REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle Et Équation Différentielle

Par :
Bensaid Khadidja
Saadi Ikhlas
Hadji Karima
Melis Hadjer

Sur le thème

Étude de l'existence des solutions pour une classe de problème aux limites en résonance

Soutenu publiquement le 13 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SOFRANI Mohammed	Grade MAA Université Tiaret	Président
Mr SOUID Mohammed Said	Grade MCA Université Tiaret	Encadreur
Mme BOUAZZA Zoubida	Grade MAA Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

✓ Nous remercions avant tous ALLAH qui nous a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

✓ Nous tenons à remercier sincèrement **Mr Souid Mohammed Said** non seuleument pour avoir accepté de nous encadré et aussi nous faire profiter de ses connaissance mais aussi pour sa patience et pour le totale confience qu'il nous a accordé et son aide pour donner tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

✓ Nous remercions vivement **Mr Sofrani Mohammed** de l'honneur qu'il nous fait en président ce jury.

✓ Nous remercions également **Mme Bouazza Zoubida** pour l'honneur qu'il fait d'avoir accepeter l'examen de ce travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos famille, nos amies, nos professeurs.

★ ★ ★

*——————— *Je dédie ce travail à* ———————*

★ *Je rend grâce à dieu m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer mes études .*

★ ***Moi même*** *où je touche tout mes efforts mon travail ma volonté, et j'en récolte le fruit de ma longue carrière scolaire.*

★ *A mes trés chèrs parents :*

mon père ***Saad*** *et ma mére* ***Fathma*** *.*

★ *A mes soeurs et frères pour leur soutien morale, et leur encouragement avec moi.*

★ *A toutes mes amies qui m'encouragent à tout moment et pour leur soutenu tout au long de ma carrière universitaire :*

Hadjer,Fatima,Sihem,Khaldia,Imane,Aya.

★ *Je vous dis merci.*

*——————— *Bensaid Khadidja* ———————*

Je dédie ce travail à

★ *Je rend grâce à dieu m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer mes études .*

★ *A ma mère disparu trop tôt* ***Mouna*** *et mon père* ***Mohamed*** *pour sa patience et les efforts qu'il a faits pour moi.*

★ *A mon frère* ***Nidhal*** *qui m'a toujours soutenu et encouragé durant les annés d'études.*

★ *A mon mari* ***Mohamed*** *qui ma bien aimée, qui m'a soutenu et compris.*

★ *Aux personnes qui étaient toujours à mes cotés, mes amies et les collègues d'études.*

★ *Je vous dis merci.*

Saadi Ikhlas

Je dédie ce travail à

★ *Je rend grâce à dieu m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer mes études .*

★ *A mes très chèrs parents qui m'ont soutenus dans la réussite de mes études. Ma chère mère* ***Fraiha*** *et mon cher père* ***Habib****.*

★ *A mes soeurs et frères* ***Sihem,Abd Elghani,Ghofran,Mohamed Amine****.*

★ *A mes amis qui m'encouragent à touts moments* ***Meriem,Zahida,Djihan,Khadidja****.*

★ *Je vous dis merci.*

Melis Hadjer

Je dédie ce travail à

★ *Je rend grâce à dieu m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer mes études .*

★ *A ma mère disparu trop tôt et mon père* ***Abd Elkader*** *pour sa patience et les efforts qu'il a faits pour moi.*

★ *A mes frères pour leur soutien morale,* ***Mohamed,Lakhdar,Djamel,Khaled*** *et A mes sœurs* ***Bakhta,Khadra,Fatima,Fatiha*** *pour leur encouragement durant les annés d'études.*

★ *A mes amies, collègues d'études* ***Khadidja,Ikhlas,Hadjer****.*

★ *Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager, et qui m'ont accompagnaient durant mon parcours universitaire.*

★ *Je vous dis merci.*

Hadji Karima

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'éxistence des solutions pour une classe de problème aux limites en résonance pour les équations différentielles implicites non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo .

Un problème aux limites est dit en résonance si le problème homogène linéaire correspondant a une solution non triviale.

La technique utilisée pour les résultats présenter sont basés sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin pour examiner l'existence des solutions. La théorie de Mawhin permet l'utilisation d'une approche de type degré topologique à des problèmes qui peuvent être écrits comme une équation d'opérateur abstrait de la forme $Lx = Nx$, où L est un opérateur linéaire non inversible et N est un opérateur non linéaire agissant sur un espace de Banach donné.

En 1972, Mawhin a développé une méthode pour résoudre cette équation dans son célèbre article (Problèmes de degrés topologiques et aux limites pour les équations différentielles non linéaires [18]), il a supposé que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Par conséquent, il a développé une nouvelle théorie du degré topologique connue sous le nom de degré de coïncidence pour (L, N) ; qui est également connue sous le nom de théorie de degré de coïncidence de Mahwin.

Ce **mémoire** est composé de trois chapitres :

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous rappelons des notations, des définitions, consèrnant l'intégrale fractionnaire, La dérivée fractionnaire de Caputo, théorème d'Ascoli Arzela, théorème de convergence dominée de Lebesgue, fonction de Green.

Dans **Le deuxième chapitre** nous donnons un rappel sur les applications linéaires dans la première section, la deuxième section est consacré à quelques concepts sur la théorie de degré de coïncidence de Mawhin.

Dans **le troisième chapitre** nous présentons une application pour illustrant l'éxistence des solutions pour une classe de problèmes aux limites résonnants pour les équations différentielles implicites non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivant : :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {^cD^\alpha} y(t)), \quad t \in J := [0, T],\ T > 0,\ 0 < \alpha \leq 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y(T), \tag{2}$$

où $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens Caputo, et $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
Enfin on termine ce mémoire par une conclusion du travail efectuée.

