REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et application

Par :

Benane Mohammed el-Amin
Benaissa Malika

Sur le thème

L'opérateur intégrale fractionnaire dans les espaces de Lebesgue et de Hôlder avec poids .

Soutenu publiquement le 14/ 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr . Senouci Abdelkader	Pr	Université Tiaret	Président
Mr . Sofrani Mohammed	MAA	Université Tiaret	Examinateur
Mr . Benali Halim	MCA	Université Tiaret	Encadreur

2020-2021

Remerciements

Au nom d'Allah le clément et miséricordieux

Premièrement, nous tenons particulièrement à remercier ALLAH le Tout Puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a accordé durant toutes ces longues années. Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur BENALI HALIM , pour le suivi continuel tout au long de la réalisation de ce mémoire, pour ses conseils et ses encouragements Nous lui sommes également reconnaissante pour la confiance qu'il nous a accordée. Aussi, nos remerciements s'adressent-ils à de nombreux professeurs qui ont eu pour nous , une importance certaine de notre formation et a tous les membres du département des mathématiques TIARET. Nous remercions enfin ceux qui nous ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail. Et tous nos remerciements particuliers à nos PARENTS pour leur soutien et leurs encouragements continus.

♡

- *BENANE MOHAMMED EL-AMIN*
- *BENAISSA MALIKA*

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux sans qui je ne serais pas là aujourdhui ceux qui leurs vertus ne ce comptemt pas mes chers parents puisse dieux les garder et leur donner une longue et heureuse vie ,

à mes frères et sœurs ,

Mes collegues ,

Mes professeurs ,

Mes élèves ,

Mes camarades ,

Ainsi au à tous

mes amis .

BENANE M-EL AMIN

Dédicace

Je dédie avec joie et fierté l'effort

soumis à la femme la plus

affectueuse et la plus douce au monde , l'ange le plus tendre qui a été toujours pour moi une source d'amour ,de pitié et d'espoir, ma très Chère Mère.

L'etre le plus cher au monde en témoignage de mon respect , à mon très Cher Père.

A ma chère sœur Leila et mes Chers frères :Mohamed-Abdessamed-Amine.

A mes très chers grands parents : Aek - helima -fatiha -- adda que dieu lui fasse miséricorde.

A mes chers amis , a tous ceux qui me sont chers.

Qu'ils veuillent trouver dans ce travail , résultat des encouragement incessants et des sacrifices qu'ils ont consentis pour mes études , l'expression de ma très grande affection et de mes infinies reconnaissances.Je leur souhaite tout le succès et le bonheur du monde.

J'admirerai toujours votre gentillesse

et votre humour.

BENAISSA MALIKA

Table des matières

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{N}$ L'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{R}$ L'ensemble des nomber rèels.

$\mathbb{R}_+$ $x \in R : x > 0$, L'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{C}$ L'ensemble des nombres complexe.

$Re(z)$ Partie réelle de z

$C(\Omega)$ Espace des fonctions continues sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$C^n(J,\mathbb{R})$ Espace des fonctions continuement diffèrentiable sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\mathcal{C}_\lambda(\Omega)$ l'espace des fonctions continues avec poids .

$\mathcal{AC}$ L'espace des fonctions absolument continues.

$\mathcal{AC}^n$ L'espace des fonctions diffèrentiables.

$\mathcal{H}^\lambda(\Omega)$ l'espace de Hôlder .

$\mathcal{H}^\lambda(\Omega,\rho)$ l'espace de Hôlder avec poids .

L^p $1 \leq p \leq +\infty$ L'espace des fonctions integrables.

Γ La fonction Gamma.

B La fonction bêta

$I^\alpha_{b^-}$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

$I^\alpha_{a^+}$ L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite.

$I^\alpha_{a^+,g}$ l'opérateur intégrale généralisé .

$D^\alpha_{b^-}$ La dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

$D^\alpha_{a^+}$ La dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville à droite.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de primitive et dérivation d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Malgré que la dérivation fractionnaire a été définie par plusieurs approches aux noms de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, cette notion a été introduite au $XVII^e$ siècle lorsque Gottfried Leibniz a défini le symbole de la dérivation d'ordre entier positif, Guillaume l'Hôspital l'a interrogé sur la possibilité d'avoir une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. Cette question a attiré l'attention des mathématiciens dont Euler ou Lagrange au $XVIII^e$ siècle suivi par Liouville en 1837, Riemann en 1847 ainsi que Grünwald 1867 et Letnikov en 1868. Pour plus de détail historique, on peut consulter [5].

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'etude de la bornétude de l'opérateur intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville dans les espaces de Hôlder et ceux de Lebesgue avec poids . Ce mémoire comprend une introduction et quatres chapitres .

Le 1^{er} chapitre est consacré à des rappels sur quelques espaces fonctionnels tels que les espaces des fonctions continues et absolument continues , les espaces de Lebsegue , les espaces de Hôlder et quelques inégalites intégrales necessaires telle que l'inégalite de Hôlder et de Minkowsky .

Le $2^{ème}$ chapitre comprend quelques rappels sue le calcul fractionnaire à sa voir l'intégrale de Riemann-Liouville et quelques proprietés dans les espaces de Hôlder et Hôlder avec poids .

Dans le chapitre trois on présente quelques résultats de bornétude de l'opérateur intégrale de Riemann-Liouville dans les espaces de Lebesgue avec et sans poids .

Dans le chapitre quatre,on étand l'étude de bornétude à l'opérateur généralisé de Riemann-Liouville .

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre , nous introduisons les principaux outils qui seront utiles dans toute la suite de ce travail .

Dans tout ce qui suit Ω désigne un intervalle fini $[a, b]$ de l'ensemble $\mathbb{R}$ sauf mention contraire .

1.1 Les espaces des fonctions continues

Définition 1.1. *[1] On désigne par $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues dans Ω C'est à dire :*

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, f \text{ continue } \} .$$

L'espace $\mathcal{C} := \mathcal{C}(\Omega)$ est un espace vectoriel normé par :

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Théorème 1.1 (Complétude). *L'espace $\mathcal{C}(\Omega; \|.\|_{\mathcal{C}})$ est un espace de Banach .*

1.1.1 L'espace $\mathcal{C}^n(\Omega)$

Définition 1.2. *[3] Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\mathcal{C}^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f telles que $f^{(n)}$ existe et est continue sur Ω .*

Théorème 1.2 (Complétude). *L'espace $\mathcal{C}^n(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_{\mathcal{C}} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)|, n \in \mathbb{N}.$$

1.1.2 L'espace $\mathcal{C}_{\lambda}(\Omega)$

Définition 1.3. *[3] . Soit $\lambda \in \mathbb{C}(0 \leq Re(\lambda) < 1)$.*
On désigne par $\mathcal{C}_{\lambda}(\Omega)$ l'espace des fonctions f définies sur $]a, b]$ telles que $(x-a)^{\lambda} f(x) \in \mathcal{C}(\Omega)$. C'est à dire :

$$\mathcal{C}_{\lambda}(\Omega) = \{f :]a, b] \to \mathbb{C}, (.-a)^{\lambda} f(.) \in \mathcal{C}(\Omega)\}.$$

Notations 1.1. *L'espace $\mathcal{C}_{\lambda}(\Omega)$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids .*
En particulier ,

$$\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega).$$

Théorème 1.3 (Complétude). *L'espace $\mathcal{C}_{\lambda}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{\lambda}} = \|(x-a)^{\lambda} f(x)\|_{\mathcal{C}} = \max_{x \in \Omega} |(x-a)^{\lambda} f(x)|.$$

1.2 Les espaces $\mathcal{H}^{\lambda}$ et $\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)$:

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Définition 1.4. [3] *Soit f une fonction définie sur Ω . On dit que La fonction f satisfait la condition de Hôlder d'ordre λ sur Ω si :*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq A\|x_1 - x_2\|^{\lambda}, \quad \lambda \in]0, +\infty[\tag{1.1}$$

pour tout x_1 , $x_2 \in \Omega$, où A est une constante et λ est l'exposant de Hôlder .

Définition 1.5. [3] *On note par $\mathcal{H}^{\lambda} = \mathcal{H}^{\lambda}(\Omega)$ l'espace de toute les fonctions qu'en générale sont à valeurs complexes et satisfont à la condition de Hôlder d'ordre fini λ sur Ω.*

Remarque 1.1. [3]

$$f \in \mathcal{H}^{\lambda}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(\Omega).$$

Remarque 1.2. [3]

1. *Seul le cas* $0 < \lambda \leq 1$ *est intéressant puisque si* $\lambda > 1$ *alors l'espace* $\mathcal{H}^\lambda$ *contient que les fonctions constantes* $f(x) \equiv const$ *il découle de* (1.1) *que* $f'(x) \equiv 0$ *si* $\lambda > 1$ *.*
2. *Si* $\lambda = 0$ *,* $\mathcal{H}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$ *.*

Lemme 1.1. [3] *Soient* $\Omega_1 = [a, c]$ *,* $\Omega_2 = [c, b]$ *,* $-\infty < a < c < b < +\infty$ *et* $\Omega = [a, b]$ *.*
Si $f(x) \in \mathcal{H}^\lambda(\Omega_1)$ *et* $f(x) \in \mathcal{H}^\lambda(\Omega_2)$ *et* $f(c-0) = f(c+0)$*, alors* $f(x) \in \mathcal{H}^\lambda(\Omega)$ *.*

Théorème 1.4 (Complétude). [3] *Les espaces* $\mathcal{H}^\lambda(\Omega)$ *sont des espaces lineaires normés par :*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\lambda} = \max_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x_1,x_2\in\Omega, x_1\neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}. \tag{1.2}$$

L'espace $\mathcal{H}^\lambda$ *est un espace de Banach .*

Preuve. voir [[2],p173] . □

1.2.1 L'espace $h^\lambda(\Omega)$

Définition 1.6. [3] $h^\lambda(\Omega)$ *est l'espace des fonctions* f *qui vérifient une condition plus forte que* (1.1) *:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2 - x_1|^\lambda} \longrightarrow 0 \quad si \quad x_2 \longrightarrow x_1, \tag{1.3}$$

pour tout $x_1, x_2 \in \Omega$ *.*

Remarque 1.3. *a)* $h^\lambda \subset \mathcal{H}^\lambda$

b) $\mathcal{H}^1(\Omega)$ *est appelé espace de Lipchitz .*

1.2.2 L'espace $\mathcal{H}^\lambda(\rho)$:

Définition 1.7. *[3] Soit* $\rho(x)$ *une fonction mesurable non négative . L'espace des fonctions* $f(x)$ *telle que* $\rho(x)f(x) \in \mathcal{H}^\lambda(\Omega)$ *est noté par :*

$$\mathcal{H}^\lambda(\rho) = \mathcal{H}^\lambda(\Omega, \rho).$$

Dans ce qui suis on concidére la fonction de poids sous la forme :

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\mu_k}, \tag{1.4}$$

avec μ_k sont des nombres réelles et $x_k \in \Omega$.
En vertu de l'espace $\mathcal{H}^\lambda(\rho)$, les fonctions de cet espace sont représentées sous la forme :

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\rho(x)}, f_0(x) \in \mathcal{H}^\lambda(\rho). \tag{1.5}$$

Définition 1.8. *Soit $\rho(x)$ définie par (1.4) , notons par $\mathcal{H}_0^\lambda(\rho) := \mathcal{H}_0^\lambda(\Omega, \rho)$ l'espace des fonctions pour lesquelles $f_0(x_k) = 0$.*
Nous allons également utiliser les espaces des fonctions de poids :

$$h_0^\lambda = \{f(x), \rho(x)f(x) \in h^\lambda, \rho(x)f(x)|_{x=a} = \rho(x)f(x)|_{x=b} = 0\}.$$

Remarque 1.4. *D'aprés (1.5) on déduit que :*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\lambda(\rho)} = \|f_0\|_{\mathcal{H}^\lambda}.$$

La complétude de l'espace $\mathcal{H}^\lambda(\rho)$ à l'égard de cette norme étant évidente par l'isomètrie entre les deux espaces $\mathcal{H}^\lambda(\rho)$ et $\mathcal{H}^\lambda$.

