REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN – TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et applications

Par :
Bouabdelli Sihem
Boualaoui Fatima Zohra
Bouali Hadjira

Sur le thème

La dérivée de Psi-Hilfer et applications

Soutenu publiquement le 14 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENDOUMA Bouharket	MCB	Université Tiaret	Président
Mr MAAZOUZ Kadda	MCB	Université Tiaret	Encadreur
Mme BOUAZZA Zoubida	MAA	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Nous aimerions en premier lieu remercier notre dieu **"Allah"** qui nous a donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Nous exprimons nos reconnaissance à notre encadreur, ***"Mr.MAAZOUZ.Kadda***, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche dés le début à la fin de ce travail.

Nous remercions également le membre de jury ***Mr.BENDOUMA.Bouharket*** et ***Mme.BOUAZZA.Zoubida*** d'avoir consacré de leur temps pour l'évaluation notre modeste travail.

Nous adressons nos sincères remerciements à toutes nos familles et en particulier à nos parents qui étaient toujours là quand nous en avions besoin, nos professeurs dés la primaire jusqu'à l'université, nos amies, nos proches. En fin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Merci.

★ ★ ★

*-------------- *Je dédie ce travail à* --------------*

ma très chére mère

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.
Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.
Ta as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études.
Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.
Puisse Dieu,le tout puissant ,te préserver et t'accorder santé ,longue vie et bonheur.

À mon Cher père

Aucune dédicace ne saurait exprime l'amour ,l'estime ,le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.
Rien au monde ne vaut les efforts fr-mis jou et muit pour mon éducation et mon bien être.
Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

À
Mes chers frères, soeurs.

À
Ma nièce "Alaa Maria Aicha".

À
Toute ma grande famille.

À

Toutes mes proches amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.
Et toute la famille de département de mathématiques.

*——— *Sihem* ———*

*______________ *Je dédie ce travail à* ______________*

mes chères parents qui m'ont encouragé tout long de mes études,que dieu les protège

A mes chers frères $\{$ $Ahmed, Abdelmalek\}$
A mes chères soeurs $\{Malika, Cherifa, Sofia\}$
A tout mes cousins(es)
A mon prince $\{AhmedFarouk\}$
A mes meilleurs amis
$\{Sihem, Hadjer, khaldia, Imene, Khadija, Linda, Nadia, Youcef\}$
A tous mes enseignants et toute la famille de département de mathématiques.

*__________________ *Fatima zohra* __________________*

*______________ *Je dédie ce travail à* ______________*

mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail de recherche dans les meilleures conditions

À
Ma grand-mère .

À
Mon grand père .

À
Mes chérs frères, soeurs.

À
Toute ma grande famille.

À

Toutes mes proches amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.
Et toute la famille de département de mathématiques.

*______________________ *Hadjira* ______________________*

Résumé

Dans ce mémoire, nous introduisons une dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer. Nous discutons de certaines propriétés et résultats du calcul fractionnaire basés sur l'approche du point fixe, ainsi d'extensions et généralisations qui s'impliquent dans la résolution des équations différentielles. Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions de ce problèmes par le théorème de point fixe. Enfin, nous présentons une large classe d'intégrales et dérivée fractionnaire, au moyen de l'intégrale fractionnaire et dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer.

Abstract

In this memoir, we introduce a fractional derivative of ψ-Hilfer. We discuss some properties and results of fractional calculus based on the fixed point approach, as well as exteusions and generalizations that are involved in solving differential equations. We prove the existence and the uniqueness of the solutions of these problems by the fixed point theorem. Finally, we present a large class of fractional integrals and derivative by means of the fractional integral and derivative of ψ-Hilfer

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

♦ $[a,b[$: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.

♦ $AC([a,b])$: l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

♦ $C^n([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; f \quad n - fois \quad drivable \quad et \quad continue\}$.

♦ $AC^n([a,b])$: l'espace des fonctions f dérivables et absolument continues sur $[a,b]$.

♦ $\Gamma(.)$: fonction Gamma d'Euler.

♦ E_α : la fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre.

♦ $I_a^\alpha f$: l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f.

♦ ${}^cD^\alpha$: la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.

♦ $\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire a attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières décennies, car c'est un travail important.

Depuis le début du calcul fractionnaire en 1695, il existe de nombreux définitions des intégrales et des dérivées fractionnaires et au fil du temps de nouvelles dérivées et intégrales fractionnaires. Ces intégrales et dérivées fractionnaires ont un noyau différent et ce élargit le nombre de définitions. Avec le grand nombre de définitions d'intégrales et de dérivées fractionnaires, il était nécessaire d'introduire une dérivée fractionnaire d'une fonction f par rapport à une autre fonction, faisant utilisation de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Cependant, une telle définition n'englobe que les dérivées fractionnaires possibles qui contiennent l'opérateur de différenciation agissant sur l'opérateur intégral. De même, récemment, Almeida [5] utilisant l'idée de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo par rapport à une notre fonction. Dans cette perspective, nous utiliserons l'idée de dérivée fractionnaire de Hilfer , et proposer un opérateur différentiel fractionnaire d'une fonction par rapport à une autre fonction, le dérivé dit de ψ-Hilfer. L'avantage de l'opérateur fractionnaire proposé ici est la liberté de choix de l'opérateur différentiel classique, c'est-à-dire une fois qu'il agit sur le opérateur intégral fractionnaire, une fois que l'opérateur intégral fractionnaire agit sur l'opérateur différentiel .

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :
Le premier chapitre est consacré aux définitions et notions générales qu'on aura besoin dans la suite de travail.
Nous rappelons les notions des intégrales et dérivées fractionnaires ψ-Riemann Liouville, ψ-Caputo, ψ-Hilfer , le théorème du point fixe.

Le deuxième chapitre est consacré à l'existence et l'unicité des résultats pour le problème non linéaire à valeur initiale d'une équation différentielle fractionnaire. nous utilisons le théorème du point fixe pour montrer l'existence et l'unicité.

le troisième chapitre nous donnerons des définitions qui concernent les résultats d'existence et de stabilité pour les équations différentielles on utilisons type de Ulam.

Le quatrième chapitre : il est divisé comme suit :
Section 4.1 : nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de type Cauchy , en utilisant le fait que l'équation intégrale de Volterra est équivalente au problème de type Cauchy dans l'espace pondéré, au moyen de la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer.

Section 4.2 : nous présentons le résultat principal, l'inégalité de Gronwall généralisée au moyen de l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction ψ et autres résultats importants.

Les mots clés : Équations différentielles, fractionnaires, existence de solutions, dérivée fractionnaire, intégral fractionnaire, le théorème du point fixe, stabilité, Ulam, Espace pondéré , ψ-Hilfer , ψ-Caputo , ψ-Riemann Liouville ,Gronwall.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous présentons des définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
Exemple : $C(J, \mathbb{R})$ *espace des fonctions continues sur* J *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est un Banach.*

1.2 Application Complètement continue

Soit A une partie bornée de E, une application continue $T : A \subseteq E \to F$ est dite complètement continue si l'image de tous sous ensemble borné de A est relativement compact dans F.

1.3 Espace pondéré

L'espace pondéré $C_{\gamma,\psi}[a, b]$ de fonction f sur $[a, b]$ est défini par :

$$C_{\gamma;\psi}[a, b] = \left\{ f :]a, b] \to \mathbb{R}; (\psi(t) - \psi(a))^{\gamma} f(t) \in C[a, b] \right\}, \quad 0 \leq \gamma < 1.$$

L'espace pondéré $C^n_{\gamma,\psi}[a,b]$ de fonction f sur $[a,b]$ sont défini par :

$$C^n_{\gamma,\psi}[a,b] = \left\{ f :]a,b] \to \mathbb{R}; f(t) \in C^{n-1}[a,b]; f^{(n)}(t) \in C_{\gamma,\psi}[a,b] \right\}, \quad 0 \leq \gamma < 1.$$

1.4 Application lipschitzienne

Définition 1.2. *Soient G une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : G \to \mathbb{R}$ une application et K un nombre réel positif. On dit que f est K-lipschitzienne par rapport à y si :*

$$\forall (t,y) \in G, \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2|\,.$$

Où K est appelée la constante de Lipschitz

– *Si $0 \leq K < 1$, on dite que f est contractante.*

1.5 Théorème de Weierstrass

Théorème 1.1. *Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme des fonctions polynomiales sur ce segment $[a,b]$*
Autrement dit, pour tout $\xi > 0$, il existe un polynôme p tel que :

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - p(x)| < \xi.$$

1.6 Équations intégrales de Volterra

Définition 1.3. *On appelle équation intégrale de volterra non linéaire de second espèce une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt.$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

1. *Une équation de la forme*

$$\int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt = f(x).$$

Où $\varphi(x)$ est une équation inconnue est appelée équation intégrale de volterra non linéaire de première espèce.

