REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de:

MASTER

Spécialité: Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles

Par

HEDIA HOUARIA
KHAMKHAM NADJET
KHELIFA BAKHTA

Le thème

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo et applications

Soutenu publiquement le 15 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de:

M. SOUID Mohammed Said	MCA	Université Tiaret	Président
Mme. BOUAZZA Zoubida	MMA	Université Tiaret	Examinateur
M. MAAZOUZ Kadda	MCB	Université Tiaret	Encadreur

2020-2021

Remerciement

*Avant tout, Nous adressons en premier lieu notre reconnaissance à **ALLAH** notre **DIEU** tout puissant, de nous avoir donné la santé et la volonté de terminer ce mémoire.*

*Nous exprimons nos remerciements à notre promoteur, le professeur **Maazouz Kadda** pour l'aide qu'il nous a apportée , pour sa patience et pour améliorer la qualité des différentes sections de notre mémoire .*

Nos remerciements nos très chers parents qui ont toujours été là pour nous .

Nous remerciements fortement mes frères et mes soeurs pour leur encouragement.

Nos derniers remerciements à tous les amies de la promotion 2021.

Et en fin , nous remerciements tous ceux qui ont contribué de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail , à nos parents , à nos source de générosité et de patience tout au long de nos carrière scolaire,que Dieu vous protèges , vous prêtes bonne santé et longue vie.
A nos frères et soeurs , pour l'aide.
A monsieur **Maazouz Kadda** , pour son soutien et son encouragement.
Aux personnes qui ont accompagné nous durant nos cursus universitaire , à nos amis pour l'encouragement permanents , et soutien moral.

RÉSUMÉ

Le principe du point fixe a beaucoup d'application. Il intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles , dans l'étude de l'existence et de l'unicité.
Dans ce mémoire on aborde différentes applications de ce principe qui s'impliquent dans la résolution des équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo .Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions en utilisant le principe de contraction de Banach , l'alternative non linéaire Leray-Schauder , Krasnoselskii..., en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela .
Mots clés : Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . Principe de contraction de Banach,Alternative non linéaire de type Leray-Schauder . Le théorème de point fixe de Krasnoselskii , Théorème d'Arzela-Ascoli.

ABSTRACT

The fixed principaux plays a crucial role in the large domain of application . It gives use the main tool a more advanced study of different differential equation, particularly for problems of existence and uniqueness.
In this memory ,we consider deffrent applications of this brincipal which are implied in the resolution of Caputo fractional differential equation , we prove the existence and uniqness of solutions by using Banach contraction principle , Leray-Schauder nonlinear alternative , Krasnoselskii ,...,by using Ascoli-Arzela theorem .
keywords : Fractional Caputo derivative , Banach contraction principal , Leray-Schauder nonlinear alternative Krasnoselskii fixed point theorem , Ascoli-Arzela theorem .

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **8**

Index de notations **9**

1 Notions du calcule fractionnaire **10**

1.1 Fonctions spéciales 10

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler 10

1.1.2 Fonction Bêta d'Euler 10

1.2 L'intégrale au sens de Riemann-Liouville 11

1.3 La dérivée au sens de Riemann-Liouville 11

1.4 La dérivée au sens de Caputo 12

1.5 Quelques propriétés de la dérivée de Caputo : 13

1.5.1 Linéarité 13

1.5.2 Non-commutativité 13

1.6 Transformée de Laplace d'un opérateur fractionnaire 14

1.7 Comparaison entre l'opérateur de Riemann-Liouville avec l'opérateur de Caputo 14

1.7.1 Exemple 15

1.8 Relation entre les dérivées de Caputo et Riemann-Liouville 15

1.9 L'intégrale au sens Hadamard : 16

1.10 La dérivée au sens de Hadamard 17

1.11 Relation entre La dérivée de Caputo et de Hadamard 18

1.12 Quelques théorèmes de point fixe 18

1.13 Théorème d'Ascoli-Arzela 19

1.14 Inégalité de Hölder 19

2 Problème non local via la dérivée de Caputo-Hadamrd **20**

3 Problèmes aux limites impliquant la dérivée de Caputo dans les espaces de Banach **28**
3.1 Exemples : 36

4 Problèmes non linéaires et inclusions différentielles **38**
4.1 Problème de valeur limite non locale : 45

Conclusion **48**

Bibliographie **49**

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou complexe C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent , conserve de nombreuses propriétés de base. La dérivée fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui . Ses origines remontons à la fin du 17^{ime}siècle , l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral . En particulier,Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt}$pour désigne là n^{ime} dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in N$) , l'Hôpital a répondu :

Cette lettre de l'Hôpital , écrite en 1695 est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire , et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$,c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Le sujet principale de ce mémoire est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et leur application.
Ce mémoire est composé de quatre chapitre : Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant le calcul fractionnaire et quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre est consacré à résoudre problème de valeur limite multipoint non locaux pour Caputo-Hadamrd fractionné (équations intgro-différentielles) , et dans le troisième chapitre sur problème aux limites pour équations différentielle de Caputo dans espace de Banach,et dans le dernier chapitre problèmes de valeur limite non linéaire pour les inclusions différentielles avec dérivé fractionnel Caputo .

L'approche est basé sur l'alternative non-linaire de Leray-Schauder et la contraction de Banach.

INDEX DE NOTATIONS

$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	:	Ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{C}$	:	Ensemble des nombres complexes .
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des nombres entiers naturelles.
$L^p[a,b]$	:	Espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0,+\infty[$intégrables.
$C([a,b],X)$	:	Espace des fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans un espace de Banach .
$AC^n([a,b])$	:	L'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f .
$\Gamma(.)$	:	La fonction Gamma .
$B(.,.)$	:	La fonction Bêta .
$I_a^\alpha y$	:	Intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville .
${}^C D_a^\alpha y$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Caputo .
${}^{RL} D_a^\alpha y$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville .
$J_a^\alpha y$	:	Intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$. au sens de Hadamard.
$D_a^\alpha y$	:	Dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Hadamard.

CHAPITRE 1

NOTIONS DU CALCULE FRACTIONNAIRE

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 *Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

Proposition 1.1 *Pour tout $z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*
1- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2- $\Gamma(n+1) = n!$.

3- $\Gamma(z+n+1) = \prod_{i=0}^{n}(z+i)\Gamma(z)$.

1.1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.2 *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction Bêta d'Euler la fonction définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du. \tag{1.2}$$

Proposition 1.2 *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:*
1- $B(x,y) = B(y,x)$.

2- $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

1.2 L'intégrale au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha(\alpha > 0)$ *d'une fonction* $f \in \mathbf{C}[a, b]$ *est définie par :*

$$(I_a^\alpha f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.3}$$

1.3 La dérivée au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4 *Soit* $f \in L^1([a, b])$, *la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}(R(\alpha) > 0)$ *de la fonction* f *notée* ${}^{RL}D_a^\alpha f$ *est définie par :*

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.4}$$

Où
$n - 1 < [R(\alpha)] < n$ et $x > a$.
En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$,on a :
Pour $\alpha = m = 0$,

$$({}^{RL}D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \Big(\frac{d}{dx}\Big) \int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{1.5}$$

$$({}^{RL}D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \Big(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\Big) \int_a^x f(t)dt = \frac{d^m}{dx^m} f(x) \tag{1.6}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$

Remarque 1.1

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n (I_a^{n-\alpha} f)(x)$$

avec $n = [R(\alpha)] + 1$, *et* $x > a$

Proposition 1.3

(a) *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *, alors*

$$(I_a^\alpha I_a^\beta f)(t) = I^{\alpha+\beta} f(t) = (I_\alpha^\beta I_a^\alpha f)(t).$$

(b) *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a, b]$, *alors*

$$(I_a^\alpha)({}^{RL}D_a^\alpha f)(t) \neq f(t).$$

(c) *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a, b]$ *, alors*

$$({}^{RL}D_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

1.4 La dérivée au sens de Caputo

Définition 1.5 *Pour une fonction $f \in C^n[a,b]$, et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire au sens du Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :*

$$({}^cD_a^\alpha f)(t) = (I_a^{n-\alpha} D_a^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds,$$

où $n = [\alpha] + 1$, ($[\alpha]$ est la partie entière de α).

Proposition 1.4 *Soit $\alpha > 0$*

(a) $({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$

(b) $({}^cD_a^\alpha c) = 0, \qquad c \in \mathbb{R}.$

(c) ${}^cD_a^\alpha({}^cD_a^\beta f(t)) = ({}^cD^{\alpha+\beta} f)(t) = {}^c D^\beta({}_a^cD_a^\alpha f(t))$ *,où $f \in C^1[a,b]$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et*

$$0 < \alpha + \beta < 1$$

.

Preuves : On a

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha(I_a^\alpha f)(t) &= I_a^{n-\alpha} D_a^n I_a^\alpha f(t) \\ &= I_a^{n-\alpha} D_a^n I_a^n I_a^{\alpha-n} f(t) \\ &= I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha-n} f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha c &= I_a^{n-\alpha} D_a^n c \\ &= I_a^{n-\alpha} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha({}^cD_a^\beta f(t)) &= I_a^{1-\alpha} D_a^1 I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t) \\ &= I_a^{1-\alpha+\beta-\beta} D_a^1 I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t). \end{aligned}$$

On sait que $I_a^\beta(D_a^1 f(t)) = ({}^cD^{1-\beta})(t)$, alors

$$\begin{aligned} I_a^{1-\alpha-\beta} I_a^\beta D_a^1 D_a^1 I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t) &= I_a^{1-\alpha-\beta} D_a^{1-\beta} I_a^{1-\beta} D_a^1 f(t) \\ &= I_a^{1-\alpha-\beta} D_a^1 f(t), \end{aligned}$$

d'où ,

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha({}^cD_a^\beta f(t)) &= {}^cD_a^{\alpha+\beta} f(t) \\ &= {}^cD_a^\beta({}^cD_a^\alpha f(t)). \end{aligned}$$

1.5 Quelques propriétés de la dérivée de Caputo :

1.5.1 Linéarité

Lemme 1.1 *Soit $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N},\alpha,\lambda\in\mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que ${}^cD^\alpha f(t)$ et ${}^cD^\alpha g(t)$ existent , la dérivée au sens de Caputo est un opérateur linéaire.*
En effet :

$$ {}^cD^\alpha(\lambda f(t)+g(t) = \lambda^c D^\alpha f(t) +^c D^\alpha g(t). $$

Preuve : On a :

$$ {}^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha}D^n f(t) $$

$$ \begin{aligned} {}^cD^\alpha(\lambda f(t)+g(t)) &= I^{n-\alpha}D^n\Big[\lambda f(t)+g(t)\Big] \\ &= \lambda I^{n-\alpha}D^n\Big[(f+g)(t)\Big]. \end{aligned} $$

