



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et Equations Différentielles

Par :

MOSTEFAOUI Fatima
NOUADRIA Imen

Sur le thème

**Les schémas de type Volumes Finis TPFA (Two-Point Flux
Approximation et MPFA (Multiple-Point Flux Approximation))**

Soutenu publiquement le 15 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

M. Maazouz Kadda	MCB	Université Tiaret	Président
Mme. Sabit Souhila	MCA	Université Tiaret	Encadreur
M. Baghdad Said	MCB	Université Tiaret	Examineur

2020-2021

*————— *Remerciements* —————*

Avant tous je remercie ALLAH qui m'a donné la force, la santé et la patience pendant tous ces années universitaires et spécialement la réalisation de ce mémoire.

Nous pouvons, dans cette hâte, exprimer nos sincères remerciements et notre gratitude au Dr. "Sabit Souhila", qui ne nous a pas épargné ses précieux conseils, ses instructions utiles, et ses encouragements motivants et permanents.

Nous remercions également les membres du jury d'avoir accepté de discuter de la maîtrise et d'avoir consacré une partie de leur temps précieux à sa lecture.

Avec toutes les expressions d'appréciation et de respect, nous adressons nos remerciements à tous les professeurs de département de mathématiques de l'université Ibn Khaldoun

En fin, merci à tous ceux qui ont rendu possible ce travail, et même s'ils ne se retrouvent pas dans cette petite liste, ils sont dans mes pensées.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*A la joie du cœur et de l'étoile... à l'ange vigilant qui m'a appris la
philosophie du monde... la source de tendresse... d'amour et de don...
le premier mot... ma tendre mère*

*A mon tendre soutien... je dis accepte de moi les prémices de tes jeunes
plants... Père, que Dieu te fasse miséricorde et t'accorde les cieux*

*A tous mes frères et sœurs qui m'ont poussé à réaliser mon rêve "Mohamed,
Nacer, Mostafa, Aicha, Fatiha, Semia, Salima"*

A toutes mes amies "Ikram, Rachida, Kayra, Gania, Iman, Romaysa"

Et à toute la promotion.

J'offre mon travail avec tous mes respects.

Fatima

Dédicace

“

Je dédie ce travail :

A ma chère mère

A mon cher père

qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères Abd elhadi et Mohamed

A mes sœurs Wissal, Latifa et Lina

Pour leur soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

Et finalement, à mes amies Imene, Soria, Hadjer, Narimane, Fatima et Roumaïssa

Pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

J'offre mon travail avec tous mes respects.

”

- Imen

TABLE DES MATIÈRES

1	Préliminaires	6
1.1	Introduction	7
1.2	Les espaces L^p	7
1.2.1	Fonction mesurable :	7
1.2.2	Fonction intégrable($L^1(\Omega)$)	7
1.2.3	Espace de Lebesgue	7
1.3	Espace de Sobolev	8
1.3.1	Les espaces H^m	8
1.3.2	Espace $H_0^1(\Omega)$	8
1.4	Les Espaces Sobolev Pondérés	11
2	Schéma de type Volumes Finis	12
2.1	La Méthode des Volumes Finis	13
2.2	Schéma de Volume Fini	13
2.3	Maillage	14
2.4	Schéma TPFA (Two-point flux Approximation)	15
2.4.1	Coercivité :	16
2.4.2	Monotonie :	16
2.5	Méthodes MPFA(Multiple-Point Flux Approximation)	17
2.5.1	Méthode O	18
2.5.2	Méthodes L et G	18
3	Applications	20
3.1	La formulation en volume fini	21

3.1.1	Maillages :	21
3.1.2	Black-Scholes EDP	21
3.1.3	Résolution de l'équation de la chaleur sans second membre .	25
3.1.4	Résolution générale de l'équation de la chaleur avec condi- tions initiales	26
3.1.5	La Méthodes des Volumes Finis	27
3.1.6	Méthode TPFA (Two-Point Flux Approximation)	28
3.2	Estimations complètes de la discrétisation et des erreurs	31
3.2.1	Estimations des erreurs	31
3.3	Expériences numériques	32
3.4	Présentation de la méthode MPFA	33
3.4.1	Principe de discrétisation	33
3.4.2	Calcul des transmissivités	33
3.4.3	Principe de discrétisation pour la méthode proposée	36
3.4.4	Définition de la solution approchée	36
3.4.5	Discrétisation du problème	37
3.5	Propriétés de la méthode	39
3.6	Tests numériques et comparaison aux MPFA	41

La méthode des volumes finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation. La loi de conservation exprime la conservation d'une quantité physique (masse, énergie, nombre de moles,...).

Deux classes de méthodes aux volumes finis sont très utilisées en modélisation de réservoir anisotrope et hétérogène : les méthodes MPFA (Multi-Point Flux Approximation) et les méthodes TPFA (Two-Point Flux Approximation). Les méthodes TPFA présentent des limitations en ce sens que la plupart d'entre elles ne prennent pas en compte les anisotropies des perméabilités en dehors des directions des axes des coordonnées. Les méthodes MPFA sont des méthodes des volumes finis de nouvelle génération conçues pour résoudre les problèmes d'écoulement dans les milieux anisotropes. Elles présentent une grande flexibilité géométrique (par l'utilisation des maillages de divers types) et une grande souplesse dans la discrétisation des équations gouvernant des phénomènes complexes.

TPFA (Two-Point Flux Approximation) est une méthode la plus simple n'utilise que les deux nœuds de part et d'autre de la face. Mais cette manière de calculer n'est d'ordre deux que pour les mailles carrées, sinon elle retombe à l'ordre un et entraîne des erreurs numériques importantes, et MPFA (Multi-Point Flux Approximation) est un schéma plus complexes, ou on obtient l'ordre deux dans tous les cas.

ABSTRACT

The finite volume method consists in integrating, on elementary volumes, the equations written in integral form. It is a method particularly well suited to the spatial discretization of conservation laws. The law of conservation expresses the conservation of a physical quantity (mass, energy, number of moles,...).

Two classes of finite volume methods are widely used in anisotropic and heterogeneous reservoir modeling : MPFA (Multi-Point Flux Approximation) methods and TPFA (Two-Point Flux Approximation) methods. The TPFA methods have limitations in that most of them do not take into account the anisotropies of permeabilities outside the directions of the coordinate axes. MPFA methods are next generation finite volume methods designed to solve flow problems in anisotropic media. They present a great geometrical flexibility (by the use of meshes of various types) and a great flexibility in the discretization of the equations governing complex phenomena.

TPFA is the simplest method using only the two nodes on either side of the face. But this way of calculating is of order two only for the square meshes, if not it falls back to the order one and involves important numerical errors, and MPFA is a more complex diagram, or one obtains the order two in all cases.

INTRODUCTION

Il ya plusieurs méthodes à utilisés our calculer la solution d'un EDP. Nous allons appliqué la méthode de Volumes Finis, car elle est facile à mettre en œuvre.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à les deux schémas de type Volumes Finis TPFA (Two-point Flux Approximation) et MPFA (Multiple-point Flux Approximation), ce travail a été organisé du manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous allons définir une échelle d'espaces de Lebesgue, espace de Sobolev et espaces de Sobolev Pondérés qui joue un rôle important en théorie des équations aux dérivées partielles. On cite quelques définitions et théorèmes de ces espaces.

Le deuxième chapitre, nous allons introduit la méthode de volume finis pour les équations de diffusion sur des maillages génériques : nous présentons en première partie le schéma TPFA(Two-Point Flux Approximation), puis nous passons à le schéma MPFA (Multiple-Point Flux Approximation) et les différents méthodes de MPFA (méthode O, méthodes L et G).

A travers le chapitre 3, nous traitons des approximations numériques pour résoudre l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes EDP. Cet EDP est bien connu pour être dégénéré. La discrétisation spatiale est effectuée à l'aide de la méthode classique des volumes finis avec approximation de flux en deux points (TPFA). Finalement, nous présentons des tests numériques permettant d'estimer l'ordre de convergence de notre formulation MPFA pour le cas étudié.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Les espaces L^p	7
1.2.1	Fonction mesurable :	7
1.2.2	Fonction intégrable($L^1(\Omega)$)	7
1.2.3	Espace de Lebesgue	7
1.3	Espace de Sobolev	8
1.3.1	Les espaces H^m	8
1.3.2	Espace $H_0^1(\Omega)$	8
1.4	Les Espaces Sobolev Pondérés	11

1.1 Introduction

On définit d'abord quelques espaces fonctionnels et leurs normes associées que nous utiliserons dans ce travail. Pour un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, l'espace des fonctions de carré intégrable noté $L^2(\Omega)$. On note aussi $C(\Omega)$ (respectivement $C(\bar{\Omega})$) l'ensemble des fonctions continues sur Ω (respectivement sur $\bar{\Omega}$).

