REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Equation différentiel

Par :

SAIDI Souad
DAIFALLAH Nacira

Sur le thème

Le problème de Cauchy avec la dérivée conformable

Soutenu publiquement le 29/ 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr ZITOUNI Ismail	Grade	Université Tiaret	Président
Mr ZIANE Mohamed	Grade	Université Tiaret	Encadreur
Mr ZENTAR Oulid	Grade	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Après avoir remercié le très et le tous miséricordieux **Allah** le tout puissant, qui nous a donné la santé, les moyens et les volontés dans la quête du savoir

On tient à exprimer notre remerciements avec un grand plaisir et un grand respect à notre encadreur **Mr ZIANE Mohamed** qui a fait preuve d'une grande patience tout au long de notre recherche en nous prodiguant ses conseils, ses remarques , sa disponibilité et son encouragement nous a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions

On tient à remercier tous les membres du jury qui ont bien voulu consacrer une partie de leur temps précieux à examiner ce travail

Tous les enseignants qui ont contribués à notre formation durant ces années d'études

On voudrait adresser nos remerciements à tous mes amies et collègues

Dédicace

À nos pères ;

À nos mères ;

À nos sœurs et nos frères ;

À toute nos familles ;

À tous nos amies ;

À tous nos professeurs qui nous ont appris.

Nous leur dédions ce travail.

Table des matières

Introduction

Inventé en [] le calcul fractionnaire conformable est devenu une branche de mathématiques interessante grâce à son immense applications dans différents domaines tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autre sciences qui ont été développés ces dernières années [], en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheur en mathématiques elle même.

L'étude des problèmes différentielles d'ordre conformable est un sujet d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un rôle crucial [].

Les théorèmes du point fixe sont des outils montrant l'existence des solutions dans divers types d'équations. Cette théorie est au coeur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les conditions nécessaires (mais pas suffisantes en général !) pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires.

Chapitre 1

Preliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1.1 Définitions et notations

* $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble de tous les nombres positifs réels.
* $\mathbb{R}^n$ représente un n espace dimensionnel.
* $M_{n\times n}$ désigne l'espace de toutes les $n \times n$ matrices.
* $C(J =: [0,b], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $[0,b]$ dans $\mathbb{R}$.
* $C^m(J =: [0,b]\mathbb{R}) = \{x \in C(J =: [0,b]\mathbb{R}); x^{(m)} \in C(J =: [0,b]\mathbb{R})\}$ où $x^{(m)}$ désigne la m ième continuellement différentiable fonction x.

Soit $J := [0,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}.C(J,\mathbb{R})$ est l'aspace de banach des fonction x continues de I dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in J}|x|.$$

Définition 1.1.1 *Le sous ensemble B de l'espace normé X est dit borné s'il existe M tel que*

$$\|x\| \le M \quad \textit{pour tout } x \in B.$$

Définition 1.1.2 *L'ensemble S de l'espace normé X est dit convexe si pour tout $x, y \in S$*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Définition 1.1.3 *Soit* $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ *une application. On dit que* f *est bornée si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F *i.e.*f*(bornée) est bornée.*

Remarque 1.1.1 *Soit* $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ *une application bornée, i.e,pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que*

$$\forall x \in E : \|x\|_E \leq \epsilon \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \delta.$$

Définition 1.1.4 *Soient* $a \in E$ *et* $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$. *On dit que* T *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *pour* $x \in E$, *on a*

$$\|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(a)\|_F < \epsilon.$$

Alors l'opérateur T *est dit continu sur* E, *ou simplement continu si il est continu en tout point de* E.

Remarque 1.1.2 *Une application* $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ *est continue au point* x, *si et seulement si pour tout suite* $(x_n)_n$ *converge vers* x *dans* E, *alors*$(T(x_n))_n$ *converge vers* $T(x)$ *dans* F.

Définition 1.1.5 *Un sous ensemble* B *de l'espace normé* X *est dit compact si pour toute suite d'éléments de* B *on peut extraire une sous suite convergente vers un élément de* B.

Remarque 1.1.3 *Un ensemble compact est un ensemble fermé borné; (la réciproque n'est pas toujours vraie).*

Définition 1.1.6 *Un ensemble* S *est relativement compact si* $\overline{S}$ *est compact.*

Définition 1.1.7 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T : E \to F$ *est une fonction continue. On dit que* T *est compacte si* $\overline{T(E)}$ *est compact.*

Définition 1.1.8 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T : E \to F$ *est une fonction continue. On dit que* T *est complètement continue si* $\overline{T(B)}$ *est compact pour tout sous ensemble borné* $B \subset E$.

Définition 1.1.9 *Un ensemble* S *de* $C([0, b], \mathbb{R})$ *est dit équicontinu, si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$, *tel que, pour tout* $t_1, t_2 \in [0, b], |t_2 - t_1| \leq \delta$ *on a :*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \epsilon, \quad \forall f \in S.$$

Définition 1.1.10 *S est dit uniformément borné dans $C([0,b],\mathbb{R})$ s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\|y\|_\infty \leq M$ pour tout $y \in S$.*

Lemme 1.1.1 *Une application continue sur un ensemble compact est uniformément borné.*

Théorème 1.1.1 *([3])(Ascoli-Arzela) Soit $B \subset C([0,b],\mathbb{R}), S$ est relativement compact dans $C([0,b],\mathbb{R})$ si et seulement si :*

(a) B est uniformément borné .

(b) B est équicontinue.

1.2 Calcul conformable

Définition 1.2.1 *([4, 5]) La dérivé fractionnaire conformable à partire de 0 d'un fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ d'ordre α est défini par*

$$T_\alpha^0 f(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(t+\epsilon(t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon}.$$

Si $T_\alpha^0 f(t)$ existe sur $[0,b]$, alors $T_\alpha^0 f(0) = \lim_{t\to 0} T_\alpha^0 f(t)$.

Définition 1.2.2 *([4, 5]) L'intégrale fractionnelle à partire de 0 d'un fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ d'ordre α est défini par*

$$I_\alpha^0 f(t) = \int_0^t (s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Lemme 1.2.1 *([4, 5]) Si $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continu, alors pour tout $t > 0$,*

$$T_\alpha^0 I_\alpha^0 f(t) = f(t).$$

Lemme 1.2.2 *([7]) Si $T_\alpha^0 f(t)$ est continu sur [0,b], alors $I_\alpha^0 T_\alpha^0 f(t) = f(t) - f(0)$.*

Lemme 1.2.3 *([4, 5]) Si f est differenciable à t dans $[0,b]$, alors il est aussi α-differentiable à t et $T_\alpha^0 f(t) = t^{1-\alpha \frac{df(t)}{dt}}$.*

Lemme 1.2.4 *([4]) Si f est α-differentiable à t dans $[0,b]$, alors il est continue à t.*

Lemme 1.2.5 *(Règle de Chaîn [5]) Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont des fonctions α-differentielle, où $\alpha \in [0,1]$. Soit $h(t) = f(g(t))$. Alors $h(t)$ est α-differentiele et pour tous les $t \neq 0$ et $g(t) \neq 0$ nous avons*

$$(T_\alpha^0 h)(t) = (T_\alpha^0 f)(g(t)).(T_\alpha^0 g)(t).(g(t))^{\alpha-1}.$$

Pour $t = 0$,

$$T_\alpha^0 h(0) = \lim_{t\to 0}(T_\alpha^0 f)(g(t)).(T_\alpha^0 g)(t).(g(t))^{\alpha-1}.$$

Lemme 1.2.6 *([4]) Si f et g sont α-differentiable à t dans $[0,b]$, alors fg est aussi α-differentiable à t et*

$$T_\alpha^0(fg)(t) = f(t)T_\alpha^0 f(t) + g(t)T_\alpha^0 f(t).$$

Par un argument similaire à celui utilisé dans[4], une version générale de la valeur moyenne de l'orem pour la dérivée fractionnaire conforme est produite comme suit[6]. Il joue un rôle crucial dans l'étude de l'extention des solution.

Lemme 1.2.7 *Si $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ est continu sur le sous interval $[c,d]$ de $[a,b]$ et si $T_\alpha^0 f(t)$ existe sur $[c,d]$, alors il existe un point ξ dans $[c,d]$ tel que*

$$f(d) - f(c) = \frac{1}{\alpha}T_\alpha^0 f(\xi)[d^\alpha - c^\alpha].$$

Lemme 1.2.8 *Si $T_\alpha^0 f(t) \leq 0$ sur $[0,b]$, alors f est diminue sur $[0,b]$.*

Nous présentons ensuite une inégalité étendue de Gronwall, qui généralise le résultat en [13], et il joue un rôle clé dans la discussion de le prolongement et de la stabilité des solution.