Mots clés : Problème aux limites, La dérivée fractionnaire au sens de caputo, Espace de Banach, Point fixe, Algèbre linéaire, La théoire de degré (coïncidence de Mawhin), Opérateur de Ferdhom, résonnante.

Chapitre 1

Preliminaire

1.1 Définitions et Théorèmes

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.
Soit $C = (J =: [0, T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| : t \in J\}.$$

$L^1(J)$ désigne la classe des fonctions intégrable de Lebesgue sur l'intervalle J, muni de la norme :

$$\|u\|_{L_1} = \int_J |u(t)|dt.$$

Définition 1.1. *Soit E un espace de Banach et $H : E \to E$ un opérateur.*

1. *H est dit* ***continu*** *si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Hx_n)_{n\in N}$ converge vers Hx.*
2. *H est dit* ***compact****, si pour tout borné B de E, $H(B)$ est relativement compact.*
3. *H est dit* ***complètement continu*** *si H est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact.*

Définition 1.2. *Soit M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$.*

1. *M et dit* ***équicontinu*** *si et seulement si :*
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$:
$\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon,$ *pour tout $f \in M$.*

2. *M est dit* ***uniformément borné*** *si et seulement si :*
il existe $c > 0 : \|f(t)\| \leq c$ pour tout $t \in J$ et pour tout $f \in M$.

Théorème 1.1. *([12])***(Ascoli Arzela)** *Soit $C(J, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{X})$ est relativement compact si :*
- *M est uniformément borné.*
- *M est équicontinu.*

Théorème 1.2. *([6])* ***(Convergence dominée de Lebesgue)***
Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que
i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.
ii) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n,
$|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.
Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Définition 1.3. *Soit (X, d)un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante k (appelée constante de Lipschitz) telle que :*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Une application Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $0 < k < 1$ est appelée contraction.

1.2 Quelques concepts sur le calcul fractionnaire

Définition 1.4. *([9, 11]) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([\mathtt{a},\mathtt{b}],\mathbb{R}_+)$ est défini par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma définit par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

Définition 1.5. *([9])**(La dérivée fractionnaire de Caputo) :***
La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ est défnie par :

$$({}^cD_{a+}^\alpha h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)ds.$$

Où $n = [\alpha]+1$. si $\alpha \in (0,1]$ alors :

$$({}^cD_{a+}^\alpha h)(t) = I_{a+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{ds} h(s)ds.$$

Proposition 1.1. *([9]) Soient $\alpha, \beta > 0$. Alors on a :*

(1) $I^\alpha : L^1(J,\mathbb{R}_+) \to L^1(J,\mathbb{R}_+)$ et si $f \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ alors
$I^\alpha I^\beta f(t) = I^\beta I^\alpha f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.

(2) L'opérateur d'intégration fractionnaire I^α est linéaire.

(3) $I_a^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$.

(4) La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est égale à constante.

(5) ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha$ est non inverse à droit de I_a^α c-à-d $I_a^{\alpha c}\mathcal{D}_a^\alpha \neq I_d$ mais ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha I_a^\alpha = I_d$.

(6) La dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire.

Lemme 1.1. *([9]) Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle :*

$$^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha} h(t) = 0,$$

admet les solutions :
$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$.
où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ *; et* $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.2. *([9]) Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors on a :*

$$I^{\alpha}(^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha} h(t)) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Lemme 1.3. *([22]) Soit $\alpha > 0$, alors :*

$$I_a^{\alpha c}\mathcal{D}_a^{\alpha} h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ *; et* $n = [\alpha] + 1$.

1.3 Fonction de Green

1.3.1 Introduction

Nous présentons quelques notions de base concernant les questions d'existence et d'unicité de la fonction de Green.

1.3.2 Définition de la fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a, b])$ où $p \in C^1[a, b], a < b$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tels que pour tout $i = 1, 2$:
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. On considère les équation différentielles ordinaires :
(**H**) $(py')' + qy = 0$,

(**NH**) $(py')' + qy = f$,

ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta. \end{cases}$$

Définition 1.6. *On appelle fonction de **Green** associé au problème homogène $(H)-(CB)_h$ une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :*

(a) G est continue sur $[a,b] \times [a,b]$.

(b) G est symétrique : $G(t,s) = G(s,t), \forall (t,s) \in [a,b]^2$.

(c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ est continue pour tout $t \neq s$.

(d) La fonction partielle $t \to G(t,s)$ est solution de l'équation (H) pour tout $t \neq s$.

(e) La fonction partielle $t \to G(t,s)$ vérifie les condition (CH) pour tout $s \in [a,b]$.

1.3.3 L'existence et unicité de la fonction de Green

Théorème 1.3. *Supposons que le problème homogène $(H)-(CB)_h$ **n'admet pas de solution non triviale**. Alors, il existe une (et une seule) fonction G ne dépendant pas de f, et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction f, la solution y de problème non homogène $(NH)-(CB)_h$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds.$$

Démostration : Voir [7]

Chapitre 2

Introduction à la théorie de coïncidence de Mawhin

2.1 Bref historique

En 1970, Gaines et Mawhin ont introduit la théorie du degré de coïncidence dans l'analyse des équations fonctionnelles et différentielles. Mawhin a apporté des contributions importantes depuis lors, et cette théorie est également connue sous le nom de théorie de la coïncidence de Mahwin.
La théorie des coïncidences est considérée comme la technique très puissante, en particulier en ce qui concerne les questions sur l'existence de solutions dans les équations différentielles non linéaires. De plus, de nombreux chercheurs l'ont utilisé pour résoudre des problèmes aux limites à la résonance, voir [[15], [16], [17], [18], [19], [20], [21]].