2. *On appelle une équation intégrale de volterra linéaire de second espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt.$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

3. *Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt,$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de volterra de second espèce.

4. *Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :*

$$\int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt = f(x),$$

est appelée équation intégrale linéaire de volterra de première espèce .

1.7 Fonctions utiles

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions : Gamma, Bêta et Mittag-Leffler.

1.7.1 Fonction Gamma

Définition 1.4. *La fonction Gamma définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (pour z \in \mathbb{C}), Re(z) > 0.$$

1.7.2 Fonction Bêta

Définition 1.5. *La fonction Bêta définie pour $z, w \in \mathbb{C}$ par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt; \quad Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0.$$

la fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad avec \quad Re(z) > 0, Re(w) > 0.$$

1.7.3 La fonction Mittag-Leffler

Définition 1.6. *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, la fonction Mittag-Leffler définie comme :*

$$\mathbb{E}_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{1.1}$$

En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle,

$$\mathbb{E}_1(z) = e^z. \tag{1.2}$$

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres comme :

$$\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.3}$$

1.8 Quelque calcul fractionnaire

1.8.1 L'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7. *Soit $[a, b](-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini sur l'axe réel $\mathbb{R}$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α, avec $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par :*

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a \tag{1.4}$$

Définition 1.8. *Soit $I = [a, b]$ et $f(x) \in AC^n[a, b]$ et $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}_0$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction f est donnée par :*

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \tag{1.5}$$

1.8.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.9. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction f est définie par :*

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = D_{a+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \tag{1.6}$$

tel que

$$n = [\alpha] + 1 \quad pour \quad \alpha \notin \mathbb{N}_0; \quad n = \alpha \quad pour \quad \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

En particulier, quand $0 < \alpha < 1$, alors

$$^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = D_{a+}^{\alpha} (f(t) - f(a)). \tag{1.7}$$

1.8.3 La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

Définition 1.10. *La dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre $n - 1 < \alpha < n$ et $0 \leq \beta \leq 1$ de la fonction $f \in C^n[a, b]$ est définie par :*

$$D_{a+}^{\alpha,\beta} f(x) = I_{a+}^{\gamma-\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha)} f(x), \tag{1.8}$$

où I_{a+}^{α} et D_{a+}^{α} sont l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation (1.4) *et l'équation* (1.5) *, respectivement.*

1.8.4 L'intégrale fractionnaire de ψ

Définition 1.11. *L'intégrale fractionnaire de ψ d'une fonction $h(t)$ est définie par :*

$$\left(I^{\nu;\psi}\right) h(t) = \int_a^t I_t^{\nu}(s)h(s)ds, \quad t > a.$$

1.8.5 L'intégrale et la dérivée au sens de ψ-Riemann-Liouville

Définition 1.12. ***(L'intégrale au sens de ψ-Riemann-Liouville)***
Soit α un réel strictement positif ($\alpha > 0$), $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\psi \in C^n[a,b]$ une fonction croissante tel que $\psi'(x) \neq 0$, pour tous $x \in [a,b]$.
L'intégrale fractionnaire au sens de ψ-Riemann-Liouville d'ordre α de x est définie par :

$$I_{a+}^{\alpha,\psi} x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t) - \psi(\tau))^{\alpha-1} x(\tau) d\tau.$$

Définition 1.13. ***(La dérivée au sens de ψ-Riemann-Liouville)***
Soit α un réel strictement positif ($\alpha > 0$), $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\psi \in C^n[a,b]$ une fonction croissante tel que $\psi'(x) \neq 0$, pour tous $x \in [a,b]$,
la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Riemann-Liouville d'ordre α de x est définie par :

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha,\psi} x(t) : &= \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha,\psi} x(t) \qquad (1.9) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t) - \psi(\tau))^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

ici, $n = [\alpha] + 1$, en particulier, pour convenablement choisis, on obtient des opérateurs fractionnaires bien connus, comme Riemann-Liouville, Hadamard et Erdélyi-Kober.
Les intégrales fractionnaires satisfaisant à la propriété du semi groupe : $\alpha, \beta > 0$,

alors on a :

$$I_{a+}^{\alpha,\psi} I_{a+}^{\beta,\psi} x(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta,\psi} x(t).$$

1.8.6 La dérivée au sens de ψ-Caputo

Soit $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ est l'intervalle $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, \psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ deux fonctions telles que ψ est croissante et $\psi'(x) \neq 0$, pour tous $x \in I$. La dérivée fractionnaire au sens de ψ Caputo de d'ordre α de la fonction f est donnée par :

$$^{c}D_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha;\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n} f(x). \tag{1.10}$$

Où $n = [\alpha] + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

1.8.7 La dérivée au sens de ψ-Hilfer

Définition 1.14. *Soit $n - 1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ un intervalle tel que $-\infty \leq a < b \leq \infty$ et $f, \psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ deux fonctions tel que ψ croissante et $\psi'(x) \neq 0$, pour tous $x \in I$.*
La dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer $^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}(.)$ d'ordre α et de type $0 \leq \beta \leq 1$, d'une fonction f est définie par :

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(x) \tag{1.11}$$

la dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer peut être écrite sous la forme suivante

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} D_{a+}^{\gamma;\psi} f(x) \tag{1.12}$$

Théorème 1.2. *Si $f \in C^n[a, b], n - 1 < \alpha < n$ et $0 \leq \beta \leq 1$, alors*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}\, {}^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma - k + 1)} f_{\psi}^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a).$$

Théorème 1.3. *Soit $f \in C^1[a, b]$, $\alpha > 0$ et $0 \leq \beta \leq 1$,*

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = f(x) \quad et \quad {}^{H}D_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} I_{b-}^{\alpha;\psi} f(x) = f(x).$$

Lemme 1.1. *Si $\alpha > 0$ et $0 \leq \mu < 1$, alors $I_{a+}^{\alpha;\psi}(.)$ est bornée de $C_{\mu;\psi}[a,b]$ à $C_{\mu;\psi}[a,b]$ en plus, si $\mu \leq \alpha$, alors*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}(.) \text{ est bornée de } C_{\mu;\psi}[a,b] \text{ à } C[a,b]$$

Lemme 1.2. *Soit $\alpha > 0$ et $\delta > 0$;*

Si $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$, alors

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)} (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha+\delta-1}.$$

1.9 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Théorème 1.4. *Soit $C(X)$ l'espace normé des fonctions réelles continues sur un espace métrique compact X muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Pour qu'une famille $A \subset C(X)$ soit relativement compacte, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit :*

♦ ***Uniformément bornée :***

$$\exists C : |f(x)| \leq C, \quad \forall f \in A, \quad \forall x \in X.$$

♦ ***Equicontinue :***

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in A.$$

1.10 Théorèmes du point fixe

1.10.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $T : E \to E$ une application contractante avec la constante de contraction K, alors T admet un unique point fixe $x \in E$, de plus nous avant la propriété suivante qui est importante si $x_0 \in E$ et $x_n = T_{x_{n-1}}$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, et $d(x_n, x) \leq K^n(1-K)^{-1}d(x_1, x_0)$, $n \geq 1$ x étant le point fixe de T.

1.10.2 Théorème du point fixe de Schauder

Soit E un espace de Banach, K un convexe fermé bornée de E et $T : K \to K$ un opérateur continue et compact, alors T admet au moins un point fixe dans K.

1.10.3 Théorème du point fixe de Schaefer

Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur complètement continue si l'ensemble $X = \{u \in E, u = \lambda Tu, \lambda \in (0, 1)\}$, est bornée alors T possède au moins un point fixe.