Lemme 1.2.9 *Soient f et g deux fonctions continues,non négatives sur $[0,b]$ et λ une constante non négative telle que*

$$f(t) \leq \lambda + I_\alpha^0(fg)(t), \quad t \in [0,b],$$

alors

$$f(t) \leq \lambda \exp(I_\alpha^0(g)(t)), \quad t \in [0,b].$$

Preuve : Soit $F(t) = \lambda + I_\alpha^0(fg)(t)$ et $G(t) = \exp(-I_\alpha^0(g)(t))$. Alors l'hypothèse de l'inégalité de f et g est équivalente à l'inégalité

$$f(t) \leq F(t), \quad t \in [0,b], \tag{1.1}$$

et les hypothèses de continuités de f et g garentissent que F , G et GF sont α-différentiables ; et donc de Lemme1.2.1, l'inégalité(1.1) et les hypothèses de non négativité, il s'ensuite que

$$T_{\alpha}^{0}F(t) - F(t)g(t) = f(t)g(t) - F(t)g(t) \leq f(t)g(t) - f(t)g(t) = 0.$$

En multipliant chaque coté de l'inégalité ci-dessus par $G(t)$, et en utilisant Lemme1.2.5 et 1.2.6, nous avons

$$T_{\alpha}^{0}(FG)(t) \leq 0.$$

Ceci, avec Lemme1.2.8, implique que $F(t)G(t)$ diminue sur $[0,b]$. Par conséquent

$$F(t)G(t) \leq F(0)G(0),$$

où, de façon équivalent,

$$F(t) \leq \lambda \exp(I_{\alpha}^{0}g(t)).$$

Encore une fois, en utilisant l'inégalité (1.1), de l'inégalité ci-dessus nous obtenons la conclution désirés. ■

Lemme 1.2.10 *([8]) Dénoté par U un ouvert dans un ensemble fermé et convexe C d'un espace de Banach B. Supposons $0 \in U$. Supposons également que $A(\bar{U})$ est borné et que $A : \bar{U} \to C$ est donné par $A = A_1 + A_2$, dans laquelle $A_1 : \bar{U} \to B$ est complètement continue et $A_2 : \bar{U} \to B$ est un contraction non linéaire (i.e il existe une fonction positive non décriossante $\phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ satisfaisant $\phi(z) < z$ pour $z > 0$, tel que $\|A_2(x) - A_2(y)\| \leq \phi(\|x-y\|)$ pour tout $x, y \in \bar{U}$). Puis soit*

(C1) A a un point fixe $u \in \bar{U}$;
ou alors

(C2) il existe un point $u \in \partial U$ et $\lambda \in [0,1]$ avec $u = \lambda A(u)$,

où $\bar{U}$ et ∂U représentent respectivement la fermiture et la frontiére de U.

Lemme 1.2.11 *(voir [5])*
Soit $\alpha \in]0,1]$, si f est dérivable, alors la relation suivante la dérivée fractionnaire conformable et la dérivée classique du premier ordre tient :

$$T_{0}^{\alpha}f(t) = t^{1-\alpha}f'(t).$$

Définition 1.2.3 *(voir [5] Fonction exponentielle fractionnaire conformable) Pour tout $t \geq 0$, la fonction exponentielle fractionnaire conformable est définie par :*

$$E_{\alpha}(\lambda,t) = \exp\left(\lambda \cdot \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}(t)^{\alpha k}}{\alpha^{k}k!}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2.1 *Comme le rôle irremplaçable de la fonction du Mittag-Leffler dans la solution du équation différentielle classiques d'ordre fractionnaire conformable la fonction joue un effet analogue dans la solution du équation différentielle fractionnaire conformable .*

Lemme 1.2.12 *Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et $t \geq s \geq 0$,*

$$E_\alpha(-\beta, t)E_\alpha(\beta, s) \leq 1.$$

Définition 1.2.4 *(voir [5] Transformée de Laplace fractionnaire conformable) Soit $\alpha \in]0, 1]$, $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle.Alors la transformée de Laplace fractionnaire conformable a partir de 0 de la fonction f d'ordre α est définie par*

$$L_\alpha\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} E_\alpha(-s, t)f(t)d_\alpha(t, 0) = \int_0^{+\infty} E_\alpha(-s, t)f(t)(t)^{\alpha-1}dt.$$

Lemme 1.2.13 *(voir [5])*
Pour une constante δ,

$$L_\alpha(s) = \frac{\delta}{s}, \quad s > 0.$$

Lemme 1.2.14 *(voir [5])*
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que

$$L_\alpha\{f(t)\}(s) = F_\alpha(s)$$

existe. puis

$$L_\alpha\{T_0^\alpha f(t)\}(s) = sF_\alpha(s) - f(0),$$

et la relation entre la transformée de Laplace habituelle et la transformation de Laplace fractionnaire conformable peut être représentée par

$$L_\alpha\{f(t)\}(s) = F_\alpha(s) = l\{f((\alpha t)^{1/\alpha})\}(s).$$

où

$$l\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t)dt.$$

Remarque 1.2.2 *Il convient de mentionner que, contrairement à la transformée de Laplace habituelle, l'expression de la transformation de Laplace fractionnaire conformable démontre qu'elle est étroitement liée à l'ordre fractionnaire α.*
En d'autre mots, pour une fonction f telle que $L_\alpha\{f(t)\}(s)$ et $L_\beta\{f(t)\}(s)$ existe pour $0 < \alpha, \beta \leq 1$, alors

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow L_\alpha\{f(t)\}(s) \neq L_\beta\{f(t)\}(s).$$

Remarque 1.2.3 *Sans perte de généralité, on peut noter L_α^{-1} comme l'inverse de la transformation de Laplace fractionnaire conformable.*
Par exemple

(i) Puis que

$$L_\alpha\{E_\alpha(\lambda,t)\} = l\{\exp(\lambda t)\} = \frac{1}{s-\lambda}, \quad s > \lambda,$$

on a

$$L_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{s-\lambda}\right\} = E_\alpha(\lambda,t).$$

(ii) En raison de

$$L_\alpha\{1 - E_\alpha(-\lambda,t)\} = l\{1-\exp(-\lambda t)\} = \frac{\lambda}{s(s+\lambda)}, \quad s > 0,$$

alors

$$L_\alpha^{-1}\left\{\frac{\lambda}{s(s+\lambda)}\right\} = 1 - E_\alpha(-\lambda,t).$$

(iii) Puisque

$$L_\alpha\{\cos\omega\frac{t^\alpha}{\alpha}\} = l\{\cos\omega t\} = \frac{s}{\omega^2+s^2}, \quad s > 0,$$

alors

$$L_\alpha^{-1}\left\{\frac{s}{\omega^2+s^2}\right\} = \cos\omega\frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Définition 1.2.5 *(voir [11] Convolution conformable de deux fonctions)*
Soit $f, g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ être deux fonction à valeurs réelles telles que f est la fonction de t^α pour $0 < \alpha \leq 1$, alors la convolution conformable de ces deux fonctions est définie par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t^\alpha - \theta^\alpha)g(\theta)\theta^{\alpha-1}d\theta.$$

Lemme 1.2.15 *(voir [11] Théorème de convolution conformable)*
Sous le conformable ci-dessus définition de convolution,si $L_\alpha\{f\}(s)$ et $L\alpha\{g\}(s)$ existe, alors

$$L_\alpha\{f * g\} = L_\alpha\{f\} \cdot L_\alpha\{g\}.$$

Remarque 1.2.4 *Compte tenu de la définition du convolution conformable, il s'ensuit que*

$$I_0^\alpha f(t) = \int_0^t f(s)(s)^{\alpha-1}ds = 1 * f(t),$$

et donc

$$L_\alpha^{-1}\{I_0^\alpha f(t)\} = L_\alpha^{-1}\{1 * f(t)\} = \frac{L_\alpha\{f\}}{s}, \quad s > 0.$$

Définition 1.2.6 *(voir [9] Fonction bornée exponentielle conformable)* *Pour une fonction f définie sur $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$, s'il existe des constantes réelles positives M, c, et $0 < \alpha \leq 1$ telles que*

$$|f(t)| \leq M E_\alpha(c, t),$$

est valable pour tout t suffisamment grand, alors on appelle f confformable exponentielle bornée.

Remarque 1.2.5 *Considérant l'équation* (3.1)-(3.2) *et en se référant à [10], pour une fonction continue f définie sur $[t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$, si f est conforme exponentielle bornée, alors $x(t)$ et $T^\alpha_{t_0} x(t)$ sont à la fois conforme exponentielle bornée,et donc $L_\alpha\{x(t)\}(s)$ et $L_\alpha\{T^\alpha_{t_0} x(t)\}(s)$ existent tous.*

Lemme 1.2.16 *(voir [5])*
Supposons que $f \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, alors

$$T^\alpha_0 T^\alpha_0 f(x) = \begin{cases} (1-\alpha)(x)^{1-2\alpha} f'(x) + (x)^{2-2\alpha} f''(x), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1.3 Théorèmes du points fixes

Théorème 1.3.1 *([14, 13])(Théorème du point fixe de Banach) Soit (X,d)un espace métrique complet. Une application $T : X \to X$ est contraction avec la constante de Lipschitz K. Alors T a un point fixe unique $x \in X$.*

Théorème 1.3.2 *([14, 13])(Théorème du point fixe de Schauder) Soit S un ensemble convexe,fermé,non vide d'un espace de Banach E et $A : S \to S$ un opérateur complètement continue . Alors A admet au moins un point fixe(i.e il existe un point x_0 dans S tel que $f(x_0 = x_0)$.*

Théorème 1.3.3 *([14, 13]) (Altérnative non linéaire de Leray-Schader) Soit Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach E et $f : \Omega \to E$ une application continue et compacte. Alors l'un du deux est satisfait*

(i) f admet un point fixe dans Ω.

(ii) Il existe $x \in \partial\Omega$, il existe $t \in [0, 1] : x = tf(x)$.

Chapitre 2

Le problème de Cauchy associé à une dérivation conformable

Dans ce chapitre, on s'interesse au problème suivant :

$$T_\alpha^0 x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, \infty[, \ 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

avec les conditions :

$$x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

où

$$x(0) = x_0 - g(x). \tag{2.3}$$

L'étude des équations différentielles avec condition non locale (rencontré en physique) ont été introduites par Byszewski [1, 2].

Dans ce chapitre on utilise d'une façon particulière le principe de contraction de Banach ainsi que le théorème de Krasnosel'skii.

2.1 Le cas local

Dans cette section, nous établissons l'existence, l'unicié, la régularité (en temps) et la stabilité (par rapport à la donnée initiale) de la solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2). Introduisons les hypothèses suivantes :

(H1) La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue, où $D = [0, \infty[\times \mathbb{R}$.

(H2) Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \text{pour tout } (t, u), (t, v) \text{ dans } D.$$

(H3) Il existe une fonction h positive telle que

$$\|f(t, u)\| \leq h(t)\|u\|, \quad \text{pour tout } (t, u) \text{ dans } D,$$

pour la quelle $I_\alpha^0 h(t)$ est borné sur $[0, \infty[$.

(H4) Il existe une fonction ℓ et une constante positive L telle que :

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq \ell(t)|u-v| \leq L|u-v|,$$

pour tout $(t,u),(t,v)$ dans D de sorte que $I_\alpha^0 \ell(t)$ soit borné sur $[0,\infty[$.