1.2 Les espaces L^p

1.2.1 Fonction mesurable :

Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espace mesurables, une fonction $f : E_1 \rightarrow E_2$ est mesurable si :

$$\forall A \in T_2, \quad f^{-1}(A) \in T_1$$

1.2.2 Fonction intégrable($L^1(\Omega)$)

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrables (pour la mesure μ) si elle est mesurable et si :

$$\int_{\Omega} |f(x)| d\mu < \infty$$

1.2.3 Espace de Lebesgue

1. Soit $1 \leq p < \infty$, On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

2. Pour $p = \infty$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$ On note :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Théoreme 1.1. (*Inégalité de Hölder*)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$f \cdot g \in L^1 \text{ et } \|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

1.3 Espace de Sobolev

1.3.1 Les espaces H^m

Définition 1.1. (Espace de Sobolev d'ordre 1)

L'espace $H^1(\Omega)$ est l'espace fermé des $f \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées $\partial_1 f \dots \partial_n f$ appartiennent à $L^2(\Omega)$ est noté par :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) / \partial_i f \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

Définition 1.2. (Espace de Sobolev d'ordre m)

L'espace de Sobolev d'ordre m est l'espace fermé de $f \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées $\partial_1^\alpha f \dots \partial_n^\alpha f$ appartiennent à $L^2(\Omega)$ avec $|\alpha| \leq m$ est noté par :

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) / \partial^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tq } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq m\}$$

1.3.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est définie comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H^1}$, et alors par construction est un espace de Hilbert (comme sous-espace fermé de l'espace de Hilbert). Dans le cas Ω borné, la relation entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ est simple telle que :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

ou $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions tests.

Définition 1.4. (Coercivité) :

On dit qu'une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq M|v|^2, \forall v \in H$$

Remarque 1.1. $a(u, v)$ une forme bilinéaire ssi :

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$$

$$a(\alpha u_1 + \beta u_2, v_1) = \alpha a(u_1, v_1) + \beta a(u_2, v_1)$$

$$a(u_1, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u_1, v_1) + \beta a(u_1, v_2)$$

Définition 1.5. (Continuité) :

On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|, \forall u, v \in H$$

Théoreme 1.2. (*Lax -Milgram*)

V espace de Hilbert, l une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire coercive et continue alors le problème : trouver u telle que

$$a(u, v) = l(v), \forall v \in H$$

admet une solution unique.

Définition 1.6. (*Monotonie*) :

Un opérateur $T : X \rightarrow X^*$ sur un espace vectoriel topologique X (muni d'un produit scalaire) est appelé opérateur monotone si

$$(Tu - Tv, u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.7. (*Gradient*)

C'est une généralisation de la notion de la dérivée pour une fonction à plusieurs variables. Soit f une fonction de x, y et z , on peut définir ses trois dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ (si la fonction est continue et différentiable). A partir de ces trois valeurs, on peut construire un vecteur, le gradient, qu'on note grad ou $\vec{\nabla}$.

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Définition 1.8. (*Divergence*)

La divergence est un opérateur vectorielle qui mesure le défaut de conservation de volume sous l'action du flux d'un champ de vecteur. La divergence d'un champ de

vecteur $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ a pour expression

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Théoreme 1.3. (*Inégalité de Poincaré*)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Définition 1.9. (*Symétrique*)

$\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est symétrique si $\exists \lambda_-, \lambda_+ > 0$ tels que pour $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_- \|\xi\|^2 \leq (\Lambda(x)\xi, \xi) \leq \lambda_+ \|\xi\|^2$$

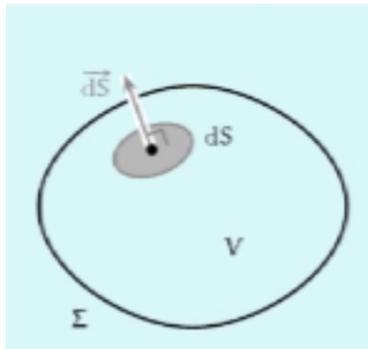
Théoreme 1.4. (*Ostrogradski*)

Soit \vec{E} un champ vectoriel dérivable en tout point situé à l'intérieur d'un volume d'intégration V délimité par la surface fermée Σ . Le flux de \vec{E} sortant de Σ est égal à l'intégrale de la divergence du champ \vec{E} sur tout le volume V délimité par Σ [1]

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} d\tau.$$

où :

- * V est le volume.
- * Σ est la somme des flux élémentaires sortant des volumes $d\tau$ dans Σ .
- * $d\vec{s}$ est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de norme égale à l'élément de surface qu'il représente.
- * div est la divergence.



1.4 Les Espaces Sobolev Pondérés

Pour tout espace de Hilbert $G(\Omega)$ de classe de fonctions définies sur Ω , on note $L^2((0, T); G(\Omega))$ l'espace défini par [14]

$$L^2\left((0, T); G(\Omega)\right) = \left\{ v/v(\cdot, t) \in G(\Omega) \text{ i.e } \forall t \in (0, T); \|v(\cdot, t)\|_G \in L^2((0, T)) \right\}, \quad (1.1)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme usuelle sur $G(\Omega)$. La norme sur cet espace est noté par $\|\cdot\|_{L^2(0,T;G(\Omega))}$ et elle est définie par :

$$\|v\|_{L^2(0,T;G(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v(\cdot, t)\|_G^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

L'espace de toutes les fonctions intégrables au carré pondéré est défini comme :

$$L_\omega^2(\Omega) = \left\{ v : \|v\|_\omega < \infty \right\}, \quad (1.3)$$

et le produit scalaire pondéré correspondant sur $L_\omega^2(\Omega)$ par :

$$(u, v)_\omega = \int_\Omega x^2 uv dx. \quad (1.4)$$

L'opérateur black-scholes étant dégénéré, on introduit une L^2 – norme $\|\cdot\|_\omega$ définie par

$$\|v\|_\omega = \left(\int_\Omega x^2 v^2 dx \right)^{1/2} \text{ avec } \omega = x^2 \quad (1.5)$$

Ainsi, on définit les espaces sobolev pondérés comme suit :

$$H_\omega^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \exists g \in L_\omega^2(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega v \varphi' = - \int_\Omega g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega) \right\}. \quad (1.6)$$

Notez qu'en (1.6), $g = v'$ c'est le dérivé faible. Nous désignons également par :

$$H_{0,\omega}^1(\Omega) = \left\{ v : v \in H_\omega^1(\Omega) \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (1.7)$$

En utilisant les produits scalaires sur $L^2(\Omega)$ et $L_\omega^2(\Omega)$, on définit la norme $\|\cdot\|_{1,\omega}$ sur $H_\omega^1(\Omega)$ par :

$$\|v\|_{1,\omega} = \left[\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v'\|_\omega^2 \right]^{1/2} = \left[(v, v) + (x^2 v', v') \right]^{1/2}. \quad (1.8)$$

CHAPITRE 2

SCHÉMA DE TYPE VOLUMES FINIS

Sommaire

2.1	La Méthode des Volumes Finis	13
2.2	Schéma de Volume Fini	13
2.3	Maillage	14
2.4	Schéma TPFA (Two-point flux Approximation)	15
2.4.1	Coercivité :	16
2.4.2	Monotonie :	16
2.5	Méthodes MPFA(Multiple-Point Flux Approximation)	17
2.5.1	Méthode O	18
2.5.2	Méthodes L et G	18

2.1 La Méthode des Volumes Finis

La méthode des volumes finis (MVF) est une technique numérique qui transforme les équations aux dérivées partielles représentant les lois de conservation sur des volumes différentiels en équations algébriques discrètes sur des volumes finis (ou éléments ou cellules) dans une façon similaire à la méthode des différences finies ou des éléments finis. La première étape du processus de résolution est la discrétisation du domaine géométrique, qui dans la MVF est discrétisé en éléments non superposés ou en volumes finis. Les équations aux dérivées partielles sont ensuite discrétisées, transformées en équations algébriques en intégrant ensuite sur chaque élément discret. Le système d'équations algébriques est ensuite résolu pour calculer les valeurs de la variable dépendante pour chacun des éléments.