Comme la dérivée n-ème et l'intégrale sont linéaires alors ,

$$ \begin{aligned} {}^cD^\alpha(\lambda f(t)+g(t)) &= \lambda I^{n-\alpha}D^n f(t) + I^{n-\alpha}D^n g(t) \\ &= \lambda^c D^\alpha f(t) +^c D^\alpha g(t). \end{aligned} $$

1.5.2 Non-commutativité

Lemme 1.2 *Soient $n-1<\alpha<n$, $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $f(t)$ telle que ${}^cD^\alpha f$ existe , alors :*

$$ {}^cD^\alpha D^m f(t) =^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m({}^cD^\alpha f(t)). \tag{1.7} $$

Corollaire 1.1 *Supposons que $n-1<\alpha<n, \beta=\alpha-(n-1), (0<\beta<1), n\in\mathbb{N},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^cD^\alpha f(t)$ existe , alors*

:

$$ {}^cD^\alpha f(t) =^c D^\beta D^{n-1} f(t). $$

Preuve :
On remplace β par α et $n-1$ par m dans (1.7) , alors

$$ \begin{aligned} {}^cD^\beta D^{n-1} f(t) &= {}^cD^{\beta+n-1} f(t) \\ &= {}^cD^{\alpha-(n-1)+n-1} f(t) \\ &= {}^cD^\alpha f(t). \end{aligned} \tag{1.8} $$

Remarque 1.2 *De même l'opérateur de Riemann-Liouville est aussi non-commutative i.e :*

$$ {}^{RL}D^m D^\alpha f(t) =^{RL} D^{\alpha+m} f(t) \neq^{RL} D^\alpha D^m f(t). \tag{1.9} $$

Remarque 1.3 *Pour trouver la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre arbitraire* $\alpha, (n-1 < \alpha < n)$ *d'une fonction* $f(t)$ *, il suffit à trouver la dérivée de Caputo d'ordre* $\beta = \alpha - (n-1)$, *où* $\alpha - (n-1)$ *est un nombre réel compris entre 0 et 1 . Par conséquent l'étude de dérivée de Caputo d'ordre* $\beta \in (0,1)$ *est suffisante pour trouver la dérivée de Caputo d'ordre arbitraire .*

Remarque 1.4 *Les inégalités (1.7) et (1.9) deviennent des égalités dans les conditions additionnelles suivantes :*
$f^{(s)}(0) = 0, s = n, n+1...m,$ *pour* ${}^cD^\alpha$
et
$f^{(s)}(0) = 0, s = 0, 1, 2...m,$ *pour* D^α.
Il convient de noter que , dans le cas de la dérivée de Caputo , il n'y a pas de restriction sur les valeurs $f^{(s)}(0)$, $s = 0, 1, 2...n-1$, *par exemple , pour* $m = 3, n = 2$ *la fonction*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_4 t^4 + a_5 t^5 + ...$$

Satisfait la condition de Caputo mais ne satisfait pas la condition de Riemann-Liouville.

1.6 Transformée de Laplace d'un opérateur fractionnaire

Lemme 1.3 *Supposons que* $F(s)$ *est la transformée de Laplace de* $f(t)$ *alors :*

(a) *La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre* α *est donnée par :*

$$L\{I^\alpha f(t)\}(s) = s^{-\alpha} F(s).$$

(b) *La transformée de Laplace du l'opérateur différentiel de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha, n-1 < \alpha < n$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} L\{{}^{RL}D^\alpha f(t)\}(s) &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}^{RL}D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [{}^{RL}D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.7 Comparaison entre l'opérateur de Riemann-Liouville avec l'opérateur de Caputo

Une comparaison entre les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont donnée .

Lemme 1.4 *Soit* $f(t)$ *est une fonction tels que* ${}^{RL}D^\alpha f(t)$ *et* ${}^cD^\alpha f(t)$ *existent , avec* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ *, alors on a :*

$${}^{RL}D^\alpha f(t) \neq^c D^\alpha f(t).$$

1.7.1 Exemple

Exemple 1.1 *La dérivée de la fonction constante au sens de Caputo est :*

$$^{c}D^{\alpha}c = 0, c = const$$

$$^{c}D^{\alpha}c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1}c^{(n)}dx = 0.$$

Et au sens de Riemann-Liouville :

$$^{RL}D^{\alpha}c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \neq 0, \qquad c = const.$$

et

$$^{RL}D^{\alpha}c = 0, \qquad c = 0.$$

Proposition 1.5 *Soit $n-1 < \alpha < n$, alors :*

$$\lim_{\alpha\to n}(^{RL}D^{\alpha}f(t)) = \lim_{\alpha\to n}(^{c}D^{\alpha}f(t)) = f^{(n)}(t).$$

Remarque 1.5 ***(Commutativité)***
Soit la fonction $f(t)$ telle que $f^{(s)}(0) = 0, s = 0, 1, 2..., m,$ alors les deux dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo sont commutatives avec la dérivée d'ordre $m + --, m \in \mathbb{N}$.

$$^{RL}D^{m}D^{\alpha}f(t) =^{RL} D^{\alpha+m}f(t) =^{RL} D^{\alpha}D^{m}f(t)$$

et

$$^{c}D^{\alpha}D^{m}f(t) =^{c} D^{\alpha+m}f(t) = D^{m}(^{c}D^{\alpha}f(t)).$$

Proposition 1.6 *Soit $f(t)$ une fonction telle que $f^{(s)}(0) = 0, s = 0, 1, 2...n-1,$ alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo coincide , i.e :*

$$^{c}D^{\alpha}f(t) =^{RL} D^{\alpha}f(t).$$

1.8 Relation entre les dérivées de Caputo et Riemann-Liouville

Proposition 1.7 *Soient $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in C^n[a,b]$ alors*

$$^{c}D_a^{\alpha} = (^{RL}D_a^{\alpha})(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a)).$$

Preuve : On a

$$I_a^m D_a^m f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(t-a)^i}{i!}f^{(i)}(a).$$

On applique $^{RL}D_a^{\alpha}$, on obtient :

$$\begin{aligned} ^{RL}D_a^{\alpha}I_a^m D_a^m f(t) &= D_a^m I_a^{m-\alpha} I_a^m D_a^m f(t) \\ &= D_a^m I_a^m I_a^{m-\alpha} D_a^m f(t) \\ &= I^{m-\alpha} D_a^m f(t) \\ &= {^{c}D_a^{\alpha}} f(t). \end{aligned} \tag{1.11}$$

D'autre part , on a

$$^{RL}D_a^{\alpha}(I_a^m D_a^m f(t)) = D_a^{\alpha}(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)) =^c D_a^{\alpha} f(t).$$

1.9 L'intégrale au sens Hadamard :

Définition 1.6 *[4, 1] Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a \leq b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. L'intégrale au sens de Hadamard d'ordre α de f définie par :*

$$J_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \qquad a < x < b, \tag{1.12}$$

où : Γ est la fonction Gamma d'Euler .

Proposition 1.8 *[8] (La linéarité)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0$ on a :

$$J_a^{\alpha}(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 J_a^{\alpha} f(x) + \lambda_2 J_a^{\alpha} g(x).$$

Pour la preuve on utilisant la linéarité de l'intégrale classique.
Proposition 2 :*[8] (Propriété de semi groupe)*
Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue , $f \in L^P([a,b])$. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(x) &= J_a^{\alpha+\beta} f(x) \\ &= J_a^{\beta} J_a^{\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Preuve.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t}. \tag{1.13}$$

On remarque que :

$$a \leq t \leq x, a \leq s \leq t.$$

Donc , on prend $s \leq t \leq x$.
Puis , on fait le changement de variable :

$$y = \frac{\log(\frac{t}{s})}{\log(\frac{x}{s})}. \tag{1.14}$$

On obtient alors :

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \Big[\int_s^t (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} (\log \frac{t}{s})^{\beta-1} f(s) \frac{dt}{t} \Big] \frac{ds}{s}. \tag{1.15}$$

On remplace (1.14) dans (1.15),on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_s^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}(\log\frac{t}{s})^{\beta-1}f(s)\frac{dt}{t} &= \int_0^1 \Big[\log x - y\log\frac{x}{s} - \log s\Big]^{\alpha-1} \\
&\quad \Big[y\log\frac{x}{s} + \log s - \log s\Big]^{\beta-1}\log(\frac{x}{s})dy \\
&= \int_0^1 \Big((1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}\Big)\Big(\log\frac{x}{s}\Big)^{\alpha+\beta-1}dy \\
&= B\Big(\alpha,\beta\Big)\Big(\log\frac{x}{s}\Big)^{\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Big(\log\frac{x}{s}\Big)^{\alpha+\beta-1}
\end{aligned}$$

égalité (1.13) devient :

$$\begin{aligned}
J_a^\alpha J_a^\beta f(x) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \Big(\log(\frac{x}{s})\Big)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \Big(\log(\frac{x}{s})\Big)^{\alpha+\beta-1}\frac{f(s)}{s}ds \\
&= J_a^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$J_a^\beta J_a^\alpha f(x) = J_a^{\alpha+\beta}f(x).$$

D'où le résultat.

1.10 La dérivée au sens de Hadamard

Définition 1.7 *[1] Soient $f \in AC_\delta^n[a,b]$ et $\alpha > 0, \delta = x\frac{d}{dx}$.*
La dérivation fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= \delta^n J_a^{n-\alpha}f(x) \\
&= (x\frac{d}{dx})^n J^{n-\alpha}f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(x\frac{d}{dx}\Big)^n\int_a^x \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{n-\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Où $n-1<\alpha<n, n=[\alpha]+1$.

Proposition 1.9 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, on a :*

$$D^\alpha J^\alpha f(t) = f(t). \tag{1.17}$$

La propriété (1.17) signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Hadamard est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Hadamard du même ordre .

Proposition 1.10 *Pour $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$, on a*

$$J^\alpha D^\alpha f(t) \neq f(t). \tag{1.18}$$

1.11 Relation entre La dérivée de Caputo et de Hadamard

Soient $y \in AC^n_\delta[a,b], \alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, Alors :

$$^cD^\alpha_a y(x) = D^\alpha_a\Big[y(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\delta^i y(a)}{i!}\Big(\log\frac{x}{a}\Big)\Big].$$

Cas particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a :

$$^cD^\alpha_a y(x) = D^\alpha_a\Big[y(x) - y(a)\Big].$$

1.12 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 1.8 *(Espace de Banach)*
On dit qu'un espace vectoriel normé complet si toute suite de Cauchy converge dans cet espace.

Théorème 1.1 *(Théorème de contraction de Banach)*
Soit (B,d) un espace métrique complet , et soit $f : B \to B$ une application qui pour tout $y, z \in B$, vérifié :

$$d(f(y) - f(z)) \leq kd(y - z) \qquad ,0 < k < 1.$$

Alors , f admet un point fixe unique.