2.2 Rappels sur quelques notions d'algèbre linéaire

2.2.1 Somme d'espaces vectoriels

Définition 2.1. *Soit E un espace vectoriel, F et G sous-espace vectoriel de E.*

- *On appelle somme F et G le sous-espace vectoriel de E noté $E + F$ défini par la relation suivante :*

$$x \in F + G \Longleftrightarrow \exists x_1 \in F, \exists x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

- *Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est direct et on la note par $E \oplus G$.*
- *Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espaces vectoriel de F et G sont supplémentaire dans E, et dans ce cas*

$$\forall x \in E, \exists\,! x_1 \in F \text{ et } \exists\,! x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

Théorème 2.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 2.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E supplémenttaire alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Corollaire 2.2. *Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

2.2.2 Rappels sur les applications linéaires

Définition 2.2. *[24] Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que W, application de E dans F est **linéaire** si*

$$\begin{cases} \forall x, y \in E & W(x+y) = W(x) + W(y). \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E & W(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot W(x). \end{cases}$$

∗ *Si W est une application linéaire de E dans E alors on dit que W est un **endomorphisme** de E.*

∗ *Si W est une application linéaire bijective de E dans F alors on dit que W est un **isomorphisme** de E.*

∗ *Si W est une application linéaire bijective de E dans E alors on dit que W est un **automorphisme** de E.*

∗ *Si W est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ alors on dit que W est une **forme linéaire** de E dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 2.2.1.

- *La dérivation et l'intégration sont des applications linéires (attention au choix des ensembles de départ et d'arrivée).*
- *En géométrie vectorielle de dimension 2 ou 3, les rotations, symétries, homothéties et projection sont des applications linéaires.*

Définition 2.3. ***(Noyau et l'image)*** *Soit W une application linéaire de E dans F, on définit les deux espaces vectoriels suivants :*

$$\ker(W) = \{u \in E \ tq\ , W(u) = 0_F, \} \quad \ker(W), s.e.v \text{ de } E \text{ est appelé } \textbf{Noyau} \text{ de } W.$$

$$\mathrm{Img}(W) = \{W(u)\ tq\ , u \in E\} \qquad \mathrm{Img}(W), s.e.v \text{ de } F \text{ est appelé } \textbf{Image} \text{ de } W.$$

Propriété 2.1. *[24] Soit W une application linéaire de E dans F. On a les propriétés* *suivantes :*

$$\begin{aligned} W \textit{ est injective} &\iff \ker(W) = \{0_E\}. \\ W \textit{ est surjective} &\iff \mathrm{Img}(W) = F. \\ W \textit{ est bijective} &\iff W \textit{ est injective et surjective.} \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *[24] (**du rang**) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit W une application linéaire de E dans F. Alors :*

$$\dim \ker(W) + \dim \mathrm{Img}(W) = \dim E.$$

Corollaire 2.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit W une application linéaire de E dans F.*
Si $\dim E \neq \dim F$, alors W n'est pas bijective.
Si $\dim E = \dim F$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) W est bijective.

(ii) W est injective (c'est-à-dire $\ker(W) = \{0_F\}$).

(iii) W est surjective (c'est-à-dire $\mathrm{rg}(W) = \dim(F)$).

Remarque 2.1. *Notons que l'on a toujours $\mathrm{Img}(W) \subset F$ et que Img est un sous-espace vectoriel de F. Donc si F est de dimension finie, $\dim(\mathrm{Img}(W)) = \dim(F) \Rightarrow \mathrm{Img}(W) = F$.*

2.2.3 Projection et Projecteur

Définition 2.4. *Si $E = F \oplus G$, on rappelle que $\forall x \in E, \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$.*

- *x_1 s'appelle la projection de x sur F parallélement à G et se note $p_{F//G}(x)$.*
- *x_2 s'appelle la projection de x sur G parallélement à F et se note $p_{G//F}(x)$.*

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes l'application :*

$$\begin{aligned} p = p_{F//G} : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x_1 = p_{F//G}(x) \end{aligned}$$

est linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

1. $p^2 = p$.
2. $\operatorname{Img} p = F$, $\ker p = G$ *en particulier* $E = \operatorname{Img} p \oplus \ker p$.

Définition 2.5. *Soit* X *un espace vectoriel. On dit que l'opérateur linéaire* $P : X \to X$ *est une projection si pour tout* $x \in X$*, on a* $P(P(x)) = P^2 x = P(x)$.

Proposition 2.2. *Soit* X *un espace vectoriel. Un opérateur linéaire* $P : X \to X$ *est une projection si et seulement si* $(I - P)$ *est une projection. De plus si l'espace* X *est normé, alors* P *est continu si et seulement si* $(I - P)$ *est continu.*

Proposition 2.3. *Si* P *est une projection dans* X*, alors* $\ker P = \operatorname{Img}(I - P)$ *et* $\operatorname{Img}(P) = \ker(I - P)$.

Définition 2.6. *On appelle* ***projecteur*** *sur* E*, tout endomorphisme, tel que*

$$p^2 = p.$$

Proposition 2.4. *Soit* p *un projecteur de* E*, on a les propriétés suivantes :*

1. $E = \operatorname{Img} p \oplus \ker p$.
2. $x \in \operatorname{Img} p \Longleftrightarrow p(x) = x$.
3. p *est la projection sur son image paraléllement à son noyau.*

Conclusion : Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image paraléllement à son noyau.

2.2.4 Symétrie

On appelle symétrie de E, tout endomorphisme, s de E tel que : $s^2 = id_E$.

Proposition 2.5. *Soit x une symétrie de E, on a les propriétés suivantes :*

1. $p = \frac{1}{2}(s + id_E)$ *est un projecteur.*
2. *En posant $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$, on a $E = F \oplus G$ avec*

$$s(x) = \begin{cases} x & \forall x \in F \\ -x & \forall x \in G \end{cases}$$

   On dit alors que s est la symétrie par rapport à F paraléllement à G.