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES VIA ψ-CAPUTO ET APPLICATIONS

Dans ce qui suit et tout au long de ce chapitre, $0 < \alpha < 1$ et $\psi \in C^n([a,b])$ une fonction telle qu'elle ψ est croissante et $\psi'(x) \neq 0$, pour tous $x \in [a,b]$ étant donnée $x \in C^{n-1}[a,b]$, la dérivée fractionnaire de ψ-Caputo d'ordre α de x définie par :

$$^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) := D_{a+}^{\alpha,\psi}\left[x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{\psi}^{[K]}(a)}{k!}(\psi(t)) - \psi(a)^{k}\right].$$

Où
$n = [\alpha] + 1$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et

$$x_{\psi}^{[K]}(t) := \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{k} x(t).$$

Si $x \in C^n[a,b]$, donc la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo de x peut être représenté par l'expression :

$$^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) := I_{a+}^{n-\alpha,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} x(t).$$

Ainsi,
Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = x_{\psi}^{[m]}x(t)$$

et pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, nous avons

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{n-\alpha-1} x_\psi^{[n]}(\tau)d\tau. $$

Certains dérivées fractionnaires connus ne sont que des cas particulier de la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo. Pour les choix appropriés du noyau ψ, nous obtenons la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo pour $\psi(t) = t$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard pour $\psi(t) = ln(t)$ et la dérivée fractionnaire au sens de Erdélyi-Kober pour $\psi(t) = t^\sigma$.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > n$, la dérivée au sens de ψ-Caputo de la fonction de puissance ce donnée par :

$$ x(t) = (\psi(t) - \psi(a))^{\beta-1}. $$

La formule ce donnée par :

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\psi(t)-\psi(a))^{\beta-\alpha-1}. $$

La dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo est l'inverse de l'intégral fractionnaire de ψ-Riemann-Liouville.

Théorème 2.1. *Soit $x : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ce qui donne*
1. Si $x \in C[a,b]$, donc

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi} I_{a+}^{\alpha,\psi} x(t) = x(t). $$

2. Si $x \in C^{n-1}[a,b]$, donc

$$ I_{a+}^{\alpha,\psi} {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi} x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_\psi^{[k]}(a)}{k\,!}(\psi(t)-\psi(a))^k. $$

Preuve :
Pour prouver (1), par définition

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi} I_{a+}^{\alpha,\psi} x(t) := D_{a+}^{\alpha,\psi}\left[I_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_{a+}^{\alpha,\psi}x)_\psi^{[k]}(a)}{k!}(\psi(t)-\psi(a))^k \right], $$

d'après la formule suivante :

$$\begin{aligned}(I_{a+}^{\alpha,\psi}x)_{\psi}^{[k]}(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{k} I_{a+}^{\alpha,\psi}x(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-k-1}x(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

On déduit que :

$$\left|(I_{a+}^{\alpha,\psi}x)_{\psi}^{[k]}(t)\right| \leq \frac{\|x\|}{\Gamma(\alpha-k+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-k}.$$

Et ainsi

$$(I_{a+}^{\alpha,\psi}x)_{\psi}(a)=0, \quad pour \quad tous \quad k=0,1,....n-1,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}{}^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) &= D_{a+}^{\alpha,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}x(t)\\ &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n-\alpha,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}x(t)\\ &= \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^{n} I_{a+}^{n,\psi}x(t)\\ &= x(t).\end{aligned}$$

Ce qui termine (1) de la preuve.
On prouve (2), soit

$$y(t) := x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{\psi}^{[k]}(a)}{k!}(\psi(t)-\psi(a))^{k}.$$

Ainsi

$$I_{a+}^{\alpha,\psi c}D_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = I_{a+}^{\alpha,\psi}D_{a+}^{\alpha,\psi}y(t),$$

et il suffit de prouver que

$$I_{a+}^{\alpha,\psi}D_{a+}^{\alpha,\psi}y(t) = y(t).$$

On observe que

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha,\psi} D_{a+}^{\alpha,\psi} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1} D_{a+}^{\alpha,\psi} y(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha} D_{a+}^{\alpha,\psi} y(\tau) d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha} D_{a+}^{\alpha,\psi} y(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{1}{\psi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right)^{n-1} I_{a+}^{n-\alpha,\psi} y(\tau) \right] d\tau \\
&= \left[\frac{(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{1}{\psi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right)^{n-1} I_{a+}^{n-\alpha,\psi} y(\tau) \right]_a^t \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1} \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{1}{\psi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right)^{n-2} I_{a+}^{n-\alpha,\psi} y(\tau) \right] d\tau.
\end{aligned}$$

D'après

$$\left(\frac{1}{\psi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right)^{n-1} I_{a+}^{n-\alpha,\psi} y(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^\tau \psi'(s)(\psi(\tau)-\psi(s))^{-\alpha} y(s) ds.$$

On déduit que

$$\left| \left(\frac{1}{\psi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right)^{n-1} I_{a+}^{n-\alpha,\psi} y(\tau) \right| \leq \frac{\|y\|}{\Gamma(2-\alpha)} (\psi(\tau)-\psi(a))^{1-\alpha},$$

alors

$$\left(\frac{1}{\psi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right)^{n-1} I_{a+}^{n-\alpha,\psi} y(\tau) = 0 \quad \text{quand} \quad \tau = a.$$

Ainsi, en effectuant à nouveau intégration par parties, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\right)^{n-2} I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)\right]d\tau \\
&= \left[\frac{(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\right)^{n-2} I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)\right]_a^t \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-2}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\right)^{n-3} I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)\right]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-2}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\right)^{n-3} I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)\right]d\tau.
\end{aligned}$$

En répétant cette procédure, nous arrivons

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n+2}}{\Gamma(\alpha-n+3)}\left(\frac{1}{\psi'(\tau)}\frac{d}{d\tau}\right) I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)\right]_a^t \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+2)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n+1}\frac{d}{d\tau}I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+2)}\int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n+1}\frac{d}{d\tau}I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)d\tau \\
&= \left[\frac{(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)}I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)\right]_a^t \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n}I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(\tau)d\tau \\
&= I_{a+}^{\alpha-n+1,\psi}I_{a+}^{n-\alpha,\psi}y(t) = I_{a+}^{1,\psi}y(t).
\end{aligned}$$

On conclut que,

$$I_{a+}^{\alpha,\psi}D_{a+}^{\alpha,\psi}y(t) = \frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}I_{a+}^{1,\psi}y(t) = y(t).$$

2.1 Le problème non linéaire au sens de ψ

Cette section contient nos principaux résultats. Nous prouvons l'existence et l'unicité des résultats pour le problème non linéaire à valeur initiale impliquant la dérivée fractionnaire de ψ-Caputo ${}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = f(t, x(t))$, et pour un cas particulier des équations différentielles fractionnaires, nous établissons des résultats sur le comportement à long terme des solutions.

2.1.1 Solution de L'existence et L'unicité :

Considérons le problème (P) donné par l'équation différentielle fractionnaire non linéaire,

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = f(t, x(t)), t \in [a, b]. $$

Sous réserve des conditions initiales

$$ x(a) = X_a \quad et \quad x_\psi^{[k]}(a) = x_a^k, k = 1..., n-1 $$

où
1. $0 < \alpha \notin \mathbb{N} \quad et \quad n = [\alpha] + 1,$
2. x_a et x_a^k , pour $k = 1, ..., n-1$, sont des réels fixes,
3. $x \in C^{n-1}[a, b]$ telle que ${}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}x$ existe et continue dans [a,b],
4. $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Aussi, nous désignons $x_a^0 := x_a$. Nous prouvons d'abord une relation d'équivalence entre le problème fractionnaire (P) de Cauchy et l'équation intégrale de Volterra.