Théorème 1.2 *(Théorème du point fixe de Leray-Schauder)*
Soient B un espace de Banach et C un sous -ensemble convexe de B . On suppose que U est un sous-ensemble ouvert de C avec $u_0 \in U$ et $T : U \to C$ un opérateur continu et compact alors :
l'un des énoncés suivantes a lieu .
1. *T admet un point fixe .*
2. *Il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$ avec $u = \lambda T(u) + (1-\lambda)u_0$.*

Théorème 1.3 *(Théorème du point fixe du Covitz et Nadler)*
Soit (X,d) un espace métrique complet , si $N : X \to P_{cl}(X)$ est une contraction , alors N admet au moins un point fixe .

Théorème 1.4 *(Théorème du point fixe de Krasnoselski)*
Soit C un sous-ensemble non vide , convexe et compact d'un espace de Banach $(E, \|.\|)$ et $T : C \to C$ une application continue .
Alors , T possède un point fixe.

Théorème 1.5 *[2] (Théorème du point fixe de Schaefer)*
Soit $F : X \to X$ complètement opérateur continu , si l'ensemble

$$E(F) = \{x \in X : x = \lambda Fx, \lambda \in [0,1]\}$$

est borné,alors F admet au moins des points fixes.

1.13 Théorème d'Ascoli-Arzela

Théorème 1.6 *(Ascoli-Arzela)*
Soit X espace compact et $C(X)$ un espace de Banach des fonctions continues sur X à valeurs complexe , muni de la norme du sup . Alors , un sous ensemble H de $C(X)$ est relativement compact si et seulement si :

1. *H est équicontinue.*
2. *H est borné dans $C(X)$.*

1.14 Inégalité de Hölder

Lemme 1.5 *[3] Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable , $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$avec $1 \leq p < +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :*
$f.g \in L^1$ et $\int_\Omega \mid f.g \mid dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

CHAPITRE 2

PROBLÈME NON LOCAL VIA LA DÉRIVÉE DE CAPUTO-HADAMRD

Soit le problème fractionnaire de Caputo-Hadamard suivante :

$$ {}_{H}^{C}D^{\alpha_1}y(t)=\mathfrak{h}(t,y(t),\psi y(t)),\qquad t\in[1,T],0<\alpha_1\leq 1, \tag{2.1}$$

Avec les conditions aux limites multipoints non locales :

$$ y(1)=0,\quad {}_{H}^{c}D^{r}y(t)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i({}_{H}^{C}D^{r}y(\omega_i)),\quad 0<r<1, \tag{2.2}$$

où ${}_{H}^{c}D^{\alpha_1}$ et ${}_{H}^{C}D^{r}$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard d'ordre α_1 et r respectivement .
$\mathfrak{h}$: $[1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction donnée , $\rho_i\in\mathbb{R}, 1<\omega_i\leq T, i=1,...,n, n\geq 2$.
Où $\psi y(t)=\int_0^T \mathfrak{k}(t,s,x(s))ds$, et $\mathfrak{k}$: $\Delta\times[1,T]\to\mathbb{R}, \Delta=\{(t,s):1\leq s\leq t\leq T\}$.

Nous avons besoin des hypothèses suivantes pour prouver les résultats principaux [9].
(A1) : $\mathfrak{h}$ est une fonction continue et il existe une constante $\mathfrak{L}_1,\mathfrak{L}_2>0$ telle que :

$$\mid \mathfrak{h}(t,u,v)-\mathfrak{h}(t,\overline{u},\overline{v})\mid\leq\mathfrak{L}_1\mid u-\overline{u}\mid+\mathfrak{L}_2\mid v-\overline{v}\mid .$$

Pour tout $u,v,\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}$ et $t\in J$.
(A2) : Il existe une constante $\mathfrak{M}>0$ telle que :

$$\mid \mathfrak{k}(t,s,u)-\mathfrak{k}(t,s,v)\mid\leq\mathfrak{M}\mid u-v\mid .$$

(A3) : Il existe $p(t)\in L^1(J,\mathbb{R})$, et ψ : $[0,\infty[\to[o,\infty[$ est continue et croissante tel que :

$$\mid \mathfrak{h}(t,u,v)\mid\leq p(t)\psi(\|u\|+\|v\|).$$

(A4) : Il existe une constante $\mathfrak{L}_f>0$ telle que $\mid f(t,u,v)\mid\leq\mathfrak{L}_f$ pour chaque $t\in J$ et chaque $u,v\in\mathbb{R}$.

Théorème 2.1 *Supposons que les conditions (A1),(A2) et l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \frac{(\log \mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1) \mid \Omega \mid}(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M})\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid \rho_i \mid \frac{(\log \omega_i)^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r} \\ + & \frac{(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}\Big)+(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M})\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1}<1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution.
Preuve : Transformons le problème (2.1)-(2.2) au problème de point fixe .
On définit l'opérateur $\mathfrak{N}$.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{N}y)(t) \quad = \quad & \frac{(\log \mathfrak{t})}{\Gamma(\alpha_1)\Omega}(\sum_{i=1}^{n}\rho i\int_1^{\omega_i}\int_1^{\omega_i}(\log \frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s} \\ - & \int_1^{T}(\log \frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)\frac{ds}{s}) \\ + & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{T}(\log \frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Observons que $\mathfrak{N}$ est une contraction , en effet $x,y \in AC_1^v([1,T],\mathbb{R})$, et $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} & \mid (\mathfrak{N}x)(t)-(\mathfrak{N}y)(t) \mid \\ \leq \quad & \frac{(\log \mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1) \mid \Omega \mid}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid \rho_i \mid \int_1^{\omega_i}(\log \frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1} \\ & \mid \mathfrak{h}(s,x(s),\psi x(s))-\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)) \mid \frac{ds}{s}\Big) \\ + & \int_1^{T}(\log \frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1} \mid \mathfrak{h}(s,x(s),\psi x(s))-\mathfrak{h}(s,x(s),\psi x(s)) \mid \frac{ds}{s} \\ + & \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t}(\log \frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1-1} \mid \mathfrak{h}(s,x(s),\psi x(s))-\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)) \mid \frac{ds}{s} \\ \leq \quad & (\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M}) \mid x(s)-y(s) \mid \frac{(\log \mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1) \mid \Omega \mid}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid \rho_i \mid \int_1^{\omega_i}(\log \frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\frac{ds}{s} \\ + & \int_1^{T}(\log \frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\frac{ds}{s}\Big)+\frac{(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M} \mid x(s)-y(s) \mid}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t}(\log \frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1-1}\frac{ds}{s} \\ \leq \quad & \frac{(\log \mathfrak{T})(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M}) \mid x(s)-y(s) \mid}{\Gamma(\alpha_1) \mid \Omega \mid}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid \rho_i \mid \frac{(\log \omega_i)^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}+\frac{(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}\Big) \\ + & \frac{(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M}) \mid x(s)-y(s) \mid}{\Gamma(\alpha_1)}(\log T)^{\alpha_1} \\ \leq \quad & \Big[\frac{(\log \mathfrak{T})+(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M})}{\Gamma(\alpha_1) \mid \Omega \mid}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mid \rho_i \mid \frac{(\log \omega_i)^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}+\frac{(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}\Big) \\ + & \frac{(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M})}{\Gamma(\alpha_1)}(\log T)^{\alpha_1}\Big] \mid x-y \mid_\infty . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\mathfrak{N}(x)-\mathfrak{N}(y)\|_\infty \leq \Big[\frac{(\log\mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid}(\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M})(\sum_{i=1}^{n}\mid\rho_i\mid\frac{(\log\omega_i)^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r} + \frac{(\log\mathfrak{T})^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}) + (\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2\mathfrak{M})\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}(\log\mathfrak{T})^{\alpha_1}\Big]\|x-y\|_\infty.$$

Par la condition (2.3) , nous concluons que l'opérateur $\mathfrak{N}$ est la contraction , qui est le solution unique du problème (2.1)-(2.2).
Maintenant , nous prouvons le premier résultat d'existence en utilisant l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder .

Théorème 2.2 *Supposons que (A1) et (A3) tiennent , alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution.*

Preuve :
Etape 1 : Montrons que $\mathfrak{N}$ transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans $C_1^\delta(J,\mathbb{R})$pour un nombre positive μ^* , Soit

$$B_{r_1}=\{x\in C([1,T],\mathbb{R}):\|Z^*\|\leq r_1\},$$

où

$$\|Z^*\|=\sup_{t\in J}(\|x\|+\|\mathfrak{h}\|).$$

Puis

$$\begin{aligned}
\mid\mathfrak{N}(y)(t)\mid & \\
\leq\;& \frac{(\log\mathfrak{t})}{\Gamma(r)\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i\int_1^{\omega_i}\int_1^{\omega_i}(\log\frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}\\
-\;& \int_1^T(\log\frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}\Big)\\
+\;& \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^T(\log\frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}\\
\leq\;& \frac{(\log\mathfrak{t})}{\Gamma(r)\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i\int_1^{\omega_i}[\log\omega_i-\omega_i+1]\frac{\psi(\|Z^*\|)\|p\|}{s}ds\\
-\;& \int_1^T(\log\frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\frac{\psi(\|Z^*\|)\|p\|}{s}ds\Big)\\
+\;& \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^T(\log\frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha-1}\frac{\psi(\|Z^*\|)\|p\|}{s}ds.
\end{aligned}$$

C'est
$\mid\mathfrak{N}(y)(t)\mid$

$$\leq\Big[\frac{(\log t)}{\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid}\times\sum_{i=1}^{n}\mid\rho_i\mid\Big(\frac{(\log\omega_i)^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}+\frac{(\log\mathfrak{T})^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}\Big)$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}(\log\mathfrak{T})^{\alpha_1}\Big]\psi(r)\|p\|=\mu^*.$$

Etape 2 : Montrez que $\mathfrak{N}$ transforme les ensembles bornés en équicontinues dans $C(J,\mathbb{R})$, soit $\mu_1,\mu_2 \in [J,\mathbb{R}], \mu_1 < \mu_2$ puis.