3. *Inversement tout projecteur p permet de définir la symétrie $s = 2p - id_E$ sur $\operatorname{Img} p$ paraléllement à $\ker p$.*

2.3 Quelques concepts sur La théorie de coïncidence de Mawhin

Les définitions suivantes et les lemmes de base de la théorie de degré de coïncidence sont fondamentaux dans la preuve de notre résultat principal (voir [13, 14]).

2.3.1 Opérateur de Fredholm

Définition 2.7. *Soit X et Y deux espaces vectoriels normés, on dit que l'opérateur linéaire $L : D(L) \subset X \to Y$ est de Fredholm si il vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\ker(L) = L^{-1}(0)$ *est de dimension finie.*
2. $\operatorname{Img}(L) = L(D(L))$ *est fermée et de codimension finie.*

Définition 2.8. *L'indice d'un opérateur de Fredholm L est l'entier :*

$$ind(L) = \dim(\ker(L)) - \operatorname{codim}(\operatorname{img(L)}).$$

Exemples 2.3.1. 1. *Si X et Y sont des dimensions finies, alors pour tout opérateur linéaire $L : X \to Y$ est de Fredholm avec*

$$ind(L) = \dim(X) - \dim(Y).$$

Si X et Y deux espaces de Banach et $L : X \to Y$ est une tronsformation linéaire bijective, alors L est opérateur de Fredholm d'indice 0, en effet

$$\dim(\ker(L)) = \operatorname{codim}(\operatorname{img}(L)) = 0.$$

2. *l'identité est opérateur de Fredholm d'indice 0.*

Lemme 2.1. *Si L est un opérateur de Fredholm et u est une application linéaire compact ; donc $L + u$ est de Fredholm et :*

$$ind(L + u) = ind(L).$$

en particulier, tout identité compact pertubration est opérateur d'indice 0.

Proposition 2.6. *Si L est un opérateur de Fredholm, alors L est surjective si et seulement si L est injective.*

Définition 2.9. Soit X et Y des espaces normés. A un opérateur linéaire $L : \operatorname{dom} L \subset X \to Y$ est dit un opérateur de Fredholm d'indice zéro s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $\operatorname{img} L$ est un sous-ensemble fermé de Y ;

(2) $\dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{img} L < +\infty$.

D'aprés la définition 2.9 qu'il existe des projections continues $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ tel que

$$\operatorname{img} P = \ker L, \quad \ker Q = \operatorname{img} L, \quad X = \ker L \oplus \ker P, \quad Y = \operatorname{img} L \oplus \operatorname{img} Q.$$

Cela implique que la restriction de L à $\operatorname{dom} L \cap \ker P$, que nous désignons par L_P, est un isomorphisme sur son image.

Définition 2.10. Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro et soit $\Omega \subseteq X$ un ensemble borné avec $\operatorname{dom} L \cap \Omega \neq \emptyset$. L'opérateur $N : \overline{\Omega} \to Y$ est L-compact dans $\overline{\Omega}$ si :

(1) la composition $QN : \overline{\Omega} \to Y$ est continue et $QN(\overline{\Omega}) \subseteq Y$ est bornée.

(2) la composition $(L_P)^{-1}(I - Q)N : \overline{\Omega} \to X$ est complètement continue.

Maintenant, nous introduisons le théorème de continuation de Mawhin comme suit :

Théorème 2.3. *[23] **(Théorème de continuation de Mawhin).***
Soit X et Y des espaces de Banach et soit $\Omega \subset X$ un ensemble symétrique ouvert borné avec $0 \in \Omega$. Soit $L : \operatorname{dom} L \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro avec $\operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$ et $N : X \to Y$ un L-opérateur compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que :

$$Lx - Nx \neq -\lambda(Lx + N(-x))$$

pour tout $x \in \operatorname{dom} L \cap \partial\Omega$ et chaque $\lambda \in (0, 1]$, où $\partial\Omega$ est le bord de Ω en ce qui concerne X. Alors l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solution sur $\operatorname{dom} L \cap \overline{\Omega}$.

Chapitre 3

Application sur les problèmes aux limites résonance

3.1 Introduction et motivations

Considérons le problème aux limites pour les équations différentielles implicites non linéaires à dérivée fractionnaire au sens de caputo avec $0 < \alpha \leq 1$

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{c}D^{\alpha}y(t)), \quad \text{pour tout } t \in J = [0, T], T > 0 \;\; 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.1}$$

$$ay(0) + by(T) = 0, \tag{3.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée et a, b sont sont deux nombres réels non nuls.
On peut clairement observer deux cas :
Cas 1 : Si $a + b \neq 0$, alors le problème homogène $(3.1) - (3.2)$ **n'admet pas de solution non triviale** dans ce cas le problème aux limites $(3.1) - (3.2)$ peut s'écrire

via une fonction de Green, comme une équation intégrale de la forme suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^T G(t,s) f(t, y(t), ^c D^\alpha y(t)) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(t, y(t), ^c D^\alpha y(t)) ds \\ &- \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(t, y(t), ^c D^\alpha y(t)) ds. \end{aligned}$$

C'est pourquoi, la question de prouver l'éxistence des solutions d'un problème aux limites se réduit à prouver l'existence de solution d'une équation intégrale. Pour cette raison, nous peuvons appliquer l'une des des théorèmes de point fixe tels que le théorème de Banach, Schauder. Étant donnés un ensemble M et un opérateur $T : M \to M$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles T admet un point fixe dans M.
Ce sujet a été étudié par de nombreux étudiants dans du mémoires de master au cours des dernières années. Pour plus de détails sur ce sujet, vous pouvez consulter les références [2, 5].