Propriété 1.1. *[3]*

**) Si $f(x) \in \mathcal{H}^\lambda([a, b])$ et $0 < \alpha < \lambda$, alors*

$$g(x) = \frac{|f(x) - f(c)|}{|x - c|} \in \mathcal{H}^{\lambda-\alpha}([a, b]), \quad a \le c \le b$$

et

$$\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda-\alpha}} \le K\|f\|_{\mathcal{H}^\lambda},$$

où K ne dépend pas de $f(x)$ voir [[2],p22] .

***) Si Ω est un intervalle fini et $\rho(x)$ une fonction de poids (1.3) on a :*

$$\mathcal{C}^1(\Omega) \subset \mathcal{H}_0^\lambda(\Omega, \rho) \subset \mathrm{L}_1(\Omega)$$

ou L_1 *l'espace de Lebesgue et*

$$K_1\|f\|_{\mathrm{L}_1} \leq \|f\|_{\mathcal{H}_0^\lambda}(\rho) \leq K_2\|f\|_{C^1},$$

avec $\lambda \leq \mu_k < \lambda+1$, $K = 1, 2, ...n$.

1.2.3 L'espace $\mathcal{AC}(\Omega)$:

Définition 1.9. *Une fonction* $f(x)$ *est dite absolument continue sur un intervalle fini* Ω *, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour tout ensemble fini des intervalles* $[a_k, b_k] \subset \Omega$ $k = 1, 2, ..., n$ *tel que* $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ *, l'inégalité* $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ *est vérifiée .*

Notations 1.2. *L'espace des fonctions abs-continues est noté par* $\mathcal{AC}(\Omega)$ *.*
Caractérisation : *L'espace des fonctions absoluments continues est l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables , c'est à dire :*

$$f(x) \in \mathcal{AC}(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty. \tag{1.6}$$

Donc les fonctions absoluments continues ont une dérivée sommable $f'(x)$ *presque partout .*

Remarque 1.5. *La continuité absolue ne découle pas de l'existence d'une dérivée sommable presque partout . Il est évident que* $\mathcal{H}^1(\Omega) \subset \mathcal{AC}(\Omega)$ *l'inclusion inverse n'est pas vraie .*

Exemple 1.1 (Contre exemple). $f(x) = (x-a)^\alpha \in \mathcal{AC}(\Omega)$ *mais* $f(x) \notin \mathcal{H}^1(\Omega)$ *si* $0 < \alpha < 1$ *puisque la condition (1.1) avec* $\lambda = 1$ *n'est pas verifieé au point* $x = a$ *.*

Théorème 1.5 (Complétude). *L'espace* $\mathcal{AC}$ *est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{AC}(\Omega)} = |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt.$$

1.2.4 L'espace $\mathcal{AC}^n$

Définition 1.10. *On note par* $\mathcal{AC}^n(\Omega)$ *, ou n=1,2,... et* Ω *est un intervalle fini l'espace des fonctions* $f(x)$ *continuement dérivables jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *sur* Ω *, avec* $f^{(n-1)}(x) \in \mathcal{AC}(\Omega)$*. i.e*

$$\mathcal{AC}^n(\Omega) = f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, (D^{n-1}f) \in \mathcal{AC}(\Omega).$$

En particulier $\mathcal{AC}^1(\Omega) := \mathcal{AC}(\Omega)$.

1.3 Les espaces L_p et $\mathrm{L}_p(\rho)$

Soit $p \in [1, \infty]$.

1.3.1 L'espace L_p :

Définition 1.11. *[1] On note par :*

$$\mathrm{L}_p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} / f \text{ est mesurable et } \textstyle\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

1. *Si* $1 \leq p < \infty$ *on pose* $\|f\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ *ou* $\|f\|_{\mathrm{L}_p} := \|f\|_{\mathrm{L}p}(\Omega) := \|f\|_p$.
2. *Si* $p = \infty$ *l'espace* $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ *est défini comme l'ensemble de toutes les fonctions mesurables essentiellemet bornées et on pose :*

$$\|f\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} = supess_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf\{c > 0, mes\{x \in \Omega, |f(x)| \neq 0\} < c\}.$$

(voir [5]p12-13]) .

Théorème 1.6 (Théorème de Fisher-Riesz). *L'espace* $(\mathrm{L}_p, \|.\|_p)$ *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *avec* $\|f\|_{\mathrm{L}_p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ supess_{x\in\Omega}|f(x)| & si \quad p = \infty. \end{cases}$

1.3.2 Quelques inégalités intégrales :

Théorème 1.7. ***(L'inégalité de Hôlder)*** *Soient* $p, q \in [1; +\infty]$ *avec* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in \mathrm{L}_p$ *et* $q \in \mathrm{L}_q$ *alors :*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f(x)\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)}\|g(x)\|_{\mathrm{L}_q(\Omega)}. \tag{1.7}$$

On note que (1.7) est vraie si $1 \leq p \leq \infty$ *(*$q = \infty$ *, si* $p = 1$ *et* $q = 1$ *si* $p = \infty$ *) .*

Corollaire 1.1. ***(L'inégalité généralisée de Hôlder)***

$$\int_{\Omega} |f_1(x)...f_n(x)|dx \leq \|f_1\|_{\mathrm{L}_{p_1}(\Omega)}...\|f_n\|_{\mathrm{L}_{p_m}(\Omega)}, \tag{1.8}$$

ou $f_k(x) \in \mathrm{L}_{p_k}(\Omega), k = 1, ..., m$ *et* $\sum_{k=1}^{m} \dfrac{1}{p_k} = 1$.

Corollaire 1.2. *Soit* $1 \leq p_2 < p_1$ *alors* $\mathrm{L}_{p_1}(\Omega) \subset \mathrm{L}_{p_2}(\Omega)$ *et de plus on a :*

$$\|f\|_{\mathrm{L}_{p_2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}_{p_1}(\Omega)}. \tag{1.9}$$

Corollaire 1.3. ***(L'inégalité de Minkowsky)*** *Soit* Ω *un intervalle fini ,* $p \in [1, +\infty]$ *et* $f, g \in \mathrm{L}_p(\Omega)$ *alors :*

$$\|f + g\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)}. \tag{1.10}$$

Théorème 1.8. ***(L'inégalité intégrale de Minkowsky)*** *Soient* (X, A, μ) *et* (Y, B, v) *deux espaces mesurés* σ*-fini et* F *une fonction mesurable positive sur le produit* $X \times Y$ *. Alors pour tout* $p \in [1, +\infty[$

$$\left(\int_X \left(\int_Y F(x,y)dv(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X F(x,y)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} dv(y).$$

Théorème 1.9. *Soit* $\Omega_1 = [a, b], \Omega_2 = [c, d], -\infty < a < b < +\infty, -\infty < c < d < +\infty$*, et soit* $f(x, y)$ *est une fonction mesurable définie sur* $\Omega_1 \times \Omega_2$*, si au moins une des intégrales* $\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)dy$ *,*$\int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)dx$ *,*$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)dxdy$*, est absolument convergente et on a*

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_a^x f(x,y)dx \tag{1.11}$$

Théorème 1.10. *[3] Soit la fonction* $f(x, h)$ *telle que :* $|f(x, h)| \leq F(x)$ *ou* $F(x)$ *ne dépent pas du paramètre h et* $F(x) \in \mathrm{L}_1(\Omega)$ *si* $\lim_{h\to 0} f(x, h)$ *existe pour presque tous* $x \in \Omega$ *alors*

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Omega} f(x,h)dx = \int_{\Omega} \lim_{h\to 0} f(x,h)dx. \tag{1.12}$$

La preuve des propriétés ci-dessus peut être trouvée dans [3] .

Théorème 1.11. *[3] Soit $K(t) \in L_1(\Omega)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)dt = 1$ puis la moyenne*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)f(x-\varepsilon t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} K(\frac{t}{\varepsilon})f(x-t)dt, \tag{1.13}$$

de la fonction $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^1), 1 \leq p < \infty$ converge vers $f(x)$ si $\varepsilon \to 0$ dans $L_p(\mathbb{R}^1)$ de plus si $|k(t)| \leq A(|t|)$ ou $A(R) \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$ et de façon monotone la moyenne converge vers $f(x)$ presque par tout . La preuve de convergence L-norme dans ce théorème est bien connue et simple (voir le preuve dans [2 ; page 77]) . L'analogue périodique du théorème (1,3) dont nous aurons besoin dans la suite .

1.3.3 L'espace $L_p(\rho)$

Définition 1.12. *[3] Soit $\rho(x)$ est une fonction mesurable positive . On note par $L_p(\rho) = L_p(\Omega, \rho)$ l'espace des fonctions $f(x)$ mesurables sur Ω pour lesquelles*

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \left(\int_\Omega \rho(x)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nous ne traiterons que des poids de la forme (1.3) .

Théorème 1.12. *[3] L'espace $L_p(\rho)$ est un espace de Banach compte tenu de l'isométie*

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \|\rho^{\frac{1}{p}} f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Une inégalité analogue à celle de Hôlder pour les espaces avec poids

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L_p(\rho)}\|g\|_{L_{p'}(\rho^{1-p'})}, \quad 1 < p < \infty \tag{1.15}$$

résulte de (1.7) .

Dans la suite , nous aurons à traiter des opérateurs intégraux de convolution :

$$h*\varphi := (h*\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\varphi(t)dt. \tag{1.16}$$

Théorème 1.13. ***(Inégalité de Young)*** *[3] Si $h(t) \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^1), \varphi(t) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^1)$, puis $(h{*}\varphi)(x) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^1)$, $1 \leq p < \infty$ et l'inégalité*

$$\|h{*}\varphi\|_p \leq \|h\|_1 \|\varphi\|_p, \tag{1.17}$$

est vérifieé .

Soit la fonction $K(x,t), x > 0, t > 0$. La fonction K est dite homogène de degré α si l'égalité

$$K(\lambda x, \lambda t) = \lambda^{\alpha} K(x,t), \lambda > 0. \tag{1.18}$$

En particulier , pour $\lambda = t^{-1}$ la fonction homogène de degré α peut être représentée par

$$K(x,t) = t^{\alpha} K_0(\frac{x}{t}). \tag{1.19}$$

Théorème 1.14. *[3] Soit $K(x,t)$ une fonction homogène de degré -1 si*

$$K = \int_0^{\infty} |K(x,1)| x^{\frac{-1}{p'}} dx \leq \int_0^{\infty} |K(1,x)| x^{\frac{-1}{p}} dt < \infty, \tag{1.20}$$

alors l'opérateur intégral

$$K_{\varphi} := (K\varphi)(x) = \int_0^{\infty} K(x,t)\varphi(t) dt, \tag{1.21}$$

est borné dans $\mathrm{L}_p(0,\infty), 1 \leq p < \infty$ et $\|K\varphi\|_{\mathrm{L}_p} \leq K\|\varphi\|_{\mathrm{L}_p}$ où K est donné par (1,20) .