2.2 Schéma de Volume Fini

Les processus de diffusion sont en physique des écoulements comme la propagation de la chaleur ou des écoulements dans des milieux poreux rencontrés dans l'ingénierie des réservoirs. Une forme simple de l'équation de diffusion est :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\Lambda(x)\nabla\bar{u}(x)) = f(x) & x \in \Omega \\ \bar{u}(x) = \bar{u}_b & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω est le domaine d'étude, f décrit les sources ou puits volumiques, Λ code pour les propriétés de diffusion du milieu, \bar{u}_b est la condition aux limites fixée et u est l'inconnu d'intérêt (pression, saturation). Bien que très simplifié par rapport aux modèles réels.

Les hypothèses sur les données sont :

$H_1)$ Ω est un sous-ensemble ouvert polygonal connecté borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$

$H_2)$ $f \in L^2(\Omega)$, $\bar{u}_b \in H^{1/2}(\Omega)$

$H_3)$ $\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une valeur symétrique, essentiellement bornée et coercive.

f ou \bar{u}_b . La formulation variationnelle appropriée de (2.1) est donc dénotant par :

$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'opérateur de trace

$$\begin{cases} \bar{u} \in \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = \bar{u}_b\} \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \Lambda(x)\nabla\bar{u}(x) \cdot \nabla\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \end{cases} \quad (2.2)$$

Le principe physique qui conduit à (2.1) est l'équilibre d'une certaine quantité étendue φ (chaleur, masse du composant, etc...) étant donné un domaine Ω , la variation de φ à l'intérieur de Ω provient de la création de φ dans Ω et de le transfert de φ à travers $\partial\Omega$.

Dans un contexte stationnaire, il n'y a pas de variation de φ et la création volumique à l'intérieur de Ω doit donc équilibrer la quantité de φ qui laisse Ω à $\partial\Omega$. Sous les hypothèses de modélisation, la création de φ à l'intérieur de Ω a une fonction de densité volumétrique f et l'écoulement de φ à l'extérieur de Ω a une densité surfacique $-\Lambda(x)\nabla\bar{u}(x)\cdot n_\Omega(x)$ (loi de Darcy ou Fourier), où n_Ω est l'unité extérieure normale à $\partial\Omega$ et $\Lambda(x)$ est une matrice symétrique définie positive dans l'ingénierie des réservoirs. Le bilan de masse de φ lit alors :

$$\int_{\partial\Omega} -\Lambda(x)\nabla\bar{u}(x)\cdot n_\Omega(x)ds(x) = \int_{\Omega} f(x)dx. \quad (2.3)$$

En utilisant la formule de Stokes sur le terme gauche, en prenant Ω une boule autour de $x \in \Omega$, en divisant par la mesure de Ω et en laissant son rayon tendre vers 0 conduit à (2.1). C'est la technique du volume de contrôle pour dériver l'équation de diffusion.

Par contre, si on considère une approche de volume de contrôle "fini" dans laquelle $\Omega = K$ est un ensemble ouvert polygonal alors (2.3) devient :

$$\sum_{\sigma \text{ bord de } K} \bar{F}_{K,\sigma} = \int_K f(x)dx \quad (2.4)$$

où $\bar{F}_{K,\sigma} = \int_{\sigma,K} -\Lambda(x)\nabla\bar{u}(x)\cdot n_K(x)ds(x)$ est le flux de \bar{u} à travers σ . On peut également remarquer que si σ est une arête entre deux polygones K et L , alors :

$$\bar{F}_{K,\sigma} + \bar{F}_{L,\sigma} = 0 \quad (2.5)$$

2.3 Maillage

Un maillage de Ω est $(\mathcal{M}, \xi, \mathcal{P})$ où :

- * \mathcal{M} est une famille finie de polygones disjoints ouverts non vide (les "volumes de contrôle" ou "cellules") tels que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \bar{K}$.
- * ξ est une famille finie de sous-ensembles planaires disjoints non vides de Ω (les "arêtes") avec une mesure dimensionnelle positive $(n - 1)$. Nous supposons que pour chaque volume de contrôle K il existe $\xi_K \subset \xi$ tel que $\partial K = \cup_{\sigma \in \xi_K} \bar{\sigma}$.

Nous supposons également que chaque arête $\sigma \in \xi$ appartient à exactement un ou deux ensembles $(\xi_K)_{K \in \mathcal{M}}$.

* \mathcal{P} est une famille de points $(x_K)_{K \in \mathcal{M}}$ tels que, pour chaque $K, x_K \in K$

On note $|K|$ la mesure n-dimensionnelle de $K \in \mathcal{M}$, par $|\sigma|$ la mesure (n-1)-dimensionnelle de $\sigma \in \xi$ et par $n_{K,\sigma}$ l'unité normale à $\sigma \in \xi_K$ vers l'extérieur de K . Nous divisons également ξ en les bords intérieurs ξ_{int} (ceux inclus dans Ω) et les bords extérieurs ξ_{ext} (ceux inclus dans $\partial\Omega$). La taille du maillage est $h_{\mathcal{M}} = \max_{K \in \mathcal{M}} \text{diam}(K)$. Nous prenons également Λ_K une valeur de Λ dans K (par exemple $\frac{1}{|K|} \int_K \Lambda$ ou $\Lambda(x_K)$, dans les applications de réservoir, Λ est constant dans chaque cellule K) [3].

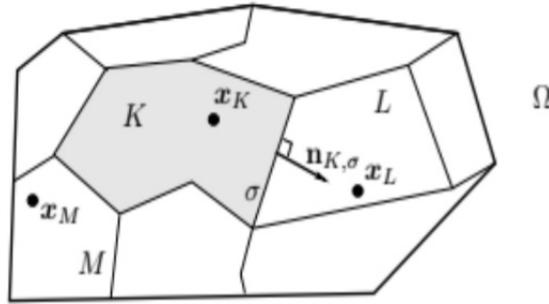


FIGURE 2.1 – un maillage de Ω

2.4 Schéma TPFA (Two-point flux Approximation)

Supposons que le milieu soit isotrope, c'est-à-dire $\Lambda(x) = \lambda(x)Id$ pour une fonction scalaire λ . On suppose également les conditions d'orthogonalité suivantes sur le maillage :

$$\begin{cases} \forall \sigma \text{ arête entre deux volumes de contrôle } K, L \in \mathcal{M}, (x_K x_L) \perp \sigma \\ \forall \sigma \in \xi_{ext} \cap \xi_K, \text{ la demi-ligne } x_k + [0, \infty) n_{K,\sigma} \text{ intersecte } \sigma. \end{cases} \quad (2.6)$$

Dans la Figure 2.1, par exemple, cette hypothèse est satisfaite par l'arête σ entre K et L mais pas par l'arête entre K et M .

Soit $\{x_\sigma\} = \{x_K x_L\} \cap \sigma$ (ou $\{x_\sigma\} = (x_K + [0, \infty) n_{K,\sigma}) \cap \sigma$) si $\sigma \in \xi_{ext}$, les approximations consistantes des flux pour les petits h_M sont :

$$\text{Si } \sigma \in \xi_K \cap \xi_L : F_{K,\sigma} = \lambda_K |\sigma| \frac{u_K - u_\sigma}{d(x_K, x_\sigma)} \text{ et } F_{L,\sigma} = \lambda_L |\sigma| \frac{u_L - u_\sigma}{d(x_L, x_\sigma)}, \quad (2.7)$$

$$\text{Si } \sigma \in \xi_{\text{ext}} \cap \xi_K : F_{K,\sigma} = \lambda_K |\sigma| \frac{u_K - u_\sigma}{d(x_K, \sigma)} \quad (2.8)$$

où $d(a, b) = |a - b|$, λ_K est la valeur de λ sur K et u_σ se rapproche de $\bar{u}(x_\sigma)$. Si $\sigma \in \xi_K \cap \xi_L$, u_σ est fixé par \bar{u}_b . Si $\sigma \in \xi_K \cap \xi_L$, l'inconnu supplémentaire u_σ est éliminé en imposant la conservativité des flux (2.5), on obtient :

$$F_{K,\sigma} = \tau_\sigma (u_K - u_L) \text{ avec } \tau_\sigma = \frac{|\sigma|}{d(x_K, x_L)} \frac{\lambda_K \lambda_L d(x_K, x_L)}{\lambda_K d(x_L, x_\sigma) + \lambda_L d(x_K, x_\sigma)}. \quad (2.9)$$

L'équation d'équilibre (2.4) des flux discrets (2.8)-(2.9) donne alors schéma de volume fini pour (2.1) quand $\Lambda = \lambda Id$, appelé schéma de volumes fini d'approximation de flux à deux points (TPFA) puisque chaque flux est calculé en utilisant uniquement les 2 inconnues de chaque coté du bord.