Cas 2 : Si $a + b = 0$, alors le problème homogène $(3.1) - (3.2)$ **admet une solution non triviale**, dans ce cas le problème aux limites $(3.1) - (3.2)$ est appelé un problème de résonance.

Le but de ce chapitre est présenter une application étudier exactement le problème $(3.1) - (3.2)$ dans le deuxième cas pour illustrant l'éxistence des solutions de problème aux limites résonnants des équations différentielles implicites non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Les résultats présentés sont basés sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

3.2 Application

Le contenu de cette application est basé sur l'article [4].
Cette application traite de l'existence des solutions au problème aux limites résonnants $(3.1)-(3.2)$ avec $a+b=0$.

3.2.1 Existence de solutions

Tout d'abord, nous introduisons les espaces suivants :
Soit $X=\{y\in C(J,\mathbb{R}) : y(t)=I^{\alpha}u(t) : u\in C(J,\mathbb{R}), t\in J\}$ avec la norme :

$$\|y\|_X=\max\{\|y\|_\infty,\ \|^cD^\alpha y\|_\infty\}$$

et $Y=C(J,\mathbb{R})$ avec la norme :

$$\|u\|_Y=\sup\{|u(t)| : t\in J\}.$$

Définissons l'opérateur linéaire $L : \operatorname{dom} L\subseteq X\to Y$ par :

$$Ly := {}^cD^\alpha y, \tag{3.3}$$

où

$$\operatorname{dom} L=\{y\in X : {}^cD^\alpha y\in Y \quad \text{et} \quad y(0)=y(T)\}.$$

Définissons l'opérateur $N : X\to Y$ par :

$$Ny(t) := f(t,y(t),{}^cD^\alpha y(t)), \quad t\in J. \tag{3.4}$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) peut être réécrit de manière équivalente à $Ly=Ny$.

Lemme 3.1. *Soit L est défini par* (3.3). *Alors* $\ker L=\{c : c\in\mathbb{R}\}$ *et*

$$\operatorname{img} L=\Big\{y\in Y : \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}y(s)ds=0\Big\}.$$

Preuve :
On a par le lemme 1.1 pour $t \in J$, $Ly(t) = {}^cD^\alpha y(t) = 0$ ademt une solution $y(t) = c$, où $c \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\ker L = \{y(t) = c : c \in \mathbb{R}\}.$$

pour $u \in \operatorname{img} L$, il existe $y \in \operatorname{dom} L$ tel que $u = Ly \in Y$. d'aprés le Lemme 1.2 pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

puisque $y \in \operatorname{dom} L$, u satisfait

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s) ds = 0.$$

d'autre part, on suppose $u \in Y$ satisfait

$$\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s) ds = 0.$$

soit $y(t) = I^\alpha u(t)$, alors $u(t) = {}^cD^\alpha y(t)$ et donc $y \in \operatorname{dom} L$. Par conséquent, $u \in \operatorname{img} L$, donc

$$\operatorname{img} L = \Big\{y \in Y : \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} y(s) ds = 0\Big\},$$

qui complète la preuve.

Lemme 3.2. *Soit L défini par (3.3). alors L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et les opérateurs de projecteurs linéaires continus $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ peut être défini comme*

$$Py = y(0), \quad Qu(t) = \frac{\alpha}{T^\alpha} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

De plus, l'opérateur $L_P^{-1} : \operatorname{img} L \to X \cap \ker P$ *satisfait*

$$L_P^{-1}(u)(t) = I^\alpha u(t).$$

Preuve ;

Clairement, $\operatorname{img} P = \ker L$ et $P^2 = P$. Il s'ensuit que pour chaque $y \in X$, $y = (y - Py) + Py$, C'est $X = \ker P + \ker L$. Un simple calcul montre que $\ker P \cap \ker L = 0$. Par conséquent, $X = \ker P \oplus \ker L$. Un argument similaire montre que pour chaque $u \in Y$, $Q^2 u = Qu$ et $u = (u - Q(u)) + Q(u)$, où $(u - Q(u)) \in \ker Q = \operatorname{img} L$.
Par suit de $\operatorname{img} L = \ker Q$ et $Q^2 = Q$ que $\operatorname{img} Q \cap \operatorname{img} L = 0$, alors, on a $Y = \operatorname{img} L \oplus \operatorname{img} Q$. Ainsi ,

$$\dim \ker L = \dim \operatorname{img} Q = \operatorname{codim} \operatorname{img} L.$$

Cela signifie que L est un opérateur Fredholm d'indice zéro.
Pour prouver que L_P^{-1} est l'inverse de $L|_{\operatorname{dom} L \cap \ker P}$, soit $u \in \operatorname{img} L$. alors

$$LL_P^{-1}(u) = {}^c D^\alpha (I^\alpha u) = u. \tag{3.5}$$

de plus, pour $y \in \operatorname{dom} L \cap \ker P$, on obtient que

$$L_P^{-1}(L(y(t))) = I^\alpha ({}^c D^\alpha y(t)) = y(t) - y(0).$$

puisque $y \in \operatorname{dom} L \cap \ker P$, on sait que $y(0) = 0$. Par conséequent

$$L_P^{-1}(L(y(t))) = y(t). \tag{3.6}$$

Combiner (3.5) et (3.6) montre que $L_P^{-1} = (L|_{\operatorname{dom} L \cap \ker P})^{-1}$. Cela prouve le lemme.
Dans la suite, on utilise l'hypothèse suivante.

