , on obtient $r<0$ et

$$\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^x f^r(t)\,dt}{x}\right)^{\frac{1}{r}} dx < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{r}}\int_0^\infty f(t)\,dt. \tag{4.14}$$

Maintenant on s'intérèsse à l'inégalité (4.2) en prenant comme opérateurs H_1 et H_2 définis par :

$$(H_1f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

et

$$(H_2f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt.$$

Dans ce qui suit on étudié l'analogue de (4.5) et (4.10). Il s'avère que la seule difference est le changement du paramètre r dans la constante, c'est à dire à la place de r apparaît $\alpha + p$.

Théorème 4.2 *Soient $p < 0$, $\alpha \neq 1 - p$, $f(t) \geq 0$ et $0 < \int_0^\infty t^{-\alpha} (f(t))^p \, dt < \infty$, alors*
(i) si $\alpha < 1 - p$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} (H_1 f)^p(x) \, dx < \left(\frac{p}{\alpha + p - 1} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (f(t))^p \, dt; \tag{4.15}$$

où le facteur $\left(\frac{p}{\alpha + p - 1} \right)^p$ est la constante optimale et $(H_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$,
(ii) si $\alpha > 1 - p$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} (H_2 f)^p(x) \, dx < \left(\frac{-p}{\alpha + p - 1} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (f(t))^p \, dt; \tag{4.16}$$

où le facteur $\left(\frac{-p}{\alpha + p - 1} \right)^p$ est la constante optimale et $(H_2 f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(t) \, dt$.

Preuve :
Si $r = \alpha + p$ dans l'inégalité (4.5), on obtient
si $\alpha + p < 1$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha - p} \left(\int_0^x f(t) \, dt \right)^p dx < \left(\frac{p}{\alpha + p - 1} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha - p} (t f(t))^p \, dt;$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt \right)^p dx < \left(\frac{p}{\alpha + p - 1} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (f(t))^p \, dt.$$

Si $r = \alpha + p$ dans l'inégalité (4.10), on obtient
si $\alpha + p > 1$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha - p} \left(\int_x^\infty f(t) \, dt \right)^p dx < \left(\frac{-p}{\alpha + p - 1} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha - p} (t f(t))^p \, dt;$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(\frac{1}{x} \int_x^\infty f(t) \, dt \right)^p dx < \left(\frac{-p}{\alpha + p - 1} \right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (f(t))^p \, dt.$$

Pour montrer que $\left(\frac{p}{\alpha + p - 1} \right)^p$ est optimale dans (4.15), on suppose qu'il éxiste une constante $A > 0$ tel que :

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt \right)^p dx < A \int_0^\infty t^{-\alpha} (f(t))^p \, dt,$$

i.e

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx}{\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f(t)\right)^p\,dt} < A, \tag{4.17}$$

pour cela, on considère la fonction f_ξ, $0 < \xi < -\alpha - p + 1$ définie par.

$$\begin{cases} f_\xi = t^{(\alpha+p-1+\xi)/p-1}, & \text{si };t \in (0;1] \\ f_\xi = 0, & \text{si };t \in (1;\infty). \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_0^x f_\xi(t)\,dt\right)^p dx &= \int_0^1 x^{-\alpha-p}\left[\frac{x^{(\alpha+p-1+\xi)/p}}{(\alpha+p-1+\xi)/p}\right]^p dx \\
&= \left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p \int_0^1 x^{-\alpha-p+\alpha+p-1+\xi}\,dx \\
&= \left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p \frac{1}{\xi}.
\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_0^x f_\xi(t)\,dt\right)^p dx = \left(\frac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p \frac{1}{\xi}. \tag{4.18}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p\,dt &= \int_0^1 t^{-\alpha}\left[t^{(\alpha+p-1+\xi)/p-1}\right]^p dt \\
&= \int_0^1 t^{-\alpha-p+\alpha+p-1+\xi}\,dt \\
&= \frac{1}{\xi}.
\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p\,dt = \frac{1}{\xi}. \tag{4.19}$$

De (4.17), (4.18) et (4.19) on obtient $\left(\dfrac{p}{\alpha+p-1+\xi}\right)^p < A$, quand $\xi \longrightarrow 0$ on déduit $\left(\dfrac{p}{\alpha+p-1}\right)^p < A$, d'où $\left(\dfrac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (4.15).
Dans l'inégalité (4.16), si $\left(\dfrac{p}{\alpha+p-1}\right)^p$ n'est pas optimale, alors il éxiste une constante $B > 0$ telle que

$$\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx < B\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f(t)\right)^p\,dt,$$

i.e

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)\,dt\right)^p dx}{\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f(t)\right)^p\,dt} < B, \tag{4.20}$$

Pour $0<\xi<\alpha+p-1$, on définie la fonction $f_\xi(x)$ par :

$$\begin{cases} f_\xi = t^{(\alpha+p-1-\xi)/p-1}, & \text{si };t\in[1;\infty) \\ f_\xi = 0, & \text{si };t\in(0;1). \end{cases}$$

D'aprés des calculs on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_x^\infty f_\xi(t)\,dt\right)^p dx &= \int_1^\infty x^{-\alpha-p}\left[\frac{x^{(\alpha+p-1-\xi)/p}}{-(\alpha+p-1-\xi)/p}\right]^p dx \\ &= \left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p\int_1^\infty x^{-\alpha-p+\alpha+p-1-\xi}\,dx \\ &= \left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p\frac{1}{\xi}, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty x^{-\alpha-p}\left(\int_x^\infty f_\xi(t)\,dt\right)^p dx = \left(\frac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p\frac{1}{\xi}, \tag{4.21}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p\,dt &= \int_1^\infty t^{-\alpha}\left[t^{(\alpha+p-1-\xi)/p-1}\right]^p\,dt \\ &= \int_1^\infty t^{-\alpha-p+\alpha+p-1-\xi}\,dt \\ &= \frac{1}{\xi}. \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(f_\xi(t)\right)^p\,dt = \frac{1}{\xi}, \tag{4.22}$$

alors de (4.20), (4.21) et (4.22) on a. $\left(\dfrac{-p}{\alpha+p-1-\xi}\right)^p < B$, quand $\xi\longrightarrow 0$ on obtient $\left(\dfrac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p < B$. D'où $\left(\dfrac{-p}{\alpha+p-1}\right)^p$ est la constante optimale dans (4.16).