2.4.1 Coercivité :

Supposons que $\bar{u}_b = 0$ et donc que $u_\sigma = 0$ pour tous $\sigma \in \xi_{\text{ext}}$. En multipliant l'équation d'équilibre (2.4) par u_K en sommant sur $K \in \mathcal{M}$ et en regroupant par arêtes (intégration discrète par parties), on obtient grâce à (2.9),

$$\|u\|_{1,\text{disc}}^2 = \sum_{\sigma \in \xi_{\text{int}}} \tau_\sigma (u_K - u_L)^2 + \sum_{\sigma \in \xi_{\text{ext}}} \tau_\sigma u_K^2 = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx \quad (2.10)$$

où u est la fonction constante par morceaux égale à u_K sur K et dans les sommes, K et L sont les volumes de contrôle de chaque côté d'un $\sigma \in \xi_{\text{int}}$ (soit $\tau_\sigma = \lambda_K \frac{|\sigma|}{d(x_K, \sigma)}$ quand $\sigma \in \xi_{\text{ext}} \cap \xi_K$). La partie gauche de (2.10) définit une norme H_0^1 discrète $\|u\|_{1,\text{disc}}$, pour laquelle on peut établir l'inégalité discrète de Poincaré $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1,\text{disc}}$. voir [13]

Le schéma TPFA est donc coercive (avec une matrice symétrique) et sa convergence peut être prouvée sous les seules hypothèses H_1 - H_3 . Bien entendu, des estimations d'erreurs peuvent également être obtenues si les données sont plus régulières.

2.4.2 Monotonie :

En injectant (2.8)-(2.9) dans l'équation d'équilibre (2.4), nous obtenons avec les mêmes conventions qu'en (2.10), pour tout $K \in \mathcal{M}$,

$$\sum_{\sigma \in \xi_{\text{int}}} \tau_\sigma (u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \xi_{\text{ext}}} \tau_\sigma u_K = \int_K f(x) dx + \sum_{\sigma \in \xi_{\text{ext}}} \tau_\sigma u_\sigma. \quad (2.11)$$

D'après cette expression, nous pouvons voir que la fonction du schéma peut s'écrire $S(U) = A(u_K)_{K \in \mathcal{M}} - C(u_\sigma)_{\sigma \in \xi_{ext}}$, avec A dominant en diagonale, symétrique et connecté au graphe, et tous les coefficients de C sont non négatives. Le schéma TPFA est donc monotone.[3]

2.5 Méthodes MPFA(Multiple-Point Flux Approximation)

Les approximations cohérentes des flux $\bar{F}_{K,\sigma}$ sur les maillages généraux nécessitent l'utilisation de valeurs plus approchées de \bar{u} (dans les cellules, sur les bords ou aux sommets) que les deux à x_K et x_L de chaque côté de σ . Un moyen simple d'obtenir de telles valeurs consiste à les interpoler à partir des inconnues de la cellule. C'est le chemin choisi dans la réf [4] qui introduit, pour chaque arête(bord), des valeurs de cellules supplémentaires situées aux points satisfaisant la condition d'orthogonalité [8] pour l'arête considérée (2.12).

$$\begin{cases} \forall \sigma \text{ entre deux volumes de contrôle } K, L \in M, D_{K,\sigma} \cap \sigma = D_{L,\sigma} \cap \sigma \neq \emptyset \\ \forall \sigma \in \xi_{ext} \cap \xi_K, D_{K,\sigma} \cap \sigma \neq \emptyset \end{cases} \quad (2.12)$$

Puis calculer ces valeurs par des combinaisons convexes de cellules inconnues existantes. Ce pendant, la construction et la stabilité de ce schéma ne peuvent être assuré que pour des maillages pas trop déformés et des tenseurs pas trop anisotropes. Une autre idée n'est pas d'essayer de récupérer la condition d'orthogonalité (2.12), mais d'utiliser les valeurs supplémentaires pour calculer des gradients approximatifs, qui à leur tour donnent flux approximatifs $F_{K,\sigma}$. Ce pendant, le calcul des valeurs supplémentaires doit être fait de manière astucieuse, en particulier lorsque Λ est discontinu, pour s'assurer que la conservativité du flux (2.5) est satisfaite.

Les schémas d'approximation de flux multiple-point (MPFA) sont basés sur une telle construction. Introduites entre le milieu et la fin des années 90's, ces méthodes supposent que la solution est linéaire par morceaux dans certaines sous-cellules autour de chaque sommet, introduire des inconnues de bord supplémentaires et exprimer la variation linéaire de la solution pour calculer les gradients et donc les flux dans ces sous-cellules. Les inconnues de bord sont ensuite éliminées (interpolées à l'aide d'inconnues de cellule) en écrivant des équations de continuité pour la solution et les équations de conservativité pour ses flux. Les flux numériques finaux sont cohérents, conservateurs et exprimé uniquement en termes d'inconnues cellulaires.

2.5.1 Méthode O

Plusieurs méthodes MPFA ont été conçues au fil des ans et leur principale variation réside dans le choix des équations locales de continuité et de conservativité. Parmi ces méthodes, la méthode O (présentée dans les références [5], [6] pour des maillages polygonaux particuliers) a reçu l'une des plus grandes couvertures de la littérature sur les méthodes MPFA.

Considérons d'abord le cas 2D. Pour chaque arête σ , on fixe un point \bar{x}_σ sur σ . Plusieurs choix sont possibles mais on ne considère ici que le cas où \bar{x}_σ est le milieu de σ . Puis, pour chaque sommet v du maillage, une région d'interaction est construite dans la figure (2.2).

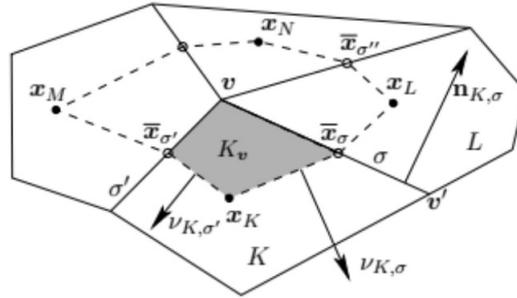


FIGURE 2.2 – Volumes de contrôle (K, L, \dots) et région d'interaction (entourée en pointillés) pour la MPFA méthode O. $\nu_{k,\tau} =$ vecteur normal à (x_k, \bar{x}_τ) de longueur $d(x_k, \bar{x}_\tau)(t = \sigma, \sigma')$

2.5.2 Méthodes L et G

Comme déjà mentionné, de nombreux choix sont disponibles pour calculer des flux conservateurs cohérents à partir d'approximations linéaires par morceaux de \bar{u} autour de chaque sommet. Une autre méthode MPFA bien étudiée est la méthode L, introduite dans ref [7] pour les maillages quadrilatères. Les principales différences entre la méthode L et la méthode O sont :

- * Aucun inconnus de bord doivent être introduits comme le gradient sont eux-mêmes des inconnues supplémentaires pour éliminer.
- * Les équations de continuité et de la conservativité des sous-flux sont écrites uniquement sur 2 arêtes.

- * La continuité de l'approximation linéaire par morceaux est imposé à des bords entiers (non seulement aux points médians des bords).
- * Les gradients et l'approximation linéaire par morceaux construits sur des sous-cellules K_v, L_v, \dots , dépendent de l'arête σ à travers lequel on veut calculer le flux et ne sont donc pas communs à tous les sous-flux autour de v .

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Sommaire

3.1	La formulation en volume fini	21
3.1.1	Maillages	21
3.1.2	Black-Scholes EDP	21
3.1.3	Résolution de l'équation de la chaleur sans second membre	25
3.1.4	Résolution générale de l'équation de la chaleur avec conditions initiales	26
3.1.5	La Méthodes des Volumes Finis	27
3.1.6	Méthode TPFA (Two-Point Flux Approximation)	28
3.2	Estimations complètes de la discrétisation et des erreurs	31
3.2.1	Estimations des erreurs	31
3.3	Expériences numériques	32
3.4	Présentation de la méthode MPFA	33
3.4.1	Principe de discrétisation	33
3.4.2	Calcul des transmissivités	33
3.4.3	Principe de discrétisation pour la méthode proposée	36
3.4.4	Définition de la solution approchée	36
3.4.5	Discrétisation du problème	37
3.5	Propriétés de la méthode	39
3.6	Tests numériques et comparaison aux MPFA	41

3.1 La formulation en volume fini

3.1.1 Maillages :

Soit Ω subdivisé en sous-intervalles comme suit :

$$\Omega_i = [x_i; x_{i+1}] \quad i = 0, \dots, N, \quad (3.1)$$

avec $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = x_{max}$ et $h_i = x_{i+1} - x_i$. Nous avons également défini les points médians suivants des intervalles Ω_i par

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \text{ et } x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N + 1,$$

avec $x_{-\frac{1}{2}} = x_0$ et $x_{N+\frac{3}{2}} = x_{max}$. Ces mod-points nous aident à définir une autre partition K_i de Ω , appelée partition double, définie par

$$K_i = [x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}] \quad l_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Hypothèse 3.1. *[Quasi-uniformité locale du maillage spatial]*

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{l_{i+1}}{c} \leq l_i \leq cl_{i+1} \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Puisque la partition double K_i est liée à la partition Ω_i , Hypothèse 3.1 implique que

$$\frac{h_{i+1}}{c} \leq h_i \leq ch_{i+1} \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

3.1.2 Black-Scholes EDP

Les mathématiques ont depuis longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de la finance. Une des caractéristique de ces questions -il suffit de penser à la bourse pour s'en convaincre - est qu'elles font apparaître des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation. Depuis de nombreux probabilistes se sont penchés sur ces questions raffinant sans cesse les modèles utilisés. Mais c'est sans nul doute grâce aux travaux de BLACK, MERTON et SCHOLES que ces questions sont devenues si populaires en partie à cause de la simplicité des réponses qu'ils ont apportées.