Théorème 2.2. *Une fonction $x \in C^{n-1}([a, b])$ est une solution de problème (P) si et seulement si x satisfait l'intégrale fractionnaire suivante :*

$$ x(t) = I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t, x(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_a^k}{k\,!}(\psi(t) - \psi(a))^k. \tag{2.1} $$

Preuve :

Ce résultat est une conséquence du Théorème 2.1. L'implication $P \Rightarrow (2.1)$ est clair. L'application de l'opérateur $I_{a+}^{\alpha,\psi}$ aux deux membre de l'équation ${}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}x(t) = f(t, x(t)), t \in [a, b]$ et en utilisant les conditions initiales, nous obtenons (2.1). Pour prouver l'inverse, nous appliquons l'opérateur ${}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}$ aux deux membre de l'équation (2.1) et utiliser l'expression

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha,\psi}(\psi(t) - \psi(a))^k = 0, \qquad \forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}, $$

pour obtenir ${}^cD^{\alpha,\psi}_{a+}x(t) = f(t, x(t))$.
Enfin, nous devons prouver que les conditions initiales sont également remplies.
Il est clair que $x(a) = x_a$.
De plus, les calculs directs conduisent à

$$\begin{aligned} x^{[1]}_\psi(t) &= \frac{x'(t)}{\psi'(t)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-2}f(\tau,x(\tau))d\tau + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_a^k}{(k-1)\,!}(\psi(t)-(\psi(a))^{k-1}, \end{aligned}$$

donc $x^{[1]}_\psi(a) = x^1_a$.

En répétant ce processus, nous arrivons à

$$x^{[n-1]}_\psi = \frac{(x^{[n-2]}(t))'}{\psi'(t)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n}f(\tau,x(\tau))d\tau + x_a^{n-1}.$$

Puisque $f(.,x(.))$ *est continue sur* $[a,b]$, *il existe une constante positive* A *telle que*

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-n}f(\tau,x(\tau))d\tau\right| \leq A\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-n+1}}{\Gamma(\alpha-n+2)},$$

qui disparaît au point initial $t = a$, *et ainsi* $x^{[n-1]}_\psi(a) = x_a^{n-1}$.

Théorème 2.3. *Supposons que la fonction* f *est Lipschitzienne et continue .*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Alors, il existe une constante $h \in \mathbb{R}^+$ *telle qu'il existe une solution unique du problème* (P) *sur l'intervalle* $[a, a+h] \subseteq [a,b]$ *avec la condition :*

$$L\frac{(\psi(a+h)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \quad et \quad a+h \leq b.$$

Preuve :
Soit h *un réel satisfaisant aux conditions*

$$L\frac{(\psi(a+h)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \quad et \quad a+h \leq b.$$

Définir l'ensemble

$$U := \left\{x \in C^{n-1}[a,a+h] : {}^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}x \in C[a,a+h]\right\}, \tag{2.3}$$

Et l'opérateur $F : U \to U$ par la formule :

$$F[x](t) := I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t,x(t)) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_a^k}{k\,!}(\psi(t)-\psi(a))^k. \tag{2.4}$$

Nous montrons d'abord que F est bien défini, c'est-à-dire $F(U) \subseteq U$. Considérons une fonction $x \in C^{n-1}[a,a+h]$. Il est clair que l'application $t \to F[x](t)$ est de classe C^{n-1} alors,

$${}^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}F[x](t) = {}^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}I_{a+}^{\alpha,\psi}f(t,x(t)) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_a^k}{k\,!}{}^{c}D_{a+}^{\alpha,\psi}(\psi(t)-\psi(a))^k = f(t,x(t)),$$

est continue dans $[a,a+h]$. Ensuite on montrera que F est une contraction, Puisque $x_1, x_2 \in U$, on a :

$$\begin{aligned}\|F(x_1)-F(x_2)\| &= \max_{t\in[a,a+h]}|F[x_1](t)-F[x_2](t)| = \max_{t\in[a,a+h]}|I_{a+}^{\alpha,\psi}(f(t,x_1(t))-f(t,x_2(t)))| \\ &\le L\frac{(\psi(a+h)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|x_1-x_2\|,\end{aligned}$$

ce qui prouve que F est une contraction par le théorème du point fixe de Banach. Ensuite, nous prouvons l'existence de problème fractionnaire (P) de Cauchy en utilisant le théorème du point fixe de Shaefer.

Théorème 2.4. *Supposons que la fonction f est continue et qu'il existe deux constantes positives k_0 et k_1 telles que :*

$$|f(t,x)| \le k_0 + k_1|x|, \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors, il existe une constante $h > 0$ telle que le problème (P) admet au moins une solution définie sur l'intervalle $[a,a+h] \subseteq [a,b]$.

Preuve :

Soit $h > 0$ tel que $a + h \leq b$ et

$$1 - \frac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(a+h) - \psi(a))^\alpha > 0.$$

Considérons l'ensemble U et l'opérateur $F : U \to U$ définies respectivement par (2.3) *et* (2.4)*. Nous allons diviser la preuve en 4 étapes :*

1ere étape : *F est continu.*
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite converge vers x dans U, alors

$$\|F(x_n) - F(x)\| = \max_{t\in[a,a+h]} |F[x_n](t) - F[x](t)| = \max_{t\in[a,a+h]} |I_{a+}^{\alpha,\psi}(f(t, x_n(t))) - f(t, x(t)))|$$

$$\leq \|f(., x_n(.)) - f(., x(.))\| \frac{(\psi(a+h) - \psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Puisque f est une fonction continue, on a

$$F(x_n) - F(x) \to 0 \quad lorsque \quad n \to \infty.$$

2ème étape : *F transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans U.*
On montre que, pour tout $r > 0$ il existe un $r' > 0$ tel que :

$$\forall x \in A_r := \{x \in U : \|x\| \leq r\} : \|F(x)\| \leq r'.$$

En effet, étant donné $x \in A_r$ et en utilisant la relation :

$$|f(t, x(t))| \leq k_0 + k_1\|x\| \leq k_0 + k_1 r, \quad \forall t \in [a, a+h],$$

on a

$$\|F(x)\| \leq \frac{k_0 + k_1 r}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(a+h) - \psi(a))^\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k!}(\psi(a+h) - \psi(a))^k := r'.$$

Qui est indépendant de t et x et donc F uniformément borné.

3éme étape *: F transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus en U.*
Soit $t_1, t_2 \in [a, a+h]$ avec $t_1 < t_2$, A_r défini comme dans la 2éme étape et définir la

fonction signe.

$$sign(a) := \begin{cases} 1 \quad , \quad si \quad \alpha > 1 \\ -1 \quad , \quad si \quad \alpha \in (0,1) \end{cases}$$

alors pour tous $x \in A_r$:

$$|F[x](t_2) - F[x](t_1)|$$

$$\leq |I_{a+}^{\alpha,\psi}(f(t_2, x(t_2)) - (f((t_1, x(t_1)))| + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k\,!}[(\psi(t_2) - \psi(a))^k - (\psi(t_1) - \psi(a))^k]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_a^{t_2} \psi'(\tau)\psi(t_2) - \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau - \int_a^{t_1} \psi'(\tau)(\psi(t_1) - \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)d\tau) \right|$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k\,!}[(\psi(t_2) - \psi(a))^k - (\psi(t_1) - \psi(a))^k]$$

$$\leq \frac{k_0 + k_1 r}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^{t_1} sign(\alpha)\psi'(\tau)[(\psi(t_2) - \psi(\tau))^{\alpha-1} - (\psi(t_1) - \psi(\tau))^{\alpha-1}]d\tau \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} \psi'(\tau)(\psi(t_2) - \psi(\tau))^{\alpha-1} d\tau \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k\,!}[(\psi(t_2) - \psi(a))^k - (\psi(t_1) - \psi(a))^k]$$

$$\leq \frac{k_0 + k_1 r}{\Gamma(\alpha + 1)}[sign(\alpha)[\psi(t_2) - \psi(a))^\alpha - (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha - (\psi(t_1) - \psi(a))^\alpha] + (\psi(t_2) - \psi(t_1))^\alpha]$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k\,!}[(\psi(t_2) - \psi(a))^k - (\psi(t_1) - \psi(a))^k].$$

Puisque le membre droit de l'inégalité ci-dessus converge vers zéro lorsque $t_2 \to t_1$, nous avons $F[x](t_2) \to F[x](t_1)$, comme la conséquence de 1^{ere} étape à 3^{éme} étape *avec le théorème de Ascoli-Arzelà, nous concluons que F est complètement continue.*

4éme étape *: pour conclue la preuve, nous montrons que l'ensemble*

$$T := \{x \in U : x = \lambda F(x) \quad pour \quad certains \quad \lambda \in [0,1]\}$$

est borné.
Soit $x \in T$ et $\lambda \in [0,1]$ tel que $x = \lambda F(x)$ pour tous $t \in [a, a+h]$, on a

$$|F[x](t)| \leq \frac{k_0 + k_1\|x\|}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(t) - \psi(a))^\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k\,!}(\psi(t) - \psi(a))^k,$$

donc

$$\|x\| < \|F(x)\| \leq \frac{k_0 + k_1\|x\|}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(a+h) - \psi(a))^\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x_a^k|}{k\,!}(\psi(a+h) - \psi(a))^k,$$

$$\Leftrightarrow \|x\| \leq \frac{\dfrac{k_0}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(a+h) - \psi(a))^\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{|x_a^k|}{k\,!}(\psi(a+h) - \psi(a))^k}{1 - \dfrac{k_1}{\Gamma(\alpha+1)}(\psi(a+h) - \psi(a))^\alpha}.$$

Ce qui prouve que T est borné.
Par le théorème du point fixe de Schaefer F admet un point fixe.