(H1) Il existe des constantes K, $\overline{K} > 0$ avec $K + \overline{K} < \min\left\{1, \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha}\right\}$ tel que

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq K\,|u-\bar{u}| + \overline{K}\,|v-\bar{v}| \quad \text{pour } t \in J \text{ et } u,\bar{u},v,\bar{v} \in \mathbb{R}.$$

Lemme 3.3. *Supposons que* (H1) *satisfait. Alors l'opérateur N est L-compact sur tout ensemble ouvert borné $\Omega \subset X$.*

Preuve :

Définissons l'ensemble ouvert borné $\Omega = \{y \in X : \|y\|_X < M\}$, où M est une constante positive. La preuve sera donnée par des étapes.

Étape 1 : QN est continu. La continuité de QN suit des conditions sur f et le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

Étape2 : $QN(\overline{\Omega})$ est borné. Pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|QN(y)(t)| &\leq \frac{\alpha}{T^\alpha}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s),{}^cD^\alpha y(s))|ds \\
&\leq \frac{\alpha}{T^\alpha}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s),{}^cD^\alpha y(s)) - f(s,0,0)|ds \\
&\quad + \frac{\alpha}{T^\alpha}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,0,0)|ds \\
&\leq f^* + \frac{\alpha}{T^\alpha}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(K|y(s)| + \overline{K}|{}^cD^\alpha y(s)|)ds \\
&\leq f^* + M(K+\overline{K}),
\end{aligned}$$

où $f^* = \sup_{t\in J}|f(t,0,0)|$. ainsi,

$$\|QN(y)\|_Y \leq f^* + M(K+\overline{K}) := R.$$

Cela montre que $QN(\overline{\Omega}) \subseteq Y$ est borné.

Étape 3 : $L_P^{-1}(I-Q)N : \overline{\Omega} \to X$ est complètement continue.

D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzel, nous devons prouver que $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega}) \subset$

X est équicontinu et borné. D'abord, pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} L_P^{-1}(I-Q)Ny(t) &= L_P^{-1}(Ny(t) - QNy(t)) \\ &= I^\alpha \Big[f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)) - \frac{\alpha}{T^\alpha} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}^cD^\alpha y(s)) \Big] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}^cD^\alpha y(s)) ds \\ &\quad - \frac{t^\alpha}{T^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}^cD^\alpha y(s)) ds. \end{aligned}$$

d'autre part, pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |L_P^{-1}(I-Q)Ny(t)| &\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s), {}^cD^\alpha y(s)) - f(t,0,0)| ds \\ &\quad + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(t,0,0)| ds \\ &\leq [f^* + M(K + \overline{K})] \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} := B_1, \end{aligned}$$

donc

$$\|L_P^{-1}(I-Q)Ny\|_\infty \leq B_1. \tag{3.7}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} &{}^cD^\alpha (L_P^{-1}(I-Q)Ny(t)) \\ &= f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)) - \frac{\alpha}{T^\alpha} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}^cD^\alpha y(s)) ds, \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce qui implique que pour chaque $y \in \overline{\Omega}$ et $t \in J$,

$$|{}^cD^\alpha (L_P^{-1}(I-Q)Ny(t))| \leq 2f^* + 2M(K + \overline{K}) := B_2,$$

alors

$$\|{}^cD^\alpha (L_P^{-1}(I-Q)Ny)\|_\infty \leq B_2. \tag{3.9}$$

D'aprés les inégalités (3.7) et (3.9), on a :

$$\|L_P^{-1}(I-Q)Ny\|_X \leq \max\{B_1, B_2\},$$

Ce qui montre que $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est uniformément borné dans X.

Pour prouver que $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu, on remarque que pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ et $y \in \overline{\Omega}$, on a : $y \in \overline{\Omega}$, on a

$$\begin{aligned}
&|L_P^{-1}(I-Q)Ny(t_2) - L_P^{-1}(I-Q)Ny(t_1)| \\
&\leq \frac{f^* + M(K+\overline{K})}{\Gamma(\alpha)}\Big[\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds + \int_0^{t_1}|(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}|ds\Big] \\
&\quad + \Big[\frac{M(K+\overline{K}) + f^*}{\Gamma(\alpha+1)}\Big](t_2^\alpha - t_1^\alpha).
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Maintenant de (3.8), on a :

$$\begin{aligned}
&|{}^cD^\alpha(L_P^{-1}(I-Q)Ny)(t_2) - {}^cD^\alpha(L_P^{-1}(I-Q)Ny)(t_1)| \\
&\leq |f(t_2, y(t_2), {}^cD^\alpha y(t_2)) - f(t_1, y(t_1), {}^cD^\alpha y(t_1))|.
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$ le côté droit de l'inégalite ci-dessus tend vers zéro. Ainsi, $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est équicontinu dans X. D'aprés le théorème Ascoli Arzela, $L_P^{-1}(I-Q)N(\overline{\Omega})$ est relativement compact. En conséquence de étape 1 à 3, on peut conclure que l'opérateur N est L-compact dans $\overline{\Omega}$, et ceci complète la preuve.

Lemme 3.4. *Si la condition* (H1) *vérifiée, alors il existe un nombre positif A, ne dépendant pas à λ, tel que, si :*

$$L(y) - N(y) = -\lambda[L(y) + N(-y)], \quad \lambda \in (0,1], \tag{3.10}$$

alors $\|y\|_X \leq A$.