$$\begin{aligned}
&\|\mathfrak{N}(\mu_1)-\mathfrak{N}(\mu_2)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{\mu_1}\Big[\Big(\log\frac{\mu_2}{s}\Big)^{\alpha_1-1}-\Big(\log\frac{\mu_1}{s}\Big)^{\alpha_1-1}\Big] \mid \mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)) \mid \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{\mu_2}^{\mu_1}\Big(\log\frac{\mu_2}{s}\Big)^{\alpha_1-1} \mid \mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)) \mid \frac{ds}{s} \\
&+ \frac{(\log\mu_2)^{\alpha_1-1}-(\log\mu_1)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid} \\
&\times \Big(\sum_{i=1}^{n}\mid\rho_i\mid\int_1^{\omega_i}\Big(\log\frac{\omega_i}{s}\Big)^{\alpha_1-r-1} \mid \mathfrak{h}(s,x(s),\psi x(s)) \mid \frac{ds}{s} \\
&+ \int_1^{T}(\log\frac{T}{s})^{\alpha_1-r-1} \mid \mathfrak{h}(s,x(s),\psi x(s)) \mid \frac{ds}{s}\Big) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\Big[\int_1^{\mu_1}\Big[\Big(\log\frac{\mu_2}{s}\Big)^{\alpha_1-1}-\Big(\log\frac{\mu_1}{s}\Big)^{\alpha_1-1}\Big]\frac{\psi(\|z^*\|)\|p\|}{s}ds \\
&+ \int_{\mu_2}^{\mu_1}\Big(\log\frac{\mu_2}{s}\Big)^{\alpha_1-1}\frac{\psi(\|z^*\|)\|p\|}{s}ds\Big] + \frac{(\log\mu_2)^{\alpha_1-1}-(\log\mu_1)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid} \\
&\times \Big(\sum_{i=1}^{n}\mid\rho_i\mid\int_1^{\omega_i}\Big(\log\frac{\omega_i}{s}\Big)^{\alpha_1-r-1}\frac{\psi(\|z^*\|)\|p\|}{s}ds \\
&+ \int_1^{T}(\log\frac{T}{s})^{\alpha_1-r-1}\frac{\psi(\|z^*\|)\|p\|}{s}ds\Big).
\end{aligned}$$

De toute évidence , le membre droit de l'inégalité ci -dessus tend à zéro indépendamment de $u,v \in B_{r_1}$ comme $\mu_2-\mu_1 \to 0$, et $\mathfrak{N}$ satisfait les hypothèses ci-dessus donc , par le théorème d'Arzela-Ascoli , il s'ensuit que $\mathfrak{N} : C([1,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([1,T],\mathbb{R})$ est complètement continue , soit x une solution , alors pour $t \in [J,\mathbb{R}]$ et suivantes les calcules similaires à ceux de la première étape , nous avons

$$\begin{aligned}
\mid x(t)\mid &= \lambda\mid\mathfrak{N}x(t)\mid \\
&\leq \lambda\Big[\frac{(\log t)}{\Gamma(r)\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i\int_1^{\omega_i}\int_1^{\omega_i}(\log\frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)\Big)\frac{ds}{s} \\
&- \int_1^{T}(\log\frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s,\psi y(s))\frac{ds}{s}) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{T}(\log\frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}\Big] \\
&\leq \frac{\Gamma(\alpha_1-r)\psi(\|x\|)(\log T)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mid\rho_i\mid I^{\alpha_1-r}\phi_f(\mu_i) \\
&+ I^{\alpha_1-r}\phi_f(T)+\psi(\|x\|)I^{\alpha_1}\phi_f(T)\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi ,

$$(\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid\|y\|)/(\Gamma(\alpha_1)\mid\Omega\mid\psi(\|x\|)I^{\alpha_1}\phi_f(T)+\Gamma(\alpha_1-r)\psi(\|x\|)(\log T)^{\alpha_1-1}$$
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\mid\rho_i\mid I^{\alpha_1-r}\phi_f(\mu_i)+I^{\alpha_1-r}\phi_f(T)\Big)\leq 1.$$

Il existe M^* tel que $\|x\|_\infty \neq M^*$.
On définit

$$U = \{x \in C([1,T],\mathbb{R}) : \|x\| < M\}.$$

On note l'opérateur $\mathfrak{N} : \overline{U} \longrightarrow C([1,T],\mathbb{R})$ est continu et complètement continu, a partir du choix de U , il n'y a pas de $x \in \partial U$ tel que

$$x = \lambda \mathfrak{N} x, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Par conséquent , par l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder , on déduit que $\mathfrak{N}$ admet un point fixe $x \in \overline{U}$ qui est la solution du problème (2.1)-(2.2).
En suite , le deuxième résultat d'existence est basé sur la théorème du point fixe de Krasnoselki

Théorème 2.3 *Supposons que la condition (A1) et (A4) soit vérifiée , puis le problème* $(2.1)-(2.2)$ *admet au moins une solution.*

Preuve : On choisit

$r \geq 2\Big[\frac{\mathfrak{L}_f(\log \mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^n |\rho_i|\frac{(\log \omega_i)^{\alpha_1 - r}}{\alpha_1 - r} + \frac{(\log \mathfrak{t})^{\alpha_1 - r}}{\alpha_1 - r}\Big) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1}\Big].$

On Considère

$$B_r = \{x \in \mathfrak{C}(J,\mathbb{R}) : |x| \leq r\}.$$

Soit $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{R}$ les deux opérateurs définis sur B_r par :

$$(\mathfrak{D}x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{\mathfrak{t}} (\log \frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1 - 1}\mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s))\frac{ds}{s}.$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{R}x)(t) \quad &= \quad \frac{(\log \mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)\Big[(\log \mathfrak{T}) - \sum_{i=1}^n |\rho_i|[\log \omega_i - \omega_i + 1]\Big]} \\ &\times \quad \Big(\sum_{i=1}^n |\rho_i| \int_1^{\omega_i} (\log \frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1 - r - 1}\mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s))\frac{ds}{s} \\ &\qquad - \int_1^{\mathfrak{T}} (\log \frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1 - r - 1}\mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s))\frac{ds}{s}\Big).\end{aligned}$$

Pour $x, y \in B_r$, on a

$$\mathfrak{D}x + \mathfrak{R}y \in B_r.$$

On considère :

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{D}x+\mathfrak{R}y\| &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{\mathfrak{t}}(\log\frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{(\log\mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)\Big[(\log\mathfrak{T})-\sum_{i=1}^n\mid\rho_i\mid[\log\omega_i-\omega_i+1]\Big]}\\
&\times \Big(\sum_{i=1}^n\mid\rho_i\mid\int_1^{\omega_i}(\log\frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\frac{ds}{s}\\
&- \int_1^{\mathfrak{T}}(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s)\frac{ds}{s}\Big)\mid\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t}(\log\frac{t}{s})^{\alpha_1-1}\|\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\|\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{(\log\mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)\Big[(\log\mathfrak{T})-\sum_{i=1}^n\mid\rho_i\mid[\omega_{i(\log\omega_i-1)+1}]\Big]}\\
&\times \Big(\sum_{i=1}^n\mid pi\mid\int_1^{\omega_i}(\log\frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\|\mathfrak{h}(s,y(s)\psi y(s))\|\frac{ds}{s}\\
&- \int_1^{\mathfrak{T}}(\log\frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\|\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\|\frac{ds}{s}\Big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{D}x+\mathfrak{R}y\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{\mathfrak{t}}(\log\frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1-1}\mathfrak{L}_f\frac{ds}{s}\\
&+ \frac{(\log\mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)\left[(\log\mathfrak{T})-\sum_{i=1}^n|\rho_i|[\log\omega_i-\omega_i+1]\right]}\\
&\times \left(\sum_{i=1}^n|\rho_i|\int_1^{\omega_i}(\log\frac{\omega_i}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{L}_f\frac{ds}{s}-\int_1^{T}(\log\frac{\mathfrak{T}}{s})^{\alpha_1-r-1}\mathfrak{L}_f\frac{ds}{s}\right)\\
&\leq \left[\frac{\mathfrak{L}_f(\log\mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1)|\Omega|}\Big(\sum_{i=1}^n|\rho_i|\frac{(\log\omega_i)^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}\right.\\
&+ \left.\frac{(\log\mathfrak{t})^{\alpha_1-r}}{\alpha_1-r}\Big)+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}(\log\mathfrak{T})^{\alpha_1}\right]\\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathfrak{D}x+\mathfrak{R}y\in B_r.$$

Par $A_4, \mathfrak{R}$ est une contraction , et par A_1 l'opérateur $(\mathfrak{D}x)(t)$ est continue , nous observons également que :

$$\begin{aligned}
\|(\mathfrak{D}x)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{\mathfrak{t}}(\log\frac{\mathfrak{t}}{s})^{\alpha_1-1}\|\mathfrak{h}(s,y(s),\psi y(s))\|\frac{ds}{s}\\
&\leq \frac{\mathfrak{L}_f}{\Gamma(\alpha_1+1)}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{D}$ est uniformément bornée sur B_r , nous pouvons dire maintenant que $(\mathfrak{D}x)(t)$ est équicontinue .
Soit $t_1, t_2 \in J, t_2 \leq t_1$ et $x \in B_r$, puisque $\mathfrak{h}$ est borné sur l'ensemble compact

$$\sup_{(t,x,y)\in J\times B_r} \|\mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s))\| := \mathfrak{C}_0 < \infty.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\|(\mathfrak{D}x)(t_2) - (\mathfrak{D}x)(t_1)\| \\
&\qquad = \quad \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^{\mathfrak{t}_1} (\log \frac{\mathfrak{t}_1}{s})^{\alpha_1 - 1} \mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s)) \frac{ds}{s} \\
&\qquad - \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^{\mathfrak{t}_1} (\log \frac{\mathfrak{t}_2}{s})^{\alpha_1 - 1} \mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s)) \frac{ds}{s} \Big\| \\
&\qquad \leq \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \Big\| \int_1^{\mathfrak{t}_1} \Big[(\log \frac{\mathfrak{t}_1}{s})^{\alpha_1 - 1} - (\log \frac{\mathfrak{t}_2}{s})^{\alpha_1 - 1} \Big] \mathfrak{h}(s, y(s), \psi y(s)) \frac{ds}{s} \\
&\qquad + \quad \int_{\mathfrak{t}_1}^{\mathfrak{t}_2} (\log \frac{\mathfrak{t}_2}{s})^{\alpha_1 - 1} \mathfrak{h}(s) \frac{ds}{s} \Big\| \\
&\qquad \leq \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\Gamma(\alpha_1)} \Big(\int_1^{\mathfrak{t}_1} \mid (\log \frac{\mathfrak{t}_1}{s})^{\alpha_1 - 1} - (\log \frac{\mathfrak{t}_2}{s})^{\alpha_1 - 1} \mid \frac{ds}{s} \\
&\qquad + \quad \int_{\mathfrak{t}_1}^{\mathfrak{t}_2} (\log \frac{\mathfrak{t}_2}{s})^{\alpha_1 - 1} \frac{ds}{s} \Big) \to 0 \qquad \longrightarrow t_2 \to t_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathfrak{D}(B_r)$ est relativement compact, par conséquent, d'aprés le théorème Arzela-d'Ascoli, $\mathfrak{D}$ est compact.
Ainsi, le problème considérer $(2.1) - (2.2)$ admet au moins un point fixe .