Remarque :

En changeant $F(x)$ par H_1, H_2 on obtient :

Dans (4.15) et (4.16) l'expression sous l'intégrale d'à droite est plus simple avec l'apparition du paramètre p au dénominateur de la constante.

Comme il a été signalé au début chapitre, ici on étend (4.15) et (4.16) à $\mathbb{R}^n$ et puis à la fin on vérifie le resultat obtenu.

4.1 Extension des inégalité (4.15) et (4.16) à $\mathbb{R}^n$

Théorème 4.3 *Soient* $p < 0$, $\alpha \neq n(1-p)$, $f(t) \geq 0$ *et* $0 < \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx < \infty$, $f(r,\xi) \in L_{p(S_{n-1})}$ *(*S_{n-1} *désigne la sphére unité dans* $\mathbb{R}^n$*), alors*
(i) si $\alpha < n(1-p)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (\widetilde{H_1} f)^p(x) \, dx < \left(\frac{np}{\alpha + n(p-1)} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx; \tag{4.23}$$

où $(\widetilde{H_1} f)(x) = \dfrac{1}{mesB_r} \displaystyle\int_{B_r} f(t) \, dt,$
(ii) si $\alpha > n(1-p)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (\widetilde{H_2} f)^p(x) \, dx < \left(\frac{-np}{\alpha + n(p-1)} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n / B_r} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx; \tag{4.24}$$

où $(\widetilde{H_2} f)(x) = \dfrac{1}{mesB_r} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n / B_r} f(t) \, dt.$

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x| > 0$, $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| < r\}$. On introduit les coordonnées sphériques (ρ, ξ), où $\rho = |y|$, $\xi = \frac{y}{|y|} \in S_{n-1}$ (S_{n-1} la sphére unité dans $\mathbb{R}^n$) et on pose

$$\overline{f}(\rho) = \int_{S_{n-1}} f(\rho, \xi) \, d\xi$$

alors

$$\begin{aligned} (\widetilde{H_1} f)(x) &= \frac{1}{v_n r^n} \int_0^r \rho^{n-1} \, d\rho \int_{S_{n-1}} f(\rho, \xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{v_n r^n} \int_0^r \rho^{n-1} \overline{f}(\rho) \, d\rho, \end{aligned}$$

où $v_n = \pi^{\frac{n}{2}} \left(\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \right)^{-1}$ est le volume de la boule unité et La fonction Γ est définie par :

$$\Gamma(\delta) = \int_0^\infty t^{\delta - 1} e^{-t} \, dt.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left|(\widetilde{H}_1 f)(x)\right|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{r^{-\alpha-np}}{v_n^p} \left|\int_{B_r} f(t)\, dt\right|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} r^{-\alpha-np} v_n^{-p} \left|\int_0^r \rho^{n-1} \int_{S_{n-1}} f(\rho,\xi)\, d\xi \, d\rho\right|^p \, dx \\
&= n v_n^{1-p} \int_0^\infty r^{-\alpha-np} r^{n-1} \left|\int_0^r \rho^{n-1} \overline{f}(\rho)\, d\rho\right|^p \, dr \\
&= n v_n^{1-p} \int_0^\infty r^{-\alpha-n(p-1)-1} \left|\int_0^r \rho^{n-1} \overline{f}(\rho)\, d\rho\right|^p \, dr \\
&= n v_n^{1-p} \int_0^\infty r^{-\alpha-n(p-1)+p-1} \left|\frac{1}{r}\int_0^r \rho^{n-1} \overline{f}(\rho)\, d\rho\right|^p \, dr \\
&= n v_n^{1-p} \int_0^\infty r^{-(\alpha+(n-1)(p-1))} \left|(H_1 g)(r)\right|^p \, dr,
\end{aligned}$$

où $g(\rho) = \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)$.

D'aprés (4.15) du théorème 4.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left|(\widetilde{H}_1 f)(x)\right|^p \, dx &\leq n v_n^{1-p} \left(\frac{p}{\alpha+n(p-1)}\right)^p \int_0^\infty r^{-(\alpha+(n-1)(p-1))} |g(r)|^p \, dr \\
&= n v_n^{1-p} \left(\frac{p}{\alpha+n(p-1)}\right)^p \int_0^\infty r^{-(\alpha+(n-1)(p-1))} r^{(n-1)p} \left|\overline{f}(r)\right|^p \, dr.
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\overline{f}(r)\right|^p \leq (n v_n)^{p/p'} \int_{S_{n-1}} f^p(r,\xi)\, d\xi.$$

On utilise cette estimation et on revient aux coordonneés cartisiennes. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left|(\widetilde{H}_1 f)(x)\right|^p \, dx &\leq n v_n^{1-p} \left(\frac{p}{\alpha+n(p-1)}\right)^p \int_0^\infty r^{-\alpha+n-1} \left((n v_n)^{p/p'} \int_{S_{n-1}} f^p(\rho,\xi)\, d\xi\right) dr \\
&= n^p \left(\frac{p}{\alpha+n(p-1)}\right)^p \int_0^\infty r^{-\alpha} \left(r^{n-1} \int_{S_{n-1}} f^p(\rho,\xi)\, d\xi\right) dr \\
&= \left(\frac{np}{\alpha+n(p-1)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} \left|(\widetilde{H}_1 f)(x)\right|^p \, dx \leq \left(\frac{np}{\alpha+n(p-1)}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\alpha} (f(x))^p \, dx.$$

De la même manière que (4.23) on démontre (4.24).