En 1973, BLACK et SHOLES ont proposé une formule, qui porte aujourd'hui leurs noms. Cette formule est très utilisée en pratique à tel point que la volatilité implicite qu'elle définit est devenue une véritable unité de mesure. Le modèle mathématique qui décrit le marché financier est à la fois simple et efficace.

$$LV := \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t)x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - r(t)x\frac{\partial V}{\partial x} + r(t)V = 0, \quad (3.4)$$

$\forall(x, t) \in \Omega = (0, x_{max}) \times (0, T]$, où V est la valeur de l'option, x le cours de l'action, σ la volatilité, r l'intérêt sans risque, t est le temps et T est le temps de maturité. Les conditions initiales et aux limites correspondantes sont :

$$\begin{cases} V(x, 0) & = g_1(x) \\ V(0, t) & = g_2(t) \\ V(x_{max}, t) & = g_3(t), \end{cases} \quad (3.5)$$

où g_1, g_2 et g_3 sont des fonctions dépendant du type d'options que nous proposons. Notre étude est menée sous l'hypothèse suivante.[14]

Hypothèse 3.2. *On suppose que les coefficients r et σ sont suffisamment réguliers*

$$0 \leq r(t) \leq \bar{r} \quad \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} \quad (3.6)$$

et on note par

$$\beta := \sup_{t \in [0, T]} \sigma^2(t). \quad (3.7)$$

En multipliant par $e^{\beta t}$ et en ajoutant $f(x, t) = -e^{\beta t}LV_0(x)$ aux deux côtés de (3.4), on peut donc transformer les conditions aux limites en (3.5) à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes en utilisant la transformation linéaire suivante

$$V_0(x, t) = g_2(t) + \frac{x}{x_{max}} \left(g_3(t) - g_2(t) \right). \quad (3.8)$$

De plus, on introduit une nouvelle variable $u = e^{\beta t}(V - V_0)$ et nous obtenons ce nouveau EDP sous sa forme de divergence suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(t)x^2\frac{\partial u}{\partial x} + b(t)xu \right] + c(t)u = f(x, t), \quad (3.9)$$

où

$$a(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(t), \quad b(t) = r(t) - \sigma^2(t), \quad c(t) = 2r(t) - \beta - \sigma^2(t), \quad (3.10)$$

avec les conditions aux limites initiales et homogènes suivantes

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 = u(x_{max}, t) & t \in [0, T) \\ u(x, 0) = g_1(x) - V_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

Il peut être prouvé que la résolution (3.9)-(3.11) est équivalente au problème suivant :

Théorème 3.1. *Le problème déterminer la fonction $u \in L^2(0, T, H_{0,\omega}^1(\Omega))$ a une solution unique telle que*

$$(u'(t), v) + A(u, v; t) = (f, v) \quad \forall v \in H_{0,\omega}^1(\Omega) \quad (3.12)$$

avec

$$A(u, v; t) := (ax^2u' + bxu, v') + (cu, v). \quad (3.13)$$

Preuve 3.1. *Il existe deux constantes positives C et M tel que pour tout $v, z \in H_{0,\omega}^1(\Omega)$,*

Coercivité :

$$A(v, v; t) \geq C \|v\|_{1,\omega}^2 \quad (3.14)$$

L'intégration par parties. Donne, pour tout $v \in H_{0,\omega}^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} bxvv' = \frac{1}{2}bxv^2 \Big|_{\partial\Omega} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} bv^2 dx. \quad (3.15)$$

Puisque $v \in H_{0,\omega}^1(\Omega)$, alors $v|_{\partial\Omega} = 0$. Donc

$$\int_{\Omega} bxvv' = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} bv^2 dx. \quad (3.16)$$

En effet, on a aussi

$$\begin{aligned} A(v, v; t) &= (ax^2v', v') + (bxv, v') + (cv, v) \\ &= (ax^2v'; v') - \frac{1}{2}(bv, v) + (cv, v) \\ &= (ax^2v'; v') + \frac{1}{2}((-r(t) + \sigma^2(t) + 4r(t) + 2\beta - 2\sigma^2(t))v, v) \\ &= (ax^2v', v') + \frac{1}{2}((3r + 2\beta - \sigma^2)v, v). \end{aligned}$$

En utilisant (3.7), on a $2\beta - \sigma^2 > 0$ qui conduit à

$$\begin{aligned} A(v, v; t) &\geq \frac{1}{2}\sigma^2(x^2v', v') + \frac{1}{2} \cdot 3r(v, v) \\ &\geq \frac{1}{2} \min(\underline{\sigma}^2, 3r) \left[(x^2v', v') + (v, v) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$A(v, v; t) \geq C \|v\|_{1,\omega}^2. \quad (3.18)$$

avec $C = \frac{1}{2} \min(\underline{\sigma}^2, 3r)$. Alors A est coercive.

Continuité :

$$A(z, v; t) \leq M \cdot \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v\|_{1,\omega} \quad (3.19)$$

L'inégalité de Hölder, on a

$$(x^2 z', v') = (xz', xv') \leq \|xz'\|_{L^2}^2 \cdot \|xv'\|_{L^2}^2 \quad (3.20)$$

et

$$(xz, v') \leq \|xz\|_{L^2}^2 \cdot \|v'\|_{L^2}^2 \quad (3.21)$$

En utilisant (3.6), (3.7), on a $\frac{1}{2}\underline{\sigma}^2 < a < \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2$, $b < \bar{r} - \underline{\sigma}^2$,

$\beta = \sup \sigma^2 < \bar{\sigma}^2$, $2r < 2\bar{r}$, $-\sigma^2 < -\underline{\sigma}^2$, $c \leq 2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2$ qui conduit à

$$\begin{aligned} \left| A(z, v; t) \right| &\leq \left| \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x^2 z', v') + (\bar{r} - \underline{\sigma}^2)(xz, v') + (2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2)(z, v) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \|xz'\|_{L^2}^2 \cdot \|xv'\|_{L^2}^2 + (\bar{r} - \underline{\sigma}^2) \cdot \|xz\|_{L^2}^2 \cdot \|v'\|_{L^2}^2 + (2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2) \|z\|_{L^2}^2 \cdot \|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \|z'\|_{\omega}^2 \cdot \|v'\|_{\omega}^2 + (\bar{r} - \underline{\sigma}^2) \cdot \|z\|_{\omega}^2 \cdot \|v'\|_{1,\omega} + (2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2) \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v\|_{1,\omega} \\ &\leq \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v\|_{1,\omega} + (\bar{r} - \underline{\sigma}^2) \cdot \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v'\|_{1,\omega} + (2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2) \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v\|_{1,\omega} \\ &\leq \max\left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2, (\bar{r} - \underline{\sigma}^2), 2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2\right) \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v\|_{1,\omega} \\ &\leq M \cdot \|z\|_{1,\omega} \cdot \|v\|_{1,\omega} \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec $M = \max\left(\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2, (\bar{r} - \underline{\sigma}^2), 2\bar{r} + \bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2\right)$. Alors A est continu .

La continuité de (f, v)

$$\begin{aligned} (f, v) = \int_{\Omega} f(x, t)v &\leq \sup |f| \int_{\Omega} 1v \\ &\leq \sup |f| \cdot \left(\int_{\Omega} (1)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} (v)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup |f| \cdot (\text{mes}(\Omega))^{1/2} \cdot \|v\|_{L^2} \\ &\leq \sup |f| \cdot (\text{mes}(\Omega))^{1/2} \cdot \|v\|_{1,\omega} \\ &\leq N \cdot \|v\|_{1,\omega} \end{aligned}$$

avec $N = \sup |f| \cdot (\text{mes}(\Omega))^{1/2}$.