Exemple 2.1 *Considérons le problème suivante*

$$^cD^{\frac{1}{2}} y(t) = \frac{\cos^2 t}{(e^{-t+2})^2 |y(t)|} + \int_0^t \frac{(s + |y(s)|)}{(2+t)^2 (1 + |y(s)|)} ds, \tag{2.4}$$

$$y(1) = 0, D^{\frac{1}{2}} y(e) = 2D^{\frac{1}{2}} y(e) + D^{\frac{1}{2}} y(e), \tag{2.5}$$

$$f(t, u, v) = \frac{\cos^2 t}{(e^{-t+2})^2 |y(t)|},$$

$$k(t, s, y) = \int_0^t \frac{(s + |y(s)|)}{(2+t)^2 (1 + |y(s)|)} ds,$$

d'où $\alpha = \frac{1}{2}, \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2 = \frac{1}{9}, \mathfrak{L}_3 = \frac{1}{9}, r = \frac{1}{2}, T = e, n = 2, \rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \omega_1 = 2, \omega_2 = 1.$
D'où l'hypothèse (A2) est vraie . Nous vérifient l'état :

$$\frac{(\log \mathfrak{T})}{\Gamma(\alpha_1) |\Omega|} (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 \mathfrak{M}) \left(\sum_{i=1}^n |\rho_i| \frac{(\log \omega_i)^{\alpha_1 - r}}{\alpha_1 - r} + \frac{(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1 - r}}{\alpha_1 - r} \right)$$

$$+(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2\mathfrak{M})\frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + 1)}(\log \mathfrak{T})^{\alpha_1} < 1 \approx 0,12025.$$

Par conséquent , le problème (2.4)-(2.5) admet une solution unique .

CHAPITRE 3

PROBLÈMES AUX LIMITES IMPLIQUANT LA DÉRIVÉE DE CAPUTO DANS LES ESPACES DE BANACH

A notre connaissance , les problèmes au valeurs limites pour les équations différentielles fractionnaires impliquant la dérivée de Caputo dans les espaces de dimension infinie n'a pas été étudiée largement. Nous étendons les travaux antérieurs sur la valeur limite du problème de premier ordre , pour les équations différentielles fractionnaires en dimension finie des espaces aux espaces de dimension infinie du type

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}y(t) &= f(t, y(t)), 0 < \alpha < 1, t \in J = [0, T], \\ ay(0) + by(T) &= c, \end{cases} \tag{3.1}$$

Où ${}^cD^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α, $f : J \times X \to X$,où X est un espace de Banach et a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Lemme 3.1 *[5] Une fonction mesurable $f : J \to X$ est Bochner intégrable si f est intégrable de Lebesgue.*

Lemme 3.2 *[5](Lemme de Mazur)*
Si K un sous-ensemble compact de X alors la fermeture $\overline{conv}k$ est compacte.

Lemme 3.3 *Soit $S = \{s(t)\}$ une famille de fonction d'applications continues $s : [a, b] \to X$. Si S est uniformément borné et équicontinue , et pour tout $t^* \in [a, b]$, l'ensemble $\{s(t^*)\}$est relativement compact , alors il existe un uni-suite de fonctions convergent $\{s_n(t)\}(n = 1, 2, ..., t \in [a, b])$ dans S.*

Lemme 3.4 *Soit $y \in C(J, X)$ vérifiant l'inégalité suivante :*

$\|y(t)\| \leq a + b\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|y(s)\|^{\lambda}ds + c\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|y(s)\|^{\lambda}ds,$
où $\alpha \in (0, 1), \lambda \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ pour certains $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}, a, b, c \geq 0$ sont constantes. alors il existe une constante $M^* > 0$ telle que

$$\|y(t)\| \leq M^*.$$

Avant d'énoncer et de prouver les résultats principaux, nous introduisons les hypothèses suivantes :

(H1) La fonction $f : J \times X \to X$ est fortement mesurable par rapport a t sur J

(H2) Il existe une constante $\alpha_1 \in (0, \alpha)$ et une fonction réelle $m(t) \in L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J, R)$tel que :
$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq m(t)\|u_1 - u_2\|$ pour chaque $t \in J$, et tout $u_1, u_2 \in X.$

(H3) Il existe une constante $\alpha_2 \in (0, \alpha)$ et une fonction a valeur réelle $h(t) \in L^{\frac{1}{\alpha_2}}(J, R)$ tel que :

$\|f(t, y)\| \leq h(t),$ pour chaque $t \in J$, et tout $y \in X.$

Par souci de concision , soit $M = \|m\|_{L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J,R)}, H = \|h\|_{L^{\frac{1}{\alpha_2}}(J,R)}.$

Notre premier résultat est basé sur le principe de contraction de Banach .

Théorème 3.1 *Supposons que (H1)-(H3) tiennent, si*

$$\Omega_{\alpha,T} = \frac{MT^{\alpha-\alpha_1}}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}}\Big(1 + \frac{| b |}{| a + b |}\Big) < 1. \tag{3.2}$$

Alors le problème (3.1) admet une unique solution .
Preuve : Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\| ds &\leq \Big(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}} ds\Big)^{1-\alpha_2} \Big(\int_0^t (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}} ds\Big)^{\alpha_2} \\ &\leq \frac{T^{\alpha-\alpha_2} H}{(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}}. \end{aligned}$$

Ainsi , $\|(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\|$ est Lebesgue intégrable par rapport a $s \in [0, t]$ pour tout $t \in J$ et $y \in C(J, X)$. Alors $(t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s))$ est Bochner intégrable par rapport a $s \in [0, t]$ pour tout $t \in J$ a cause de lemme 3.1.
Par conséquent , le problème fractionnaire (3.1) est équivalent a l'intégrale fractionnaire suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &- \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) - c\Big], t \in J. \end{aligned}$$

Soient

$$r \geq \frac{T^{\alpha-\alpha_2} H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}} + \frac{| b |}{| a + b |} \times \frac{T^{\alpha-\alpha_2} H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}} + \frac{| c |}{| a + b |}.$$

Nous définie maintenant l'opérateur F sur $B_r = \{y \in C(J, X) : \|y\| \leq r\}$ comme suite :

$$\begin{aligned} (Fy)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\ &- \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c\Big], t \in J. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Par conséquent , l'existence d'une solution du problème fractionnaire (3.1)est équivalent a celle l'opérateur F admet un point fixe sur B_r , nous utilisons le principe de contraction de Banach pour prouver que F a un point fixe , la preuve est divisée en deux étapes.

Etape1 : $Fy \in B_r$ pour chaque $y \in B_r$

pour tout $y \in B_r$ et tout $\delta > 0$, par (H3) et l'inégalité de Hölder , on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|(Fy)(t+\delta)-(Fy)(t)\| \\
&\leq \Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [(t+\delta-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}]f(s,y(s))ds\Big\| \\
&+ \Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\Big\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [(t-s)^{\alpha-1}-(t+\delta-s)^{\alpha-1}]\|f(s,y(s))\|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{\alpha-1}\|f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t [(t-s)^{\alpha-1}-(t-\delta-s)^{\alpha-1}]h(s)ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^t [(t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}}-(t+\delta-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}}]ds\Big)^{1-\alpha_2}\Big(\int_0^t (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}}ds\Big)^{\alpha_2} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}}ds\Big)^{1-\alpha_2}\Big(\int_t^{t+\delta}(h(s))\frac{1}{\alpha_2}ds\Big)^{\alpha_2} \\
&\leq \frac{H}{\Gamma(\alpha)}\Big(\frac{t^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}}{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}+\frac{\delta^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}}{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}-\frac{(t+\delta)^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}}{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\Big)^{1-\alpha_2}+\frac{H}{\Gamma(\alpha)}\Big(\frac{\delta^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}}{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\Big)^{1-\alpha_2} \\
&\leq \frac{H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}}\Big[\Big(t^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}-(t+\delta)^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}+\delta^{\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\Big)^{1-\alpha_2}+\delta^{\alpha-\alpha_2}\Big] \\
&\leq \frac{2H\delta^{\alpha-\alpha_2}}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}}.
\end{aligned}
$$

Lorsque $\delta \longrightarrow 0$, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro , par conséquent , F est continue sur J , c'est-a-dire : $Fy \in C(J,X)$.

De plus , pour $y \in B_r$ et tout $t \in J$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|(Fy)(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,y(s))\|ds \\
&+ \frac{\mid b\mid}{\mid a+b\mid \Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|f(s,y(s))\|ds + \frac{\mid c\mid}{\mid a+b\mid} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&+ \frac{\mid b\mid}{\mid a+b\mid \Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \frac{\mid c\mid}{\mid a+b\mid} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}}ds\Big)^{1-\alpha_2}\Big(\int_0^t (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}}ds\Big)^{\alpha_2} \\
&+ \frac{\mid b\mid}{\mid a+b\mid \Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^T (T-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}}ds\Big)^{1-\alpha_2}\Big(\int_0^T (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}}ds\Big)^{\alpha_2} \\
&+ \frac{\mid c\mid}{\mid a+b\mid} \\
&\leq \frac{T^{\alpha-\alpha_2}H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}} + \frac{\mid b\mid}{\mid a+b\mid} \times \frac{T^{\alpha-\alpha_2}H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}} + \frac{\mid c\mid}{\mid a+b\mid} \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\|Fy\|_\infty \leq r$, ainsi , on peut conclure que pour tout $y \in B_r, Fy \in B_r$ i.e , $F : B_r \longrightarrow B_r$

Etape2 : F est une application de contraction sur B_r.

Pour $x, y \in B_r$ et tout $t \in J$, en utilisant (H2) et l'inégalité de Hölder , on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|(Fx)(t) - (Fy)(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
&+ \frac{| b |}{| a+b | \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} m(s) \|x(s) - y(s)\| ds \\
&+ \frac{| b |}{| a+b | \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} m(s) \|x(s) - y(s)\| ds \\
&\leq \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} m(s) ds \\
&+ \frac{| b | \, \|x-y\|_\infty}{| a+b | \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} m(s) ds \\
&\leq \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_1}} ds \Big)^{1-\alpha_1} \Big(\int_0^t (m(s))^{\frac{1}{\alpha_1}} ds \Big)^{\alpha_1} \\
&+ \frac{| b | \, \|x-y\|_\infty}{| a+b | \Gamma(\alpha)} \Big(\int_0^T (T-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_1}} ds \Big)^{1-\alpha_1} \Big(\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\alpha_1}} ds \Big)^{\alpha_1} \\
&\leq \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{T^{\alpha-\alpha_1}}{(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}} \|m\|_{L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J, R^+)} \\
&+ \frac{| b | \, \|x-y\|_\infty}{| a+b | \Gamma(\alpha)} \frac{T^{\alpha-\alpha_1}}{(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}} \|m\|_{L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J, R^+)} \\
&\leq \Big[\frac{M T^{\alpha-\alpha_1}}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}} \Big(1 + \frac{| b |}{| a+b |} \Big) \Big] \|x-y\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Alors on obtient :

$$\|Fx - Fy\|_\infty \leq \Omega_{\alpha,T} \|x-y\|_\infty .$$

Ainsi , F est une contraction a cause de la condition (3.2).
Par la contraction de Banach , on peut déduire que F admet un unique point fixe unique qui est juste la solution unique de problème (3.1).
Notre deuxième résultats est basé sur le théorème du point fixe bien connue de Schaefer.
Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H4) La fonction $f : J \times X \longrightarrow X$ est continue.