2.1.1 Existance et unicité

On établit dans cette sous section un résultat d'existence et d'unicité de solution du problème (2.1)-(2.2) par une méthode qui consiste à chercher un point fixe (unique!) d'une équation intégrale correspondante à notre problème.

Nous aurons besion du lemme suivant.

Lemme 2.1.1 *On suppose que* (H1) *est satisfaite, alors une fonction* $x \in C([0,b])$ *est une solution du problème* (2.1)-(2.2) *si et seulement si* x *est continue et elle satisfait l'equation intégrale suivante :*

$$x(t) = x_0 + I_\alpha^0 f(t,x(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,b[.$$

Preuve :

Supposons que f continue, si x est une solution de problème (2.1)-(2.2) alors, on a :

$$\begin{aligned} & T_\alpha^0 x(t) = f(t,x(t)), \\ & \Longrightarrow T_\alpha^0 x(t) = f(t,x(t)), \\ & \Longrightarrow I_\alpha^0 T_\alpha^0 x(t) = I_\alpha^0 f(t,x(t)), \\ & \Longrightarrow x(t) - x_0 = I_\alpha^0 f(t,x(t)). \end{aligned}$$

D'où

$$x(t) = x_0 + I_\alpha^0 f(t,x(t)).$$

Réciproquement, soit x est une solution continue de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + I_\alpha^0 f(t,x(t)), \quad \text{pour tout } t \in [0,b[.$$

En dérivons l'equation précedente :

$$T_\alpha^0 x(t) = T_\alpha^0[x_0 + I_\alpha^0 f(t,x(t))],$$

$$T_\alpha^0 x(t) = T_\alpha^0 x_0 + T_\alpha^0 I_\alpha^0 f(t,x(t)),$$

Donc

$$T_\alpha^0 x(t) = f(t,x(t)).$$

Pour $t = 0$,

$$x(0) = x_0 + I_\alpha^0 f(0, x(0)) = x_0.$$

Donc x est une solution du problème (2.1)-(2.2). ■

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1.1 *On suppose que* (H1)-(H2) *sont vérifiées, alors le problème* (2.1)-(2.2) *possède une solution unique définie sur* $[0, b]$.

Preuve : La démonstration est basée sur le principe de contraction de Banach (moyennant une norme avec poid).
Étand donné une constante $\beta \in]L, +\infty[$, la fonction (poid) est définie par

$$e(t) = \exp\left(-\beta\frac{(t)^\alpha}{\alpha}\right)$$

Munissons l'espace $C(I)$ par la norme :

$$\|x\|_\beta = \|e(\cdot)x(\cdot)\|_\infty$$

Il est clair que $\|x\|_\beta$ est une norme dans $C(I)$. De plus, $\|\cdot\|_\beta$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, en effet :

$$e(b)\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_\beta \leq \|\cdot\|_\infty.$$

Par conséquent, $(C(I), \|\cdot\|_\beta)$ est un espace de Banach.

On transforme le problème (2.1)-(2.2), en un problème de point fixe, introduisons l'opérateur :

$$T : (C(I), \|\cdot\|_\beta) \longrightarrow (C(I), \|\cdot\|_\beta)$$

$$x \mapsto (Tx)(t) = x_0 + \int_0^t (s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds,$$

D'aprés le Lemme 2.1.1, les points fixes de l'opérateur T sont les solution du problème (2.1)-(2.2).
Montrons à présent que l'opérateur T est contractant.
Soient $x, y \in C(I)$, on a donc

$$Tx(t) - Ty(t) = \int_0^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]s^{\alpha-1}ds.$$

Grâce à l'hypothèse (H2), nous avons pour chaque $t \in I$

$$\begin{array}{rcl} \|Tx(t) - Ty(t)\| & = & |Tx(t) - Ty(t)|e(t) \\ & \leq & e(t) \displaystyle\int_0^t L|x(s) - y(s)|s^{\alpha-1}ds \\ & = & Le(t) \displaystyle\int_0^t e^{-1}(s)e(s)|x(s) - y(s)|s^{\alpha-1}ds \\ & = & Le(t) \displaystyle\int_0^t e^{-1}(s)\|x - y\|_\beta s^{\alpha-1}ds \\ & = & Le(t) \displaystyle\int_0^t s^{\alpha-1}e^{-1}(s)ds\|x - y\|_\beta \\ & = & Le(t) \left(\dfrac{1}{\beta}e^{-1}(s) \Big|_0^t \right) \|x - y\|_\beta \\ & = & Le(t) \left(\dfrac{e^{-1} - 1}{\beta} \right) \|x - y\|_\beta \\ & \leq & \dfrac{L}{\beta}\|x - y\|_\beta \end{array}$$

Il vient que normalement $\|Tx - Ty\|_\beta \leqslant ...$

$$\|Tx(t) - Ty(t)\| \leq \frac{L}{\beta}\|x - y\|_\beta.$$

Puisque $0 < \dfrac{L}{\beta} < 1$, le principe de contraction de Banach garantit que T admet un point fixe unique dans $C(I)$ et par conséquent le problème (2.1)-(2.2) a une solution unique dans $C(I)$. ∎

2.1.2 Prolongement de la solution

Dans ce paragraphe, nous discutons le prolongement à droite de la solution du problème (2.1)-(2.2).

Lemme 2.1.2 *Supposons que* (H1) *est satisfaite, soit* $x(t)$ *une solution du problème* (2.1)-(2.2) *définie sur* $[0, t^+)$ *avec* $t^+ \neq \infty$, *si la limite de x(t) existe lorsque t tend vers* t^+, *alors la solution x(t) peut être prolonger à l'intervalle fermé* $[0, t^+]$.

Preuve :

On pose $\lim\limits_{t \to t^+} x(t) = x^+$, on définie la fonction $\tilde{x}(t)$ par :

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, t^+[, \\ x^+, & t = t^+, \end{cases}$$

$\tilde{x}$ étant une fonction continue sur $[0, t^+]$, puisqu'elle s'agit d'un prolongement par continuité de la fonction x.

Montrons que $\tilde{x}$ est une solution du problème (2.1)-(2.2) sur $[0, t^+]$; il suffit de vérifier que :

$$T_\alpha^0 \tilde{x}(t^+) = f(t^+, \tilde{x}(t^+)).$$

Remarquons que : $T_\alpha^0 \tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t))$, avec $t \in [0, t^+]$,
la continuité de $\tilde{x}$ et f implique immédiatement

$$\lim_{t \to t^+} T_\alpha^0 \tilde{x}(t) = f(t^+, \tilde{x}(t^+)). \tag{2.4}$$

Par ailleurs, en utilisant Lemme 1.2.7, on voit que pour tout $t \in [0, t^+]$ il existe un point η dans $[t, t^+]$ tel que :

$$\tilde{x}(t^+) - \tilde{x}(t) = \frac{1}{\alpha} T_\alpha^0 \tilde{x}(\eta)[(t^+)^\alpha - (t)^\alpha],$$

donc

$$\frac{1}{\alpha} T_\alpha^0 \tilde{x}(\eta)[(t)^\alpha - (t^+)^\alpha] = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t^+),$$

alors

$$T_\alpha^0 \tilde{x}(\eta) = \alpha \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t^+)}{(t)^\alpha - (t^+)^\alpha}.$$

Par conséquent

$$T_\alpha^0 \tilde{x}(\eta) = \alpha \frac{\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t^+)}{t - t^+} . \frac{t - t^+}{(t)^\alpha - (t^+)^\alpha}. \tag{2.5}$$

Faisons tendre t vers t^+, il découle de (2.4) et (2.5) que la dérivée de $\tilde{x}(t)$ en t^+ existe et que :

$$\tilde{x}'(t^+)(t^+)^{1-\alpha} = f(t^+, \tilde{x}(t^+)).$$

D'aprés le Lemme 1.2.3, on a :

$$T_\alpha^0 \tilde{x}(t^+) = f(t^+, \tilde{x}(t^+)).$$

D'où la fonction $\tilde{x}(t)$ est également une solution de (2.1)-(2.2) définie sur $[0, t^+]$. ■

Définition 2.1.1 *Soit J l'intervalle maximal d'existence de la solution $x(t)$ du problème (2.1)-(2.2), alors les solutions $x(t)$ sont appelées à se rapprocher arbitrairement de la frontière de $D = [0, \infty[$ à droite si pour tout domaine D_0 fermé et borné en D, il est imposible que le point $(t, x(t))$ reste toujours dans D, pour chaque t dans J.*

Théorème 2.1.2 *Si* (H1)-(H2) *sont vérifiées, puis la solution du problème* (2.1)-(2.2) *se rapproche arbitrairement de la frontière de* $D = [0, \infty[\times\mathbb{R}$ *à droit.*

Preuve : D'aprés le Théorème 2.1.1, le problème (2.1)-(2.2) admet une solution $x(t)$, soit J intervalle d'existence maximal de x(t) tel que $J = [0, \infty[$ où $[0, t^+[$ avec $t^+ \neq \infty$.

Si $J = [0, \infty[$ le résultat est évident.
Ensuite, considérons $J = [0, t^+[$ avec $t^+ = \infty$.
Supposons le contraire, alors il existe une domaine fermé borné $D_0 \subset D$ tel que $(t, x(t)) \in D_0$ pour chaque t dans J on a la continuité sur D_0 implique qu'il existe un nombre positive M tel que :

$$|f(t, x(t))| \leq M, \quad \forall t \in J. \tag{2.6}$$

D'autre part, d'aprés Lemme 1.2.7, on a pour chaque t_1, t_2 dans J avec $t_1 \leq t_2, \exists\epsilon \in [t_1, t_2]$ tel que :

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{T_\alpha^0 x(\epsilon)}{\alpha}[t_2^\alpha - t_1^\alpha] = \frac{f(\epsilon, x(\epsilon))}{\alpha}[t_2^\alpha - t_1^\alpha]\cdot$$

Alors, par la relation (2.6), nous avons donc

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \frac{M}{\alpha}|t_2^\alpha - t_1^\alpha|\cdot$$

Ce qui implique que $x(t)$ est uniformément continue sur J et donc $\lim\limits_{t\to t^+} x(t)$ existe.
De plus selon Lemme 2.1.2 la solution $x(t)$ peut être étendue à l'intervalle fermé $[0, t^+]$, ce qui contrendit le fait que $[0, t^+]$ est l'intervalle d'existence maximale de la solution $x(t)$(ie :la maximalité de $[0, t^+]$). ∎

Théorème 2.1.3 *Supposons que les hypothèses* (H1)-(H3) *sont satisfaites. Alors la solution du problème* (2.1)-(2.2) *est bornée sur* $[0, +\infty[$.