1.4 Quelques fonctions spéciales :

1.4.1 La fonction Gamma $\Gamma(z)$:

Définition 1.13. *Pour $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$, la fonction Gamma d'Euler est définie par :*

Si $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, Rez > 0. \tag{1.22}$$

Si $Re(z) \leq 0, z \neq 0, -1, -2, -3, ...$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

1.4.1.1 Propriétes de fonction $\Gamma(z)$:

1. Pour $z \in \mathbb{C} - 0, -1, -2, -3, ...$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

3. Pour $z \in \mathbb{C} - 0, 1, 2, 3, ...$

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z).$$

1.4.2 La fonction Béta $\beta(z, w)$

Définition 1.14. *Soit* $z, w \in \mathbb{C}$ *, la fonction Béta est définie par :*

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Théorème 1.15. ***Propriétes de la fonction Béta***

1. *Pour* $Re(z), Re(w) > 0$ *, on a*

$$\begin{aligned} \beta(z, w) &= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+z)^{z+w}} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sint)^{2z-1}(cost)^{2w-1}. \end{aligned}$$

2. $$\beta(z+1, w+1) = \int_0^1 t^z(1-t)^w dt.$$

3. *La fonction Béta possède les identités suivantes :*

(a)

$$\beta(z, w) = \beta(w, z).$$

(b)

$$\beta(z, w) = \beta(z + 1, w) + \beta(z, w + 1).$$

(c)

$$\beta(z, w + 1) = \frac{w}{z}\beta(z + 1, w) = \frac{w}{z + w}\beta(z, w).$$

CHAPITRE 2

L'INTÉGRALE FRACTIONNAIRE DANS LES ESPACES $\mathcal{H}^{\lambda}$ ET $\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)$:

Nous considérons dans ce chapitre les opérateurs d'intégration fractionnaire dans les espace de Hôlder $\mathcal{H}^{\lambda}$ et les espaces de Hôlder avec poids $\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Les résultats sont formulés et prouvés uniquement pour les intégrales fractionnaires à gauche .

2.1 L'integrale fractionnaire de Riemann-Liouville dans $\mathcal{C}([a,b])$:

Définition 2.1. [6] . *Soient* $\Omega = [a,b]$ *avec* $(-\infty < a < b < +\infty)$ *un intervalle fini sur* $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$ *et* f *une fonction continue sur* Ω .
L'intégrale fractionnaire à gauche de $Riemann - Liouville$ *d'ordre* α *de* f *définie par :*

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a, \tag{2.1}$$

et l'intégrale fractionnaire à droite de $Riemann - Liouville$ *d'ordre* α *de* f *définie par :*

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1. *Si* $f \in \mathrm{L}_1([a,b])$ *les fonctions* $I_{a+}^{\alpha} f$, $I_{b-}^{\alpha} f$ *sont définies par les même formules (2.1) et (2.2) .*

Exemple 2.1. $([7], page 71)$ *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$. *Nous avons*

1.

$$I_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}. \tag{2.3}$$

2.

$$I_{b^-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.2. *Soit Q l'opérateur de reflexion définit par : $(Qf)(x) = f(a+b-x)$, alors on a :*

$$QI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha}Q.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{L}_1([a,b], \mathbb{R})$, alors

$$Q(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = (I_{a+}^{\alpha}f)(b+a-x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{b+a-x}(b+a-x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Posons $s = a+b-t$, on trouve

$$\begin{aligned} Q(I_{a+}^{\alpha}f)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b(b-x)^{\alpha-1}f(a+b-t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_b^x(b-x)^{\alpha-1}(Qf)(t)dt. \end{aligned}$$

D'où

$$Q(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = (I_{a+}^{\alpha}Qf)(x).$$

Ce qui montre que $QI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha}Q$. □

Propriété 2.1 (Propriété de Semi-groupe). *Soient $f \in \mathbb{C}([a,b])$ et $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ les intégrales fractionnaires de $Riemann - Liouville$ (2.1) et (2.2) possède les propriétés suivantes :*

1. $I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta}f(x)] = I_{a^+}^{\alpha+\beta}f(x)$.
2. $I_{b^-}^{\alpha}[I_{b^-}^{\beta}f(x)] = I_{b^-}^{\alpha+\beta}f(x)$.

Preuve. Voir [4]. □

2.1.1 Dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2. *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On appelle la dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville les fonctions définies par :*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}},$$

et

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}.$$

On note D_{a+} et D_{b-} respectivement les dérivées à gauche et à droite .

Lemme 2.1. *Soit $f \in \mathcal{AC}(\Omega,\mathbb{R})$ alors la fonction f admet des dérivées fractionnaires D^{α}_{a+} et D^{α}_{b-} presque par tout sur Ω avec $D^{\alpha}_{a+}f$, $D^{\alpha}_{b-}f \in \mathrm{L}^r(\Omega)$, pour $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$. De plus*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right],$$

et

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].$$

Démonstration. Voir [4] □

2.2 Intégration fractionnaire dans l'espace $\mathcal{H}^{\lambda}$:

Les théorèmes cités ci-dessus (2.1)-(2.5) montrent que l'intégrale fractionnaire amélioré l'ordre de Hôlder λ à α . Le cas où $\lambda + \alpha$ est un entier joue un rôle important surtout pour l'espace $\mathcal{H}^{\lambda,1}$.
Commençons par le cas principal où $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \alpha < 1$.

Théorème 2.1. *Soient $f(x) \in \mathcal{H}^{\lambda}([a,b])$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \alpha < 1$. Alors l'intégrale fractionnaire $I^{\alpha}_{a+}f$ prend la forme :*

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha} + \psi(x), \tag{2.5}$$

où $\psi(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}$ *, si* $\lambda+\alpha \neq 1$ *et* $\psi(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha,1}$ *, si* $\lambda+\alpha = 1$ *.*
De plus il existe un réel A *strictement positif tel que*

$$|\psi(x)| \leq A(x-a)^{\lambda+\alpha}. \tag{2.6}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(I^\alpha_{a+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)-f(a)+f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha + \psi(x),\end{aligned}$$

où $\psi(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \dfrac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$.
Puisque $f \in \mathcal{H}^\lambda([a,b])$, on obtient

$$\begin{aligned}|\psi(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{|f(t)-f(a)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\ &\leq \frac{\|f\|_{\mathcal{H}(\lambda)}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^\lambda (x-t)^{\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale

$$\int_a^x (t-a)^\lambda (x-t)^{\alpha-1}dt.$$

En éffectuant le changement de variable $t = a + r(x-a)$, alors

$$\begin{aligned}\int_a^x (t-a)^\lambda (x-t)^{\alpha-1}dt &= \int_0^1 r^\lambda (x-a)^\lambda (1-r)^{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}(x-a)dr \\ &= (x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 r^\lambda (1-r)^{\alpha-1}dr \\ &= (x-a)^{\lambda+\alpha}\beta(\lambda+1,\alpha).\end{aligned}$$

Donc

$$|\psi(x)| \leq \frac{\|f\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\lambda+1,\alpha)(x-a)^{\lambda+\alpha}.$$

D'où

$$|\psi(x)| \leq A(x-a)^{\lambda+\alpha}.$$

Il reste à montrer que $\psi \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}([a,b])$ si $\lambda+\alpha \neq 1$ ou bien $\psi \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha,1}([a,b])$ si $\lambda+\alpha = 1$.
Soit $g(x) = f(x) - f(a)$ de telle sorte que

$$|g(x)| \leq A(x-a)^{\lambda}.$$

Soit $h > 0$ tel que $x, x+h \in [a,b]$, nous avons

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Donc

$$\psi(x+h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x+h} \frac{f(t)-f(a)}{(x+h-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\psi(x+h)-\psi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x+h} \frac{f(t)-f(a)}{(x+h-t)^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x} \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{x-a} \frac{f(x-t)-f(a)}{(t+h)^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} \frac{f(x-t)-f(a)}{t^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{x-a} \frac{g(x-t)}{(t+h)^{1-\alpha}}dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} \frac{g(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt.
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\psi(x+h)-\psi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} g(x-t)[\frac{1}{(t+h)^{1-\alpha}}-\frac{1}{t^{1-\alpha}}]dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0} \frac{g(x-t)}{(t+h)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}g(x)\int_0^{x-a}[(t+h)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}]dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}[g(x-t)-g(x)][(t+h)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}]dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0} \frac{g(x-t)}{(t+h)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha+1)}[(x-a+h)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}-h^{\alpha-1}] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}[g(x-t)-g(x)][(t+h)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0}[g(x-t)-g(x)](t+h)^{\alpha-1}dt \\
&\quad + \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0}(t+h)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha+1)}[(x-a+h)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}[g(x-t)-g(x)][(t+h)^{\alpha+1}-t^{\alpha-1}]dt \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0}[g(x-t)-g(x)](t+h)^{\alpha-1}dt \\
&= J_1+J_2+J_3,
\end{aligned}
$$

tel que

$$J_1 = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha+1)}[(x-a+h)^{\alpha}-(x-a)^{\alpha}],$$

$$J_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}[g(x-t)-g(x)][(t+h)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}]dt,$$

et

$$J_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0}[g(x-t)-g(x)](t+h)^{\alpha-1}dt.$$

On a

$$\begin{aligned}|J_1| &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\lambda|(x-a+h)^\alpha-(x-a)^\alpha| \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\lambda+\alpha}|(1+\frac{h}{x-a})^\alpha-1|,\end{aligned}$$

et si $h \geq x-a$ on a $(1+\frac{h}{x-a})^\alpha-1 \leq \frac{\alpha h}{x-a}$ alors

$$|J_1| \leq \frac{hA}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leq \frac{h^{\alpha+\lambda}A}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Dans le cas $0 < h < \lambda - a$ on a $(1+t)^\alpha - 1 \leq \alpha t$, et d'aprés on obtient

$$|J_1| \leq \frac{hA}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leq \frac{h^{\alpha+\lambda}A}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Finalement on a montré

$$|J_1| \leq \frac{h^{\alpha+\lambda}A}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.7}$$

De mème manière pour J_3 on a

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{-h}^0 \frac{|t|^\lambda}{(t+h)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|t|^\lambda(t+h)^{1-\alpha}dt \\ &\leq \frac{Ah^\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^0 (t+h)^{\alpha-1}dt = \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Maintenant en estime J_2

$$\begin{aligned}|J_2| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a}[t^{\alpha-1}-(t+h)^{\alpha-1}]|g(x-t)-g(x)|dt \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} t^\lambda[t^{\alpha-1}-(t+h)^{\alpha-1}]dt \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} h^\lambda(\frac{t}{h})^\lambda h^{\alpha-1}[(\frac{t}{h})^{\alpha-1}-(\frac{t}{h}+1)^{\alpha-1}]dt \\ &\leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{h}}(\frac{t}{h})^\lambda[t^{\alpha-1}-(t+1)^{\alpha-1}]dt.\end{aligned}$$