Remarque : On peut verifier (4.23) et (4.24) comme suit si $n = 1$, on retrouve respectivement (4.15) et (4.16).

Chapitre 5

Inégalités de poids

5.1 préliminaire

Une fonction de poids est un facteur fonctionnel, permettant d'obtenir une norme (ou semi-norme) finie d'un type donné pour une fonction pour laquelle la norme donneé (ou semi-norme) sans ce facteur est infinie . La notion de fonction de poids joue un rôle trés important dans les questions d'approximation de fonctions (en particulier pour les intervalles infinis), dans la théorie d'injection des espaces fonctionnels, dans les problemes d'extension de fonctions et dans la théorie des équations différentielles.
Un espace de poids est un espace ayant une norme (semi-norme) finie avec un certain facteur qui est la fonction de poids.
L'introduction de fonction de poids permet d'elargir ou de restreindre les espaces usuels (sans fonction de poids) normés ou semi-normés dont les fonctions admetant des normes (ou semi-normes) infinies.

5.2 exemples d'espaces de poids

a) L'espace $L_{p(\Omega,\rho)}$:
Soit ρ une fonction non négative et mesurable sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\|f\|_{L_{p(\Omega,\rho)}} = \left(\int_\Omega \rho(x) \left| f(x) \right|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

pour $1 \leq p < \infty$
et

$$\|f\|_{L_{\infty(\rho)}} = ess \sup_{x\in\Omega} \left| f(x)\rho(x) \right| .$$

Remarque :

1. Si $\rho \equiv 1$, on a $L_{p(\Omega,\rho)} \equiv L_{p(\Omega)}$.

2. ρ est appelée fonction de poids.

b) L'espace $C_{\rho(\Omega)}$:
Soit l'espace $C(\Omega)$ avec la norme

$$\|f\|_C = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

L'espace $C_{\rho(\Omega)}$, où ρ est une fonction de poids, est un espace de poids défini de la manière suivante :

$$\|f\|_{C_\rho} = \sup_{x\in\Omega} |\rho(x)f(x)|.$$

Selon le choix de la fonction ρ, $C_{\rho(\Omega)}$ peut être plus large ou plus restreint par rapport à $C(\Omega)$.

5.3 inégalités de Hardy de poids

Théorème 5.1 *Soient $1 \le p \le q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, f une fonction mesurable sur l'intervalle (0,∞), $\omega(x) \ge 0$ et $\nu(x) \ge 0$ des fonctions mesurables sur $(0,\infty)$. Alors*

$$\left[\int_0^\infty \left|\omega(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \le C\left[\int_0^\infty |\nu(x)f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}; \tag{5.1}$$

est vérifiée si, et seulement si :

$$B = \sup_{r>0}\left(\int_r^\infty |\omega(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^r |\nu(x)|^{-p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty; \tag{5.2}$$

où C est une constante indépendante de f et $p' = p/(p-1)$, de plus , si C est optimale , alors les inégalités suivantes sont aussi vérifiées

$$B \le C \le B\,(q/(q-1))^{\frac{p-1}{p}}\,q^{\frac{1}{q}},$$

si $p = 1$ ou $p = \infty$, alors $B = C$.

Preuve :
Necessité. Si $f \ge 0$ et *supp*$f \subset [0,r]$, alors de l'inégalité (5.1) on déduit

$$\left(\int_r^\infty |\omega(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\int_0^r f(t)\,dt \le C\left(\int_0^r |\nu(x)f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

car on a

$$\left(\int_r^\infty |\omega(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\int_0^r f(t)\,dt \le \left[\int_0^\infty \left|\omega(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|^q dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\left[\int_0^\infty |\nu(x)f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^r |\nu(x)f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

a) On suppose $\displaystyle\int_0^r |\nu(x)|^{-p/(p-1)}\,dx < \infty$. On pose $f(x) = |\nu(x)|^{-p'}$ si $x < r$ et $f(x) = 0$ si $x > r$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left(\int_r^\infty |\omega(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \int_0^r |\nu(x)|^{-p'}\,dx &\leq C\left(\int_0^r \left|(\nu(x))^{1-p/(p-1)}\right|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= C\left(\int_0^r |\nu(x)|^{-p/(p-1)}\,dx\right)^{1/p} \\
&= C\left(\int_0^r |\nu(x)|^{-p'}\,dx\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\int_r^\infty |\omega(x)|^q\,dx\right|^{1/q} \left|\int_0^r |\nu(x)|^{-p'}\,dx\right|^{1/p'} \leq C. \tag{5.3}$$

donc par passage au sup, on obtient

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty |\omega(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r |\nu(x)|^{-p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

b) Si $\displaystyle\int_0^r |\nu(x)|^{-p'}\,dx = \infty$, c'est à dire si l'intégrale précédente est dévergente, on peut obtenir le même résultat en changeant dans (5.1) la fonction $\nu(x)$ par $\nu(x) + \varepsilon sgn\nu(x)$, $\varepsilon > 0$, et en passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Suffisance. On pose $h(x) = \left(\displaystyle\int_0^x |\nu(t)|^{-p'}\,dt\right)^{1/qp'}$.