Preuve :

D'aprés le Théorème 2.1.1 le problème (2.1)-(2.2) admet une solution $x(t)$ définit sur l'intervalle d'existence maximal $[0, t^+]$.
Donc on va montrer que la solution $x(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$.
Nous avons :

$$x(t) = x_0 + I_\alpha^0 f(t, x(t)),$$

donc

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x_0 + I^0_\alpha f(t,x(t))| \\ &\leq |x_0| + I^0_\alpha |f(t,x(t))|. \end{aligned}$$

De (H3), on aura

$$|x(t)| \leq |x_0| + I^0_\alpha[h(t)|x(t)|]\cdot$$

D'aprés l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp\left(I^0_\alpha h(t)\right) \quad ,\forall t \in [0, t^+[,$$

par conséquent

$$\exists M > 0, I^0_\alpha h(t) \leq M \quad ,\forall t \in [0, t^+[.$$

Il en résulte que

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp(M) \quad ,\forall t \in [0, t^+[.$$

D'où $x(t)$ est bornée sur $[0, t^+)$;
Si $t^+ \neq \infty$ alors le Théorème 2.1.2 implique que $\lim\limits_{t \to t^+} = \infty$, ce qui contredit la bornétude de $x(t)$ sur $[0, t^+[$. ∎

2.1.3 Stabilité

Définition 2.1.2 *Soit $x(t)$ une solution de problème* (2.1)-(2.2)*, la solution $x(t)$ est dite stable si pour tout nombre ϵ positive, il existe un nombre positive δ tel que tout solution $y(t)$ avec $|y(0) - x(0)| < \delta$ existe pour tout $t \geq 0$ et satisfait l'inégalité $|y(t) - x(t)| < \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.*

Théorème 2.1.4 *Supposons que* (H1)-(H2) et (H4) *sont réalisée. Alors toute solution du problème* (2.1)(2.2) *est toujour stable.*

Preuve :

D'aprés le Théorème 2.1.3, la solution du problème (2.1)-(2.2) existe et est définie sur $[0, \infty[$.

Soit $x(t)$ et $y(t)$ des solutions avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Alors

$$x(t) = x_0 + I^0_\alpha f(t, x(t)),$$

$$y(t) = y_0 + I^0_\alpha f(t, y(t)).$$

Par l'hypothèse (H4), on a :

$$|y(t) - x(t)| \leq |y_0 - x_0| + I_\alpha^0[\ell(t)|y(t) - x(t)|],$$

et ainsi, en utilisant l'inégalité de Gronwall,nous obtenons :

$$|y(t) - x(t)| \leq |y_0 - x_0| \exp\left(I_\alpha^0 \ell(t)\right) \quad , \forall t \in [0, \infty[.$$

De l'hypothèse (H4), $\exists M > 0$, $I_\alpha^0 \ell(t) \leq M$, $\forall t \in [0, \infty[$
donc

$$|y(t) - x(t)| \leq |y_0 - x_0| \exp(M) \quad , \forall t \in [0, \infty[.$$

D'où $x(t)$ est stable sur $[0, \infty[$. ■

2.2 Le cas non local

Dans cette section, l'existence de solution au problème (2.1)-(2.2) est discutée, nous introduison ensuite un théorème de point fixe à adapter pour prouver le résultat principal de cette section.

Introduisons les hypothèse suivantes :

(H5) f est une fonction continue définie sur $[0, b] \times \mathbb{R}$

(H6) $\exists$ une constante $\gamma > 0$ dans $[0, 1]$ est une fonction positive et non décroissante ϕ dans $C([0, \infty[)$ telle que $\phi(z) < \gamma z$ pour $z > 0$ et $|g(u) - g(v)| \leq \phi(\|u - v\|)$ pour tout u, v dans $C([0, \infty[)$.

(H7) Il existe une fonction positive ϕ dans $C([0, \infty[)$ pour laquelle $\phi > 0$ sur un sous-intervalle de $[0, b]$ et une fonction positive et non décroissante ψ dans $C([0, \infty[)$ telle que :

$$|f(t, v)| \leq \phi(t)\psi(|u|).$$

Pour tout (t, v) dans $C([0, \infty[) \times \mathbb{R}$ et

$$\sup_{r \in [0, \infty[} \frac{r}{|x_0| + \psi(r) I_\alpha^0 \phi(b)} > \frac{1}{1 - y}.$$

Lemme 2.2.1 *On suppose que* (H5) *est satisfaite, alors une fonction x dans $C([0, \infty[)$ est une solution du problème* (2.1)-(2.3) *si et seulement si x est continue et elle satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = x_0 - g(x) + I_\alpha^0 f(t, x(t)), \quad \forall t \in [0, b].$$

Preuve : Supposons que f est continue, si x est une solution de problème (2.1)-(2.3).
Alors, on a :

$$\begin{aligned}
T_\alpha^0 x(t) &= f(t,x(t)),\\
I_\alpha^0 T_\alpha^0 x(t) &= I_\alpha^0 f(t,x(t)),\\
x(t)-x(0) &= I_\alpha^0 f(t,x(t)),\\
x(t) &= x_0 - g(x) + I_\alpha^0 f(t,x(t)).
\end{aligned}$$

Réciproquement
Soit x est une solution continue de l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 - g(x) + I_\alpha^0 f(t,x(t)), \quad t \in [0,b].$$

En dérivons l'équation précedente :

$$\begin{aligned}
T_\alpha^0 x(t) &= T_\alpha^0[x_0 - g(x) + I_\alpha^0 f(t,x(t))],\\
&= T_\alpha^0[x(0)] + T_\alpha^0[I_\alpha^0 f(t,x(t))],\\
&= f(t,x(t)).
\end{aligned}$$

Donc

$$T_\alpha^0 x(t) = f(t,x(t)).$$

Pour $t=0$

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 - g(x) + I_\alpha^0 f(0,x(0)),\\
&= x_0 - g(x).
\end{aligned}$$

Donc x est une solution du problème (2.1)-(2.3). ■

Lemme 2.2.2 *Si* (H5) *est satisfaite.Alors l'opérateur* $A_1 : \bar{U}_r \longrightarrow C([0,b])$ *est complètement continue.*

Preuve :

- La continuité :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tel que $x_n \to x$; Montrons que $A_1x_n(t) \to A_1x(t)$

$$\begin{aligned}
|A_1x_n(t) - A_1x(t)| &\leq \int_0^t s^{\alpha-1}|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|ds\\
&\leq \int_0^t s^{\alpha-1}\|f(s,x_n(\cdot)) - f(s,x(\cdot))\|_\infty ds\\
&\leq \|f(s,x_n(\cdot)) - f(s,x(\cdot))\|_\infty \int_0^t s^{\alpha-1}ds\\
&\leq \|f(s,x_n(\cdot)) - f(s,x(\cdot))\|_\infty \frac{b^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Comme $f(s,x_n(s)) \to f(s,x(s))$ alors $|A_1x_n(t) - A_1x(t)| \to 0$.

- La compacité :

Soit $\bar{U_r} = \{u \in C([0,b]) : \|u\| \leq r\} = \bar{B}(0,r)$.

1- Montrons que $A_1(U_r)$ est équicontinue

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta,$

$$\begin{array}{rcl} |t_1 - t_2| < \delta & \Rightarrow & \|A_1x(t_1) - A_1x(t_2)\|_{\mathbb{R}} < \epsilon, \\ t_2 \to t_1 & \Rightarrow & A_1x(t_2) \to A_1x(t_1), \\ ie : \|A_1x(t_2) - A_1x(t_1)\| & = & |\int_0^{t_2} s^{\alpha-1}f(s,x(s))ds - \int_0^{t_1} s^{\alpha-1}f(s,x(s))ds| \\ & = & |\int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}f(s,x(s))|ds \\ & \leq & \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}|f(s,x(s))|ds \\ & \leq & \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}\phi(s)\psi(|x(s)|)ds \\ & \leq & \psi(r)\int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}\phi(s)ds, \end{array}$$

($x \in \bar{U_r}$ donc $|x| \leq r \Rightarrow \psi(|x|) \leq \psi(r)$ car ψ est croissante).
Comme

$$t_1 \to t_2, \int_{t_1}^{t_2} s^{\alpha-1}\phi(s)ds \to 0,$$

donc

$$\|A_1x(t_2) - A_1x(t_1)\| \to 0,$$

alors $A_1(u_r)$ est équicontinue.
d'où A_1 est transforme un borné à un équicontinue.

2- Montrons que $A_1(U_r)$ est borné.