Si $x-a \leq h$ alors

$$
\begin{aligned}
|J_2| &\leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda+\alpha-1} dt \\
&= \frac{A}{(\lambda+\alpha)\Gamma(\alpha)} h^{\lambda+\alpha} [h^{\lambda+\alpha}]_0^{\frac{x-a}{h}} \\
&= \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\lambda+\alpha} \frac{(x-a)^{\lambda+\alpha}}{h^{\lambda+\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$|J_2| \leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Si $x-a > g$, on a

$$|J_2| \leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x-a}{h}} [(1+\frac{1}{t})^{\alpha-1} - 1] dt.$$

Alors

$$|J_2| \leq \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.8}$$

D'après (2.3) et (2.4) on trouve

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\lambda+\alpha},$$

ce qui montre que $\psi \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}([a,b],\mathbb{R})$. □

Conséquence 2.1. *L'opérateur* $A : \mathcal{H}^{\lambda} \longrightarrow \mathcal{H}^{\lambda+\alpha} \quad , \quad \lambda+\alpha \neq 1$ *est borné .*
Et de même manière l'opérateur $B : \mathcal{H}^{\lambda} \longrightarrow \mathcal{H}^{\lambda+\alpha,1} \quad , \quad \lambda+\alpha = 1$ *est borné .*

Lemme 2.2. *Soit* $L : \mathcal{H}^{\lambda}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}([a,b],\mathbb{R})$ *un opérateur défini par :*

$$(Lf)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, 0 < \lambda \leq 1, 0 \leq \lambda < 1.$$

Si $0 < \lambda+\alpha < 1$ *, alors* L *est borné .*

Démonstration. On a $\|Lf\|_{0,\lambda} = \|Lf\|_{\infty} + \|Lf\|_{0,\lambda+\alpha}$.

De plus

$$\|Lf\|_{0,\lambda} = \sup_{x\in[a,b]} |(Lf)(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}(b-a)^\alpha. \tag{2.9}$$

Pour $x, y \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
|(Lf)(x)-(Lf)(y)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{t-\alpha}}dt - \int_a^y \frac{f(t)-f(a)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_y^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{t-\alpha}}dt| \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_a^y (f(t)-f(a))[\frac{1}{(x-t)^{t-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}}]|dt \\
&= J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

tel que

$$J_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_y^x \frac{f(t)-f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,$$

et

$$J_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_a^y (f(t)-f(a))[\frac{1}{(x-t)^{t-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}}]|dt.$$

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_y^x \frac{|f(t)-f(a)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_y^x \frac{|f(t)-f(y)|(t-y)^\lambda}{(t-y)^\lambda(x-t)^{1-\alpha}}dt| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_y^x \frac{|f(y)-f(a)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt| \\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}|\int_y^x (t-y)^\lambda(x-t)^{\alpha-1}dt| + \frac{[f]_{0,\lambda}}{\alpha}|(y-a)^\lambda \int_y^x (x-t)^{\alpha-1}dt| \\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_y^x (t-y)^\lambda(x-t)^{\alpha-1}dt\frac{1}{\alpha}(y-a)^\lambda(x-y)^\alpha\right] \\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\big[B(\alpha,\lambda+1|x-y|^{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\alpha}|y-y|^{\alpha+\lambda}|1-\frac{x-a}{x-y}|^\lambda\big].
\end{aligned}$$

Alors

$$|J_1| \leq C_1[f]_{0,\lambda}|x-y|^{\alpha+\lambda}, \tag{2.10}$$

avec $C_1 = \dfrac{\alpha B(\alpha,\lambda+1)+1}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Pour J_2 on a

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y |f(t)-f(a)||\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}}|dt\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y |f(t)-f(a)||\frac{(y-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha}}{(y-t)^{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}|dt\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y |f(t)-f(a)|\frac{(x-t)^{1-\alpha}|1-(\frac{y-t}{x-t})^{1-\alpha}|}{(y-t)^{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}dt\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y \frac{|f(t)-f(a)|}{(y-t)^{1-\alpha}}dt\\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y (t-a)^{\lambda}(y-t)^{\alpha-1}dt\\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}(y-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 (1-r)^{\lambda}r^{\alpha-1}dr\\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}|y-a|^{\lambda+\alpha}|1-(\frac{y-t}{x-t})^{1-\alpha}|^{\alpha+\lambda}B(\lambda,\alpha)\\
&\leq \frac{[f]_{0,\lambda}}{\Gamma(\alpha)}B(\lambda,\alpha)|y-x|^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}$$

D'après (2.9) et (2.10) on obtient

$$\|Lf\|_{0,\lambda+\alpha} \leq \tilde{C}\|f\|_{0,\lambda},\, f\in \mathbb{H}^{\lambda}([a,b],\mathbb{R}),$$

où $\tilde{C} = \dfrac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + C_1 + \dfrac{B(\lambda+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$. □

Corollaire 2.1. *L'opérateur donné par*

$$I^{\alpha}_{a+} : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{H}^{\alpha}([a,b],\mathbb{R})$$
$$f \mapsto I^{\alpha}_{a+}f$$

est borné .

Démonstration. Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \psi(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,$$

avec $\psi(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \dfrac{f(t) - f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$.
D'aprés le lemme (2,1) il existe $\tilde{A} > 0$ tel que

$$\|\psi\|_{0,\lambda} \leq \tilde{A}\|f\|_{\infty}. \tag{2.11}$$

Posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \dfrac{f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{\infty}. \tag{2.12}$$

Soient $x, y \in [a, b]$ tel que $x > y$, alors

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left| \int_a^x \frac{f(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt - \int_a^y \frac{f(a)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt \right| \\
&\leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}|(x-a)^{\alpha} - (y-a)^{\alpha}| \\
&= \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}|x-y|^{\alpha}|(1 - \frac{y-a}{x-y})^{\alpha} - (1 - \frac{x-a}{x-y})^{\alpha}| \\
&\leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}|x-y|^{\alpha}|1 - \frac{y-a}{x-y}|^{\alpha} \\
&\leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}|x-y|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{|x-y|^{\alpha}} \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.13}$$

D'aprés (2.5) , (2.6) et (2.7) on obtient

$$\|\psi\|_{0,\alpha} \leq \tilde{C}\|f\|_{\infty}, f \in \mathbb{C}([a,b], \mathbb{R}),$$

avec $\tilde{C} = \dfrac{2}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \tilde{A}.$ □

Conséquence 2.2. *On peut voir que l'opérateur* $I_{a+}^{\alpha} : \mathrm{L}_{\infty} \to \mathcal{H}^{\alpha}$ *tel que*

$$I_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

est borné .

Preuve. Posons

$$\varphi(x) = I^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

et $h>0$ alors

$$\varphi(x+h) = I^{\alpha}_{a+}f(x+h) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)|\varphi(x+h)-\varphi(x)| &= |\int_a^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}f(t)dt - \int_a^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt| \\
&= |\int_a^{x}(x+h-t)^{\alpha-1}f(t)dt + \int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}f(t)dt \\
&\quad - \int_a^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt| \\
&\leq \sup_{a\leq x\leq b}\Big[\int_a^{x}|(x-t)^{\alpha-1}-(x+h-t)^{\alpha-1}|dt \\
&\quad + \int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}dt\Big]\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} \\
&\leq c_1\Big[\int_a^{x}(x-t)^{\alpha-1}dt + h^{\alpha}\Big]\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} \\
&\leq c_2([(x-t)^{\alpha}]_a^x + h^{\alpha})\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} \\
&\leq c_3[(x-a)^{\alpha} + h^{\alpha}]\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} \\
&\leq ch^{\alpha}\|f\|_{\mathcal{L}_\infty}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.2. *Soit $\varphi(x)\in\mathcal{H}^{\lambda}$, $\lambda>0$. Alors l'intégrale fractionnaire $I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\alpha>0$, prend la forme :*

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k} + \psi(x),$$

où m est le plus grand entier tel que $m<\lambda$ et

$$\psi(x)\in\begin{cases} H^{\lambda+\alpha} & \text{, si } \lambda+\alpha \text{ non entier où si } \lambda,\alpha \text{ entiers} \\ H^{\lambda+\alpha,1} & \text{, si } \lambda+\alpha \text{ entier , mais } \lambda,\alpha \text{ non entiers .}\end{cases}$$

Le théorème (2.2) peut être déduit du théorème (2.1) , si on prend en considération que la fonction :

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left[\varphi(t) - \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] (x-a)^{\alpha-1} dt,$$

admette une dérivée d'ordre $m + [\alpha]$ *:*

$$\psi^{(m+[\alpha])}(x) = \frac{1}{\Gamma([\alpha])} \int_a^x [\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(a)](t-a)^{[\alpha]-1} dt.$$

2.3 L'integrale fractionnaire dans l'espace $\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)$:

On commonce l'étude par le cas éssentiel

$$\rho(x) = (x-a)^{\mu} \text{ ou } \rho(x) = (b-x)^{v}.$$

Remarque 2.3. *Partout dans ce qui suit en considérant l'intégrale fractionnaire* I^{α}_{a+} *dans l'espace* $\mathcal{H}^{\lambda}_0(\rho)$ *, on suppose que* $\rho(x)\varphi(x)|_{x=a} = 0$ *indépondament au fait que le poids* $\rho(x)$ *est lié ou non au point* $x = a$ *.*

Théorème 2.3. *Soit* $0 < \lambda < 1$ *,* $\lambda + \alpha < 1$ *, l'opérateur*

$$I^{\alpha}_{a+} : \mathcal{H}^{\lambda}_0(\rho) \longrightarrow \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}_0(\rho)$$

est bornée , si $\rho(x) = (x-a)^{\mu}, \mu < \lambda + 1$ *ou* $\rho(x) = (b-x)^{v}, v > \lambda + \alpha$*.*

Preuve. 1. Le cas $\rho(x) = (x-a)^{\mu}, \mu < \lambda + 1, 0 < \lambda < 1$.

On a

$$I^{\alpha}_{a+} : \mathcal{H}^{\lambda}_0(\rho) \longrightarrow \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}_0(\rho).$$

Soit $\varphi(x) \in \mathcal{H}^{\lambda}_0(\rho)$ de telle sorte que

$$\varphi(x) = (x-a)^{-\mu} g(x), g(x) \in \mathcal{H}^{\lambda}, g(a) = 0.$$

Montrons que

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}_0(\rho),$$

et

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}_0(\rho)} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda}_0(\rho)},$$

pour cela il suffit de montrer que

$$\rho(x)I^{\alpha}_{a+}\varphi \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}$$

et

$$\|G\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}} \leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}},$$

avec

$$\begin{aligned}
G(x) &= (x-a)^{\mu}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt \\
&= (x-a)^{\mu}\int_a^x (t-a)^{-\mu}(x-t)^{\alpha-1}g(t)dt \\
&= \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\mu}\frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

On peut écrire $G(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_a^x \frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}+(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x-t)^{1-\alpha}}g(t)dt \\
&= \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x-t)^{1-\alpha}}g(t)dt \\
&= G_1(x)+G_2(x).
\end{aligned}$$

On a $G_1(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}$ d'aprés le théorème 2.1 . Donc il suffit de montrer que $G_2(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}$ i.e

$$|G_2(x+h)-G_2(x)| \leq ch^{\lambda+\alpha}.$$

On a

$$\begin{aligned}
G_2(x+h) = &\int_a^x \frac{(x+h-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}g(t)dt \\
&+\int_x^{x+h} \frac{(x+h-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}g(t)dt,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}G_2(x+h)-G_2(x) = &\int_x^{x+h}\frac{(x+h-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}g(t)dt\\&+[(x+h-a)^{\mu}-(x-a)^{\mu}]\int_a^x\frac{g(t)}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}dt\\&+\int_a^x\frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}}[(x+h-t)^{\mu}-(x-t)^{\alpha-1}]g(t)dt,\end{aligned}$$

d'ou

$$G_2(x+h)-G_2(x) = J_1+J_2+J_3. \tag{2.14}$$

En utilisant les deux inégalités suivantes :

$$|x^{\mu}-y^{\mu}| \leq c(x-y)x^{\mu-1}, x \geq y > 0, \mu \geq 0. \tag{2.15}$$

$$|x^{\mu}-y^{\mu}| \leq |\mu|(x-y)y^{\mu-1}, x \geq y > 0, \mu \leq 1. \tag{2.16}$$

La constante c ne dépend pas de x et y .