Corollaire 2.1. *Supposons que la fonction f continue et borné.*
Alors il ya au mois une solution au problème (P) définie sur un intervalle $[a, a+h]$.

CHAPITRE 3

PROBLÈME AUX LIMITES AU SENS DE ψ-HILFER

Définition et résultats pour obtenir la solution sont établis dans ce chapitre.
Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathscr{D}^{\nu,\beta;\psi}\hbar(t,\rho) = \eta(t,\rho,\hbar(t,\rho)), \quad t \in J := [0,T], \\ a\mathscr{I}^{1-\mu;\psi}\hbar(t,\rho)|_{t=0} + b\mathscr{I}^{1-\mu;\psi}\hbar(t,\rho)|_{t=T} = c. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici $\mathscr{D}^{\nu,\beta;\psi}$ représente la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer et $\mathscr{I}^{1-\mu;\psi}$ est ψ-intégrale d'ordre $1-\mu(\mu = \nu + \beta - \nu\beta)$.
Soit $\mathbb{R}$ un espace de Banach, $\eta : J \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée et où a, b et c sont des constantes.
L'étude et le développement détaillée de la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer.
L'équation intégrale équivalente à l'équation (3.1) est définie comme :

$$\begin{aligned} \hbar(t,\rho) &= \left(c - b\int_0^T \mathscr{T}^{1-\beta+\nu\beta}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds\right)\frac{\psi_0^{\mu-1}}{(a+b)\Gamma(\mu)} \\ &+ \int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$\mathscr{T}_t^{\nu}(s) = \frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \psi_0^{\mu-1}(t) = (\psi(t)-\psi(0))^{\mu-1}.$$

Nous énumérons quelques hypothèses pour prouver nos résultats recherchés.
$[H1]$ il existe des constantes $n, m : J \times \Omega \to \mathbb{R}$, telles que :

$$|\eta(.,\rho,\hbar_1(.,\rho))| \leq n(.,\rho) + m(.,\rho)|\hbar(.,\rho)|.$$

Pour tout $t \in J$ et $\rho \in \Omega$.
Alors $N(\rho) = \sup n(.)$ et $M(\rho) = \sup m(.)$.
$[H2]$ pour toute constante $\ell > 0$, on a

$$|\eta(.,\rho,\hbar(.,\rho)) - \eta(.,\rho,v(.,\rho))| \leq \ell(.,\rho)|\hbar(.,\rho) - v(.,\rho)|.$$

$[H3]$ pour $\lambda_\varphi > 0$, on a

$$\mathscr{I}^{\nu;\psi}\varphi(t,\rho) \leq \lambda_\varphi \varphi(t,\rho).$$

Soit $\mathbb{C}$ l'espace de Banach de tous les fonctions continues $\hbar : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$\|\hbar\|_C = \sup\{|\hbar(t,\rho)| : t \in J\}.$$

Considérez l'espace pondéré :

$$C_{\mu,\psi}(J,R) = \{\hbar : J \times \Omega \to \mathbb{R} : \psi_0^\mu(t)\hbar(t,\rho) \in \mathbb{C}\}.0 \leq \mu < 1$$

avec la norme

$$\|\eta\|_{C_{\mu,\psi}} = \sup_{t\in J}|\psi_0^\mu(t)\eta(t,\rho)|.$$

Définition 3.1. *La dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer au sens de Riemann-Liouville d'ordre ν d'une fonction $\hbar$ par rapport à ψ est définie par :*

$$\mathscr{D}^{\nu;\psi}\hbar(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \mathscr{T}_t^{n-\nu}(s)\hbar(s)ds.$$

Où $n = [\nu] + 1$.

Définition 3.2. *D'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer de la fonction $\hbar$,nous donnerons la définition g-UHR stable pour le problème*

$$\mathscr{D}^{\nu,\beta;\psi}\hbar(t,\rho) = \eta(t,\rho,\hbar(t,\rho)), \quad t \in \mathbb{J}. \tag{3.3}$$

Pour la fonction continue φ *:*$J \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *satisfait l'inégalité :*

$$\left|\mathscr{D}^{\nu,\beta;\psi}\upsilon(t,\rho) - \eta\left(t,\rho,\upsilon(t,\rho)\right)\right| \leq \varphi(t). \tag{3.4}$$

Définition 3.3. *L'équation* (3.3) *est g-UHR stable par rapport à* φ *s'il existe un nombre réel* $C_{f,\varphi} > 0$ *tel que pour chaque solution* $\upsilon \in C_{1-\mu,\psi}$ *de l'inégalité* (3.4)*, il existe une solution* $\hbar \in C_{1-\mu,\psi}$ *de l'équation* (3.3) *avec :*

$$|\upsilon(t,\rho) - \hbar(t,\rho)| \leq C_{f,\varphi}\varphi(t,\rho), \quad t \in \mathbb{J}.$$

3.1 Lemme de Gronwall

Supposons $\nu > 0$*,* $a(t,\rho)$ *est une fonction positive localement intégrable sur* $J \times \Omega$ *(tel que* $T \leq \infty$*), soit* $g(t,\rho)$ *positif , fonction continue non décroissante définie sur* $J \times \Omega$ *tel que* $g(t,\rho) \leq k$ *pour une constante* k*, soit encore* $\eta(t,\rho)$ *fonction positif localement intégrable sur* $J \times \Omega$ *avec*

$$\eta(t,\rho) \leq a(t,\rho) + g(t,\rho)\int_a^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)\eta(s,\rho)ds, (t,\rho) \in J \times \Omega.$$

Avec une certain $\nu > 0$*, alors*

$$\eta(t,\rho) \leq a(t,\rho) + \int_a^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(g(t,\rho)\Gamma(\nu)\right)^n \mathscr{T}_t^{n\nu}(s)\right] a(s,\rho)ds, \quad (t,\rho) \in J \times \Omega.$$

3.2 Résultats d'existence et de stabilité

Théorème 3.1. *Dans l'hypothèse [H1] et [H2], l'équation* (3.1) *à au moins une solution.*

Preuve :

Considérons l'opérateur

$$\mathscr{P} : C_{1-\mu,\psi} \to C_{1-\mu,\psi}.$$

La forme d'opérateur d'équation (3.1) *est comme suit :*

$$\mathscr{P}\hbar(t,\rho) = \left(c - b\int_0^T \mathscr{T}_T^{1-\beta+\nu\beta}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds\right)\frac{\psi_0^{\mu-1}(t)}{(a+b)\Gamma(\mu)} + \int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds. \tag{3.5}$$