Preuve :

Supposons que (H1) est vérifiée et que $y \in X$ satisfait (3.10). ensuite

$$L(y) - N(y) = -\lambda L(y) - \lambda N(-y),$$

donc

$$L(y) = \frac{1}{1+\lambda} N(y) - \frac{\lambda}{1+\lambda} N(-y). \tag{3.11}$$

Utilisation les définitions des opérateurs L et N (voir (3.3) et (3.4)), pour chaque $t \in J$, on obtient

$$\begin{aligned}
|Ly(t)| = |{}^cD^\alpha y(t)| &\leq \frac{1}{1+\lambda}\,|f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t))| + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,|f(t, -y(t), -{}^cD^\alpha y(t))| \\
&\leq \frac{1}{1+\lambda}[|f(t, y(t), {}^cD^\alpha y(t)) - f(t,0,0)| + f^*] \\
&\quad + \frac{\lambda}{1+\lambda}[|f(t, -y(t), -{}^cD^\alpha y(t)) - f(t,0,0)| + f^*] \\
&\leq \Big(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\Big) f^* + \frac{1}{1+\lambda}[K|y(t)| + \overline{K}|{}^cD^\alpha y(t)|] \\
&\quad + \frac{\lambda}{1+\lambda}[K| - y(t)| + \overline{K}| - {}^cD^\alpha y(t)|] \\
&= f^* + \Big(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\Big)[K|y(t)| + \overline{K}|{}^cD^\alpha y(t)|] \\
&= f^* + K|y(t)| + \overline{K}|{}^cD^\alpha y(t)| \\
&\leq f^* + K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|{}^cD^\alpha y\|_\infty \leq f^* + K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty. \tag{3.12}$$

d'aprés (3.11), pour chaque $t \in J$, on a :

$$y(t) = \frac{1}{1+\lambda} L_p^{-1} N y(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda} L_p^{-1} N(-y(t)),$$

et donc

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \frac{1}{(1+\lambda)\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,y(s),{}^cD^\alpha y(s)) - f(s,0,0)\right| ds \\
&\quad + \frac{\lambda}{(1+\lambda)\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|f(s,-y(s),-{}^cD^\alpha y(s)) - f(s,0,0)\right| ds \\
&\quad + \frac{f^*T^\alpha}{(1+\lambda)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda f^*T^\alpha}{(1+\lambda)\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq \left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty) \\
&\quad + \left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\frac{f^*T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty) + \frac{f^*T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|y\|_\infty \leq [f^* + K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty]\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{3.13}$$

on utilise la définition de la norme $\|\cdot\|_X$, on remarque que si $\|y\|_X = \|{}^cD^\alpha y\|_\infty$ donc par (3.12), on a

$$\begin{aligned}
\|y\|_X &\leq f^* + K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty \\
&\leq f^* + K\|y\|_X + \overline{K}\|y\|_X \\
&= f^* + (K+\overline{K})\|y\|_X,
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\|y\|_X \leq \frac{f^*}{1-(K+\overline{K})} := A_1.$$

d'autre part, si $\|y\|_X = \|y\|_\infty$, donc (3.13) implique

$$\begin{aligned}
\|y\|_X &\leq [f^* + K\|y\|_\infty + \overline{K}\|{}^cD^\alpha y\|_\infty]\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq [f^* + K\|y\|_X + \overline{K}\|y\|_X]\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= [f^* + (K+\overline{K})\|y\|_X]\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

et donc

$$\|y\|_X \leq \frac{f^*}{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha} - (K+\overline{K})} := A_2.$$

Par conséquent

$$\|y\|_X \leq \max\{A_1, A_2\} := A,$$

et ceci complète la preuve.

Lemme 3.5. *Si condition* (H1) *est satisfait, alors il y a un ensemble ouvert borné* $\Omega \subset X$ *tel que*

$$L(y) - N(y) \neq -\lambda[L(y) + N(-y)], \tag{3.14}$$

pour tout $y \in \partial\Omega$ *et tout* $\lambda \in (0,1]$.

Preuve :

D'aprés (H1) et le Lemme 3.4, il existe une constante positive A cela ne dépend pas de λ tel que, si y satisfait

$$L(y) - N(y) = -\lambda[L(y) + N(-y)], \ \lambda \in (0,1],$$

alors $\|y\|_X \leq A$. donc, si :

$$\Omega = \{y \in X : \|y\|_X < B\} \tag{3.15}$$

où $B > A$, on a :

$$L(y) - N(y) \neq -\lambda[L(y) - N(-y)]$$

pour chaque $y \in \partial\Omega = \{y \in X : \|y\|_X = B\}$ et $\lambda \in (0, 1]$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver le résultat principal .

Théorème 3.1. *Si* (H1) *satisfait, alors le problème* (3.1)–(3.2) *admet au moins une solution.*

Preuve :
D'aprés (H1) il est clair que l'ensemble Ω définit par (3.15) est symétrique, $0 \in \Omega$, et $X \cap \overline{\Omega} = \overline{\Omega} \neq \emptyset$. de plus, d' aprés le lemme 3.5 que si la condition (H1) est satisfait, alors :

$$L(y) - N(y) \neq -\lambda[L(y) - N(-y)]$$

pour tout $y \in X \cap \partial\Omega = \partial\Omega$ et tout $\lambda \in (0, 1]$. Ceci avec le lemme 2.3 impliquer que problème (3.1)–(3.2) a au moins une solution, et ceci complète la preuve.

3.2.2 Exemples

On donne deux exemples pour illustrer notre théorème.