Soit $x \in U_r$

$$\begin{array}{rcl} \|A_1x\| & = & |\int_0^t s^{\alpha-1}f(s,x(s))|ds \\ & \leq & \int_0^t s^{\alpha-1}|f(s,x(s))|ds \\ & \leq & \psi(r)\int_0^t s^{\alpha-1}\phi(s)ds \\ & \leq & \psi(r)\|\phi\|_\infty\int_0^t s^{\alpha-1}ds \\ & \leq & \frac{b^\alpha}{\alpha}\psi(r)\|\phi\|_\infty \end{array}$$

Donc A_1 est transforme un borné à un borné, on déduire que A_1 est relativement compact, alors A_1 est un opérateur compact.
Par conséquent A_1 est complètement continue. ∎

Lemme 2.2.3 *Si* (H6) *est satisfaite, alors l'opérateur* $A_2 : \bar{U}_r \longrightarrow C([0,b])$ *est une contraction non linéaire.*

Preuve : Supposons que (H6) est satisfaite , montrons que A_2 est contraction non linéaire.

$$A_2 = x_0 - g(x).$$

Soient $x, y \in \bar{U}$

$$\|A_2x - A_2y\| = |g(x) - g(y)| < \phi(\|x - y\|).$$

Et on a de plus $\gamma \in [0, 1]$

$$\phi(z) < \gamma z < z.$$

Donc A_2 est contraction non linéaire. ∎

Théorème 2.2.1 *Si* (H5)-(H7) *sont satisfaites, alors le problème* (2.1)-(2.3) *admet aux moins une solution définie sur* $[0, b]$.

Preuve :

D'aprés l'hypothèse (H7), il exsiste un nombre positive r tel que :

$$\frac{r}{|x_0| + \psi(r)I_\alpha^0\varphi(b)} > \frac{1}{1-y}. \tag{2.7}$$

Et puis on définit l'ensemble $u_r = \{u \in C([0,b]) : \|u\| < r\}$.
Nous montrons d'abord que les opérateurs A_1 et A_2 satisfont aux conditions correspondantes du Lemme 1.2.10, et en raison des Lemmes 2.2.2 et 2.2.3, il suffit de montrer la bornétude de $A(\bar{u_r})$.
En effet : pour tout x en $\bar{u_r}$, il résulte des hypothèses rm(H5) et (H6) que :

$$|A_1x(t)| \leq I_\alpha^0|f(t, x(t))| \leq \frac{b^\alpha}{\alpha}\sup\{|f(t,u)| : t \in [0,b], |u| \leq r\},$$

et que

$$|A_2x(t)| \leq |x_0| + |g(x)| \leq |x_0| + \gamma r.$$

Donc, selon la définition de l'opérateur A,

$$\|Ax\| \leq |x_0| + \gamma r + \frac{b^\alpha}{\alpha}. \sup\{|f(t,u)| : t \in [0,b], |u| \leq r\}.$$

Ainsi $A(\bar{u_r})$ est bornée.
En fin, il reste à montrer que le cas (C2) du Lemme 1.2.10 ne se produit pas, nous argumentons par contraction.
Supposons que le cas (C2) sont vrai, alors il existe λ en $[0,1]$ et x en ∂u_r tels que :

$$x = \lambda.A_x, ie : x(t) = \lambda[x_a - g(x) + I_\alpha^0 f(t, x(t))],$$

ceci, combinéaux hypothèse (H6)-(H7) implique en autre que :

$$r \leq |x_a| + \gamma r + \psi(r) I_\alpha^0 \varphi(b),$$

ou de manière équivalente

$$\frac{r}{|x| + \psi(r) I_\alpha^0 \varphi(b)} \leq \frac{1}{1-\gamma},$$

qui contredit l'inégalité (2.7) par conséquent, nous avons montré que les opérateurs A_1 etA_2 satisfont toutes les condition du Lemme 1.2.10, et par conséquent nous conclure que l'opérateure A a au moins un point fixe x en $\bar{u_r}$, qui est une solution du problème (2.1)-(2.3). ∎

2.3 Exemples illustratifs

Soit $D = [0, \infty] \times \mathbb{R}$.
$f(t,x) = \exp(\frac{-t^\alpha}{\alpha})(x + \sin x), h(t) = L(t) = 2\exp(\frac{-t^\alpha}{\alpha})$ et $L = 2$.

2.3.1 Problème de valeur initiale local

Il est facile de vérifier que :
$\forall (t,u), (t,v) \in D$,

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L|u - v| et |(t,u)| \leq h(t)|u|$$

pour laquels $I_\alpha^0 = 2 - h(t) \leq 2$, par conséquent les condition (H1)-(H3) du

Théorème 2.1.3 sont satisfaites pour les fonctions et paramètres spécifiés ci-dessus, ce qui implique que la solution du problème (2.1)-(2.2) est définie et bornée sur $[0, \infty[$.

* Stabilité similaire

On voit que $\forall(t,u),(t,v) \in D, |f(t,u) - f(t,v)| \leq L(t)|u - v| \leq L|u - v|$ pour laquel $I_\alpha^0 = 2 - L(t) \leq 2$; Ainsi toutes les conditions du Théorème 2.1.4 sont satisfaites, par le Théorème 2.1.4 nous déduisons que toute solution au problème(2.1)-(2.2) est toujours stable.

2.3.2 Problème de valeur initiale non local

Choisissez l'intervalle $[0, b]$ avec $2 > \exp(\frac{b^\alpha}{\alpha})$.
Définissez les fonctions :
$\varphi(t) = 2\exp(\frac{-t^\alpha}{\alpha}), \psi(z) = z$, et $\varphi(z) = \frac{\gamma}{2}z$,
avec $0 < \gamma < \varphi(b) - 1$ pour $x \in C([0, b])$.
Définissez la fonctionnelle :

$$g(x) = \frac{\gamma}{2b}\int_0^b x(t)dt.$$

Puis il est facile de vérifier que g est une contraction.
De plus, observons que

$$|f(t,u)| \leq \varphi(t)\psi(|u|), \quad pourtout(t,u)en[0,b] \times \mathbb{R}$$

et qu'un calcul direct donne :

$$\sup_{r\in[0,\infty[} \frac{r}{|x_0| + \psi(r)I_\alpha^0\phi(b)} = \frac{1}{I_\alpha^0\phi(b)} = \frac{1}{2 - \varphi(b)} > \frac{1}{1-\gamma}.$$

Par conséquent, les condition (H5)-(H7) du Théorème 2.2.1 sont satisfaites pour les fonctions fonctionnelles et paramètres spécifiés ci-dessus, nous concluons que le problème (2.1)-(2.3) existe au moins une solution définie sur $[0, b]$.

Chapitre 3

Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème suivant :

$$T_{t_0}^{\alpha}x(t) + \beta x(t) = f(t), \quad t \in]t_0, T[, t_0 < T \leq +\infty, \beta \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

avec la condition :

$$x(t_0) = x_0. \tag{3.2}$$

3.1 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons un résultat de stabilité au sens de Ulam-Hyers pour le problème (3.1)-(3.2) par la technique de la transformée de Laplace conformable.

Définition 3.1.1 *Problème* (3.1)-(3.2) *est dite stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que, pour chaque $\epsilon > 0$ et pour chaque solution y de l'inégalité*

$$|T_{t_0}^{\alpha} + \beta y(t) - f(t)| \leq \epsilon, \quad t \in J = [t_0, T[, \tag{3.3}$$

il existe une solution x de problème (3.1)-(3.2) *avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq \gamma\epsilon, \quad t \in J. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1.1 *Les autheurs dans [10, 12] ont étudié l'existence et l'unicité de solution. De plus, la solution générale du problème* (3.1)-(3.2)*, s'écrit soous la forme*

$$x(t) = E_{\alpha}(-\beta, t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E_{\alpha}(-\beta, t-t_0)E_{\alpha}(-\beta, \tau - t_0)(\tau - t_0)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau. \tag{3.5}$$

Théorème 3.1.1 *Si la fonction $y : J \to \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité* (3.3) *et pour chaque $\epsilon > 0$, alors il existe une solution x du problème* (3.1)-(3.2) *de sorte que*

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{(t - t_0)^\alpha}{\alpha}\epsilon, \quad \forall t \in J.$$

Preuve : On pose

$$z(t) = T_{t_0}^\alpha y(t) + \beta y(t), \quad t \in J. \tag{3.6}$$

Appliquons la transformée de Laplace conformable, on obtient

$$L_\alpha(z) = sL_\alpha\{y\} - y(t_0) + \beta L_\alpha\{y\} - \beta L_\alpha\{f\}.$$

Donc

$$L_\alpha\{y\} = \frac{y(t_0) + L_\alpha\{f\})}{s + \beta} + \frac{L_\alpha\{z\}}{s + \beta}. \tag{3.7}$$

Soit d'autre part

$$x(t) = E_\alpha(-\beta, t\beta, t - t_0)y(t_0) + E_\alpha(-\beta, t - t_0) * f(t), \tag{3.8}$$

alors, $x(t)$ est différentiable sur $]t_0, T[$, et

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0.$$

Il vient

$$L_\alpha\{x\} = \frac{y(t_0) + L_\alpha\{f\}}{s + \beta}, \tag{3.9}$$

ce qui équivaut à

$$sL_\alpha\{x\} - x(t_0) + \beta L_\alpha\{x\} = L_\alpha\{T_{t_0x}^\alpha + \beta x\} = L_\alpha\{f\}. \tag{3.10}$$

la propriété un à un de l'opérateur L_α garantit que

$$T_{t_0}^\alpha x(t) + \beta x(t) = f(t).$$

Ainsi, la fonction x est une solution de problème (3.1)-(3.2) . Tenu en compte les relations 3.7 et 3.9, il résult que

$$L_\alpha\{E_\alpha(-\beta, t - t_0) * z\} = L_\alpha\{E_\alpha(-\beta, t - t_0)\} \cdot L_\alpha\{z(t)\} = \frac{L_\alpha\{z\}}{s + \beta},$$

on a

$$L_\alpha\{y\} - L_\alpha\{x\} = \frac{L_\alpha\{z\}}{s + \beta} = L_\alpha\{E_\alpha(-\beta, t - t_0) * z\},$$

ce qui montre que

$$y(t) - x(t) = E_\alpha(-\beta, t - t_0) * z(t), \quad t \in J.$$

La relation 3.3 entraine que

$$|z(t)| \leq \epsilon, \quad t \in J.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= |E_\alpha(-\beta, t - t_0) * z(t)| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} E_\alpha(-\beta, t - t_0) E_\alpha(\beta, \tau - t_0)(\tau - t_0)^{\alpha-1} z(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\alpha-1} |E_\alpha(-\beta, t - t_0) E_\alpha(\beta, \tau - t_0) z(\tau)| d\tau \\ &\leq \epsilon \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\alpha-1} |E_\alpha(-\beta, t - t_0) E_\alpha(\beta, \tau - t_0)| d\tau \\ &\leq \epsilon \frac{(t - t_0)^\alpha}{\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 3.1.2 *D'après le Théorème 3.1.1, nous notons que si $T < +\infty$, alors* (3.1)-(3.2) *est stable au sens de Ulam-Hyers sur J avec*

$$y = \frac{(T - t_0)^\alpha}{\alpha}.$$

Si $T = +\infty$, alors (3.1)-(3.2) *n'est pas stable au sens de Ulam-Hyers.*

Définition 3.1.2 *Le problème* (3.1)-(3.2) *est dite stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias s'il existe une constante $\gamma > 0$ tel que, pour chaque $\epsilon > 0$ et pour chaque solution y de l'inégalité*

$$|T_{t_0}^\alpha + \beta y(t) - f(t)| \leq \epsilon h(t), \quad t \in J, \tag{3.11}$$

il existe une solution x du problème (3.1)-(3.2) *avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq \gamma^* \epsilon h(t), \quad t \in J, \tag{3.12}$$

où $h \in (J, \mathbb{R}^+)$ est une fonction positive.