En vertu de l'inégalité de Hölder on a

$$\left(\int_0^\infty \left|\omega(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|^q dx\right)^{p/q} = \left(\int_0^\infty |\omega(x)|^q \left|\int_0^x f(t)\,(h(t).\nu(t))\,(h(t).\nu(t))^{-1}\,dt\right|^q dx\right)^{p/q} \leq$$

$$\leq \left\{\int_0^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |f(t)h(t)\nu(t)|^p\,dt\right)^{q/p} \left(\int_0^x |h(t)\nu(t)|^{-p'}\,dt\right)^{q/p'} dx\right\}^{p/q}. \tag{5.4}$$

Maintenant on démontre que : si φ, $f \geq 0$, $r \geq 1$, alors

$$\left(\int_0^\infty \varphi(x)\left(\int_0^x f(y)\,dy\right)^r dx\right)^{1/r} \leq \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty \varphi(x)\,dx\right)^{1/r} dy. \tag{5.5}$$

L'expréssion du membre gauche de (5.5) est égale à

$$J = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x)^{1/r} f(y)\chi_{[y,\infty)}(x)\,dy\right)^r dx\right)^{1/r},$$

où $\chi_{[y,\infty)}(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[y, +\infty)$; en appliquant l'inégalité intégrale de Minkowsky, on obtient

$$J \leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left[\varphi(x)^{1/r} f(y)\chi_{[y,\infty)}(x)\right]^r dx\right)^{1/r} dy = \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty \varphi(x)\,dx\right)^{1/r} dy.$$

D'aprés (5.5) on peut majoré la partie droite de (5.4) par l'expréssion

$$J' = \int_0^\infty |f(t)h(t)\nu(t)|^p \left(\int_t^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |h(y)\nu(y)|^{-p'} \, dy \right)^{q/p'} dx \right)^{p/q} dt. \tag{5.6}$$

C'est à dire dans (5.5), on prend

$$\begin{cases} \varphi(x) = |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |h(y)\nu(y)|^{-p'} \, dy \right)^{q/p'}, \\ f(t) = |f(t)h(t)\nu(t)|^p, \\ r = q/p \end{cases}$$

On remplace h par sa valeur dans l'intégrale intérieure, on obtient

$$\int_t^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |\nu(y)|^{-p'} \left(\int_0^y |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right)^{-1/q} dy \right)^{q/p'} dx. \tag{5.7}$$

c'est à dire

$$\int_t^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |h(y)\nu(y)|^{-p'} \, dy \right)^{q/p'} dx = \int_t^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |\nu(y)|^{-p'} \left(\int_0^y |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right)^{-1/q} dy \right)^{q/p'} dx.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \int_0^x |\nu(y)|^{-p'} \left(\int_0^y |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right)^{-1/q} dy &= \int_0^x \left(\int_0^y |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right)^{-1/q} d\left(\int_0^y |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right) dy \\ &= \frac{\left(\int_0^x |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right)^{1-1/q}}{1-1/q} \\ &= q' \left(\int_0^x |\nu(z)|^{-p'} \, dz \right)^{1/q'}. \end{aligned}$$

alors l'intégrale (5.7) est égale à

$$(q')^{q/p'} \int_t^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_0^x |\nu(y)|^{-p'} \, dy \right)^{q/p'q'} dx.$$

En vertu de (5.2) (de définition de B) on peut écrire

$$\begin{aligned} B^{q/q'}(q')^{q/p'} \int_t^\infty |\omega(x)|^q \left(\int_x^\infty |\omega(y)|^q \, dy \right)^{-1/q'} dx = \\ = B^{q-1}(q')^{q/p'} q \left(\int_t^\infty |\omega(x)|^q \, dx \right)^{1/q} \leq \\ \leq B^q(q')^{q/p'} q \left(\int_0^t |\nu(x)|^{-p'} \, dx \right)^{-1/p'} = B^q(q')^{q/p'} q h(t)^{-q}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Par conséquent

$$J' \leq \int_0^\infty |f(t)h(t)\nu(t)|^p \left(B^q (q')^{q/p'} q h(t)^{-q}\right)^{p/q} dt =$$
$$= B^p (q')^{p/p'} q^{p/q} \int_0^\infty |f(t)\nu(t)|^p \ dt.$$

Donc l'inégalité (5.1) est vérifiée avec $C = B(q')^{(p-1)/p} q^{1/q}$.

On considère maintenant les cas limites.

Si $p = \infty$, alors $q = \infty$ et l'inégalité (5.1) est déduite de l'éstimation évidente

$$ess \sup_{0<x<\infty} \left|\omega(x) \int_0^x f(t)\, dt\right| \leq ess \sup_{0<x<\infty} |\omega(x)| \left|\int_0^x (\, dt/ |\nu(t)|)\right| ess \sup_{0<t<x} |\nu(t) f(t)|\,.$$

Si $p = 1$, $q < \infty$, de l'inégalité (5.5) on déduit

$$\left(\int_0^\infty \left|\omega(x) \int_0^x f(t)\, dt\right|^q \ dx\right)^{1/q} \leq$$
$$\leq \int_0^\infty |f(t)| \left(\int_t^\infty |\omega(x)|^q \ dx\right)^{1/q} (1/ |\nu(t)|) |\nu(t)| \ dt \leq B \int_0^\infty |\nu(t) f(t)| \ dt.$$

Si $q = \infty$, $p = 1$. Alors

$$ess \sup_{0<x<\infty} \left|\omega(x) \int_0^x f(t)\, dt\right| \leq$$
$$\leq ess \sup_{0<x<\infty} \left(|\omega(x)|\, ess \sup_{0<t<x} (1/ |\omega(t)|) \int_0^x |\nu(t) f(t)| \ dt\right) \leq B \int_0^\infty |\nu(t) f(t)| \ dt.$$

Si $p > 1$, alors

$$ess \sup_{0<x<\infty} \left|\omega(x) \int_0^x f(t)\, dt\right| \leq$$
$$\leq ess \sup_{0<x<\infty} \left[ess \sup_{x<t<\infty} |\omega(x)| \left(\int_0^x |\nu(t)|^{-p'} \ dt\right)^{1/p'} \left(\int_0^x |\nu(t) f(t)|^p \ dt\right)^{1/p}\right] \leq$$
$$\leq B \left(\int_0^\infty |\nu(t) f(t)|^p \ dt\right)^{1/p}.$$

Le cas où $F(x) = \displaystyle\int_x^\infty f(y)\, dy$ peut être traité de la même manière.