Exemple 3.2.1. Considérons le problème des équations différentielles fractionnaires implicites non linéaires :

$$D^{1/2}y(t) = \frac{e^{-t}}{(11 + e^t)}\Big[\frac{|y(t)|}{1 + |y(t)|} - \frac{|D^{1/2}y(t)|}{1 + |D^{1/2}y(t)|}\Big], \quad t \in [0, 1], \tag{3.16}$$

$$y(0) = y(1). \tag{3.17}$$

ici on a :

$$f(t, u, v) = \frac{e^{-t}}{(11 + e^t)}\Big(\frac{u}{1 + u} - \frac{v}{1 + v}\Big), \quad t \in [0, 1],\ u, v \in [0, +\infty),$$

et clairement que la fonction f est uniformément continue. Pour chaque u, $\bar{u}$, v, $\bar{v} \in [0, +\infty)$ et $t \in [0, 1]$,

$$|f(t, u, v) - f(t, \bar{u}, \bar{v})| \leq \frac{e^{-t}}{(11 + e^t)}[|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|] \leq \frac{1}{12}[|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|].$$

d'où, la condition (H1) est satisfaite avec $K = \overline{K} = 1/12$ et

$$K + \overline{K} = \frac{1}{6} < \min\left\{1, \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha}\right\} = \min\left\{1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'aprés le théorème 3.1 ce problème (3.16)–(3.17) admet au moins une solution.

Exemple 3.2.2. On considère le problème

$$D^{1/2}y(t) = \frac{t}{3}\sin y(t) + \frac{1}{100}\sin D^{1/2}y(t) + \frac{1}{2}, \quad t \in [0,1], \tag{3.18}$$

$$y(0) = y(1). \tag{3.19}$$

ici,

$$f(t,u,v) = \frac{t}{3}\sin u + \frac{1}{100}\sin v + \frac{1}{2}, \quad t \in [0,1],\ u, v \in \mathbb{R}.$$

qui est uniformément continue. Pour toute u, $\bar{u}$, v, $\bar{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| &\leq \frac{|t|}{3}|\sin u - \sin \bar{u}| + \frac{1}{100}|\sin v - \sin \bar{v}| \\ &\leq \frac{1}{3}|u - \bar{u}| + \frac{1}{100}|v - \bar{v}|. \end{aligned}$$

d'où, la condition (H1) est satisfaite avec $K = 1/3$, $\overline{K} = 1/100$, et

$$K + \overline{K} = \frac{103}{300} < \min\left\{1, \frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'aprés le théorème 3.1 ce problème (3.18)–(3.19) admet au moins une solution sur J.

CONCLUSION

Dans ce mémoire,

Dans le travail présenté, nous avons considéré une classe d'équations différentielles implicites non linéaire à dérivé fractionaire au sens de Caputo sur un intervalle borné avec conditions aux limites en résonance. À l'aide de **théorème de continuation de Mawhin**, nous avons présenté les résultats d'existence des solutions de problème aux limites $(3.1)-(3.2)$ avec $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$. deux exemples pratiques ont été présenté pour illustrer les résultats principaux .

L'idée principale de ce travail est de présenter une autre technique basés sur **la théorie du degré de coïncidence de Mawhin** pour la résolution d'un problème aux limites en résonance si le problème homogène linéaire correspondant a une solution non triviale, c'est-à-dire, l'opérateur de dérivation associés au problème donné est non inversible.

Bibliographie

[1] Abbas, Benchohra, Graef, Henderson ; Implicit Fractional Differential and Integral Equations (Existence and Stability) [004] , 4 Boundary Value.

[2] M. Benchohra, J. E. Lazrega, Existence and Uniqueness Results for Nonlinear Implicit Fractional Differential Equations with Boundary Conditions Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, **4(1)**, (2014), 60-72.

[3] . Baba hamed, K. Benhabib Rappells de cours et exercices avec solutions Office des puplications universitaires 5 (2012).

[4] Mouffak Benchohra, J. R. Graef, Soufyane Bouriah, Nonlinear implicit differential equations of fractional order at resonance ,Electronic Journal of Differential Equations, **324**, (2016), 1-10.

[5] M. Benchohra and M. S. Souid, L^1-Solutions of Boundary Value Problems for Implicit Fractional Order Differential Equations, Surveys in Mathematics and its Applications **10** (2015), 49-59.

[6] : H. Brezis Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[7] S. Djebali, Problèmes aux limites non linéaire associés aux EDO du second ordre, Cours de magister, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2001-2002).

[8] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[9] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.

[10] V. Lakshmikantham, S. Leela and J. Vasundhara, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.

[11] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[12] : D. O'Regan, Y.Je Cho, and Yu-Qing Chen,Topological Degree Theory and Applications, Volume 10, by Taylor et Francis Group,LLC, 2006.

[13] R. E. Gaines, J. Mawhin, Coincidence degree and nonlinear differential equations, Lecture Notes in Math., vol. 568, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[14] J. Mawhin ; NSF-CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **40**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1979.

[15] R. Ma, Multiplicity results for a third order value problem at resonance, Nonlinear Anal. 32 (1998), no. 4, 493-499.

[16] J. Mawhin Topological degree methods in nonlinear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences (040), AMS, 1979.

[17] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory, J. Differential Equations 12 (1972), 610-636.

[18] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations. In : Furi M., Zecca P. (eds) Topological Methods for Ordinary Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol 1537. Springer, Berlin, Heidelberg.

[19] J. Mawhin, Leray-Schauder degree : A half century of extensions and applications, J.of the J. Schauder Center, Vol.14 (1999), 195-228.

[20] J. Mawhin, Leray-Schauder continuation theorems in the absence of a priori bounds, in Topological Methods in Nonlinear Analysis., J. of the Schauder Center, Vol. 9, 1997, 179-200.

[21] D. O.Regan, M. Zima, Leggett.Williams norm-type theorems for coincidences, Arch. Math. 87 (2006) 233-244.

[22] S. Zahang ,Solutions for boundary-value of fractional diffrential equations. Electron.J.Differential Equations ,No. 36,pp.1-12.

[23] D. O'Regan, Y. J. Chao, Y. Q. Chen ; Topological Degree Theory and Application, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2006.

[24] Christine Poirier ; Université de Versailles-Saint Quentin Licence de Mathématiques - Cours d'Analyse Numérique - Année - 2016/2017.