Étape 1 *: $\mathscr{P}$ est continue.*
Soit $\hbar_n$ une suite avec $\hbar_n \to \hbar$ dans $C_{1-\mu,\psi}$. Ainsi
$\left|(\mathscr{P}\hbar_n(t,\rho) - \mathscr{P}\hbar(t,\rho))\psi_0^{1-\mu}(t)\right|$

$$\leq \left(b\int_0^T \mathscr{T}_T^{1-\beta+\nu\beta}(s)|\eta(s,\rho,\hbar_n(s,\rho)) - \eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))|ds\right)\frac{1}{(a+b)\Gamma(\mu)}$$

$$+\psi_0^{1-\mu}(t)\int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)|\eta(s,\rho,\hbar_n(s,\rho)) - \eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))|ds$$

$$\leq \left(\left(\frac{bB(\mu,1-\beta-\nu\beta)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(1-\beta-\nu\beta)}\psi_0^{\nu}(T)\right) + \frac{\psi_0^{1-\mu}(t)}{\Gamma(\nu)}B(\mu,\nu)\psi_0^{\nu+\mu-1}(t)\right)$$

$$\|\eta(.,\rho,\hbar_n(.,\rho)) - \eta(.,\rho,\hbar(.,\rho))\|_{C_{1-\mu,\psi}}$$

$$\leq \left(\left(\frac{bB(\mu,1-\beta-\nu\beta)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(1-\beta-\nu\beta)}\psi_0^{\nu}(T)\right) + \frac{B(\mu,\nu)}{\Gamma(\nu)}\psi_0^{\nu}(T)\right)$$

$$\|\eta(.,\rho,\hbar_n(.,\rho)) - \eta(.,\rho,\hbar(.,\rho))\|_{C_{1-\mu,\psi}}$$

puisque η est continue, alors on a :

$$\|\mathscr{P}\hbar_n - \mathscr{P}\hbar\|_{C_{1-\mu,\psi}} \to 0 \quad comme \quad n \to \infty.$$

Étape 2 *: $\mathscr{P}$ transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans $C_{1-\mu,\psi}$.*
Il suffit de montrer que pour $r > 0$, il existe une constante positive l

telle que $B_r = \left\{\hbar \in C_{1-\mu,\psi} : \|\hbar\|_{C_{1-\mu,\psi}} \leq r\right\}$, *on a* $\|\mathscr{P}\hbar\|_{C_{1-\mu,\psi}} \leq l$

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{P}\hbar(t,\rho)\psi_0^{1-\mu}(t)| \\
&\leq \frac{c}{(a+b)\Gamma(\mu)} + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\mu)}\int_0^T \mathscr{T}_T^{1-\beta+\nu\beta}(s)|\eta(s,\rho,,\hbar(s,\rho))|ds \\
&+ \psi_0^{1-\mu}(t)\int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)|\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))|ds \\
&\leq \frac{c}{(a+b)\Gamma(\mu)} + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\mu)}\int_0^T \mathscr{T}_T^{1-\beta+\nu\beta}(s)(n(s,\rho)+m(s,\rho)|\hbar(s,\rho)|)ds \\
&+ \psi_0^{1-\mu}(t)\int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)(n(s,\rho)+m(s,\rho)|\hbar(s,\rho)|)ds \\
&\leq \frac{c}{(a+b)\Gamma(\mu)} + \frac{bN(\rho)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(2-\beta+\nu\beta)}\psi_0^{1-\beta+\nu\beta}(T) \\
&+ \frac{bM(\rho)B(\mu,1-\beta+\nu\beta)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(1-\beta+\nu\beta)}\psi_0^{\nu}(T)\|\hbar\|_{C_{1-\mu,\psi}} \\
&+ \frac{N(\rho)}{\Gamma(\nu+1)}\psi_0^{\nu+1-\mu}(t) + \frac{M(\rho)\psi_0^{1-\mu}(t)}{\Gamma(\nu)}B(\mu,\nu)\psi_0^{\nu+\mu-1}(t)\|\hbar\|_{C_{1-\mu,\psi}} \\
&\leq \frac{c}{(a+b)\Gamma(\mu)} + \frac{bN(\rho)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(2-\beta+\nu\beta)}\psi_0^{1-\beta+\nu\beta}(T) \\
&+ \frac{N(\rho)}{\Gamma(\nu+1)}\psi_0^{\nu+1-\mu}(T) \\
&+ \Big(\frac{bM(\rho)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(1-\beta+\nu\beta}B(\mu,1-\beta+\nu\beta)\psi_0^{\nu}(T) \\
&+ \frac{M(\rho)}{\Gamma(\nu)}B(\mu,\nu)\psi_0^{\nu}(T)\Big)r \\
&:= l.
\end{aligned}
$$

Étape 3 *$\mathscr{P}$ transforme les ensembles bornés en ensemble équicontinu de* $C_{1-\mu,\psi}$.

Soit $t_1, t_2 \in J$ *avec* $t_1 > t_2$ *donc on obtient*
$\left|\psi_0^{1-\mu}(t_1)(\mathscr{P}(t_1,\rho) - \psi_0^{1-\mu}(t_2)\mathscr{P}(t_2,\rho))\right|$

$$
\leq \left|\psi_0^{1-\mu}(t_1)\int_0^1 \mathscr{T}_{t_1}^{\nu}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds + \psi_0^{1-\mu}(t_2)\int_0^{t_2} \mathscr{T}_{t_2}^{\nu}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds\right|.
$$

Le membre droit est susceptible d'être nul lorsque $t_1 \to t_2$.
Comme résultat de l'étape (1-3), en concert avec le théorème d'Ascoli-Arzelà, il a prouvé que $\mathscr{P}$ *est continue et complètement continue .*
Étape 4 *: A priori bornée.*
Enfin pour prouver que η *est borné, où*

$$\eta = \{\hbar \in C_{1-\mu,\psi} : \hbar = \delta \mathscr{P} \hbar, 0 < \delta < 1\},$$

on obtient

$$\hbar(t,\rho) = \delta \left[\left(c - b \int_0^T \mathscr{T}_T^{1-\beta+\nu\beta}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds \right) \frac{\psi_0^{\mu-1}(t)}{(a+b)\Gamma(\mu)} + \int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds \right].$$

D'où le théorème est conclu .

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses [H2]*
si

$$\left(\frac{bL(\rho)B(\mu, 1-\beta+\nu\beta)}{(a+b)\Gamma(\mu)\Gamma(1-\beta+\nu\beta)} \psi_0^{\nu}(T) + \frac{L(\rho)B(\mu,\nu)}{\Gamma(\nu)} \psi_0^{\nu}(T) \right) < 1,$$

alors l'équation (3.1) *admet une solution unique.*

Théorème 3.3. *Sous L'hypothèse [H2] et [H3] la solution de l'équation* (3.1) *est g-UHR stable.*

Preuve :

Soit ν *solution de l'inégalité* (3.4), *il existe* $\hbar$ *une solution unique par le théorème* 3.2 *du problème*

$$\mathscr{D}^{\nu,\beta,\psi}\hbar(t,\rho) = \eta(t,\rho,\hbar(t,\rho)), \quad t \in J$$

$$a\mathscr{I}^{1-\mu;\psi}\hbar(t,\rho)|_{t=0} + b\mathscr{I}^{1-\mu;\psi}\hbar(t,\rho)|_{t=T} = C$$

donné par :

$$\hbar(t,\rho) = A_{\hbar} + \int_0^t \mathscr{T}_t^{\nu}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds,$$

où

$$A_{\hbar} = \left(c - b\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^T \mathscr{T}_T^{1-\beta+\nu\beta}(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds \right) \frac{\psi_0^{\mu-1}(t)}{(a+b)\Gamma(\mu)}.$$

Donc $A_\hbar = A_\upsilon$.
En différenciant l'inégalité (3.4), *on a :*

$$\begin{aligned}
&\left| \upsilon(t,\rho) - A_\hbar - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \mathscr{T}_t^\nu(s)\eta(s,\rho,\upsilon(s,\rho))ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \mathscr{T}_t^\nu(s)\varphi(s,\rho)ds \\
&\leq \lambda_\varphi \varphi(t,\rho).
\end{aligned}$$

D'où il suit

$$\begin{aligned}
|\upsilon(t,\rho) - \hbar(t,\rho)| &\leq \left| \upsilon(t,\rho) - A_\hbar - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \mathscr{T}_t^\nu(s)\eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))ds \right| \\
&\leq \left| \upsilon(t,\rho) - A_\hbar - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \mathscr{T}_t^\nu(s)\eta(s,\rho,\upsilon(s))ds \right| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \mathscr{T}_t^\nu(s)|\eta(s,\rho,\upsilon(s)) - \eta(s,\rho,\hbar(s,\rho))|ds \\
&\leq \lambda_\varphi \varphi(t,\rho) + \frac{L(\rho)}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \mathscr{T}_t^\nu(s)|\upsilon(s,\rho) - \hbar(s,\rho)|ds.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, il montre que pour une constante $\mathscr{M} > 0$ *indépendante de* $\lambda_\varphi \varphi(t,\rho)$ *on a*

$$|\upsilon(t,\rho) - \hbar(t,\rho)| \leq \mathscr{M}\lambda_\varphi \varphi(t,\rho) := C_{f,\varphi}\varphi(t,\rho).$$