Théorème 3.1.2 *Si la fonction $y : J \to \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité* (3.11) *et pour certain $\epsilon > 0$, alors le problème* (3.1)-(3.2) *est Ulam-Hyers-Rassias stable à condition que*

$$\int_{t_0}^{t} (\tau)^{\alpha-1} h(\tau) d\tau = I_{t_0}^\alpha h(t) \leq c_h h(t), \quad c_h \in \mathbb{R}^+. \tag{3.13}$$

Preuve : La preuve est tout à fait similaire au Théorème 3.1.1, il suffit de noter que, sous hypothèse (3.13), nous avons

$$\begin{aligned}
|y(t)-x(t)| &= |E_\alpha(-\beta,t-t_0)*z(t)| \\
&\leq \int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\alpha-1}|E_\alpha(-\beta,t-t_0)E_\alpha(\beta,\tau-t_0)z(\tau)|d(\tau) \\
&\leq \epsilon\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\alpha-1}|E_\alpha(-\beta,t-t_0)E_\alpha(\beta,\tau-t_0)|h(\tau)d\tau \\
&\leq \epsilon\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\alpha-1}h(\tau)d\tau = \epsilon I^{\alpha}_{t_0}h(t) \leq \epsilon c_h h(t).
\end{aligned}$$

Alors,la relation 3.12 est réalisée, par conséquent le problème (3.1)-(3.2) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias avec $\gamma^* = c_h$. ∎

3.2 Généralisation

Dans cette section, en utilisant les méthodes de la sections ci-dessus, nous examinons plus en détail la stabilité au sens de Ulam-Hyers des trois équation différentielles linéaires de type différent suivantes impliquant la dérivée fractionnaire conformable.

(i) Équation différentielle fractionnaire conforme non homogène linéaire

$$\begin{cases} T^{\alpha}_{t_0}x(t) + Ax(t) = f(t), & t \in (t_0, T], T < +\infty \\ x(t_0) = x_0, & x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.14}$$

avec $f \in C([t_0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ est exponentiellement (conformable) bornée, $A \in M_{n\times n}$.

Par la transformé de Laplace conformable, la solution de (3.14) est donnée par

$$x(t) = E_\alpha(-A, t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E_\alpha(-A, t-t_0)E_\alpha(-A, \tau-t_0)(\tau-t_0)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau. \tag{3.15}$$

Pour plus de détail, consulter [28] Soit $J = [t_0, T], \epsilon > 0$ et $h \in C(J, \mathbb{R}^+)$. On Considère l'équation (3.14) et les inégalités

$$\|T^{\alpha}_{t_0}x(t) + Ax(t) - f(t)\| \leq \epsilon, \quad t \in J \tag{3.16}$$

et

$$\|T^{\alpha}_{t_0}x(t) + Ax(t) - f(t)\| \leq \epsilon h(t), \quad t \in J \tag{3.17}$$

Définition 3.2.1 *L'équation* (3.14) *est dit stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe une constante $\sigma > 0$ tel que $\epsilon > 0$ et pour chaque solution $y \in C(J, \mathbb{R}^n)$ de l'inégalité* (3.16)*, il existe un solution $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.14) *avec*

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \sigma\epsilon, t \in J \tag{3.18}$$

Définition 3.2.2 *L'équation* (3.14) *est dit stable au sens Ulam-Hyers-Rassias s'il existe une constante $\sigma^* > 0$ tel que $\epsilon > 0$ et pour chaque solution $y \in C(J, \mathbb{R}^n)$ de l'inégalité* (3.17)*, il existe un solution $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ de l'équation* (3.14) *avec*

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \sigma^*\epsilon h(t), t \in J \tag{3.19}$$

Nous avons immédiatement.

Lemme 3.2.1 *Soit $A \in M_{n\times n}, t_0 \leq s \leq t \leq T < +\infty$, on a :*

$$\|E_\alpha(-A, t - t_0)\| \leq E_\alpha(\| - A\|, t - t_0)$$

et

$$\|E_\alpha(-A, t - t_0).E_\alpha(A, s - t_0)\| \leq \|E_\alpha(-A, t - t_0)\|.\|E_\alpha(A, s - t_0)\|.$$

Remarque 3.2.1 *On note la fonction matricielle $E_1(t) := E_\alpha(-A, t-t_0), E_2(t) := E_\alpha(A, t - t_0)$, and $M := \sup\limits_{t_0\leq t\leq T} \|E_1(t)\|, N := \sup\limits_{t_0\leq t\leq T} \|E_2(t)\|$. Alors*

$$\|E_1(t)\| \leq M, \|E_2(t)\| \leq N$$

et

$$\|E_\alpha(-A, t - t_0).E_\alpha(A, s - t_0)\| \leq MN.$$

Théorème 3.2.1 *Si une fonction $y : J \to \mathbb{R}^n$ satisfait l'inégalité* (3.16) *et pour certains $\epsilon > 0$,alors l'équation* (3.14) *est stable au sens de Ulam-Hyers avec $\sigma = \frac{MN(T-t_0)^\alpha}{\alpha}$.*

Preuve : On pose

$$z(t) = T^\alpha_{t_0} y(t) + Ay(t) - f(t), \quad t \in J.$$

Il s'ensuit que $\|z(t)\| \leq \epsilon$, d'aprés (3.16).On obtient

$$\begin{aligned}
\|y(t) - x(t)\| &= \|E_\alpha(-A, t - t_0) * z(t)\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\alpha-1}\|E_\alpha(-A, t - t_0)E_\alpha(A, \tau - t_0)z(\tau)\|d\tau \\
&\leq \epsilon \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\alpha-1}\|E_\alpha(-A, t - t_0)E_\alpha(A, \tau - t_0)\|d\tau \\
&\leq \epsilon\frac{MN(t - t_0)^\alpha}{\alpha} \leq \epsilon\frac{MN(T - t_0)^\alpha}{\alpha},
\end{aligned}$$

d'aprés le Lemme 3.2.1 et la Remarque 3.2.1 et

$$x(t) = E_\alpha(-A, t-t_0)y(t) + E_\alpha(-A, t-t_0) * f(t).$$

En déduire que l'équation 3.14 admet une solution $x \in C^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ tel que 3.18 et vrai avec $\sigma = \dfrac{MN(T-t_0)^\alpha}{\alpha}$. ■

Théorème 3.2.2 *Considérons l'équation* (3.14) *et l'inégalité*

$$\|T_{t_0}^\alpha y(t) + Ay(t) - f(t)\| \leq \epsilon h(t), \quad t \in J.$$

puis l'équation (3.14) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias si* (3.13) *est vrai, c'est-à-dire,*

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \epsilon\sigma^* h(t), \quad t \in J,$$

ici $\sigma^* = c_h MN, c_h > 0$.

(ii) Équation de Langevin linéaire avec deux même dérivées fractionnaire conformables

$$\begin{cases} T_{t_0}^\alpha(T_{t_0}^\alpha + \lambda)x(t) = f(t), & t \in (t_0, T], T < +\infty, \lambda > 0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.20}$$

Où $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, f *est continue sur* $[t_0, +\infty[$ *et conforme exponentiellement bornée.Dans vue du Lemme 1.2.16,nous donnons le concept de solution pour* (3.20).

Définition 3.2.3 *Une fonction* $x \in C^2([t_0, T], \mathbb{R})$ *est une solution de l'équation* (3.20) *si* x *satisfait* $T_{t_0}^\alpha(T_{t_0}^\alpha + \lambda)x(t) = f(t), t \in [t_0, T]$ *et* $x(t_0) = x_0$.