5.4 Le cas des fonctions monotones

(voir [10]) On considère f une fonction monotone et positive sur $(0,\infty)$, pour α réel. On écrit :

$$\begin{cases} f \in \mathbf{Q}_\alpha, & \text{si}; x^{-\alpha} f(x) \downarrow \\ f \in \mathbf{Q}^\alpha, & \text{si } x^{-\alpha} f(x) \uparrow, \end{cases}$$

où $x^{-\alpha}f(x)\downarrow$ disigne que la fonction $x^{-\alpha}f(x)$ est décroissante et $x^{-\alpha}f(x)\uparrow$ est croissante. L'objectif est de trouver des conditions sur les fonctions de poids ω et ν telle que l'inégalité de type inégalité inverse de Hölder

$$\left(\int_0^\infty [f(x)]^q\,\omega(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty [f(x)]^p\,\nu(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{5.9}$$

soit vérifieé ; pour toute fonction $f(x)>0$ appartenant à $\mathbf{Q}_\alpha$ et $\mathbf{Q}^\alpha$. Quelque resultat de ce type sont prouvés par J.Bergh, V.Burenkov, et L.E.Persson [16], H.Heinig et V.D.Stepanov [20], V.D.Stepanov [26].
Le lemme suivant sera utile dans la démonstration du théorème qui suivra.

Lemme 5.1 *Soient ω une fonction de poids, $0<\gamma\leq 1$, $0<r<\infty$ φ une fonction mesurable , monotone et non négative sur $(0,\infty)$.*
Si φ décroissante, alors

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{1/\gamma}\omega(x)\,dx\right)^\gamma \leq \int_0^\infty \left[\int_0^{\varphi(y)} \omega(x)\,dx\right]^\gamma dy \tag{5.10}$$

et

$$\int_{\varphi^{-1}(x)}^\infty \varphi(y)^r\,dy = \int_0^x \varphi^{-1}(s)\,d(s^r) - x^r\varphi^{-1}(x). \tag{5.11}$$

Si φ croissante, alors

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{1/\gamma}\omega(x)\,dx\right)^\gamma \leq \int_0^\infty \left[\int_{\varphi(y)}^\infty \omega(x)\,dx\right]^\gamma dy. \tag{5.12}$$

Pour $\gamma=1$ (5.10) et (5.12) sont vérifiées.

Preuve : Pour la fonction décroissante φ nous pouvons écrire l'inégalité suivante :

$$\varphi^{-1}(x) \leq \int_0^\infty 1_{[0,\varphi(y)]}(x)\,dy. \tag{5.13}$$

En fait, soit $\varphi^{-1}(0^+)=\infty$ et $\varphi^{-1}(\infty)=0$. Si $0<y<\varphi^{-1}(x)$, alors $x\leq\varphi(y)$ et on obtient

$$\varphi^{-1}(x) = \int_0^{\varphi^{-1}(x)} dy = \int_0^\infty 1_{[0,\varphi^{-1}(x)]}(y)\,dy \leq \int_0^\infty 1_{[0,\varphi(y)]}(x)\,dy.$$

Dans le cas $\varphi^{-1}(0^+)<\infty$ ou $\varphi^{-1}(\infty)>0$ nous pouvons apporter des modifications à ces dernières inégalités de telle sorte que (5.13) soit aussi vérifiée. D'aprés l'inégalité de

Minkowsky pour la norme de $L_{1/\gamma,\omega}$ appliquée à (5.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{1/\gamma}\omega(x)\,dx\right)^\gamma &= \|\varphi^{-1}(x)\|_{L_{1/\gamma,\omega}} \\
&\leq \left\|\int_0^\infty 1_{[0,\varphi(y)]}(x)\,dy\right\|_{L_{1/\gamma,\omega}} \\
&\leq \int_0^\infty \left\|1_{[0,\varphi(y)]}(x)\right\|_{L_{1/\gamma,\omega}}\,dy \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^{\varphi(y)} \omega(x)\,dx\right]^\gamma dy.
\end{aligned}$$

(5.10) est prouvée.

L'égalité (5.11) résulte de l'égalité suivante :

$$\int_0^{x^r} \varphi^{-1}(t^{1/r})\,dt = \int_0^x \varphi^{-1}(s)\,d(s^r),$$

et de L'égalité évidente (considérations géométriques) suivante :

$$\int_0^{x^r} \varphi^{-1}(t^{1/r})\,dt = x^r\varphi^{-1}(x) + \int_{\varphi^{-1}(x)}^\infty \varphi(y)^r\,dy.$$

Pour démontrer l'inégalité (5.12) avec une fonction φ qui est croissante on remarque que

$$\varphi^{-1}(x) \leq \int_0^\infty 1_{[\varphi(y),\infty]}(x)\,dy. \tag{5.14}$$

En fait, si $\varphi^{-1}(0^+) = 0$, $\varphi^{-1}(\infty) = \infty$ et $0 < y < \varphi^{-1}(x)$, alors $\varphi(y) \leq x$ et

$$\varphi^{-1}(x) = \int_0^{\varphi^{-1}(x)} dy = \int_0^\infty 1_{[0,\varphi^{-1}(x)]}(y)\,dy \leq \int_0^\infty 1_{[\varphi(y),\infty]}(x)\,dy.$$

Dans le cas où $\varphi^{-1}(0^+) > 0$ ou $\varphi^{-1}(\infty) < \infty$ on a besoin encore de modification. De la même manière que précidament, d'aprés l'inégalité de Minkowsky pour la norme de $L_{1/\gamma,\omega}$ appliquée à (5.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{1/\gamma}\omega(x)\,dx\right)^\gamma &= \|\varphi^{-1}(x)\|_{L_{1/\gamma,\omega}} \\
&\leq \left\|\int_0^\infty 1_{[\varphi(y),\infty]}(x)\,dy\right\|_{L_{1/\gamma,\omega}} \\
&\leq \int_0^\infty \left\|1_{[\varphi(y),\infty]}(x)\right\|_{L_{1/\gamma,\omega}}\,dy \\
&= \int_0^\infty \left[\int_{\varphi(y)}^\infty \omega(x)\,dx\right]^\gamma dy.
\end{aligned}$$

(5.12) est prouvée.