Ainsi, l'équation (3.1) *est g-UHR stable .*

3.3 Exemple :

Pour $\psi(t) = t$ on obtient le cas particulier de l'équation (3.1) on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}^{\nu,\beta;t}\hbar(t,\rho) &= \eta(t,\rho,\hbar(t,\rho)), t \in J := [0, \frac{4}{5}], \\
\mathscr{I}^{1-\mu;t}\eta(0,\rho) &= \rho.
\end{aligned}$$

Nous choisissons $\nu = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad$ et $\quad \mu = \frac{3}{4} \quad$ donc

$$\eta(t, \rho, \hbar(t, \rho)) = \frac{1}{9e^t} \frac{\hbar^2(t, \rho)}{1 + \hbar^2(t, \rho)}.$$

Pour $\hbar, v \in \mathbb{R}$, nous avons

$$|\eta(t, \rho, \hbar(t, \rho)) - \eta(t, \rho, v(t, \rho))| \leq \frac{1}{9} |\hbar - v| .$$

Ainsi, les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites, fournit une solution unique. Ensuite, $\varphi(t, \rho) = e^{t+\rho}$

$$\mathscr{I}^{\frac{1}{2};t}\varphi(t, \rho) \leq \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\varphi(t, \rho) = \lambda_\varphi \varphi(t, \rho).$$

Il est facile de prouver que les solutions remplissent les conditions de diverses stabilités comme la stabilité g-UHR.

3.4 Exemple :

Considérer le problème :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^{v,\beta,t}\hbar(t, \rho) &= \eta(t, \rho, \hbar(t, \rho)), t \in J := \left[0, \frac{2}{5}\right], \\ \mathscr{I}^{1-\mu;t}\eta(0, \rho) &= \rho \end{aligned}$$

On note $\nu = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{3}{4}$ et on choisissait $\mu = \frac{11}{12}$.
Donc $\eta(t, \rho, \hbar(t, \rho)) = \dfrac{\rho^2 \hbar(t, p)}{e^{10}(1 + \rho^2)}$, de plus l'hypothèse $[H1]$ est satisfaite pour $L(\rho) = \frac{1}{e^{10}}$.
Enfin, l'hypothèse $[H3]$ se contente aussi de

$$\varphi(t, \rho) = \rho t$$

et

$$\lambda_\varphi = \frac{1}{\Gamma(\nu + 2)}.$$

Nous pouvons facilement prouver que les solutions rencontrer les conditions de diverses stabilités comme la stabilité g-UHR.

CHAPITRE 4

L'INÉGALITÉ DE GRONWALL ET LE PROBLÈME DE TYPE-CAUCHY AU MOYEN ψ -HILFER

Considérons le problème de type-Cauchy suivant pour l'équation différentielle fractionnaire :

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha,\beta} y(x) &= f(x, y(x)), 0 < \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1 \\ I_{a+}^{1-\gamma} y(a) &= y_a, \quad \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha), \end{aligned} \tag{4.1}$$

Où $I_{a+}^{1-\gamma}(.)$ est l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et $D_{a+}^{\alpha,\beta}(.)$ est la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer et y_a une constante .

Soit $[a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$ un intervalle fini sur le demi-axe $\mathbb{R}^+$ et $C[a,b]$, $AC^n[a,b]$, $C^n[a,b]$ soit l'espace de la fonction continue n-fois absolument continue et n-fois continuellement différentiable sur $[a,b]$, respectivement l'espace de fonction continue f sur $[a,b]$, avec la norme est définie par :

$$\|f\|_{c[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

D'autre part, on a n-fois une fonction absolument continue donnée par :

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R}; f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

L'espace pondéré $C^n_{\gamma,\psi}[a,b]$ de la fonction f sur $[a,b]$ est défini par

$$C^n_{\gamma,\psi}[a,b] = \left\{f :]a,b] \to \mathbb{R}; f(t) \in C^{n-1}[a,b]; f^{(n)}(t) \in C_{\gamma,\psi}[a,b]\right\}, 0 \leq \gamma < 1$$

avec la norme

$$\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|f^{(k)}\right\|_{C[a,b]} + \left\|f^{(n)}\right\|_{C_{\gamma;\psi}[a,b]}.$$

Pour $n = 0$, on a $C^0_\gamma[a,b] = C_\gamma[a,b]$.

4.1 L'existence et l'unicité

Dans cette section, nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de type-Cauchy problème(4.1), en utilisant le fait que l'équation intégrale de Volterra équivaut à le problème de type Cauchy dans l'espace pondéré $C_{1-\gamma;\psi}[a,b]$, au moyen de la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Hilfer. Application de l'opérateur d'intégrale fractionnaire $I^{\alpha;\psi}_{a+}(.)$ des deux membres de l'équation fractionnaire (4.1) et en utilisant Théorème 1.3, nous obtenons

$$y(x) = \frac{(\psi(x) - \psi(a)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}_{a+} f(a) + I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x, y(x)). \tag{4.2}$$

Par contre, si y satisfait l'équation (4.2), alors y satisfait l'équation (4.1) - l'équation (**??**) cependant, l'application de l'opérateur de dérivée fractionnaire ${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+}(.)$ des deux membres de l'équation (4.2),
on a :

$$\begin{aligned} {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} y(x) &= {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} \left(\frac{(\psi(x) - \psi(a)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I^{(1-\beta)(1-\alpha);\psi}_{a+} f(a)\right) \\ &+ {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} I^{\alpha;\psi}_{a+} f(x, y(x)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

En utilisant le théorème (1.3) :

$${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} (\psi(x) - \psi(a))^{\gamma-1} = 0, \quad 0 < \gamma < 1,$$

on obtient

$${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} y(x) = f(x, y(x)).$$

Ensuite, nous concluons que $y(x)$ satisfait le problème à valeur initiale "probléme (4.1) " si et seulement si $y(x)$ satisfait l'équation intégrale de Volterra du deuxième espace

$$y(x) = y_a \frac{(\psi(x) - \psi(a)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi'(x)(\psi(x) - \psi(t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt. \quad (4.4)$$

Lemme 4.1. *Soit $\psi \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ une fonction croissante et $\psi \neq 0, \forall x \in [a,b]$. Si $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ où $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$, alors l'opérateur d'intégrale fractionnaire ψ-Riemann $I_{a+}^{\alpha;\psi}(.)$ est borné de $C_{1-\gamma;\psi}[a,b]$ à $C_{1-\gamma;\psi}[a,b]$:*

$$\|I_{a+}^{\alpha;\psi} f\|_{C_{1-\gamma;\psi}[a,b]} \leq M \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} (\psi(x) - \psi(a))^{\alpha}, \quad (4.5)$$

où, M est la borne d'une fonction f bornée.

Théorème 4.1. *Soit $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$ où $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$.*
*Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x,y) \in C_{1-\gamma;\psi}[a,b]$ pour tout $y \in C_{1-\gamma;\psi}[a,b]$ et satisfait la condition de Lipschitz de l'équation par rapport à y. Alors il existe une solution unique $y(x)$ pour l'équation problématique de type Cauchy" l'équation (4.1)-l'équation (**??**) " $C_{1-\gamma;\psi}^{\alpha,\beta}[a,b]$.*

4.2 L'inégalité de Gronwall

L'inégalité de Gronwall joue un rôle importante dans l'étude de la qualité de la théorie des équations intégrales et différentielles, pour résoudre des problèmes non-linéaire de type-Cauchy, dans cette section, nous présentons l'inégalité généralisée de Gronwall par des moyens de l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction ψ et d'autres résultats importants.

Théorème 4.2. *Soit u, v deux fonctions intégrables et g continue sur $[a,b]$, soit $\psi \in C^1[a,b]$ une fonction croissante telle que $\psi'(t) \neq 0$,$\forall t \in [a,b]$.*
Supposons que

1. *u et v sont positives.*
2. *g positive et croissante*

Si

$$u(t) \leq v(t) + g(t) \int_a^t \psi'(\tau) \left(\psi(t) - \psi(\tau)\right)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau.$$

Alors

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(\tau)[\psi(t) - \psi(\tau)]^{\alpha k-1} v(\tau) d\tau \tag{4.6}$$

$\forall t \in [a, b]$.