Estimation de J_1

On utilise l'inégalité : $|g(t)| \leq \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}(t-a)^{\lambda}$ et l'inégalité (2.10) .

a - cas $\mu \leq 1$, on a

$$J_1 = \int_x^{x+h}\frac{(x+h-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}g(t)dt,$$

alors

$$\begin{aligned}|J_1| &\leq |\mu|\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)(t-a)^{\mu-1}(t-a)^{\lambda}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}dt\\&\leq |\mu|\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}}{(t-a)^{1-\lambda}}dt\\&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha}(t-x)^{\lambda-1}dt\\&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h^{\alpha}\int_x^{x+h}(t-x)^{\lambda-1}dt\\&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha}.\end{aligned}$$

b - cas $\mu \geq 1$ d'aprés (2.9)

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq |c| \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)(x+h-a)^{\mu-1}(t-a)^{\lambda}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}} dt \\
&\leq |c| \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} (x+h-a)^{\mu-1} \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^{\alpha}}{(t-a)^{\mu-\lambda}} dt \\
&\leq ch^{\alpha} \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} (x+h-a)^{\mu-1} \int_x^{x+h} (t-a)^{\lambda-\mu} dt \\
&\leq Ch^{\alpha} \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} (x+h-a)^{\mu-1} [(t-a)^{\lambda-\mu+1}]_x^{x+h} \\
&\leq Ch^{\alpha} \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} (x+h-a)^{\mu-1} [(x+h-a)^{\lambda-\mu+1} - (x-a)^{\lambda-\mu+1}] \\
&\leq Ch^{\alpha} \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} (x+h-a)^{\mu-1} h (x+h-a)^{\lambda-\mu} \\
&\leq Ch^{\alpha+1} \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} (x+h-a)^{\lambda-1} \\
&\leq C \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\alpha+\lambda}.
\end{aligned}$$

Estimation de J_2

a- Si $x-a \leq h$ et $\mu > 0$, nous avons

$$(x+h-a)^{\mu} - (x-a)^{\mu} \leq h^{\mu},$$

$$J_2 = [(x+h-a)^{\mu} - (x-a)^{\mu}] \int_a^x \frac{g(t)dt}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}},$$

alors

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq c \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\mu} \int_a^{x+h} \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} dt \\
&\leq c \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\mu} \int_a^{x+h} (t-a)^{\lambda-\mu} (x+h-t)^{\alpha-1} dt \\
&\leq c \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\mu} \int_a^{x+h} (t-a)^{\alpha+\lambda-\mu-1} dt \\
&\leq C \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\mu} [(t-a)^{\alpha+\lambda-\mu}]_a^{x+h} \\
&\leq C \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\mu} (x+h-a)^{\alpha+\lambda-\mu} \\
&\leq C \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} h^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}$$

b- Si $x-a \leq h$ et $\mu < 0$, on a

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\mu}\int_a^x (t-a)^{\lambda-\mu}(x-t)^{\alpha-1}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\mu}\int_a^x (t-a)^{\lambda-\mu}(t-a)^{\alpha-1}dt \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\mu}[(t-a)^{\lambda+\alpha-\mu}]_a^x \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\mu}(x-a)^{\lambda+\alpha-\mu} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\lambda+\alpha} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(h)^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}$$

c- Si $x-a > h$, et $\mu \leq 1$, d'aprés (2.10)

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq |\mu|\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h(x-a)^{\mu-1}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h(x-a)^{\mu-1}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h(x-a)^{\mu-1}\int_a^x (t-a)^{\lambda-\mu}(x-t)^{\alpha-1}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h(x-a)^{\mu-1}\int_a^x (t-a)^{\alpha+\lambda-\mu-1}dt \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h(x-a)^{\mu-1}(x-a)^{\lambda+\alpha-\mu} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\frac{h}{(x-a)^{1-\alpha-\lambda}} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\frac{h}{h^{1-\alpha-\lambda}} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}$$

d- Si $x-a>h$ et $\mu>1$, d'aprés (2.9) on a

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq c_1\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} h(x+h-a)^{\mu-1}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} h(x+h-a)^{\mu-1}\int_a^{x+h}(t-a)^{\lambda+\alpha-\mu-1}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} h(x+h-a)^{\mu-1}(x+h-a)^{\lambda+\alpha-\mu} \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\frac{h}{(x+h-a)^{1-\alpha-\lambda}} \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} h^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}$$

Estimation de J_3

Nous avons

$$\begin{aligned}
|J_3| &= |\int_a^x \frac{(x-a)^\mu-(t-a)^\mu}{(t-a)^\mu}[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]g(t)dt| \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\int_a^x \frac{(x-a)^\mu-(t-a)^\mu}{(t-a)^{\mu-\lambda}}[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]dt.
\end{aligned}$$

Posons $t=a+s(x-a)$, alors

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\int_0^1 \frac{(x-a)^\mu-s^\mu(x-a)^\mu}{s^{\mu-\lambda}(x-a)^{\mu-\lambda}}[(x+h-a-s(x-a))^{\alpha-1}-(x-a)^{\alpha-1} \\
&\quad\times(1-s)^{\alpha-1}](x-a)ds \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\frac{(x-a)^\mu}{(x-a)^{\mu-\lambda}}\int_0^1 \frac{1-s^\mu}{s^{\mu-\lambda}}[(x-a)^{\alpha-1}(1+\frac{h}{x-a}-s)^{\alpha-1}-(x-a)^{\alpha-1} \\
&\quad\times(1-s)^{\alpha-1}](x-a)ds \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 s^{\mu-\lambda}(1-s^\mu)[(1+\frac{h}{x-a}-s)^{\alpha-1}-(1-s)^{\alpha-1}]ds \\
&\leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 |s^{\mu-\lambda}-s^\lambda|[(1+\frac{h}{x-a}-s)^{\alpha-1}-(1-s)^{\alpha-1}]ds.
\end{aligned}$$

(a) Si $x-a\leq h$, on a

$$|J_3|\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h^{\lambda+\alpha}.$$

(b) Si $x-a>h$, on a d'aprés (3,10)

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}(x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 |s^{\mu-\lambda}-s^{\lambda}|[\frac{h}{x-a}(1-s)^{\alpha-2}]ds \\
&\leq ch\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}(x-a)^{\lambda+\alpha-1}\int_0^1 |s^{\mu-\lambda}-s^{\lambda}|(1-s)^{\alpha-2}ds \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}\frac{h}{(x-a)^{1-\lambda-\alpha}} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}\frac{h}{h^{1-\lambda-\alpha}} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha}.
\end{aligned}$$

Finallement d'aprés les estimations de J_1, J_2 et J_3 on a

$$|G_2(x+h)-G_2(x)| \leq Ch^{\lambda+\alpha}.$$

D'où

$$G(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}.$$

2. Le cas $\rho(x)=(b-x)^v, v>\lambda+\alpha$.

   Maintenant $\varphi(x)=(b-x)^{-v}g(x)$ où $g(x)\in\mathcal{H}^{\lambda}$ et $g(a)=g(b)$.

   Posons

$$\begin{aligned}
G(x) &= \rho(x)\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt \\
&= (b-x)^v\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(b-t)^{-v}g(t)dt \\
&= \int_a^x (\frac{b-x}{b-t})^v\frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

   Montrons que

$$G(x)\in\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}, \|G\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}} \leq \|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}},$$

et que $G(a) = G(b)$. On peut écrire $G(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x \frac{(b-t)^v + (b-x)^v - (b-t)^v}{(b-t)^v (x-t)^{1-\alpha}} g(t)dt \\ &= \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{(b-x)^v - (b-t)^v}{(b-t)^v (x-t)^{1-\alpha}} g(t)dt \\ &= G_1(x) + G_2(x). \end{aligned}$$

Nous avons d'aprés le théorème (2.1)

$$G_1(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}, \|G_1\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}} \leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}.$$

Il suffit de montrer que

$$G_2(x) \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}, \|G_2\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}} \leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}.$$

Soit $x + h \in (a, b)$, on a

$$G(x+h) - G(x) = J_1 + J_2 + J_3,$$

avec

$$J_1 = \int_x^{x+h} \frac{(b-x-h)^v - (b-t)^v}{(b-t)^v (x+h-t)^{1-\alpha}} g(t)dt,$$

$$J_2 = [(b-x-h)^v - (b-x)^v] \int_a^x \frac{g(t)dt}{(b-t)^v (x+h-t)^{1-\alpha}},$$

et

$$J_3 = \int_a^x \frac{(b-x)^v - (b-t)^v}{(b-t)^v} [(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}] g(t)dt.$$

Estimation de J_1

On utilisons l'inégalité : $|g(t)| \leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-t)^\lambda$ et l'inégalité (3,9)

donc

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} \int_x^{x+h} \frac{|(t-x-h)(b-x-h)^{v-1}-(b-t)^{\lambda}|}{|(b-t)^v(x+h-t)^{1-\alpha}|}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-x-h)^{v-1}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha}(b-t)^{\lambda-v}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha}(b-t)^{\lambda-v}(b-x-h)^{v-1}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha}(b-t)^{\lambda-1}dt.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable suivant , $t = x+h-\xi$, nous obtenons

$$|J_1| \leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\int_0^h \xi^{\alpha}(b-x-h-\xi)^{\lambda-1}d\xi,$$

en suite posons $\xi = (b-x-h)s$, on a

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}\int_0^{\frac{h}{b-x-h}}(b-x-h)^{\alpha}s^{\alpha}[b-x-h+(b-x-h)s]^{\lambda-1}(b-x-h)ds \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}\int_0^{\frac{h}{b-x-h}} s^{\alpha}(1+s)^{\lambda-1}ds.
\end{aligned}$$

(a) Si $b-x-h \leq h$, on a

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}[\int_0^1 s^{\alpha}(1+s)^{\lambda-1}ds + \int_1^{\frac{h}{b-x-h}} s^{\alpha}(1+s)^{\lambda-1}ds] \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}[1+\int_1^{\frac{h}{b-x-h}} s^{\alpha+\lambda-1}ds] \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}[1+\frac{h^{\alpha+\lambda}}{(b-x-h)^{\alpha+\lambda}}-1] \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}[\frac{h^{\alpha+\lambda}}{(b-x-h)^{\alpha+\lambda}}] \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda}h^{\alpha+\lambda}.
\end{aligned}$$