Remarque 5.1 *Si φ est une fonction croissante et $\varphi(0^+) > 0$, alors l'inégalité* (5.12) *résulte de l'inégalité* (5.10)*. On applique* (5.10) *à la fonction décroissante $\psi(x) = 1/\varphi(x)$ où $\omega_1(x) = \omega(1/x)/x^2$ est la fonction de poids avec un changement de variables $t = 1/x$.*

Théorème 5.2 *Soient $0 < p \leq q < \infty$, $-\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty$, ω, ν des fonctions de poids .*
(a) L'inégalité

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q \omega(x)\,dx\right)^{1/q} \leq A \left(\int_0^\infty f(x)^p \nu(x)\,dx\right)^{1/p}, \tag{5.15}$$

est vérifiée pour toute fonction $0 \leq f \in \mathbf{Q}_{\alpha_1}$, si et seulement si

$$A_{\alpha_1} := \sup_{t>0} \left(\int_0^t x^{q\alpha_1} \omega(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_0^t x^{p\alpha_1} \nu(x)\,dx\right)^{-1/p} < \infty, \tag{5.16}$$

où $A = A_{\alpha_1}$ est la constante optimale.
(b) L'inégalité

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q \omega(x)\,dx\right)^{1/q} \leq B \left(\int_0^\infty f(x)^p \nu(x)\,dx\right)^{1/p}, \tag{5.17}$$

est vérifieé pour toute fonction $0 \leq f \in \mathbf{Q}^{\alpha_0}$, si et seulement si

$$B_{\alpha_0} := \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0} \omega(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0} \nu(x)\,dx\right)^{-1/p} < \infty, \tag{5.18}$$

où $B = B_{\alpha_0}$ est la constante optimale.

Preuve : (a) (5.15) $\Longrightarrow$ (5.16). On prend $f(x) = x^{\alpha_1} 1_{[0,t]}(x)$, $t > 0$, dans (5.15). Cela donne $A_{\alpha_1} \leq A$.
(5.16) $\Longrightarrow$ (5.15). Soit $A_{\alpha_1} < \infty$, i.e.

$$\left(\int_0^t x^{q\alpha_1} \omega(x)\,dx\right)^{1/q} \leq A_{\alpha_1} \left(\int_0^t x^{p\alpha_1} \nu(x)\,dx\right)^{1/p} \forall t > 0. \tag{5.19}$$

Puis, en élevant les deux membres de (5.19) à la puissance p et en posant $t = \varphi(y)$ où φ est une fonction décroissante, on intégre de 0 à ∞ par rapport à y, on obtient

$$\int_0^\infty \left(\int_0^{\varphi(y)} x^{q\alpha_1} \omega(x)\,dx\right)^{p/q} dy \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty \left(\int_0^{\varphi(y)} x^{p\alpha_1} \nu(x)\,dx\right) dy.$$

Maintenant en utilisant l'inégalité (5.10) avec $\gamma = p/q \leq 1$ et l'égalité dans (5.10) quand $\gamma = 1$, on obtient

$$\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{q/p} x^{q\alpha_1}\omega(x)\,dx\right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty \varphi^{-1}(x) x^{p\alpha_1}\nu(x)\,dx.$$

On prend $\varphi^{-1}(x) = (x^{-\alpha_1} f(x))^p$, qui est une fonction décroissante, alors

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q \omega(x)\,dx\right)^{p/q} \leq A_{\alpha_1}^p \int_0^\infty f(x)^p \nu(x)\,dx$$

et $A \leq A_{\alpha_1}$.

(b) La nécessité et l'inégalité $B_{\alpha_0} \leq B$ découlent, en prenant $f(x) = x^{\alpha_0} 1_{[t,\infty]}(x)$, $t > 0$, dans (5.17).

(5.18) $\Longrightarrow$ (5.17). Maintenant, utilisant l'hypothèse suivante :

$$\left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0}\omega(x)\,dx\right)^{1/q} \leq B_{\alpha_0} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0}\nu(x)\,dx\right)^{1/p} \forall t > 0. \tag{5.20}$$

En faisant le changement $t = \varphi(y)$ avec φ une fonction croissante, en élevant les deux membres de (5.20) à la puissance p et en intégrant par rapport à y de 0 à ∞ et d'aprés l'inégalité (5.12), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \varphi^{-1}(x)^{q/p} x^{q\alpha_0}\omega(x)\,dx\right)^{p/q} &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{q\alpha_0}\omega(x)\,dx\right)^{p/q} dy \\
&\leq B_{\alpha_0}^p \int_0^\infty \left(\int_{\varphi(y)}^\infty x^{p\alpha_0}\nu(x)\,dx\right) dy \\
&= B_{\alpha_0}^p \int_0^\infty \varphi^{-1}(x) x^{p\alpha_0}\nu(x)\,dx.
\end{aligned}$$

On prend $\varphi^{-1}(x) = (x^{-\alpha_0} f(x))^p$, qui est une fonction croissante, alors on obtient

$$\left(\int_0^\infty f(x)^q \omega(x)\,dx\right)^{p/q} \leq B_{\alpha_0}^p \int_0^\infty f(x)^p \nu(x)\,dx$$

et $B \leq B_{\alpha_0}$.