Preuve :

Soit

$$A\phi(t) = g(t) \int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau, \tag{4.7}$$

$\forall t \in [a, b]$, pour des fonctions localement intégrables ϕ. Donc

$$u(t) \leq \nu(t) + Au(t).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire :

$$u(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} A^k \nu(t) + A^n u(t).$$

L'étape suivante, si ϕ est une fonction négative, alors :

$$A^k u(t) \leq \int_a^t \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(\tau)[\psi(t) - \psi(\tau)]^{\alpha k-1} u(\tau) d\tau. \tag{4.8}$$

Nous savons que L'équation (4.8) de relation est vraie pour $n = 1$. Supposons que la formule est vraie pour certains $k = n \in \mathbb{N}$, alors l'hypothèse implique.

$$\begin{aligned} A^{k+1}u(t) &= A\left(A^k u(t)\right) \leq A\left(\int_a^t \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(\tau)[\psi(t) - \psi(\tau)]^{\alpha k-1} u(\tau) d\tau\right) \\ &= g(t) \int_a^t \psi'(\tau)[\psi(t) - \psi(\tau)]^{\alpha-1} \\ &\times \left(\int_a^\tau \frac{[g(\tau)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(s)[\psi(\tau) - \psi(s)]^{\alpha k-1} u(s) ds\right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Par hypothèse, g est une fonction croissante, c'est-à-dire $g(\tau) \leq g(t)$, pour tout $\tau \leq t$, alors à partir de l'équation (4.9), on obtient

$A^{k+1}u(t)$

$$\leq \frac{[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)}[g(t)]^{k+1}\int_a^t\int_a^\tau \psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha-1}\psi'(s)[\psi(\tau)-\psi(s)]^{\alpha k-1}u(s)dsd\tau. \tag{4.10}$$

Par la formule de Dirichlet, l'équation (4.10) peut être écrit comme :
$A^{k+1}u(t)$

$$\leq \frac{[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)}[g(t)]^{k+1}\int_a^t \psi'(\tau)u(\tau)\int_\tau^t \psi'(s)[\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1}[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}dsd\tau. \tag{4.11}$$

Noter que

$\int_\tau^t \psi'(s)[\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1}[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}ds$

$$= \int_\tau^t \psi'(s)[\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1}\left[1-\frac{\psi(s)-\psi(\tau)}{\psi(t)-\psi(\tau)}\right]^{\alpha-1}[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}ds.$$

On suppose un changement de variable $u=\dfrac{\psi(s)-\psi(\tau)}{\psi(t)-\psi(\tau)}$ et en utilisant la définition de la fonction **Bêta** et la relation avec la fonction **Gamma**

$B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_t^\tau \psi'(s)[\psi(t)-\psi(s)]^{\alpha-1}[\psi(s)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}ds \\
&= [\psi(t)-\psi(\tau)]^{k\alpha+\alpha-1}\int_0^1 [1-u]^{\alpha-1}u^{k\alpha-1}du \\
&= [\psi(t)-\psi(\tau)]^{k\alpha+\alpha-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(\alpha+k\alpha)}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Remplacer l'équation (4.11) dans l'équation 4.12, on obtient :
$A^{k+1}u(t)\leq \int_a^t \dfrac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1))}\psi'(\tau)u(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha(k+1)-1}d\tau.$
Prouvons maintenant que $A^n u(t)\to 0$ quand $n\to\infty$. Comme g est une fonction

continue sur $[a,b]$, alors par le théorème de Weierstrass, il existe une constante $M>0$ telle que $g(t)\leq M$ pour tout $t\in[a,b]$. Alors on obtient

$$A^n u(t)\leq \int_a^t \frac{[M\Gamma(\alpha)]^n}{\Gamma(\alpha n)}\psi'(\tau)u(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha n-1}d\tau.$$

Considérez la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[M\Gamma(\alpha)]}{\Gamma(\alpha n)},$$

satisfaire la relation

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha n)(\alpha n)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}=1. \tag{4.13}$$

En utilisant le test de rapport à la série et l'approximation asymptotique, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\alpha n)}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}=0.$$

Par conséquent, la série converge et nous concluons que
$u(t)\leq\sum_{k=0}^{\infty}A^k\nu(t)\leq\nu(t)+\int_a^t\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)}\psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}\nu(\tau)d\tau.$

Corollaire 4.1. *Soit $\alpha>0$, $I=[a,b]$ et $f,\psi\in C^1([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telles que $\psi'\neq 0$ pour tout $t\in I$. Supposons que $b\geq 0$ et ν, u deux fonctions positives localement intégrables sur $[a,b]$, avec*

$$u(t)\leq\nu(t)+b\int_a^t\psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha-1}u(\tau)d\tau,\quad\forall t\in[a,b].$$

Alors, on peut écrire
$u(t)\leq\nu(t)+\int_a^t\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)}\psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}\nu(\tau)d\tau,\quad\forall t\in[a,b].$

Corollaire 4.2. *Sous l'hypothèse du théorème* (4.2)*, soit ν une fonction croissante sur $[a,b]$. Ensuite, nous avons*

$$u(t)\leq\nu(t)\mathbb{E}_{\alpha}(g(t)\Gamma(\alpha)[\psi(t)-\psi(a)]^{\alpha}),\quad\forall t\in[a,b],$$

où $\mathbb{E}_{\alpha}(.)$ *est la fonction de Mittag-Leffler définie par* $\mathbb{E}_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ *avec* $Re > 0$.

Preuve :

En fait,comme ν croissante, donc pour tout $\tau \in [a,t]$ nous avons $\nu(\tau) \le \nu(t)$ et nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
u(t) &\le \nu(t) + \int_a^t \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}\nu(\tau)d\tau \\
&= \nu(t)\left[1 + \int_a^t \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \psi'(\tau)[\psi(t)-\psi(\tau)]^{\alpha k-1}\nu(\tau)d\tau\right] \\
&= \nu(t)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[g(t)\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \frac{[\psi(t)-\psi(a)]^{\alpha k}}{k\alpha}\right] \\
&= \nu(t)\mathbb{E}_{\alpha}(g(t)\Gamma(\alpha)[\psi(t)-\psi(a)]^{\alpha}).
\end{aligned}$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous découvrons une nouvelle dérivée fractionnaire de ψ-Hilfer, puis nous consacrons à l'existence et l'unicité des résultat pour un problème non linéaire d'une équation différentielle et des solutions pour un problème de type-Cauchy.
Ensuite nous présentons des résultats principal d'inégalité de Gronwall au moyen de ψ-Hilfer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abad E, Yuste SB, Lindenberg K. Survival probability of an immobile target in a sea of evanescent diffusive or subdiffusive traps : a fractional equation approach. Phys. Rev. E. 2012 ;86(8). Article number 061120.

[2] Abbas, S. ; Benchohora, B. ; Lazgeg, J.E. ; Zhou, Y. : A survey on Hadamard and Hilfer fractional differential equations :analysis and stablity. Chaos Solitons Fract. 102, 47-71 (2017)

[3] Abbas, S. ; Benchohra, M. ; Graef, J.R. ; Henderson, J. : Implicit Fractional Differential and Integral Equations : Existence and Stability. Walter de Gruyter GmbH and Co KG, Berlin (2018)

[4] Agarwal, R.P. ; Benchohra, M. ; Hamani, S. : A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions. Acta. Appl. Math. 109, 973-1033 (2010)

[5] Almeida R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 2017 ;44 :460-481

[6] COURANT . R, Differential and integral calculus, Vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 2011.

[7] FURATI. K. M, M. KASSIM, Existence and uniqueness for a pro-

blem involving Hilfer fractional derivative, Comput. Math. Appl. 64 (6) (2012) 1616-1626.

[8] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore :World Scientific Publishing Co ; 2003.

[9] HILFER . R, Y. LUCHKO, Z. TOMOVSKI, Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives, Fract. Calc. Appl. Anal. 12 (3) (2009) 299-318.

[10] Magin RL. Fractional Calculus in Bioengineering. Redding : Begell House Inc. Publisher ; 2006.

[11] Ulam, S.M. : Problems in Modern Mathematics. Wiley, New York (1940).