D'après théorème de Lax-Miligram, le problème admet une solution unique.

Considérons une nouvelle forme de Black-Scholes EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = ru(t, x), & \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}_+ \\ u(T, x) = h(x), \text{ avec } h(x) = (x - k)^+, \forall x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\text{Où } b(t) = -r(t), \quad a(t) = -\frac{\sigma^2}{2}, \quad c(t) = -r(t), \quad f(x, t) = 0$$

3.1.3 Résolution de l'équation de la chaleur sans second membre

On commence par résoudre l'équation de la chaleur car l'EDP de Black-Scholes se ramène à cette équation.

Solution fondamentale

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.24)$$

Remarque 3.1. Si la solution $u(x, t)$ d'une équation aux dérivées partielles dépend seulement d'une combinaison de deux variable indépendantes, le problème peut être réduit à une équation différentielle ordinaire dans laquelle cette combinaison est la variable.

Ici on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'invariance, $x \mapsto \lambda x$, $t \mapsto \lambda^2 t$.

Ainsi avec les nouvelles variables $X = \lambda x$ et $T = \lambda^2 t$, on a $\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$

$\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{X}{\sqrt{T}}$ est la seule combinaison de X et T qui est indépendante de λ , on

cherchera une solution de la forme $u_\delta(x, t) = t^{-1/2} U_\delta(\xi)$ avec $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

On dérive par rapport au temps et deux fois en espace, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\delta}{\partial t} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \xi U'_\delta(\xi) - \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} U_\delta(\xi) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{-\frac{3}{2}} U''_\delta(\xi). \end{cases}$$

Soit, en réinjectant dans l'équation de la chaleur :

$$U_\delta''(\xi) + \frac{1}{2}U_\delta(\xi) + \frac{1}{2}\xi U_\delta'(\xi) = 0,$$

\Leftrightarrow

$$U_\delta''(\xi) + \left(\frac{1}{2}\xi U_\delta(\xi)\right)' = 0.$$

On prend la primitive

$$\int U_\delta'' + \int \left(\frac{1}{2}\xi U_\delta(\xi)\right)' = U_\delta' + \frac{1}{2}\xi U_\delta(\xi) = 0.$$

On divise par U_δ puis on prend à nouveau la primitive

$$\int \frac{U_\delta'}{U_\delta} = - \int \frac{1}{2}\xi d\xi,$$

$$\ln \frac{(U_\delta)}{C} = -\frac{1}{4}\xi^2,$$

où C est une constante. On obtient alors

$$U_\delta = C e^{-\frac{1}{4}\xi^2}.$$

On normalise la solution choisissant $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ pour avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} u_\delta(x, t) dx = 1$. On a donc

$$\begin{cases} u_\delta(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \\ u_\delta(x, 0) = \delta(x) \quad \text{où } \delta(\cdot) \text{ représente la fonction Dirac.} \end{cases} \quad (3.25)$$

3.1.4 Résolution générale de l'équation de la chaleur avec conditions initiales

Dans cette section on va s'occupe du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

où $u_0(x)$ se comporte suffisamment bien, c'est à dire

$$\begin{cases} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) e^{-ax^2} = 0, \quad \forall a > 0, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, t) e^{-ax^2} = 0, \quad \forall a > 0, t > 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Soit v défini par

$$\begin{cases} v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds, \\ v(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) u_\delta(s-x, 0) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \delta(s-x) ds = u_0(x). \end{cases}$$

Montrons que v est solution du système précédent. D'après la partie commune de cette présentation, on sait que v de classe C et plus, d'après les conditions de régularité sur u_0 on peut appliquer le théorème d'inversion dérivée-intégrale de Leibnitz, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \frac{(s-x)^2}{8t^2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \frac{s-x}{2t} e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) \frac{(s-x)^2}{8t^2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4t}} ds \end{aligned}$$

v est donc bien solution du système étudié.

3.1.5 La Méthodes des Volumes Finis

En intégrant (3.9) sur chaque intervalle K_i pour $i = 0, 1, \dots, N$.

$$\int_{K_i} \frac{\partial u}{\partial t} dx - \int_{K_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[ax^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bxu \right] dx + \int_{K_i} cudx = \int_{K_i} f(x, t) dx. \quad (3.27)$$

En multipliant (3.27) par un nombre réel arbitraire v_i pour chaque $i = 1, \dots, N$ et en les additionnant, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^N \int_{K_i} \frac{\partial u}{\partial t} v_i dx - \sum_{i=1}^N \int_{K_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[ax^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bxu \right] v_i dx + \sum_{i=1}^N \int_{K_i} cuv_i dx = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} f(x, t) v_i dx. \quad (3.28)$$

Par ailleurs, pour une fonction $v \in C(\bar{\Omega})$ nous définissons l'opérateur de regroupement de masse L_h défini comme suit :

$$\begin{aligned} L_h : C(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^\infty(\Omega) \\ v &\mapsto L_h v|_{K_i} := v(x_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

De plus, si la fonction v satisfait les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, on a $L_h v|_{\partial\Omega} = 0$. Puis en utilisant l'opérateur L_h , on peut réécrire (3.28) comme suit :

$$(\dot{u}(t), L_h v) + \hat{a}_h(u(t), v; t) = (f(t), L_h v), \quad (3.29)$$

où

$$\hat{a}_h(\omega, v; t) := \sum_{i=1}^N \left(F(\omega(x_{i+\frac{1}{2}})) - F(\omega(x_{i-\frac{1}{2}})) \right) L_h v(x_i) + (c(t)\omega, L_h \omega), \quad (3.30)$$

avec F désignant le flux continu défini comme suit :

$$F(\omega(x_{i+\frac{1}{2}})) := -a(t)x_{i+\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial \omega}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}) - b(t)x_{i+\frac{1}{2}}\omega(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad i = 0, \dots, N \quad (3.31)$$

Notez que (3.29) est une représentation de la solution exacte sur la double partition K_i et jouera un rôle clé dans analyse d'erreur(MPFA).

3.1.6 Méthode TPF (Two-Point Flux Approximation)

Nous sommes maintenant prêts à approcher u dans la partition double K_i . En effet, nous désignons par $u(x_i, t) \approx u_i$. Pour approcher certains termes intégraux de(3.27), nous utilisons la règle de quadrature moyenne comme suit :[14]

$$\int_{K_i} \frac{\partial u}{\partial t} dx \approx l_i \frac{du_i}{dt}, \quad \int_{K_i} c u dx \approx l_i c u_i, \quad \int_{K_i} f(x, t) dx \approx l_i f_i \quad f_i = f(x_i, t) \quad (3.32)$$

Puisque l'équation de Black-Scholes (3.4) est unidimensionnelle dans l'espace, au lieu de la méthode d'approximation de Flux Multi-point(MPFA), utiliser la méthode d'approximation de Flux en deux point (TPF) pour approcher le deuxième terme suivant de (3.27)

$$\int_{K_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[a x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx. \quad (3.33)$$

La méthode d'approximation de flux en deux points (TPF) est utilisée pour approximer le terme (3.33) comme suit :

$$\int_{K_i} \frac{\partial}{\partial x} \left[a(t)x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx = \left[a(t)x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} = a(t)x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{i+\frac{1}{2}}} - a(t)x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$H(x) = M(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{avec} \quad M(x, t) = \frac{1}{2} \sigma^2(t) x^2. \quad (3.34)$$

Sur un intervalle K_i , $M(x, t)$ en (3.34) sera remplacé par sa valeur moyenne définie comme suit :

$$M_i = \frac{1}{\text{mes}(K_i)} \int_{K_i} \frac{1}{2} \sigma^2(t) x^2 dx = \frac{1}{6} \sigma^2(t) \frac{x_{i+\frac{1}{2}}^3 - x_{i-\frac{1}{2}}^3}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (3.35)$$

où $\text{mes}(K_i)$ est la longueur de l'intervalle K_i . Ainsi à partir de la Figure (3.1), $H_{i+\frac{1}{2}}$ peut être évalué de chaque côté de $x_{i+\frac{1}{2}}$ comme suit :

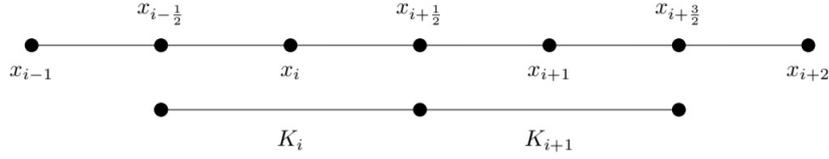


FIGURE 3.1 – :Intervalle

$$H_i = 2M_i \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_i}{l_i}, H_{i+\frac{1}{2}} = 2M_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_{i+\frac{1}{2}}}{l_{i+1}}. \quad (3.36)$$