Remarque 5.2 *Le théorème précédent peut être formulé de la manière suivante :*
Soient $0 < p \leq q < \infty$ *et* $-\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty$, *alors*

$$\sup_{0 \leq f \in \mathbf{Q}_{\alpha_1}} \frac{\|f\|_{L_{q(\omega)}}}{\|f\|_{L_{p(\nu)}}} = \sup_{t>0} \left(\int_0^t x^{q\alpha_1}\omega(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_0^t x^{p\alpha_1}\nu(x)\,dx\right)^{-1/p}$$

et

$$\sup_{0 \leq f \in \mathbf{Q}^{\alpha_0}} \frac{\|f\|_{L_{q(\omega)}}}{\|f\|_{L_{p(\nu)}}} = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty x^{q\alpha_0}\omega(x)\,dx\right)^{1/q} \left(\int_t^\infty x^{p\alpha_0}\nu(x)\,dx\right)^{-1/p}.$$

Chapitre 6

Une variante de l'inégalité de Hardy

Comme on l'a vu dans le chapitre 3, l'inégalité (3.8) est vérifiée si f est une fonction non négative et monotone. Il s'avère qu'on peut remplacer la monotonicité par une condition plus faible (voir ci-dissous l'inégalité (6.1)).
Ici est donné un bref aperçu de [2], en realité la variante de l'inégalité de Hardy pour $0 < p < 1$, $f(x)$ non négative mesurable sur $\mathbb{R}^n$ est étudiée plus en détails dans la publication en question où les constantes sont aussi étudiées d'une manière plus approfondie.
On enonce le lemme suivant sans le prouver ; il sera utile par la suite.

Lemme 6.1 *Soient $C_1 > 0$, $\delta > 0$ et $0 < p < 1$. De plus $f(x)$ est une fonction non négative et mesurable sur la boule $B_{(0,\delta)}$ telle que pour presque tout $x \in B_{(0,\delta)}$*

$$f(x) \leq \frac{C_1}{|x^n|} \left(\int_{B_{(0,\delta)}} f^p(y)\,|y|^{n(p-1)}\,dy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6.1}$$

alors

$$\left(\int_{B_{(0,\delta)}} f(x)\,dx \right)^p \leq C_2 \int_{B_{(0,\delta)}} f^p(x)\,|x|^{n(p-1)}\,dx, \tag{6.2}$$

oú $C_2 = {C_1}^{n(p-1)}$
et $B_{(0,\delta)}$ est la boule de centre O et de rayon δ.

Théorème 6.1 *Soit $\delta > 0$.*
On pose

$$(Hf)(\delta) = \frac{1}{v_n \delta^n} \int_{B_{(0,\delta)}} f(y)\,dy, \tag{6.3}$$

avec $0 < p < 1$, $\alpha < n - 1/p$,v_n est le volume de la boule unité.
Si $f(x)$ est une fonction non négative mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant (6.1) pour tout $\delta > 0$, alors

$$\|\delta^\alpha (Hf)(\delta)\|_{L_{p(0,\infty)}} \leq C_3 \left\| |x|^{\alpha - \frac{n-1}{p}} f(x) \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \tag{6.4}$$

où $C_3 = \dfrac{1}{v_n}\left(\dfrac{C_2}{(n-\alpha)p-1}\right)^{1/p}$.

Preuve. Soit

$$J = \|\delta^{\alpha}(Hf)(\delta)\|_{L_{p(0,\infty)}} = \frac{1}{v_n}\left[\int_0^{\infty}\delta^{(\alpha-n)p}\left(\int_{|y|\le\delta} f(y)\,dy\right)^p d\delta\right]^{1/p}.$$

En vertu de (6.1), on obtient

$$\begin{aligned}
J &\le \frac{(C_2)^{1/p}}{v_n}\left[\int_0^{\infty}\delta^{(\alpha-n)p}\left(\int_{|y|\le\delta}|f(y)|^p\,|y|^{n(p-1)}\,dy\right)d\delta\right]^{1/p}\\
&= \frac{(C_2)^{1/p}}{v_n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\left(\int_{|y|\le\delta}\delta^{(\alpha-n)p}\,d\delta\right)|y|^{n(p-1)}\,dy\right]^{1/p}\\
&= \frac{(C_2)^{1/p}}{v_n}\left[\frac{1}{(\alpha-n)p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p\,|y|^{(\alpha-n)p+1}\,|y|^{n(p-1)}\,dy\right]^{1/p},
\end{aligned}$$

comme $(n-\alpha)p>1$, (6.5) est vérifiée avec C_3 comme constante optimele.

Conclusion.

La publication [2] de la bibliographie peut être à l'avenir étudiée en détails.

Ensuite elle peut être généralisée, c'est à dire munir l'analogue de (6.4) dans $\mathbb{R}^n$ par des fonctions de poids $\omega(x)$ et $\nu(x)$, avec l'introduction de paramétres p et q comme dans (5.1) du chapitre 5 et étudier les conditions pour que cette inégalité soit vérifiée.

Chapitre 7

bibliographie

Bibliographie

[1] G.H.Hardy , J.E.Littlwood and G.PÓlya , Inequalities (Second Edition) , Cambridge Univ . Press 1952 , Ch 9 , 226-259.

[2] K.Senouci and T.Tararykova, A Hardy's type inequality for $0 < p < 1$. Euro-asian mathematical journal number 2. Astana 2008, p,111-116.

[3] Bicheng Yang , On a New Hardy-Type Integral Inequality , International Mathematical Forum, 2, 2007, no. 67, 3317 - 3322.

[4] James A. Oguntuase a,c, Christopher A. Okpoti b,c , Lars-Erik Persson c and Francis K. A. Allotey d (communicated by A. C¡ iz¡mes¡ija),Multidimensional Hardy Type Inequalities for $p < 0$ and $0 < p < 1$. Journal of Mathematical Inequalities Volume 1, Number 1 (2007), 1–11.