(b) Si $b-x-h \geq h$, on a

$$
\begin{aligned}
|J_1| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}\int_0^{\frac{h}{b-x-h}} s^{\alpha}ds \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}[\frac{s^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_0^{\frac{h}{b-x-h}} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}(b-x-h)^{\lambda+\alpha}[\frac{h^{\alpha+1}}{(b-x-h)^{\alpha+1}}] \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}[\frac{h^{\alpha+1}}{(b-x-h)^{1-\lambda}}] \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h^{\alpha+1}h^{\lambda-1} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h^{\alpha+\lambda}.
\end{aligned}
$$

Estimation deJ_2

En utilisant l'inégalité(2.9), on trouve

$$
\begin{aligned}
|J_2| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h(b-x)^{v-1}\int_a^x \frac{(b-t)^{\lambda-v}}{(x+h-t)^{1-\alpha}}dt \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h(b-x)^{v-1}\int_a^x \frac{(b-t)^{\lambda-v}}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,
\end{aligned}
$$

posons $x-t=(b-x)\xi$, on obtient

$$
\begin{aligned}
|J_2| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h(b-x)^{v-1}\int_a^{\frac{x-a}{b-x}}(b-x)^{\alpha-1}\xi^{\alpha-1}[(b-x)(1+\xi)]^{\lambda-v}(b-x)d\xi \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h(b-x)^{\lambda+\alpha-1}\int_a^{\frac{x-a}{b-x}} \xi^{\alpha-1}(1+\xi)]^{\lambda-v}d\xi \\
&\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h(b-x)^{\lambda+\alpha-1}\int_a^{\infty} \xi^{\alpha-1}(1+\xi)^{\lambda-v}d\xi \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}hh^{\lambda+\alpha-1} \\
&\leq C\|g\|_{\mathcal{H}^{\lambda}}h^{\lambda+\alpha},
\end{aligned}
$$

car on a $v>\lambda+\alpha$.

Estimation de J_3

On a

$$
J_3=\int_a^x \frac{(b-x)^v-(b-t)^v}{(b-t)^v}[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]g(t)dt.
$$

Posons $t = b - s(b-x)$, on obtient

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{(b-x)^v - [s(b-x)]^v}{s^v(b-x)^v} \\ &\quad \times [(x+h-b+s(b-x))^{\alpha-1} - (x-b+s(b-x))^{\alpha-1} s^\lambda (b-x)^\lambda] \\ &\quad \times s^\lambda (b-x)^\lambda (b-x) ds \\ &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^v|}{s^{v-\lambda}} (b-x)^{\lambda+\alpha} [(s-1+\frac{h}{b-x})^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1}] ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2.10)

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} (b-x)^{\lambda+\alpha} \frac{h}{b-x} \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^v| ds}{s^{v-\lambda}(s-1)^{2-\alpha}} \\ &\leq c\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} (b-x)^{\lambda+\alpha-1} h \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^v| ds}{s^{v-\lambda}(s-1)^{2-\alpha}},\end{aligned}$$

comme $b - x \geq h, \lambda + \alpha < 1$, alors

$$|J_3| \leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} h^{\lambda+\alpha-1} h,$$

i.e

$$|J_3| \leq C\|g\|_{\mathcal{H}^\lambda} h^{\lambda+\alpha}.$$

Finallement d'aprés les estimations de J_1, J_2 et J_3 on a

$$|G_2(x+h) - G_2(x)| \leq C h^{\lambda+\alpha}.$$

□

Remarque 2.4. *Du théorème (2.3) on peut déduire une proposition analogue pour le poids*

$$\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^v.$$

Théorème 2.4. *Soit* $0 < \lambda < 1, \lambda + \alpha < 1$. *L'opérateur*

$$I_{a+}^\alpha : \mathcal{H}_0^\lambda(\rho) \longrightarrow \mathcal{H}_0^{\lambda+\alpha}(\rho),$$

est borné, avec $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{v}, \mu < \lambda+1, v > \lambda+\alpha.$

Preuve. Soit $\varphi(x) \in \mathcal{H}_0^{\lambda}(\rho)$. On choisit un point c arbitraire , $c \in (a,b)$ et on introduit la fonction

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \varphi(x) & si \quad x \le c, \\ \varphi(c) & si \quad x > c, \end{cases}$$

et

$$\varphi_b = \begin{cases} 0 & si \quad x \le c, \\ \varphi(x) - \varphi(c) & si \quad x > c, \end{cases}$$

telle que $\varphi(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$.
On a :

$$\varphi_a(x) \in \mathcal{H}_0^{\lambda}(\rho_a), \varphi_b(x) \in \mathcal{H}_0^{\lambda}(\rho_b).$$

où $\rho_a(x) = (x-a)^{\mu}, \rho_b(x) = (b-x)^{v}.$
Effectivement , en vérifiant par exemple , que $\varphi_a(x) \in \mathcal{H}_0^{\lambda}(\rho_a)$.
On a

$$\rho_a(x)\varphi_a(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{\rho_b(x)} & si \quad x \le c, \\ \rho_a(x)\varphi(c) & si \quad x \ge c, \end{cases}$$

où

$$g(x) = \rho(x)\varphi(x) \in \mathcal{H}^{\lambda}([a,c]), g(a) = 0.$$

Comme les fonctions $[\rho_b(x)]^{-1}$ et $\rho_a(x)\varphi(c)$ sont infiniment différentiables sur $[a,b]$, $[c,b]$ respectivement , alors

$$\frac{g(x)}{\rho_b(x)} \in \mathcal{H}^{\lambda}([a,c]), \rho_a(x) \in \mathcal{H}^{\lambda}([c,b]),$$

donc

$$\rho_a(x)\varphi(x) \in \mathcal{H}^{\lambda}([a,b]).$$

Alors $\rho_a(x)\varphi(x)$ étant une combinaison continue de $\mathcal{H}^{\lambda}([a,c]), \mathcal{H}^{\lambda}([c,b])$, elle appartient à $\mathcal{H}^{\lambda}([a,b])$. Du raisonnement précédent il est aussi clair , que

$$\|\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} \le c\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)} \text{ et } \|\varphi_b\|_{\mathcal{H}^{\lambda}} \le c\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)} .$$

En vertu du théorème (3,1) , on a

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} \leq c\|\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho_a)} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)},$$

et

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho_b)} \leq c\|\varphi_b\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho_b)} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)}.$$

En remarquant que $(I^{\alpha}_{a+}\varphi_b)(x) = 0$ si $x \leq c$, on trouve :

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leq c_1\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho_b)}.$$

En prenant aussi en compte que $\rho_b \in \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}$ et $v > \lambda + \alpha$, on obtient :

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leq c_2\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho_a)}.$$

Donc

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leq c_2\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} + c_1\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{\mathcal{H}^{\lambda+\alpha}(\rho_b)} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{H}^{\lambda}(\rho)}.$$

□

Lemme 2.3. *Soit la fonction $\varphi(x)$, $0 < x \leq l$, avec $|\varphi(x)| \leq kx^{-\gamma}$, $\alpha < \gamma < 1$. Alors*

$$f(x) = \int_0^l \frac{\varphi(t)dt}{(t+x)^{1-\alpha}} \in \mathcal{H}^{\alpha+\beta}([0,l]; x^{\gamma+\beta}),$$

quelque soit $\beta \geq 0$, tels que $\alpha + \beta \leq 1$, et $\|f\|_{\mathcal{H}^{\alpha+\beta}(x^{\gamma+\beta})} \leq ck$, où c ne dépend pas de $\varphi(x)$.

Preuve. Montrons que

$$\phi(x) = x^{\gamma+\beta}\int_0^l \varphi(t)(t+x)^{\alpha-1}dt \in \mathcal{H}^{\alpha+\beta}([0,l]).$$

Nous avons , pour $l = 1$ et $h > 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(x+h) - \phi(x) &= (x+h)^{\gamma+\beta} \int_0^1 \varphi(t)(t+x+h)^{\alpha-1}dt - x^{\gamma+\beta} \int_0^1 \varphi(t)(t+x)^{\alpha-1}dt \\
&= (x+h)^{\gamma+\beta} \int_0^1 \varphi(t)(t+x+h)^{\alpha-1}dt - x^{\gamma+\beta} \int_0^1 \varphi(t)(t+x+h)^{\alpha-1}dt \\
&\quad + x^{\gamma+\beta} \int_0^1 \varphi(t)(t+x+h)^{\alpha-1}dt - x^{\gamma+\beta} \int_0^1 \varphi(t)(t+x)^{\alpha-1}dt \\
&\leq k|(x+h)^{\gamma+\beta} - x^{\gamma+\beta}| \int_0^1 t^{-\gamma}(t+x+h)^{\alpha-1}dt \\
&\quad + kx^{\gamma+\beta} \int_0^1 |(t+x+h)^{\alpha-1} - (t+x)^{\alpha-1}|dt \\
&\leq k(\phi_1 + \phi_2),
\end{aligned}$$

avec

$$\phi_1 = |(x+h)^{\gamma+\beta} - x^{\gamma+\beta}| \int_0^1 t^{-\gamma}(t+x+h)^{\alpha-1}dt,$$

et

$$\phi_2 = x^{\gamma+\beta} \int_0^1 |(t+x+h)^{\alpha-1} - (t+x)^{\alpha-1}|dt.$$

D'aprés l'inégalité (2,3) avec le changement de variable suivant : $t = (x+h)s$, nous avons

$$\begin{aligned}
\phi_1 &\leq c_1 h(x+h)^{\gamma+\beta-1} \int_0^1 t^{-\gamma}(t+x+h)^{\alpha-1}dt \\
&\leq c_1 h(x+h)^{\gamma+\beta-1} \int_0^{\frac{1}{x+h}} (x+h)^{-\gamma}s^{-\gamma}[(x+h)s + x + h]^{\alpha-1}(x+h)ds \\
&\leq c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1} \int_0^{\frac{1}{x+h}} s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-1}ds.
\end{aligned}$$

a. Si $x + h > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_1 &\leq c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq ch(x+h)^{\alpha+\beta-1} \\
&\leq chh^{\alpha+\beta-1} = ch^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

b. Si $x+h \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_1 &\leq c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1}[\int_0^1 s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-1}ds + \int_0^{\frac{1}{x+h}} s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-1}ds] \\
&\leq c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1}[c_2 + \int_0^{\frac{1}{x+h}} s^{-\alpha}s^{\alpha-1}ds] \\
&\leq c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1}[c_2 + \int_0^{\frac{1}{x+h}} s^{-1}ds] \\
&\leq ch(x+h)^{\alpha+\beta-1} \\
&\leq chh^{\alpha+\beta-1} = ch^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

En considérant maintenant ϕ_2 , on utilise l'inégalité (2.10)

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= x^{\gamma+\beta}\int_0^1 t^{-\gamma}|(t+x+h)^{\alpha-1} - (t+x)^{\alpha-1}|dt \\
&\leq c_1 h x^{\gamma+\beta}\int_0^1 t^{-\gamma}(t+x)^{\alpha-2}dt.
\end{aligned}$$

Posons $t = xs$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &\leq c_1 h x^{\gamma+\beta}\int_0^{\frac{1}{x}} x^{\alpha-\gamma-1}s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-2}ds \\
&\leq c_1 h x^{\gamma+\beta-1}\int_0^{\frac{1}{x}} s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-2}ds.
\end{aligned}$$

a. Si $x \geq h$, on a

$$\phi_2 \leq ch^{\alpha+\beta-1}h = ch^{\alpha+\beta}.$$

b. Si $x \leq h$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= x^{\gamma+\beta}\int_0^1 t^{-\gamma}|(t+x+h)^{\alpha-1} - (t+x)^{\alpha-1}|dt \\
&\leq 2x^{\gamma+\beta}\int_0^1 t^{-\gamma}(t+x)^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

Posons $t = xs$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= 2x^{\alpha+\beta}\int_0^{\frac{1}{x}} s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq ch^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.5. *Soit $\rho(x)$ le poids défini par :*

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{\mu_k}, a = x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b, \tag{2.17}$$

et serait vérifiée les conditions :

1. $\mu_1 < \lambda + 1$.
2. $\lambda + \alpha < \mu_k < \lambda + 1$, $k = 2, 3, ..., n - 1$.
3. $\lambda + \alpha < \mu_n < \lambda + 1$, *avec* $x_n < b$ *et* $\lambda + \alpha < \mu_n$ *avec* $x_n = b$.