En utilisant la continuité du flux à l'interface $x_{i+\frac{1}{2}}$, nous pouvons assimiler les deux termes de (3.36). Cela mène à

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{M_i}{l_i} u_i + \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} u_{i+1}}{\frac{M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}}}. \quad (3.37)$$

On pose $T_i = \frac{M_i}{l_i}$, on peut réécrire $H_{i+\frac{1}{2}}$ dans (3.36) comme suit :

$$H_{i+\frac{1}{2}} = \tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i), \tau_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2T_i T_{i+1}}{T_i + T_{i+1}}. \quad (3.38)$$

De plus, pour approcher le troisième terme intégral de (3.27), nous utilisons la méthode de upwind comme suit :

$$\int_{K_i} \frac{\partial}{\partial x} [b(t)xu] dx = [b(t)xu]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \approx b(t) \left(x_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.39)$$

avec

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_i & \text{si } b > 0 \\ u_{i+1} & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Par conséquent, la formulation discrète de (3.27) est :

$$l_i \frac{du_i}{dt} + F_h(u_{i+\frac{1}{2}}) - F_h(u_{i-\frac{1}{2}}) + l_i c u_i = l_i f_i \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.41)$$

où

$$\begin{aligned} F_h(u_{i+\frac{1}{2}}) &= -\tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) - x_{i+\frac{1}{2}} \left(b^+ u_i + b^- u_{i+1} \right), \\ F_h(u_{i-\frac{1}{2}}) &= -\tau_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1}) - x_{i-\frac{1}{2}} \left(b^+ u_{i-1} + b^- u_i \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec $b^+ = \max(b, 0)$ et $b^- = \min(b, 0)$.

De plus, pour analyser le schéma ci-dessus, il convient de le réécrire sous une forme

variationnelle discrète. En multipliant l'équation (3.41) par des nombres réels arbitraires v_i et en additionnant le résultat sur tous les intervalles K_i de Ω , on obtient :

$$\sum_{i=1}^N l_i \frac{du_i}{dt} v_i + \sum_{i=1}^N \left(F_h(u_{i+\frac{1}{2}}) - F_h(u_{i-\frac{1}{2}}) \right) v_i + c \sum_{i=1}^N l_i u_i v_i = \sum_{i=1}^N l_i f_i v_i. \quad (3.43)$$

Notons $V_h \subset H_\omega^1(\Omega)$ l'espace des fonctions continus par morceaux sur la grille (K_i) de Ω .

Ainsi, la méthode TPFA (3.41) équivaut à

$$a_h(u_h, v_h) = a_h^1(u_h, v_h) + a_h^2(u_h, v_h) + c \sum_{i=1}^N l_i u_i v_i \quad u_h, v_h \in V_h, \quad (3.44)$$

avec

$$a_h^1(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^N \left[-\tau_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) + \tau_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1}) \right] v_i, \quad (3.45)$$

et

$$a_h^2(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^N \left[-x_{i+\frac{1}{2}}(b^+ u_{i+1} + b^- u_i) + x_{i-\frac{1}{2}}(b^+ u_{i-1} + b^- u_i) \right] v_i. \quad (3.46)$$

Notons que nous pouvons réécrire la forme bilinéaire dans (3.44) comme :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^N \left(F_h(u_{i+\frac{1}{2}}) - F_h(u_{i-\frac{1}{2}}) \right) v_i + c \sum_{i=1}^N l_i u_i v_i, \quad (3.47)$$

où F_h est le flux discret donné en (3.42).

On écrit (3.41) sous forme matricielle :

Pour le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$, il ya plusieurs schémas à utiliser :

* Schéma explicite :

$$l_i \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - t_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^j - u_i^j) - x_{i+\frac{1}{2}} \left(b^+ u_i^j + b^- u_{i+1}^j \right) + t_{i-\frac{1}{2}}(u_i^j - u_{i-1}^j) \\ + x_{i-\frac{1}{2}} \left(b^+ u_{i-1}^j + b^- u_i^j \right) - l_i c u_i^j = l_i f_i^j$$

$$u_i^{j+1} = A u_{i-1}^j + B u_i^j + C u_{i+1}^j + \Delta t f_i \quad i = 1, \dots, N$$

Avec

$$A = \frac{\Delta t}{l_i} (t_{i-\frac{1}{2}} - b^+ x_{i-\frac{1}{2}}),$$

$$B = 1 + c \Delta t - \frac{\Delta t}{l_i} (t_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}} b^+ + t_{i-\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} b^-),$$

$$C = \frac{\Delta t}{l_i} (t_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}} b^-)$$

* Schéma implicite :

$$\begin{aligned} & l_i \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - t_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - x_{i+\frac{1}{2}} \left(b^+ u_i^{j+1} + b^- u_{i+1}^{j+1} \right) \\ & + t_{i-\frac{1}{2}}(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) + x_{i-\frac{1}{2}} \left(b^+ u_{i-1}^{j+1} + b^- u_i^{j+1} \right) - l_i c u_i = l_i f_i \\ & u_i^j = A' u_{i-1}^{j+1} + B' u_i^{j+1} + C' u_{i+1}^{j+1} + \Delta t f_i^{j+1} \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} A' &= \left(\frac{\Delta t}{l_i} (t_{i-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} b^+) \right), \\ B' &= -1 - \Delta t c + \frac{\Delta t}{l_i} (b^+ x_{i+\frac{1}{2}} - t_{i-\frac{1}{2}} - b^- x_{i-\frac{1}{2}}), \\ C' &= \frac{\Delta t}{l_i} (t_{i+\frac{1}{2}} + b^- x_{i+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

3.2 Estimations complètes de la discrétisation et des erreurs

Soit $0 := t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M := T$ une subdivision de l'intervalle de temps $[0, T]$ avec les tailles de pas $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$, $m \in \{0, \dots, M-1\}$ et $\Delta t = \max_{1 \leq m \leq M-1} \Delta t_m$.

La discrétisation complète de (3.9) en utilisant la combinaison de la méthode TPFA avec le paramètre $\theta \in [0, 1]$ peut être formulée comme : Trouvez une séquence $u_h^1, \dots, u_h^M \in V_h$ tel que pour $m \in \{0, \dots, M-1\}$ [14]

$$\begin{cases} \left(\frac{u_h^{m+1} - u_h^m}{\Delta t_m}, v_h \right) + a_h (\theta u_h^{m+1} + (1-\theta) u_h^m, v_h; t_{m+\theta}) = \left(\theta f^{m+1} + (1-\theta) f^m, v_h \right)_h \\ u^0 = u_{oh} \end{cases} \quad (3.48)$$

3.2.1 Estimations des erreurs

Théoreme 3.2. [14] *Considérons la solution unique u de (3.12) et ζ_h^m la solution numérique du schéma entièrement discrétisé en utilisant la méthode TPFA (3.41) ($\zeta_h^m = u_h^m$). Soit $\theta \in [1/2; 2]$, si $u \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $F(u) \in C(0, T, H^1(\Omega))$, alors il existe une constante positive C , indépendante de h , Δt , M et N tel que*

$$\|u(t_m) - \zeta_h^m\|_{0,h} \leq C(h + \Delta t). \quad (3.49)$$

3.3 Expériences numériques

Dans cette section, on réalise des expériences numériques pour un problème de tarification d'options d'achat européenne. L'erreur est calculée par rapport à la solution analytique suivante du Black-Scholes EDP ([12]) :

$$c(x, t) = xN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2), \quad (3.50)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}. \quad (3.51)$$

avec t le temps de maturité et $N(\cdot)$ la fonction de distribution normale cumulative standard. Le domaine de calcul est $\Omega = [0, x_{max}] \times [0, T]$ et le temps de maturité $T = 1$. Ces expériences numériques sont effectuées en utilisant le taux d'intérêt sans risque $r = 0.1$, la volatilité $\sigma = 0.5$ et le prix d'exercice $K = 100$. Ici nous avons