(H5) Il existe des constantes $\lambda \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ pour quelques $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ et $N > 0$ tel que :

$$\|f(t, u)\| \leq N(1 + \|u\|^\lambda).$$

Pour chaque $t \in J$, et tout $u \in X$.

(H6) Pour tout $t \in J$, l'ensemble $K = \{(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) : y \in C(J, X), s \in [0, t]\}$ est relativement compact.

Théorème 3.2 *Supposons que (H4)-(H6) tiennent , alors le problème (3.1) admet au moins une solution sur J.*

Preuve :Transformons le problème (3.1) admet un problème a point fixe , prendre en compte opérateur $F : C(J,X) \longrightarrow C(J,X)$ définie comme (3.3) , il est évident que F est bien définie en raison de (H4).
Pour des raisons de commodité , nous subdivisions la preuve en plusieurs étapes .

Etape1 : F est continue , soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $C(J,X)$, alors pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
&\|(Fy_n)(t) - (Fy)(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| ds \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| ds \\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \Big[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \Big] \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Si f est continue , on a

$$\begin{aligned}
&\|Fy_n - Fy\|_\infty \\
&\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \to 0, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Etape2 : F transforme les ensembles bornées en ensembles bornées en $C(J,X)$
En effet , il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe un $\ell > 0$ tel que
pour chaque $y \in B_{\eta^*} = \{y \in C(J,X) : \|y\| \leq \eta^*\}$, on a $\|Fy\|_\infty \leq \ell$, pour chaque $t \in J$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|(Fy)(t)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s,y(s))\| ds \\
&+ \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|f(s,y(s))\| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (1 + \|y(s)\|^\lambda) ds \\
&+ \frac{|b|\,N}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (1 + \|y(s)\|^\lambda) ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|\,N}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&+ \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y(s)\|^\lambda ds + \frac{|b|\,N}{|a+b|\,(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y(s)\|^\lambda ds \\
&\leq \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|\,NT^\alpha}{|a+b|\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{NT^\alpha(\eta^*)^\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|\,NT^\alpha(\eta^*)^\lambda}{|a+b|\,(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$\|Fy\|_\infty \leq \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{NT^\alpha(\eta^*)^\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}\Big(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\Big) = \ell.$

Etape3 : F transforme les ensembles bornées en ensembles équicontinues de $C(J,X)$.

Soit $0 \leq t_1 < t_2 \leq T, y \in B_{\eta^*}$. En utilisant (H5) , nous avons :

$$\begin{aligned}
&\|(Fy)(t_2) - (Fy)(t_1)\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}] \|f(s,y(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} \|f(s,y(s))\| ds \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}](1+\|y(s)\|^{\lambda}) ds \\
&+ \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}(1+\|y(s)\|^{\lambda}) ds \\
&\leq \frac{N(1+(\eta^*)^{\lambda})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}] ds \\
&+ \frac{N(1+(\eta^*)^{\lambda})}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{N(1+(\eta^*)^{\lambda})}{\Gamma(\alpha+1)} (\mid t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha} \mid + 2(t_2-t_1)^{\alpha}) \\
&\leq \frac{3N(1+(\eta^*)^{\lambda})(t_2-t_1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Comme $t_2 \longrightarrow t_1$, la membre droit de l'inégalité ci -dessus tends vers zéro , donc F est équicontinue . Maintenant , soit $\{y_n\}, n = 1,2,...$ une suite sur β_{η^*}, et

$$(Fy_n)(t) = (F_1y_n)(t) + (F_2y_n)(T), t \in J.$$

Où

$(F_1y_n)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y_n(s)) ds, t \in J,$

$(F_2y_n)(T) = -\frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y_n(s)) ds - c\Big].$

Au vu de la condition (H6) et du lemme 3.2 , nous avons que $\overline{conv}K$ est compact pour tout $t^* \in J$.

$$\begin{aligned}
(F_1y_n)(t^*) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t^*} (t^*-s)^{\alpha-1} f(s,y_n(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^*}{k} \Big(t^* - \frac{it^*}{k}\Big)^{\alpha-1} f\Big(\frac{it^*}{k}, y_n\Big(\frac{it^*}{k}\Big)\Big) \\
&= \frac{t^*}{\Gamma(\alpha)} \widetilde{\xi}_n.
\end{aligned}$$

Où

$$\widetilde{\xi}_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \Big(t^* - \frac{it^*}{k}\Big)^{\alpha-1} f\Big(\frac{it^*}{k}, y_n\Big(\frac{it^*}{k}\Big)\Big).$$

Puisque $\overline{conv}K$ est convexe et compact , nous savons que $\widetilde{\xi}_n \in \overline{conv}K$, donc pour tout $t^* \in J$, l'ensemble

$\{(F_1y_n)(t^*)\}$ est relativement compact . D'après le lemme 3.3, chaque $\{(F_1y_n)(t)\}$contient une sous -suite uniformément convergente
$\{(F_1y_{nk})(T)\}, k = 1, 2, ...$sur J , ainsi l'ensemble$\{F_1y : y \in B_{\eta^*}\}$ est relativement compact.de même, on peut obtenir $\{(F_2y_n)(T)\}$ contient une sous-séquence uniformément convergente $\{(F_2y_{nk})(T)\}, k = 1, 2, ..$ainsi, l'ensemble $\{F_2y : y \in B_{\eta^*}\}$ est relativement compact .
En conséquence des étapes 1 à 3 , nous pouvons conclure que f est continue et complètement continue.

Etape 4 : Limites bornée
il reste maintenant a montrer que l'ensemble
$E(F) = \{y \in C(J, X) : y = \lambda Fy, pour \lambda \in (0, 1)\}$
est délimité.
Soit $y \in E(F)$, alors $y = \lambda Fy$, pour certains $\lambda \in (0, 1)$, ainsi pour chaque $t \in J$, on a

$$y(t) = \lambda\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - \frac{1}{a+b}\Big[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - c\Big]\Big).$$

Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mid b \mid NT^\alpha}{\mid a+b \mid \Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} \\ &+ \frac{N}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|y(s)\|^\lambda ds \\ &+ \frac{\mid b \mid N}{\mid a+b \mid \Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|y(s)\|^\lambda ds. \end{aligned}$$

D'aprés le lemme 3.4, il existe un $M^* > 0$ tel que

$$\|y(t)\| \leq M^*, t \in J.$$

Ainsi pour tout $t \in J$, on a

$$\|y\|_\infty \leq M^*.$$

Cela montrer que l'ensemble $E(F)$ est bornée , en conséquent le théorème du point fixe de Schaefer , on déduit que F admet un point fixe qui est une solution de problème (3.1)
Dans le théorème suivante , nous appliquons l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder dans lequel la condition (H5) est affaiblie.
(H5') Il existe un $\lambda \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ pour quelque $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ et une fonction $N(t) \in L^{\frac{1}{\alpha_3}}(J, R), \alpha_3 \in (0, \alpha)$ tel que

$$\|f(t, u)\| \leq N(t)(1 + \|u\|^\lambda).$$

Pour chaque $t \in J$, et tout $u \in X$.

Théorème 3.3 *Supposons que (H4)-(H5')-(H6) maintenons ,alors le problème fractionnaire (3.1) a au moins une solution sur J.*

Preuve : Considérons l'opérateur F définis dans le théorème 3.2, on peut facilement montre que F est continue et complètement continue, on répète le même processus à l'étape 4 de théorème 3.2, utilisant (H5') et encore une fois l'inégalité de Hölder , on a pour chaque $t \in J$, il existe un $M^* > 0$ tel que $\|y\|_\infty \leq M^*$.
Soit

$$U = \{y \in C(J, X) : \|y\|_\infty < M^* + 1\}.$$

L'opérateur $F : \overline{U} \longrightarrow C(J,X)$ est continue et complètement continue , du choix de U , il n 'ya pas de $y \in \partial U$ tel que $y = \lambda F(y), \lambda \in (0,1)$, en conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray -Schauder on en déduit que que F a une point $y \in \overline{U}$, ce qui implique que le problème fractionnaire (3.1) admet au moins une solution $y \in C(J,X)$.

3.1 Exemples :

Dans cette section , nous donnons deux exemples pour illistre l'utilité de nous principaux résultats .

Exemple 3.1 *Considérons le problème suivant des valeurs au limites fractionnaires ,*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) & = \frac{e^{-vt}|y(t)|}{(1+e^t)(1+|y(t)|)}, \alpha \in (0,1), \qquad t \in J_1 = [0,1], \\ y(0)+y(1) & = 0 \qquad , \end{cases} \tag{3.4}$$

où $v > 0$ est constante .
L'ensemble

$$f(t,y) = \frac{e^{-vt}y}{(1+e^t)(1+y)}, (t,y) \in J_1 \times [0,\infty[.$$

Soit $y_1, y_2 \in [0,\infty[$ et $t \in J_1$, en suite nous avons

$$\begin{aligned} \mid f(t,y_1) - f(t,y_2) \mid &= \frac{e^{-vt}}{(1+e^t)} \mid \frac{y_1}{1+y_1} - \frac{y_2}{1+y_2} \mid \\ &= \frac{e^{-vt} \mid y_1 - y_2 \mid}{(1+e^t)(1+y_1)(1+y_2)} \\ &\leq \frac{e^{-vt}}{1+e^t} \mid y_1 - y_2 \mid \\ &\leq \frac{e^{-vt}}{2} \mid y_1 - y_2 \mid . \end{aligned}$$

Pour tout $y \in [0,\infty[$ et chaque $t \in J_1$,

$$\begin{aligned} \mid f(t,y) \mid &= \frac{e^{-vt}}{1+e^t} \mid \frac{y}{1+y} \mid \\ &\leq \frac{e^{-vt}}{1+e^t} \\ &\leq \frac{e^{-vt}}{2}. \end{aligned}$$

Pour $t \in J_1, \beta \in (0,\alpha)$, on a $m(t) = h(t) = \frac{e^{-vt}}{2} \in L^{\frac{1}{\beta}}(J_1,R), M = \|\frac{e^{-vt}}{2}\|_{L^{\frac{1}{\beta}}(J_1,R)}$. En choisissant un $v > 0$ reste grand et convenable $\beta \in (0,\alpha)$, on peut arriver au suite à l'inégalité

$$\Omega_{\alpha,1} = \frac{M1^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta})^{1-\beta}} \times \frac{3}{2} < 1.$$

Ainsi , toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaits nos résultats peuvent être appliqués à le problème (3.4).