Alors l'opérateur :

$$I^{\alpha}_{a+} : \mathcal{H}^{\lambda}_0(\rho) \longrightarrow \mathcal{H}^{\lambda+\alpha}_0(\rho), \lambda + \alpha < 1,$$

est borné .

Preuve. La preuve est basée sur le théorème (2.4) et le lemme (2.1) .
Notons par :

$$\tilde{n} = \begin{cases} \text{n-1} & \text{si } x_n = b \text{ ,} \\ \text{n} & \text{si } x_n < b. \end{cases}$$

Posons

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0 & \text{si } x \notin [x_k, x_{k+1}] \text{ ,} \end{cases}$$

avec $k = 1, 2, ..., \tilde{n}$ de telle sorte que

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x).$$

Il est évident que

1. $$(I^{\alpha}_{a+}\varphi_k)(x) = 0, x < x_k (k \geq 2).$$

2. $$(I^{\alpha}_{a+}\varphi_k)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_k}^{x} (x - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, x_k < x < x_{k+1} (1 \leq k \leq \tilde{n}).$$

3.
$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_k}^{x^{k+1}}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, x_{k+1} < x < x_{k+2}(1 \leq k \leq \tilde{n}-1).$$

□

Remarque 2.5. *Il est impossible d'affaiblir la condition $\lambda + \alpha < \mu_k$, $k = 2, ..., n$ dans le théorème (2.5) . Quand $\lambda + \alpha < \mu_k$ le théorème (2.5) n'est pas vérifie .*
Soit par exemple $\rho(x) = (b-x)^{\mu}, \mu \leq \lambda + \alpha$.
Pour la fonction $\varphi(x) = (x-a)^{\lambda}(b-x)^{\lambda-\mu} \in \mathcal{H}_0^{\lambda}(\rho)$, on peut immédiatement vérifier que

$$(b-x)^{\mu}(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{(b-x)^{\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda}dt}{(b-t)^{\mu-\lambda}(x-t)^{1-\alpha}} \neq O((b-x)^{\lambda+\alpha}),$$

avec $x \longrightarrow b$, tel que $I_{a+}^{\alpha}\varphi \in \mathcal{H}_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

CHAPITRE 3

L'INTÉGRALE FRACTIONNAIRE DANS LES ESPACES L_p ET $\mathrm{L}_p(\rho)$:

Les intégrales fractionnaires sont connues pour conserver au moins l'espace $\mathrm{L}_p([a,b])$.

3.1 L'intégration fractionnaire dans l'espace L_p

Théorème 3.1. *[3] Soit $f \in \mathrm{L}_p([a,b],\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$ et $\alpha > 0$ alors $\exists k > 0$ tel que*

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{\mathrm{L}_p} \leq k\|f\|_{\mathrm{L}_p} \quad avec \quad k = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{L}_p([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{\mathrm{L}_p} = \left[\int_a^b \left|\int_a^x (x-s)^{1-\alpha} f(s) ds\right| dx\right]^{\frac{1}{p}}, a \leq x \leq b, a \leq s \leq x, s \leq x \leq b.$$

D'aprés l'inégalité de Minkowsky , on obtient

$$\begin{aligned}\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{\mathrm{L}_p} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \int_s^b (x-s)^{\alpha-1} dx \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{\mathrm{L}_p}.\end{aligned}$$

Par la même procédure en peut montrer que

$$\|I^{\alpha}_{b-}f\|_{\mathrm{L}_p} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f\|_{\mathrm{L}p}.$$

□

Théorème 3.2. *[3] Si* $0 < \alpha < 1, 1 < p < \frac{1}{\alpha}$ *alors l'opérateur d'intégration fractionnaire* I^{α}_{a+} *est borné de* L_p *dans* L_q *avec* $q = \dfrac{p}{(1-\alpha p)}$.

Prouve. On se liuite à donner la preuve d'une assertion plus simple , à savoir que I^{α}_{a+} est borné de $L_p, 1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$, dans L_r avec $1 \leq r \leq q = p(1-\alpha p)$. Nous avons

$$\Gamma(\alpha)|I^{\alpha}_{a^+}\varphi| \leq \int_a^x (|\varphi(t)|^{\frac{p}{r}}(x-t)^{\varepsilon-\frac{1}{r}})|\varphi(t)|^{1-\frac{p}{r}}(x-t)^{\varepsilon-\frac{1}{p'}}dt.$$

En utulisant l'inégalité de Holder généralisée .... avec $n = 3, p_1 = r, p_2 = \frac{rp}{r-p}$ et $p_3 = p'$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)|I^{\alpha}_{a^+}\varphi| &\leq (\int_a^x |\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}dt)^{\frac{1}{r}}(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}(\int_a^x (x-t)^{\varepsilon p'-1}dt)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C\|\varphi(t)\|^{1-\frac{p}{r}}_{L_p}(\int_a^x |\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}dt)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|I^{\alpha}_{a^+}\varphi\|_{L_r} &\leq c\|\varphi\|^{1-\frac{p}{r}}_{L_p}(\int_a^b |\varphi(t)|^p dt \int_a^b |x-t|^{r\varepsilon-1}dx)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C\|\varphi\|^{1-\frac{p}{r}}_{L_p}\|\varphi\|^{\frac{p}{r}}_{L_p} \\ &= C\|\varphi\|_{L_p}.\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3. *[3] Si* $\alpha > 0, p > \frac{1}{\alpha}$ *alors l'opérateur d'intégration fractionnaire* I^{α}_{a+} *est borné de* $L_p([a,b])$ *dans* $\mathcal{H}^{\alpha-\frac{1}{p}}([a,b])$ *si* $\alpha - \frac{1}{p} \neq 1, 2, ...,$ *ou dans* $\mathcal{H}^{\alpha-\frac{1}{p},\frac{1}{p'}}$ *si* $\alpha - \frac{1}{p} = 1, 2, \ldots$ *, et*

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = 0((x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}) \quad comme \quad x \to a. \tag{3.1}$$

Preuve. On obtient (3.1) en utilisant l'inégalité de Hôlder

$$\begin{aligned}|I^{\alpha}_{a+}\varphi| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)p'}dt)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C(x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}(\int_a^x |\varphi(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

En outre , nous considérons le cas $\alpha - \frac{1}{p} \leq 1$, dans le premier temps . Pour $x, x+h \in [a,b]$

nous avons

$$\begin{aligned}(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x+h)-(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{(x)}^{x+h}(x+h-t)\varphi(t)dt \\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]\varphi(t)dt \\ &= I_1+I_2.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder on trouve

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\int_x^{x+h}|\varphi(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_x^{x+h}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}dt)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L_p},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \frac{\|\varphi\|_{L_p}}{\Gamma(\alpha)}(\int_a^x|(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}|^{p'}dt)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq |\Gamma(\alpha)|^{-1}h^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L_p}(\int_0^{\frac{x-a}{h}}|s^{\alpha-1}-(s+1)^{\alpha-1}|^{p'}dt)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Si $x-a\leq h$, alors une estimation pour I_2 est claire . Si $x-a>h$ alors nous utilisons (2.10) et $(A+B)^{\frac{1}{p'}}\leq A^{\frac{1}{p'}}+B^{\frac{1}{p'}}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq h^{\alpha-1/p}\|\varphi\|_{L_p}[C_1+C_2\int_1^{(x-a)/h}s^{(\alpha-2)p'}ds]^{1/p'} \\ &\leq h^{\alpha-1/p}\|\varphi\|_{L_p}[C_3+C_4(\frac{h}{(x-a)})^{1-\alpha+1/p}],\end{aligned}$$

C_4 étant en plus multiplié par $(\ln\frac{x-a}{h})^{\frac{1}{p'}}$ dans le cas $\alpha-\frac{1}{p}=1$ par conséquent , nous calculons l'estimation

$$|I_2|\leq\begin{cases}\text{c h}^{\alpha-1/p}\|\varphi\|_{L_p} \text{ si } \alpha-1/p<1\text{ ,}\\ \text{ch }|\ln\frac{1}{h}|^{\frac{1}{p'}}\|\varphi\|_{L_p}\text{ si } \alpha-1/p=1.\end{cases}$$

La collecte des estimations pour I_1 et I_2 nous complétons la preuve du théorème quand $\alpha-\frac{1}{p}\leq 1$.

Laissez maintenant $\alpha-\frac{1}{p}>1$ ensuite $k<\alpha-\frac{1}{p}\leq k+1, k=1,2,...,$ et ce cas réduit au précédent par différenciation direct :

$$\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha-k}\varphi, 0 < \alpha - k \leq 1,$$

utilisant les définitions de l'espace $\mathcal{H}^{\lambda}$ et $\mathcal{H}^{\lambda,k}$ dans le cas $\lambda > 1$. □

Corollaire 3.1. *[3] La théorème (3.2) tient sous une forme plus forte :*

$$I_{a+}^{\alpha} : \mathrm{L}_p([a,b]) \longrightarrow h^{\alpha-\frac{1}{p}}([a,b]) \quad , \quad 0 < \frac{1}{p} < \alpha < 1 + \frac{1}{p}$$

où h^{λ}, est l'espace donné dans (1.6) .

Preuve. Soit $\varphi \in \mathrm{L}_p([a,b])$, $\forall \varepsilon > 0$ l'égalité $\varphi = P_{\varepsilon} + \varphi_{\varphi}$ tient où P_{ε} est un polynome et $\|\varphi_{\varphi}\|_{\mathrm{L}_p} < \varepsilon$ avec les propriétés de l'espace L_p et par conséquent de théorème (3.2) on a

$$\begin{aligned}
|(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)| &= |(I_{a+}^{\alpha}(P_{\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon}))(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}(P_{\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon}))(x)| \\
&\leq |(I_{a+}^{\alpha}P_{\varepsilon})(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}P_{\varepsilon})(x)| \\
&\quad + |(I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon})(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon})(x)| \\
&\leq c_1|t|^{\alpha} + c_2|t|^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_{\varepsilon}\|_{\mathrm{L}_p} \\
&= o(|t|^{\alpha-\frac{1}{p}}).
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1. *[3] L'énoncé sur la bornétude de l'opérateur I_{a+}^{α} de L_{∞} dans $\mathcal{H}^{\alpha}$ montionné ci-dessus (corollaire de théorème (3.1)) corréspond au cas $p = \infty$ dans le théorème (2.2) .*

3.2 Les propriétés dans l'espace $\mathrm{L}_p(\rho)$

Concernant étude la bornétude de l'opérateur d'intégration fractionnaire pour les espaces de Lebesgue avec poids , on se contente de citer quelques théorèmes sans démonstration pour plus de détails voire [3] .