Nous dérivons d'abord la représentation de la solution de l'eqation (3.20).Selon la Remarque 3.1.1, nous avons que la solution de l'équation

$$(T_{t_0}^\alpha + \lambda)x(t) = g(t), t \in (t_0, T], x(t_0) = x_0, \lambda > 0,$$

peut être exprimé comme

$$x(t) = E_\alpha(-\lambda, t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E_\alpha(-\lambda, t-t_0)E_\alpha(\lambda, \tau - t_0)(\tau - t_0)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau. \tag{3.21}$$

Prenant l'opérateur intégral $I_{t_0}^\alpha$ sur l'équation (3.20) de t_0 à t et en utilisant le Lemme 1.2.2,on a

$$(T_{t_0}^\alpha + \lambda)x(t) - (T_{t_0}^\alpha + \lambda)x(t_0) = I_{t_0}^\alpha f(t) = \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{\alpha-1} f(s)ds. \tag{3.22}$$

Constatant que la dérivée fractionnaire conformable d'une constante est nul (voir[20.21]),d'où $T_{t_0}^{\alpha}[x(t_0)] = 0$, alors (3.22) devient

$$(T_{t_0}^{\alpha} + \lambda)x(t) = \lambda x_0 + \int_{t_0}^{\tau} (s - t_0)^{\alpha-1} f(s) ds. \tag{3.23}$$

De plus,notez que

$$(\tau - t_0)^{\alpha-1} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0) = \frac{d}{d\tau}[\frac{1}{\lambda} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0 E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0))],$$

ce qui implique que

$$\int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)^{\alpha-1} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0) d\tau = \frac{1}{\lambda}(1 - E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0)). \tag{3.24}$$

En combinant (3.21),(3.23) avec (3.24),alors la formule finale de la solution de (3.20) devrait être

$$\begin{aligned}
x(t) &= E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0)(\tau - t_0)^{\alpha-1} \\
&\quad \times [\lambda x_0 + \int_{t_0}^{\tau} (s - t_0)^{\alpha-1} f(s) ds] d\tau \\
&= E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0)x_0 + \lambda x_0 . \frac{1}{\lambda}(1 - E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0)) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} (s - t_0)^{\alpha-1} (\tau - t_0)^{\alpha-1} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0) f(s) ds d\tau \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} (s - t_0)^{\alpha-1} (\tau - t_0)^{\alpha-1} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0) f(s) ds d\tau \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} (s - t_0)^{\alpha-1} (\tau - t_0)^{\alpha-1} E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, \tau - t_0) f(s) d\tau ds \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{\alpha-1} (1 - E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0) E_{\alpha}(\lambda, s - t_0)) f(s) ds \\
&= x_0 + \frac{1}{\lambda}(1 - E_{\alpha}(-\lambda, t - t_0)) * f(t).
\end{aligned}$$

En suite, nous considérons l'équation (3.20) et les inégalités

$$|T_{t_0}^{\alpha}(T_{t_0}^{\alpha} + \lambda)x(t) - f(t)| \leq \epsilon, \quad t \in J, \tag{3.25}$$

et

$$|T_{t_0}^{\alpha}(T_{t_0}^{\alpha} + \lambda)x(t) - f(t)| \leq \epsilon h(t), \quad t \in J, h \in C(J, \mathbb{R}^+). \tag{3.26}$$

Définition 3.2.4 *L'équation* (3.20) *est dit stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe une constante $k > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour chaque solution y d'inégalité* (3.25)*, il existe un solution x de l'équation* (3.20) *avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq k\epsilon, \quad t \in J. \tag{3.27}$$

Définition 3.2.5 *L'équation* (3.20) *est dit stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias s'il existe une constante $k^* > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ et pour chaque solution y d'inégalité* (3.26)*, il existe un solution x de l'équation* (3.20) *avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq k^* \epsilon h(t), \quad t \in J. \tag{3.28}$$

Théorème 3.2.3 *Si une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité* (3.25) *et pour certains $\epsilon > 0$, alors l'équation* (3.20) *est stable au sens de Ulam-Hyers avec*

$$k = \frac{(T - t_0)^\alpha}{\lambda \alpha}$$

Preuve : on a

$$z(t) = T_{t_0}^\alpha (T_{t_0}^\alpha + \lambda) y(t) - f(t), \quad t \in J.$$

En prenant la transformée de Laplace fractionnaire conformable sur l'équation ci-dessus, nous avons

$$L_\alpha\{z\} = (s^2 + \lambda s) L_\alpha\{y\} - (s + \lambda) y(t_0) - L_\alpha\{f\}.$$

Alors

$$L_\alpha\{y\} = \frac{y(t_0)}{s} + \frac{L_\alpha\{f\}}{s(s+\lambda)} + \frac{L_\alpha\{z\}}{s(s+\lambda)}. \tag{3.29}$$

Définissez la fonction x comme

$$x(t) = y(t_0) + \frac{1}{\lambda}(1 - E_\alpha(-\lambda, t - t_0)) * f(t), \tag{3.30}$$

alors $x(t)$ et en second lieu différentiable sur $]t_0, T]$ et

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0.$$

Une application de la transformée de Laplace fractionnaire conformable à (3.30) donne que

$$L_\alpha\{x\} = L_\alpha\{y(t_0)\} + L_\alpha \left\{ \frac{1}{\lambda}(1 - E_\alpha(-\lambda, t - t_0)) * f(t) \right\} = \frac{x(t_0)}{s} + \frac{L_\alpha\{f\}}{s(s+\lambda)}, \tag{3.31}$$

ce qui implique que

$$s(s+\lambda)L_\alpha\{x\}-(s+\lambda)x(t_0)=L\alpha\{T^\alpha_{t_0}(T^\alpha_{t_0}+\lambda)x\}=L_\alpha\{f\}.$$

Puisque L_α est un-à-un, il s'ensuit que

$$T^\alpha_{t_0}(T^\alpha_{t_0}+\lambda)x(t)=f(t),$$

à savoir, x est une solution de l'équation (3.20).En notant que

$$L_\alpha\left\{\frac{1}{\lambda}(1-E_\alpha(-\lambda,t-t_0))*z\right\}=L_\alpha\left\{\frac{1}{\lambda}(1-E_\alpha(-\lambda,t-t_0))\right\}.L_\alpha\{z\}=\frac{L_\alpha\{z\}}{s(s+\lambda)},$$

et en combinant (3.29) avec (3.31), on obtient

$$L_\alpha\{y\}-L_\alpha\{x\}=\frac{L_\alpha\{z\}}{s(s+\lambda)}=L_\alpha\left\{\frac{1}{\lambda}(1-E_\alpha(-\lambda,t-t_0))*z\right\},$$

par conséquent,

$$y(t)-x(t)=\frac{1}{\lambda}(1-E_\alpha(-\lambda,t-t_0))*z(t),\quad t\in J.$$

D'aprés (3.25), il admet que $\|z(t)\|\leq\epsilon, t\in J$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}|y(t)-x(t)| &= \frac{1}{\lambda}|(1-E_\alpha(-\lambda,t-t_0))*z(t)|\\ &= \frac{1}{\lambda}\left|\int_{t_0}^{t}[1-\exp(-\lambda(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}-\frac{(s-t_0)^\alpha}{\alpha}))](s-t_0)^{\alpha-1}z(s)ds\right|\\ &\leq \epsilon\tfrac{(t-t_0)^\alpha}{\lambda\alpha}\leq\epsilon\tfrac{(T-t_0)^\alpha}{\lambda\alpha},\end{aligned}$$

où le fait fondamontal que $|1-\exp(-\lambda(\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}-\frac{(s-t_0)^\alpha}{\alpha}))|<1$ est considéré.En suite, nous concluons que il existe une solution $x\in C^2([t_0,T],\mathbb{R})$ de l'équation (3.20) tel que (3.27) est vrai avec $k=\frac{(T-t_0)^\alpha}{\lambda\alpha}$. ■

Théorème 3.2.4 *Considérons l'équation* (3.20) *et l'inégalité*

$$|T^\alpha_{t_0}(T^\alpha_{t_0}+\lambda)y(t)-f(t)|\leq\epsilon h(t),\quad t\in J.$$

Puis l'équation (3.20) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias avec* $k^*=\frac{c_h}{\lambda}$ *à condition que* (3.13) *soit vrai, c'est-à-dire,*

$$|y(t)-x(t)|\leq\epsilon\frac{c_h}{\lambda}h(t),\quad t\in J.$$

(iii) L'équation intégro-différentielle conforme linéaire

$$\begin{cases} T_{t_0}^{\alpha}x(t) + I_{t_0}^{\alpha}x(t) = f(t), \quad t \in J' := (t_0, T], T < +\infty, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.32}$$

où $0 < \alpha \leq 1, J := [t_0, t]$, *la fonction* $f : J \to \mathbb{R}$ *est continue, conformable exponentiellement borné et satisfait* $f(t) \equiv 0$, *clairement, une fonction* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *est applelée la solution de* (3.32) *si et seulement si* x *satisfait* $T_{t_0}^{\alpha}x(t) + I_{t_0}^{\alpha}x(t) = f(t), t \in J'$ *avec la condition initiale* $x(t_0) = x_0$. *Nous appliquez d'abord la transformée de Laplace fractionnaire conformable pour rechercher la solution de l'équation* (3.32).

Prenant la transformée de Laplace fractionnaire conformable des deux côtés de l'équation (3.32) *donne que*

$$sL_{\alpha}\{x\} - x_0 + \frac{1}{s}L_{\alpha}\{x\} = L_{\alpha}\{f\},$$

ce qui équivant à

$$L_{\alpha}\{x\} = \frac{s}{s^2+1}x_0 + \frac{s}{s^2+1}L_{\alpha}\{f\}.$$

En utilisant l'inverse de transformée de Laplace fractionnaire conformable et en notant la Remarque 1.2.4,on obtient la solution

$$x(t) = \cos\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}x_0 + \cos\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha} * f(t). \tag{3.33}$$

Maintenant, nous utilisons la même méthode pour étudier la stabilité de type Ulam de l'équation (3.32)*.Prendre l'inégalités suivantes*

$$|T_{t_0}^{\alpha}x(t) + I_{t_0}^{\alpha}x(t) - f(t)| \leq \epsilon, \quad t \in J, \tag{3.34}$$

et

$$|T_{t_0}^{\alpha}x(t) + I_{t_0}^{\alpha}x(t) - f(t)| \leq \epsilon h(t), \quad t \in J, h \in C(J, \mathbb{R}). \tag{3.35}$$

Définition 3.2.6 *L'équation* (3.32) *est dit stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe une constante* $\rho > 0$ *tel que, pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* y *d'inégalité* (3.34)*, il existe une solution* x *de l'équation* (3.32) *avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq \rho\epsilon, \quad t \in J. \tag{3.36}$$

Définition 3.2.7 *L'équation* (3.32) *est dit stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias s'il existe une constante* $\rho^* > 0$ *tel que, pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* y *d'inégalité* (3.35)*, il existe une solution* x *de l'équation* (3.32) *avec*

$$|y(t) - x(t)| \leq \rho^*\epsilon h(t), \quad t \in J. \tag{3.37}$$

Théorème 3.2.5 *Si une fonction $y : J \to \mathbb{R}$ satisfait l'inigalité* (3.34) *et pour certains $\epsilon > 0$, alors l'équation* (3.32) *est stable au sens de Ulam-Hyers avec $\rho = \frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha}$.*