[5] B.V.Maz'ya , Espace de Sobolev. Leningrad Izdatel-straleningradskodo University 1985 , 42-46.

[6] Kufner A. and Triebel H., Generalizations of Hardy's inequality. Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, 156 (1978), 1–21.

[7] V.I.Burenkov , On the best constant in Hardy's inequality for 0¡p¡1, Trudy Mat. Instit. im. V.A. Steklova 194(1992), 58-62 (Russian).

[8] Bergh, V.Burenkov and L.E.Persson, Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone function, Acta Sci . Math. (Szeged) 59(1994), 223-241.

[9] Elena P. Ushakova, Norm Inequalities of Hardy and Pólya-Knopp Types. Luleå University of Technology Department of Mathematics, 53. December 2006 , 1-6.

[10] L. Maligranda, Weighted inequalities for monotone functions, Collect. Math. 48, 4-6 (1997), 687–700 ©1997 Universitat de Barcelona.

[11] Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E., The prehistory of the Hardy inequality. Amer. Math. Monthly, 113 (2006), 715–732.

[12] Burenkov V.I., On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions. Proc. Steklov Inst. Math., (4) 194 (1993), 59–63.

[13] Bliss G.A., An integral inequality. J. London Math. Soc., 5 (1930), 40–46.

[14] Beesack P.R., Hardy's inequality and its extensions. Pacific J. Math., 11 (1961), 39–61.

[15] J. Bergh, A converse inequality of H¨older type, Math. Z. 215 (1994), 205–208.

[16] J. Bergh, V. Burenkov and L.E. Persson, Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions, Acta Sci. Math. (Szeged) 59 (1994), 223–241.

[17] J. Bergh and J. L¨ofstr¨om, Interpolation Spaces, Springer-Berlag, New York, 1976.

[18] M.L. Gol'dman, H. Heinig and V.D. Stepanov, On the principle of duality in Lorentz spaces, preprint.

[19] H. Heinig and L. Maligranda,Weighted inequalities for monotone and concave functions, Studia Math. 116 (1995), 133–165.

[20] H. Heinig and V.D. Stepanov, Weighted Hardy inequalities for increasing functions, Canad. J. Math. 45 (1993), 104–116.

[21] L. Maligranda, Orlicz Spaces and Interpolation, Univ. of Campinas, Campinas, 1989.

[22] L. Maligranda, Weighted inequalities for quasi-monotone functions, J. London Math. Soc., to appear.

[23] C.J. Neugebauer, Weighted norm inequalities for averaging operators of monotone functions, Publ. Mat. 35 (1991), 429–447.

[24] J. Pe¡cari´c and L.E. Persson, On Bergh's inequality for quasi-monotone functions, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 393–400.

[25] E. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[26] V.D. Stepanov, Weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions, Trans. Amer. Math. Soc. 338 (1993), 173–186.

[27] A.H.Siddiqi, Functional Analysis with Applications, New Delhi, Tala McGraw-Hill Publishing Company Ltd 1986.

[28] Heinig H.P. and Stepanov V.D., Weighted Hardy inequalities for increasing functions. Studia Math., 45 (1993), 104–116.

[29] Heinig H.and Maligranda L.Weighted Inequalities for Monotone and Concave Functions . Luleå university of technology, 1994.

[30] H.P.Heinig, A.Kufner, L.-E.Persson, onsome fractional order Hardy inequalities, J.od Inequal. and Appl., 1(1997),25-46.

[31] E.Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, New York, John Wiley(1978).

[32] N.Krugljak, L.Maligranda, L.-E.Persson, The failure of the Hardy inequality and interpolation of intersections, Ark.Mat.37(1999),323-344.

[33] N.Krugljak, L.Maligranda, L.-E.Persson, On an elementary approach to the fractional Hardy inequality, Proc.Amer.Math.Soc.,to appear.

[34] L.Maligranda, A generalization of the Shimogaki theorem, Studia Math.71(1981),69-83.

[35] W.Mlak, Hilbert Spaces and Operator theory, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers 1991.

[36] Sorina Barza, Victor Burenkov, Josip Pecaric and Lars-Erik Persson, Sharp Multidimensional Multiplicative Inequalities for Weighted L_p Spaces with Homogeneous Weights. Luleå university of technology, 1997.

[37] Inégalités intégrales V.I.Burenkov université Mosco-Russie 1988.

Annexe.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et $1 \leq p \leq \infty$.

Inégalité de Hölder.

Soit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, c-à-d, $p' = p/(p-1)$ pour $1 < p < \infty$, $p' = \infty$ pour $p = 1$ et $p' = 1$ pour $p = \infty$. Si $f \in L_{p(\Omega)}$ et $g \in L_{p'(\Omega)}$, alors $fg \in L_{1(\Omega)}$ et

$$\|fg\|_{L_{1(\Omega)}} \leq \|f\|_{L_{p(\Omega)}} \|g\|_{L_{p'(\Omega)}}.$$

Inégalité de Jensen.

soient $0 < p < q \leq \infty$, $a_k \in \mathbb{C}$, alors

$$\left(\sum_{k=1}^{k=\infty} |a_k|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^{k=\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Inégalité de Minkowsky.

Si $f, g \in L_{p(\Omega)}$, alors $f + g \in L_{p(\Omega)}$ et

$$\|f+g\|_{L_{p(\Omega)}} \leq \|f\|_{L_{p(\Omega)}} + \|g\|_{L_{p(\Omega)}}.$$

Inégalité intégrale de Minkowsky.

soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $f(x,y)$ une fonction mesurable sur $\Omega \times A$ et $f(x,y) \in L_{p(\Omega)}$ pour presque tous les $y \in A$, alors

$$\left\| \int_A f(x,y)\, dy \right\|_{L_{p(\Omega)}} \leq \int_A \|f(x,y)\|_{L_{p(\Omega)}}\, dy.$$

si le membre droit est fini.