Théorème 3.4. *[3] Soient $-\infty < a < b < +\infty$, si $1 < p < \infty$, à $< \alpha - \dfrac{1}{p} < 1$, alors* *l'opérateur I^{α}_{a+} est borné de $\mathrm{L}_p(\rho^{\mu})$ dans $\mathcal{H}_0^{\alpha-\frac{1}{p}}(\rho^{\frac{\mu}{p}})$, $\mu < p-1$ et*

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = 0((x-a)^{\alpha-\frac{1+\mu}{p}}) \quad lorsque \quad x \to a.$$

Démonstration. voir [3, page 75] . □

Théorème 3.5. *[3] Soit $t < p < \frac{1}{\alpha}$ et $\mu < p-1$, ce dernier dans le cas $d < b$ uniquement . Alors l'opérateur I^{α}_{a+} est borné de $\mathrm{L}_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, dans $\mathrm{L}_q(r)$ où $q = \frac{p}{(1-\alpha p)}$, $r(x) = |x-d|^{v}$ et*

$$\begin{aligned} v &> -1 \quad \textit{si } \mu \leq \alpha p - 1, \\ v &= \mu\frac{q}{p} \quad \textit{si } \mu > \alpha p - 1. \end{aligned}$$

Démonstration. voir [3, page 74]

□

Théorème 3.6. *[3] Soit $1 < p < \infty$, $\mu_k < p-1$ pour $k = 1, 2, ..., n-1; 0 \leq m \leq \alpha$ $0 < \alpha < m + \frac{1}{p}$, $q = \frac{p}{1-(\alpha-m)p}, v_1 = (\frac{\mu_1}{p} - m)q, v_k = (\frac{\mu_k}{p} - m)q$, si $\mu_k > \alpha p - 1$ et $v_k > \left(\alpha - \frac{1}{p} - m\right)q$, si $v_k \leq \alpha p - 1, k = 2, ..., n$. Alors l'opérateur I^{α}_{a+} est borné de $\mathrm{L}_p(\rho)$ dans $\mathrm{L}_q(r)$.*

Démonstration. voir [3, page 76] □

CHAPITRE 4

L'OPÉRATEUR INTÉGRALE GÉNÉRALISÉ

Dans ce chapitre , on va présenter la définition et certaines propriétés des intégrales fractionnaires généralisées (voir [8] , [9] , [10]) .

4.1 Définitions et proprietés

Définition 4.1. *[3] Soit $[a, b]$ un intervalle borné d'un ensemble $\mathbb{R}$, $Re(\alpha) > 0$ et soit $g(x)$ une fonction monotone croissante et positive sur $[a, b]$, ayant une dérivée continue $g'(x)$ sur $[a, b]$. Les intégrales fractionnaires à droite et à gauche d'une fonction f intégrable sur $[a, b]$ par rapport à une autre fonction g sur $[a, b]$ sont définies par :*

$$(I^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [g(x) - g(t)]^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, \tag{4.1}$$

et

$$(I^{\alpha}_{b-,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b [g(x) - g(t)]^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt. \tag{4.2}$$

Les opérateurs dans (4.1) et (4.2) sont exprimées via les opérateurs de Riemann-Liouville (2.1) et (2.2) en utilisant l'opérateur de substitution Q_g défini par :

$$(Q_g f)(x) = f[g(x)],$$

ce qui nous permét d'établir à partir les propriétés des intégrales (4.1) et (4.2) découlent des propriétés correspondantes des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville données dans la section 1.5 .

Proposition 4.1. *[8] Soient $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$.*

1. *Si* $f(x) = [g(x) - g(a)]^{\beta-1}$*, alors :*

$$(I^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}[g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1}.$$

2. *Si* $f(x) = [g(b) - g(x)]^{\beta-1}$*, alors :*

$$(I^{\alpha}_{b-,g}f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}[g(b) - g(x)]^{\alpha+\beta-1}.$$

Démonstration. On pose $f(x) = [g(x) - g(a)]^{\beta-1}$, nous avons

$$I^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [g(x) - g(t)]^{\alpha-1} f(t) g'(t) dt.$$

Avec le changement de variable $s = \dfrac{g(t) - g(a)}{g(x) - g(a)}$, nous avons

$$\begin{cases} t = a \Rightarrow s = 0, \\ t = x \Rightarrow s = 1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}[g(x) - g(a)]^{\alpha-1} s^{\beta-1}[g(x) - g(a)]^{\beta-1}[g(x) - g(a)]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}[g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1}ds \\
&= \frac{[g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)}[g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}[g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

Le même raisonnement nous permet d'avoir 2 . □

Remarque 4.1. *[9]*

1. *Si nous considérons $g(x) = x$ dans l'équation (4.1), nous avons*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+,x} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \ {}^{RL}I^{\alpha}_{a+,x} f(x). \end{aligned}$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

2. *En choisissant $g(x) = \ln x$ et en substituant par l'équation (4.1) , nous avons*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+,\ln x} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{t} (\ln x - \ln t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\ln \frac{x}{t})^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \\ &= \ {}^{H}I^{\alpha}_{a+,\ln x} f(x). \end{aligned}$$

L'intégrale fractionnaire de Hadamard .

3. *Pour $g(x) = x$, $b = \infty$ et en substituant dans l'équation (4.1) on obtient*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{b-,x} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &=_x W^{\alpha}_{+\infty} f(x). \end{aligned}$$

L'intégrale fractionnaire de Weyl .

Théorème 4.1. *[9] Soit f une fonction continue sur Ω et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$, nous avons*

$$I^{\alpha}_{a+,g}(I^{\beta}_{a+,g} f)(t) = (I^{\alpha+\beta}_{a+,g} f)(t),$$

et

$$I^{\alpha}_{b-,g}(I^{\beta}_{b-,g} f)(t) = (I^{\alpha+\beta}_{b-,g} f)(t).$$

Démonstration. Nous avons par définition et le changement de variable $z = \dfrac{g(u) - g(\tau)}{g(t) - g(\tau)}$

on obtient

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a+,g}(I^{\beta}_{a+,g}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (g(t)-g(u))^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^u (g(u)-g(\tau))^{\beta-1}g'(\tau)f(\tau)d\tau\right) \\
&\quad \times g'(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^u (g(t)-g(u))^{\alpha-1}(g(u)-g(\tau))^{\beta-1} \\
&\quad \times f(\tau)g'(\tau)d\tau g'(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\int_\tau^t (g(t)-g(u))^{\alpha-1}(g(u)-g(\tau))^{\beta-1} \\
&\quad \times g'(u)dug'(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (g(t)-g(\tau))^{\alpha+\beta-1}f(\tau)g'(\tau)d\tau \\
&\quad \times \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (g(t)-g(\tau))^{\alpha+\beta-1}f(\tau)g'(\tau)d\tau \\
&= (I^{\alpha+\beta}_{a+,g}f)(t).
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.2. *[10] Soit $\alpha > 0$ et f une fonction intégrable définie sur Ω et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$. Les opérateurs d'intégrale fractionnaire (4.1) et (4.2) sont bornés de* L^1 *dans* L^1 .

Démonstration. Nous avons

$$|I^{\alpha}_{a+,g}f(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (g(t)-g(s))^{\alpha-1}|g'(s)f(s)|ds,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}_{a+,g}f(t)\|_{\mathrm{L}_1} &\leq \int_a^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_a^t (g(t)-g(s))^{\alpha-1}g'(s)f(s)|dsdt \\
&\leq \frac{(g(b)-g(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(t)\|_{\mathrm{L}_1} \\
&= M\|f(t)\|_{\mathrm{L}_1},
\end{aligned}$$

avec $M = \dfrac{(g(b)-g(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$. $\square$

Définition 4.2. *Soient $g'(x) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha) \geq 0, (\alpha \neq 0)$ et soient $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $D = \frac{d}{dx}$. Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une fonction f par rapport à g d'ordre α correspondant aux intégrales de Riemann-Liouville dans (4.1) et (4.2) sont définies par :*

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{a+,g}f)(x) &= (\frac{1}{g'(x)}D)^n(I^{n-\alpha}_{a+,g}f)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{1}{g'(x)}D)^n\int_a^x[g(x)-g(t)]^{n-\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x>a),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{b-,g}f)(x) &= (-\frac{1}{g'(x)}D)^n(I^{n-\alpha}_{-b,g}f)(x)\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-\frac{1}{g'(x)}D)^n\int_x^b[g(t)-g(x)]^{n-\alpha-1}g'(t)f(t)dt, (x<b).\end{aligned}$$

Proposition 4.2. *Soient $Re(\alpha) \geq 0$, $(\alpha \neq 0)$ et $Re(\beta) > 0$.*

1. *Si $f_+(x) = [g(x)-g(a)]^{\beta-1}$ alors :*

$$(D^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}[g(x)-g(a)]^{\beta-\alpha-1}.$$

2. *Si $f_-(x) = [g(b)-g(x)]^{\beta-1}$ alors :*

$$(D^{\alpha}_{b-,g}f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}[g(b)-g(x)]^{\beta-\alpha-1}.$$

Démonstration. voir [10] . $\square$

Bibliographie

[1] Haim .BRZIS. Analyse Fonctionnelle (théorie et aplications, MASSON Paris New York Barcelone Milan (1987).

[2] Muskhelishvili ,N.I. Singular Integral Equations (Russian). 2nd ed . Moscow : Nauka,511p (English ed . in Akademie-Verlag,Berlin 1965).

[3] S.G.Samko - A.A.Kilbas - O.I.Marichev . Fractinal Integrals And Derivatives , Theory And Applications (Polycopié du cours MAP 431), École Polytechnique, année$2015-2016$.

[4] Abdelghani Ouahab . Calcule Fractionnaire , Laboratoire De Mathématiques , Université de Sidi-Bel-Abbès , B.P 89,22000 Sidi-Bel-Abbès Algérie

[5] Nikol'skii . The approximation of functions of several variables and the imbedding theorems (Russian). Moscow : Nauka , 455 P .

[6] I.Podlubny . Fractional differential equations . Academic Press , 1999 .

[7] A . A . Kilbas , H.M.Srivastava and J.J.Trujllo . Theory and application of fractional differencial equation . Elsvier , 2006.

[8] arXiv :1708.05109v1 [math.CA] 17 Aug 2017 J. VANTERLER DA C. SOUSA AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA . ON THE ψ-Hifler Fractional Derivative .

[9] arXiv :1710.03712v3 [math.CA] 5 Nov 2018 J. Vanterler DA C. SOUSA AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA . On The ψFractional Integral And Applications .

[10] Journal of Fractional Calculus and applications , Vol 6(1) Jan . 2015 , pp 120-130 ISSN : 2090-5858 . HASHEM H.H.G . On The Solution Of A Generalized Fractional Order Integral Equation And Some Applications .