Preuve : Soit

$$z(t) = T_{t_0}^\alpha y(t) + I_{t_0}^\alpha y(t) - f(t), \quad t \in J. \tag{3.38}$$

Une application de la transformée de Laplace fractionnaire conformable à (3.38) donne que

$$L_\alpha\{z\} = \left(s + \frac{1}{s}\right) L_\alpha\{y\} - y(t_0) - L_\alpha\{f\},$$

ce qui indique que

$$L_\alpha\{y\} = \frac{s}{s^2+1} y(t_0) + \frac{s}{s^2+1} L_\alpha\{f\} + \frac{s}{s^2+1} L_\alpha\{z\}. \tag{3.39}$$

En définissez la fonction x comme

$$x(t) = \cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} y(t_0) + \cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} * f(t), \tag{3.40}$$

alors $x(t)$ est différentiable sur $(t_o, T]$ avec $x(t_0) = y(t_0) = x_0$. En prenant la transformée de Laplace fractionnaire conformable sur (3.40),on a

$$L_\alpha\{x\} = \frac{s}{s^2+1} y(t_0) + \frac{s}{s^2+1} L_\alpha\{f\}, \tag{3.41}$$

ce qui équivant à

$$\left(s + \frac{1}{s}\right) L_\alpha\{x\} - x(t_0) = L_\alpha\left\{T_{t_0}^\alpha x(t) + I_{t_0}^\alpha x(t)\right\} = L_\alpha\{f\}. \tag{3.42}$$

Par conséquent,$T_{t_0}^\alpha x(t) + I_{t_0}^\alpha x(t) = f(t)$ pour $t \in]t_0, T]$ avec $x(t_0) = x_0$, à savoir, une telle fonction x est une solution de l'équation (3.32). De plus, combinons (3.39) avec (3.41) et notons que

$$L_\alpha\left\{\cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} * z\right\} = \frac{s}{s^2+1} L_\alpha\{z\},$$

on peut facilement en déduire que

$$L_\alpha\{y\} - L_\alpha\{x\} = \frac{s}{s^2+1} L_\alpha\{z\} = L_\alpha\left\{\cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha} * z\right\},$$

cela implique que

$$y(t)-x(t)=\cos\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}*z(t).$$

Considérons (3.34), il vérifie $|z(t)|\le\epsilon, t\in J$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|y(t)-x(t)| &= \left|\cos\tfrac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}*z(t)\right|\\
&= \left|\int_{t_0}^t (s-t_0)^{\alpha-1}\cos\frac{(t-t_0)^\alpha-(s-t_0)^\alpha}{\alpha}*z(s)ds\right|\\
&\le \epsilon\int_{t_0}^t (s-t_0)^{\alpha-1}\left|\cos\frac{(t-t_0)^\alpha-(s-t_0)^\alpha}{\alpha}*z(s)\right|ds\\
&\le \epsilon\tfrac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une solution x de l'équation (3.32) tel que (3.36) est vrai avec $\rho=\frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha}$. ■

Théorème 3.2.6 *Considérons l'équation* (3.32) *et l'inégalité*

$$|T^\alpha_{t_0}y(t)+I^\alpha_{t_0}y(t)-f(t)|\le\epsilon h(t),\quad t\in J.$$

Puis l'équation (3.32) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias avec* $\rho^*=c_h$ *à condition que* (3.13) *soit vrai,c'est-à-dire,*

$$|y(t)-x(t)|\le\epsilon c_h h(t),\quad t\in J.$$

3.3 Exsemple illustratif

Dans cette section, un exemple est donné pour démontrer nos résultats. Soient $\alpha=\beta=\frac{1}{2}, t_0=0, T=1, f(t)=\sqrt{t}\exp(-\sqrt{t}), x(0)=1$, alors $\gamma=\frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha}=2$, et le problème (3.1)-(3.2) devient

$$\begin{cases} T_0^{\frac{1}{2}}x(t)+\frac{1}{2}x(t)=\sqrt{t}\exp(-\sqrt{t}), & t\in[0,1],\\ x(0)=1.\end{cases}\tag{3.43}$$

considérer

$$\left|T_0^{\frac{1}{2}}x(t)+\frac{1}{2}x(t)-\sqrt{t}\exp(-\sqrt{t})\right|\le\epsilon,\quad t\in[0,1],\tag{3.44}$$

et

$$\left|T_0^{\frac{1}{2}}x(t)+\frac{1}{2}x(t)-\sqrt{t}\exp(-\sqrt{t})\right|\le\epsilon h(t),\quad t\in[0,1].\tag{3.45}$$

Selon la Définition 3.1.1 et le Théorème 3.1.1, pour certains donnés $\epsilon > 0$ et correspondant solution y telle que l'inégalité (3.44) soit vérifiée, si l'on trouve une solution x de (3.43) telle que $|y(t) - x(t)| \leq 2\epsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors (3.43) est stable au sens de Ulam-Hyers sur l'intervalle $[0, 1]$.

Choisissez $\epsilon = \sqrt{3}$ et définissez la fonction y comme

$$y(t) = (2\sqrt{t} + 1)\exp(-\sqrt{t}),$$

alors $y(0) = x(0) = 1$, et le calcul élémentaire donne que

$$\left|T_0^{\frac{1}{2}} y(t) + \frac{1}{2} y(t) - \sqrt{t}\exp(-\sqrt{t})\right| = |(1-\sqrt{t})\exp(-\sqrt{t})| \leq \max_{t\in[0,1]} |(1-\sqrt{t})\exp(-\sqrt{t})| = 1 < \sqrt{3},$$

par conséquent (3.44) est vrai. De plus, en suivant la preuve du Théorème 3.1.1, nous pouvons définir la fonction x comme

$$x(t) = E_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}, t\right) \times 1 + E_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}, t\right) * (\sqrt{t}\exp(-\sqrt{t})) = (t + 1)\exp(-\sqrt{t}).$$

On peut facilement noter qu'un tel x est une solution de (3.43), et

$$|y(t)-x(t)| = |(2\sqrt{t}-t)\exp(-\sqrt{t})| \leq \max_{t\in[0,1]} |(2\sqrt{t}-t)\exp(-\sqrt{t})| \approx 0.466 < 2\sqrt{3}.$$

De plus, posons la fonction h comme $h(t) = \sqrt{t}\exp(t) + 1$ et soit $\gamma^* = c_h = \pi + 1$, alors on obtient

$$I_{t_0}^{\alpha} h(t) = \exp(t) 2\sqrt{t} - 1 \leq \exp + 1 \leq (\pi + 1)(\sqrt{t}\exp(t) + 1) = c_h h(t),$$

ce qui implique que (3.13) est vrai. De plus,

$$\left|T_0^{\frac{1}{2}} y(t) + \frac{1}{2} y(t) - \sqrt{t}\exp(-\sqrt{t})\right| = |(1-\sqrt{t})\exp(-\sqrt{t})| \leq 1 \leq \sqrt{3}(\sqrt{t}\exp(t)+1) = \epsilon h(t), t \in [0, 1]$$

et

$$|y(t)-x(t)| = |(2\sqrt{t}-t)\exp(-\sqrt{t})| < 0.5 \leq \sqrt{3}(\pi+1)(\sqrt{t}\exp(t)+1) = \gamma^*\epsilon h(t).$$

De la discussion ci-dessus, nous pouvons conclure que l'équation (3.43) est stable au sens de Ulam-Hyers avec $\gamma = 2$ et stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias avec $\gamma^* = \pi + 1$.

Bibliographie

[1] L. Byszewski, Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem. *J. Math. Anal. Appl.* 162, 494-505 (1991).

[2] L. Byszewski, V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, *Appl. Anal.*, 40(1991), 11-19.

[3] D. O'Regan, Y. Je Cho, and Yu-Qing Chen, *Topological Degree Theory and Application*, Volume 10, by Taylor et francis Group, LLC, 2006.

[4] Khalil,R., Horani, M.A., et al. :A new definition of fractional derivative. J. Comput. *Appl. Math.264*,65-70(2014).

[5] Abdeljawad,T. : On conformable fractional calculus. J. Comput. *Appl. Math.279*, 57-66(2015).

[6] Asawasamrit, S., Ntouyas, S.K., Thiramanus, P., Tariboon, J. : Periodic bouundary value problems for impulsive conformable fractional integro-differential equations. *Bound. Value Prob.2016*, Article D 122 (2016).

[7] Dong, X, Bai, Zhang, W. : Shandong Positive solution for nonlinear eigenvalue problems with conformable fractional differential derivatives. J. Shandong Univ. Sci. *Tchnol. Nat.Sci.35*, 85-90(2017).

[8] O'Regan, Fixed-point theory for the sum of two operators. *Appl. Math.9*,1-8(1996).

[9] Fernando, S.S., Makhelouf, A.B.,Mohamed, A.H. : Conformable Laplace transform of fractional differential equations. *Axioms 7*,55(2018).

[10] Benaoumeur, B., Torres, D.F.M., Existence of solution to a local nonlinear differential équation. J. Comput *Appl. Math.312*,127-133(2017).

[11] Eroglu, B.I., Avci, D., Ozdemir, N. : Optimal control problem for a conformable fractional heat conduction equation. *Acta Phys. Pol. A132*,658-662(2017).

[12] Hammad, M.A., Khalil, R. : Abel'sformula and Wronskian for conformable fractional differential equations. *Int. j. Differ. Equ. Appl. 13(3)*,177-183(2014).

[13] S. Djebali, Degré topologique : théorie et application aux EDO-EDP.Cours policopié, Département de Mathématiques, *ENS-Kouba, Alger*,(2006).

[14] J. Dugundji and A. Granas, Fixed Point Theory, Voll, Monografie Matematyzne, *(PWN), Warsaw*,(1982).