Exemple 3.2 *Considérons un autre problème de valeur limité*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) & = \frac{t^\vartheta |y(t)|^\lambda}{(1+e^t)(1+|y(t)|)}, \alpha \in (0,1), \vartheta > -\alpha, t \in J_1, \\ y(0)+y(1) & = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

L'ensemble

$$f_1(t,x) = \frac{t^\vartheta x^\lambda}{(1+e^t)(1+x)}, (t,x) \in J_1 \times [1,2].$$

Evidemment , pour tout $y \in [1,2]$ et chaque $t \in J_1$

$$\begin{aligned} \mid f_1(t,y) \mid &= \frac{t^\vartheta}{(1+e^t)} \mid \frac{y^\lambda}{1+y} \mid \\ &\leq \frac{1}{(1+e^t)} \times \frac{\mid y \mid^\lambda}{2} \\ &\leq \frac{1}{4} \mid y \mid^\lambda . \end{aligned}$$

Puisque $\vartheta > -\alpha$, il n'est pas difficile de voir

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{s^\vartheta \mid y(s) \mid^\lambda}{(1+e^s)(1+\mid y(s) \mid)} ds &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\vartheta ds \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\vartheta+1)}{\Gamma(\alpha+\vartheta+1)} t^{\alpha+\vartheta} \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\vartheta+1)}{\Gamma(\alpha+\vartheta+1)}. \end{aligned}$$

En conséquent , l'ensemble

$$K_1 = \left\{ (t-s)^{\alpha-1} \frac{s^\vartheta \mid y(s) \mid^\lambda}{(1+e^s)(1+\mid y(s) \mid)} : y \in C(J_1,[1,2]), s \in [0,t] \right\}$$

est borné et fermé ce qui implique que K_1 est compact , ainsi toutes les hypothèses de théorème 3.2 sont satisfaits , nos résultats peuvent être appliqués au problème (3.5).

CHAPITRE 4

PROBLÈMES NON LINÉAIRES ET INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour les inclusions différentielles d'ordre fractionnaire, nous considérons le problème de la valeur limite.

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F(t,y), t \in J = [0,T], 1 < \alpha \leq 2, \tag{4.1}$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T, \tag{4.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$est la dérivée fractionnaire de Caputo , $F : J \times R \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$est un multiapplication transforme ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$), y_0, y_T sont des constantes réelles.
Cette problème de inclusions différentielles d'ordre fractionnaire avec conditions non locales [7].

$$^{C}D^{\alpha}y(t) \in F(t,y), t \in J = [0,T], 1 < \alpha \leq 2, \tag{4.3}$$

$$y(0) = g(y), y(T) = y_T. \tag{4.4}$$

Où F, y_T sont comme dans le problème (4.1)-(4.2), et $g : C(J,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme 4.1 *Soit (X,d) un espace métrique complet , si $N : X \to P_{cl}(X)$ est une contraction, alors l'ensemble de point fixe $N \neq \emptyset$.*

Dans cette section nous intéressons a l'existence des solutions pour le problème (4.1)-(4.2) lorsque le membre droite a des valeurs convexes et non convexes , au départ nous supposons que F est une carte a valeurs compacte et convexe.

Définition 4.1 *Une fonction $y \in AC^1(J,\mathbb{R})$ est dite être une solution de (4.1)-(4.2) s'il existe une fonction $v \in L^1(J,\mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t,y(t))$, pour $t \in J$ tel que*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = v(t), t \in J, 1 < \alpha < 2$$

et la fonction y satisfait la condition (4.2) pour l'existence de solution pour le problème (4.1)-(4.2) nous avons besoin des lemmes auxiliaires bas :

Lemme 4.2 *Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$$^cD^\alpha h(t) = 0$$

à des solutions $h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n, n = [\alpha] + 1.$

Lemme 4.3 *Soit* $\alpha > 0$ *, alors*

$$I^{\alpha c}D^\alpha h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^{n-1} + h(t).$$

Pour certains $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n, n = [\alpha] + 1.$

Comme conséquence des lemmes 4.2 et 4.3 nous avons le résultat suivante qui est utile dans ce qui suite :

Lemme 4.4 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$ *et soit* $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue , une fonction* y *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire.*

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &- \quad \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si et seulement si y est une solution du problème fractionnaire.

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in J \tag{4.6}$$

$$y(0) = y_0, y(T) = y_T \tag{4.7}$$

Preuve :
Supposons que y satisfait (4.5), alors le lemme 4.3 implique que :

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

D'après (4.7), un simple calcule donne

$$c_1 = \frac{-1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{T} y_0 + \frac{1}{T} y_T.$$

Par conséquence nous obtenons l'équation (4.3) inversement , il est clair que si y satisfait l'équation (4.3) , alors les équations (4.6)-(4.7) sont vérifiées.

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses suivantes soient valables :*

(H1) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,c}(\mathbb{R})$ est une application a valeurs multiples de Carathéodory.

(H2) Il existe $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ continue et non-plissant tel que $\|F(t, u)\|_{\mathcal{P}} \leq p(t)\psi(| u |)$ pour $t \in J$ et chaque $u \in \mathbb{R}$, (H3) Il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, avec $I^\alpha l < \infty$, tel que pour tout

$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq l(t) \mid u - \overline{u} \mid, u, \overline{u} \in \mathbb{R}$,
et
$d(0, F(t,0)) \leq l(t)$, avec $t \in J$.

(H4) Il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$\frac{M}{\psi(M)\|I^\alpha p\|_\infty + \psi(M)(I^\alpha p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid} > 1. \tag{4.8}$$

Alors le problème (4.1)-(4.2) admet au moins une solution .
Preuve : Transforme le problème (4.1)-(4.2) en un problème à point fixe , considérer l'opérateur à plusieurs valeurs .

$$\begin{aligned} N(y) &= \Big\{h \in C(J,\mathbb{R}) : y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T, v \in S_{F,y}\Big\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Remarque 4.1 *Il est clairement à partir du lemme 4.4 , les points fixe de N sont du solution à (4.1)-(4.2). Nous montrons que N satisfait les hypothèses de l'alternative non linéaire de type Leray- Schauder ,le preuve sera donnée en plusieurs étapes.*

Etape 01 : $N(y)$ est convexe pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R})$.
En effet, si h_1, h_2 appartiennent $N(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ tel que pour chaque $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_i(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_i(s)ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2$, soit $0 \leq d \leq 1$, alors, pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} (dh_1 + (1-d)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}[dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]ds \\ &- \Big(\frac{t}{T} - 1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Puisque $S_{F,y}$ est convexe (par ce que F a des valeurs convexes), on a

$$dh_1 + (1-d)h_2 \in N(y).$$

Etape 02 : N transforme bornée en ensemble bornée en $C(J,\mathbb{R})$.

Soit $B_{\eta^*} = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$ être bornée en $C(J,\mathbb{R})$. et $y \in B_{\eta^*}$.alors pour chaque $h \in N(y)$. il existe $v \in S_{F,y}$ tel que

$$\begin{array}{rcl} h(t) & = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ & - & \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{array}$$

Par (H2) on a, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{array}{rcl} \mid h(t) \mid & = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\ & + & \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\ & \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\mid y(s) \mid)ds \\ & + & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\mid y(s) \mid)ds + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\ & \leq & \psi(\eta^*)I^\alpha(p)(t) + \psi(\eta^*)I^\alpha(p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid . \end{array}$$

Ainsi

$$\|h\|_\infty \leq \psi(\eta^*)\|I^\alpha(p)\|_\infty + \psi(\eta^*)I^\alpha(p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid = \ell.$$

Etape 03 : N transforme les ensembles bornée en ensembles équicontinues de $C(J,\mathbb{R})$.

Soit $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, B_{\eta^*}$ un ensemble bornée de $C(J,\mathbb{R})$ comme à l'étape 2 , soit $y \in B_{\eta^*}$, et $h \in N(y)$ puis

$$\begin{array}{rcl} \mid h(t_2) - h(t_1) \mid & = & \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]v(s)ds \\ & + & \frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}v(s)ds \mid \\ & + & \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_0 \mid + \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_T \mid \\ & \leq & \frac{\|p\|_\infty\psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]ds \\ & + & \frac{(t_2-t_1)\|p\|_\infty\psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}ds \\ & + & \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_0 \mid + \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_T \mid \\ & \leq & \frac{\|p\|_\infty\psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] \\ & + & \frac{(t_2-t_1)\|p\|_\infty\psi(\eta^*)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha \\ & + & \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_0 \mid + \frac{(t_2-t_1)}{T} \mid y_T \mid . \end{array}$$

Lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$ le membre droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro comme une conséquence des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzela-Ascoli , nous pouvons concluent que $N : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ est complètement continue .

Etape 04 : N admet un graphe fermé .

Soit $y_n \longrightarrow y_*, h_n \in N(y_n)$ et $h_n \longrightarrow h_*$, nos devons montre que $h_* \in N(y_*)$.
$h_n \in N(y_n)$ signifie qu'il existe $v_n \in S_{F,y_n}$ tel que ,pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Il faut montre qu'il existe $v_* \in S_{F,y_*}$ tel que , pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_*(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Puisque $F(t,.)$ est semi-continue supérieure , alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que , pour tout $n \geq n_0$ on a

$$v_n(t) \in F(t,y_n(t)) \subset F(t,y_*(t)) + \varepsilon B(0,1), t \in J.$$

Puisque $F(.,.)$ a des valeurs compactes , alors il existe un sous-séquence $v_{n_m}(.)$ telle cette

$$v_{n_m}(.) \longrightarrow v_*(.), \qquad m \longrightarrow \infty$$

et

$$v_*(t) \in F(t,y_*(t)), \qquad t \in J.$$

Pour tout $w \in F(t,y_*(t))$,on a

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq \mid v_{n_m}(t) - w \mid + \mid w - v_*(t) \mid .$$

Puis

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq d(v_{n_m}(t), F(t,y_*(t)).$$

Par une relation analogue , obtenue en interchangeant les rôles de v_{n_m} et v_*, il suite que

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq H_d(F(t,y_n(t)), F(t,y_*(t))) \leq l(t) \mid y_n - y_* \mid_\infty .$$

Puis

$$\begin{aligned} \mid h_n(t) - h_*(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s)ds \|y_{n_m} - y_*\|_\infty \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s)ds \|y_{n_m} - y_*\|_\infty \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|h_{n_m}-h_*\|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}l(s)ds\|y_{n_m}-y_*\|_\infty \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}l(s)ds\|y_{n_m}-y_*\|_\infty \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Comme $m \longrightarrow \infty$.

Etape 05 : Limites a priori sur les solutions .

Soit y tel que $y \in \lambda N(y)$ avec $\lambda \in [0,1]$.alors il existe $v \in S_{F,y}$ tel que , pour chaque $t \in J$.

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\alpha(s)ds \\ &- \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \lambda\Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{\lambda t}{T}y_T.\end{aligned}$$

Cela implique par (H2) que pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}\mid y(t)\mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mid v(s)\mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mid v(s)\mid + \mid y_0\mid + \mid y_T\mid \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\mid y(s)\mid)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\mid y(s)\mid)ds + \mid y_0\mid + \mid y_T\mid \\ &\leq \frac{\psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)ds \\ &+ \frac{\psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)ds + \mid y_0\mid + \mid y_T\mid \\ &\leq \psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(t) + \psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(T) + \mid y_0\mid + \mid y_T\mid .\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\|y\|_\infty}{\psi(\|y\|_\infty)\|I^\alpha p\| + \psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(T) + \mid y_0\mid + \mid y_T\mid} < 1.$$

Alors par condition (4.8) , il existe $M > 0$ tel que $\|y\|_\infty \neq M$.
Soit $U = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : \|y\| < M\}$, l'opérateur $N : \overline{U} \longrightarrow \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$est supérieure semi-continue et complètement continue , du choix de U , l'à n'est pas $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda N(y)$ pour certains $\lambda \in (0,1)$.en conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder , on en déduit que N admet un point fixe y dans $\overline{U}$ qu'est un solution du problème (4.1)-(4.2) ceci complète le preuve.
Nous présentons maintenant un résultat pour le problème (4.1)-(4.2) avec un valeur non convexe du côté de la main droite , nos considérations sont basées sur le théorème du point fixe pour application à plusieurs valeurs de contractions donnée par Covitz et Nadler .

Théorème 4.2 *Supposons (H3) et l'hypothèse suivante est vraie :*

(H5) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{R})$ a la propriété que $F(.,u) : J \longrightarrow P(\mathbb{R})$ est mesuré pour chaque $u \in \mathbb{R}$, si

$$(I^{\alpha}l)(T) < \frac{1}{2}. \tag{4.10}$$

Alors le problème (4.1)-(4.2) a au moins une solution sur J.

Remarque 4.2 *Pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R})$ l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide puisque par (H5), F a une sélection mesurable .*

Preuve : Nous montrons que N satisfait les hypothèses du lemme 4.1 la preuve sera donnée en deux étapes .

Etape 1 : $N(y) \in P(C(J,\mathbb{R}))$ pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R})$.
En effet , soit $(y_n)_{n\geq 0} \in S_{F,y}$ tel que $y_n \longrightarrow \widetilde{y}$ dans $C(J,\mathbb{R})$, en suite $\widetilde{y} \in C(J,\mathbb{R})$ alors il existe $v_n \in S_{F,y}$tel que pour chaque $t \in [0,T]$;

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que F a des valeurs compactes et de (H3) , on peut passer à un sous - séquence nécissaire pour obtenir que v_n converge faiblement vers v dans $L^1_w(J,\mathbb{R})$ (l'espace doté de la topologie faible), une application du théorème de Mazur implique que v_n converge fortement vers$v$ et $v \in S_{F,y}$ alors , pour chaque $t \in J$.

$$\begin{aligned} y_n(t) \longrightarrow \widetilde{y}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Donc $\widetilde{y} \in N(y)$.

Etape 2 : Il existe $\gamma < 1$ tel que

$$H_d(N(y), N(\overline{y})) \leq \gamma\|y-\overline{y}\|_\infty.$$

Pour chaque $y, \overline{y} \in C(J,\mathbb{R})$, soit $y, \overline{y} \in C(J,\mathbb{R})$ et $h_1 \in N(y)$, alors il existe $v_1(t) \in F(t,y(t))$ tel que pour chaque $t \in J$.

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_1(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_1(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

De (H3) il s'ensuit que

$$H_d(F(t,y(t)), F(t,\overline{y}(t))) \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid .$$

Il existe donc $w \in F(t,\overline{y}(t))$ tel que

$$\mid v_1(t) - w \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid, \qquad t \in J.$$

Considérons $U : J \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} :| v_1(t) - w |\leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid\}.$$

Puisque l'opérateur à valeurs multiples $V(t) = U(t) \bigcap F(t, \overline{y}(t))$est mesurable , il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V , donc $v_2(t) \in F(t, \overline{y}(t))$, et pour chaque $t \in J$.

$$\mid v_1(t) - v_2(t) \mid\leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid .$$

On définit pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

Alors pour $t \in J$

$$\begin{aligned} \mid h_1(t) - h_2(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_1(s) - v_2(s) \mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_1(s) - v_2(s) \mid ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) \mid y(s) - \overline{y}(s) \mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) \mid y(s) - \overline{y}(s) \mid ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq 2(I^\alpha l)(T)\|y - \overline{y}\|_\infty.$$

Par une relation analogique obtenue en interchangeant les rôles de y et $\overline{y}$, il existe que

$$H_d(N(y), N(\overline{y})) \leq 2(I^\alpha l)(T)\|y - \overline{y}\|_\infty.$$

Donc, N est un contraction par (3.5) et donc , par le lemme 4.1 , N a un point fixe y qui est la solution de (4.1)-(4.2), la preuve est complète .

4.1 Problème de valeur limite non locale :

On commence par définir ce que nous entondons par une solution de problème (4.3)-(4.4).

Définition 4.2 *Soit $y \in AC^2(J, \mathbb{R})$ est dite être une solution de (4.3)-(4.4) , s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, y(t))$,pour presque tout $t \in J$, c'est à dire*

$$^cD^\alpha y(t) = v(t), \qquad t \in J, 1 < \alpha \leq 2,$$

et la fonction y satisfait la condition (4.4).

Lemme 4.5 *Soit $1 < \alpha \leq 2$, et soit $h : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue , une fonction y est une solution de l'équation intégrale.*

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)g(y) + \frac{t}{T}y(T), \end{aligned} \tag{4.11}$$

si et seulement si y est une solution du problème fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \qquad t \in J, \tag{4.12}$$

$$y(0) = g(y), \qquad y(T) = y_T, \tag{4.13}$$

Théorème 4.3 *Supposons (H1)-(H3) et les conditions suivante sont vérifiée :*

(H6) Il existe une constante $M_1 > 0$ avec

$$\mid g(y) \mid \leq M_1, y \in C(J, \mathbb{R}).$$

(H7) Il existe un nombre $M_2 > 0$ tel que

$$\frac{M_2}{\psi(M_2)\|I^\alpha p\|_\infty + \psi(M_2)(I^\alpha p)(T) + M_1 + \mid y_T \mid} > 1. \tag{4.14}$$

Alors le problème (4.3)-(4.4) admet au moins une solution .

Preuve : Transformons le problème (4.3)-(4.4) en un problème de point fixe , considérons l'opérateur à plusieurs valeurs.

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \Big\{h \in C(J,\mathbb{R}) : y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)g(y) + \frac{t}{T}y_T, v \in S_{F,y}\Big\}. \end{aligned}$$

Remarque 4.3 *Il est claire que à partir du lemme 4.5 , les points fixe de N sont des solutions à (4.3)-(4.4) comme dans le théorème 4.1, nous pouvons montre que N_1 est complètement continue et "supèrieure" semi continue .*

Soit y tel que $y \in \lambda N_1(y)$ avec $\lambda \in [0,1]$. alors il existe $v \in S_{F,y}$ tel que , pour chaque $t \in J$.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &- \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_*(s)ds - \lambda\Big(\frac{t}{T}-1\Big)g(y) + \frac{\lambda t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Cela implique par (H2)-(H6) que pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \mid y(t) \mid \quad & \leq \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\ & + \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid + M_1 + \mid y_T \mid \\ & \leq \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds \\ & + \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds + M_1 + \mid y_T \mid \\ & \leq \quad \frac{\psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds \\ & + \quad \frac{\psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s) ds + M_1 + \mid y_T \mid \\ & \leq \quad \psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(t) + \psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(T) + M_1 + \mid y_T \mid . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\|y\|_\infty}{\psi(\|y\|_\infty)\|I^\alpha p\|_\infty + \psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(T) + M_1 + \mid y_T \mid} < 1.$$

Alors par condition (4.14), il existeM_2 tel que $\|y\|_\infty \neq M_2$.
Soit $U_1 = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \|y\|_\infty < M_2\}$.l'opérateur $N_1 : \overline{U}_1 \longrightarrow \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}))$ est supérieure semi -continue et complètement continue , du choix de U_1 , il n'est y pas $y \in \partial U_1$ tel que $y \in \lambda N_1(y)$ pour certains $\lambda \in (0, 1)$, en conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder, on en déduit que N_1 a un point fixe y dans $\overline{U_1}$ qui 'est un solution (4.3)-(4.4) , ceci complète le preuve .

Théorème 4.4 *Supposons (H3)-(H6) et les hypothèses suivante est vraie :*

(H8) Il existe $k > 0$ avec tel que

$$\mid g(u) - g(\overline{u}) \mid \leq k \mid u - \overline{u} \mid,$$

pour chaque $t \in J$ et tout $u, \overline{u} \in C(J, \mathbb{R})$.
Si $2(I^\alpha l)(T) + k < 1$ alors le problème (4.3)-(4.4) admet au moins une solution .

Remarque 4.4 *Pour chaque $y \in C(J, \mathbb{R})$, l'ensemble $S_{F,y}$ est non vide, puisque par (H6) , F a une sélection mesurable .*
Preuve : *On utilisant des étapes similaire à celles des théorème 4.2 nous pouvons montre que N_1 satisfait les hypothèses d'un lemme 4.1 .*

CONCLUSION

Dans ce travail ,nous avons étudier la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et ce propriété ,et on impliquant dans les problèmes des valeurs limites dans les espaces de dimension finie et infinie et du valeurs convexes et non convexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A.Kilbas,I.O Marichev,G.SSamko :*Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications ,Gorden and Beeach*,Langhorne,(1993).

[2] D.R.Smart. :*Fixed Point Theorems*,Vol.66.Cambridge.University Press ,Cambridge(1980).

[3] Haïn Brezis,*Analyse Fonctionnelle,*Théorie et application,Pris New York Barcelone Mexico Sao Paulo 1987.

[4] J.Hadamard,*Essai sur l'etude des fonctions donnes par leur developement de Taylor,Math.Pures Appl*,PIER 8,pp 101-186,(1892).

[5] J.P ,Aubin,Ekeland,I : Applied Nonlinear Analysis .Wiley-Interscience,New York(1984)

[6] M,Benchohra,Hamani,S,Ntouyas,S,K :*Boundary value problems for différentielle equations with fractional order*.Surv.Math.Appl.3,1-12(2008).

[7] M.Benchora ,S.Hamani ,*Nonlinear Boundary Value Problem For Differential Inclusions With Caputo Fractional Derivative* Journal of the Julisusz Schauder Center .Volume 32,2008,115-130

[8] M.Bengrine and Z.Dahmani :*Boundry Value Problems For Fractional Différential Equations J.OpenProblemsCompt Math* ,(2012).

[9] P.Karthikeyan,K.venkatachlam,*Nonlocal Multipoint Boundary Value Problems For Caputo-Hadamard Fractional Integro-Differential Equations*,Canad.J.Appl.Math.2(2020),no.1,23-35

[10] R,P,Agarwal,Benchohra,M.Hamani ,S :*A survey on eqistence results for boundary value problems of non-linear fractional différential equations and inclusions* Acta Appl.Math.109,973-1033 (2010).