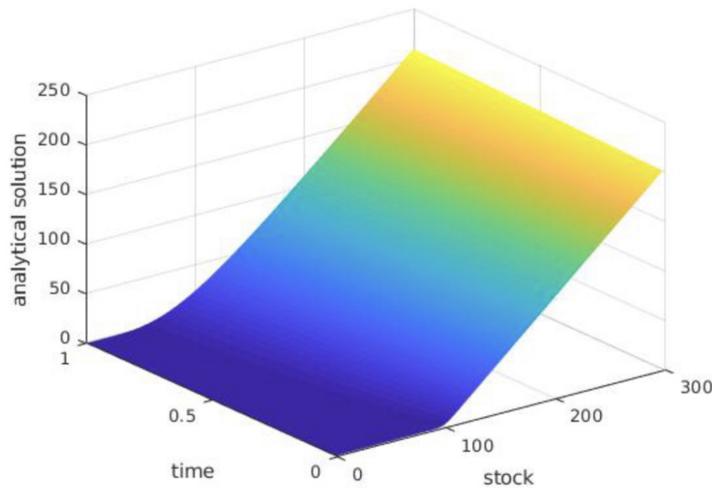


FIGURE 3.2 – Solution analytique au moment de la maturité $T = 1$

3.4 Présentation de la méthode MPFA

Le problème modèle que considérons dans notre mémoire consiste à trouver U tel que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K \operatorname{grad} U) = f & \text{sur } \Omega \\ U = U_b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.52)$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , avec $n = 1, 2$ ou 3 , $\partial\Omega$ le bord de Ω , f une fonction définie sur Ω suffisamment régulière, U_b une fonction définie sur $\partial\Omega$ suffisamment régulière, K une fonction matricielle bornée de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique pour tout (x, y) de Ω , et telle qu'il existe a et b , réels strictement positifs, vérifiant :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n \quad a|\varepsilon|^2 \leq \varepsilon^T K(x, y)\varepsilon \leq b|\varepsilon|^2 \quad \text{p.p dans } \Omega$$

3.4.1 Principe de discrétisation

L'approximation par les MPFA du flux dépend aussi bien de la géométrie de la grille que de la distribution de la perméabilité K . Nous présentons un traitement unifié de la discrétisation du flux en dimension 2 pour les maillages triangulaires, quadratique et polygonaux.

De façon générale, un maillage consiste en une collection de cellules appelées volumes de contrôle, définies par les sommets c_k . Le tenseur de perméabilité K est supposé être constant par maille. A chaque maille correspond un point x_i , par exemple le centre de la maille. La valeur de la solution numérique au point x_i sera notée $u_i = u(x_i)$. Deux mailles adjacentes sont dites voisines et le segment les séparant est appelé l'interface du maillage.

Une collection de mailles ayant un sommet en commun est appelée un cluster. Le nombre de mailles dans le cluster est égal au degré du sommet correspondant. Un exemple de cluster avec la région d'interaction est présenté dans la figure (3.3).

3.4.2 Calcul des transmissivités

Par souci de clarté de l'exposé, nos explications feront référence à la figure (3.3), de plus, on suppose que tous les demi-interfaces sont des lignes droites. La région d'interaction de la figure (3.3) peut être divisée en quatre cellules appartenant à quatre mailles différentes. Dans chacune de ces cellules, on va définir une approxi-

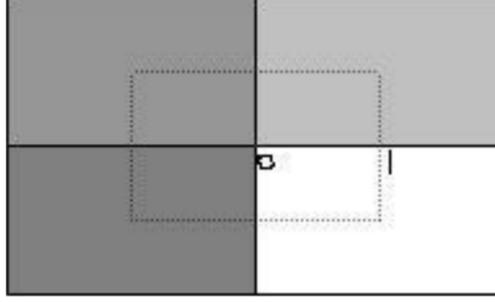


FIGURE 3.3 – Les quatre mailles dont les bords sont en traits continus forment un cluster. La partie délimitée par les pointillés forme la région d’interaction.

mation linéaire de la solution de la manière suivante :

$$u = (\alpha_i, \beta_i)(x - x_i) + u_i \quad (3.53)$$

Les deux scalaires α et β sont déterminés à partir des conditions de continuité sur le flux. Pour cela, nous allons considérer la demi-interface OI ainsi que les trois autres demi-interfaces partant du point O. Soit la demi-interface j , de longueur ΔS_j . De deux côtés de cette demi-interface, le flux s’exprime ainsi :

$$\begin{aligned} f_{j^+} &= \int_{S_j} (K n \text{ grad } u)_{j^+} = (\alpha_{j^+}, \beta_{j^+})(Kn)_{j^+} \Delta S_j \\ f_{j^-} &= \int_{S_j} (K n \text{ grad } u)_{j^-} = (\alpha_{j^-}, \beta_{j^-})(Kn)_{j^-} \Delta S_j \end{aligned}$$

Les indices j^+ et j^- sont utilisés pour désigner les quantités de chaque côté de l’interface j .

La condition de continuité du flux s’écrit sous la forme suivante :

$$f_{j^-} + f_{j^+} = 0 \quad (3.54)$$

Soit $N \leq N_k$ le nombre de demi-interfaces contraints (demi-interfaces sur lesquels la condition de continuité est écrite). Le nombre de cellules impliquées est égal à $N_c = \min\{N + 1, N_k\}$, et tous les coefficients inconnus définissent un vecteur $v = (\alpha_i, \beta_i, \dots)$, ayant $2N_c$ composantes. Dans la figure 1, si les cellules de la région d’interaction sont numérotées de 1 à 4, les inconnues seront $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4)$. L’équation 3.54 peut être exprimée sous une forme matricielle par

$$Av = 0 \quad (3.55)$$

Ce système comporte N équations avec $2N_c$ inconnues. Les conditions de continuité du potentiel sont toutes de la forme

$$(\alpha_{j-}, \beta_{j-})(x_j^* - x_{j-}) + u_{j-} = (\alpha_{j+}, \beta_{j+})(x_j^* - x_{j+}) + u_{j+}, \quad (3.56)$$

où x_j^* est le point du bord sélectionné pour la condition de continuité. Sous forme matricielle, l'équation de continuité du potentiel s'exprime par :

$$Bv = Cu \quad (3.57)$$

où u est le vecteur des valeurs du potentiel u_i dans les cellules impliquées. Ce système comporte $2N_c - N$ équations et $2N_c$ inconnues. Ensemble, les équations 3.55 et 3.57 forment un système complet de dimension $(2N_c) \times (2N_c)$:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} u \quad (3.58)$$

ce qui permet d'exprimer v en fonction de u .

$$v = Mu$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}$$

on en déduit

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^{N_c} M_{ki} u_i \text{ et } \beta_j = \sum_{i=1}^{N_c} M_{k+1i} u_i, \text{ avec } k = 2j - 1, j = 1, \dots, N_c$$

pour chaque demi-interface impliquée, on remplace α_{j-} et β_{j-} par les expressions obtenues dans 3.58, puis on regroupe les termes selon les u_i

$$f_{j-} = (Kn)_{j-} [\alpha_{j-}, \beta_{j-}] \Delta S_j.$$

Le regroupement permet d'écrire f_{j-} sous la forme

$$f_{j-} = \sum_{i \in \Omega} c_i u_i \quad (3.59)$$

et on a

$$f = \sum_{i \in I} t_i u_i \quad (3.60)$$

Des équations (3.60) et (3.59), on déduit que $t_i = c_i$.

3.4.3 Principe de discrétisation pour la méthode proposée

L'ensemble des régions d'interaction définit un second maillage, appelé maillage dual. Les centres x_i des mailles duales sont les sommets des éléments du premier maillage. Ces centres sont en fait les centres des clusters. En chacun de ces points, est définie une inconnue $u_i = u(x_i)$. On se trouve donc avec des inconnues aux centres des mailles primales (ou en un point autre de ces mailles) et à leurs sommets. Cette situation implique une définition adéquate de la solution approchée.[15]

3.4.4 Définition de la solution approchée

L'approche proposée consiste à écrire et à résoudre un système d'équations intégrant toutes les inconnues. Une fois ces inconnues calculées, la solution approchée est définie de la manière suivante.[15]

Après résolution de système d'équations discrètes, nous avons une approximation de la pression en x_i dans chaque élément et une autre pour chacun des sommets de l'élément. Pour avoir la valeur approchée en un point quelconque de l'élément, on le divise tout d'abord en triangles construits comme l'indique la figure (3.4) ci-dessous :

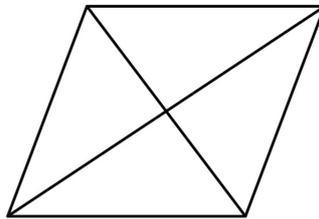


FIGURE 3.4 – :Triangulation des mailles pour la définition de la solution approchée

Sur chaque triangle ainsi constitué, de sommets x_i, x_j et x_k , la solution approchée est de la forme :

$$u(x) = (\alpha_i, \beta_i) \cdot (x - x_i) + u_i \quad (3.61)$$

où on a posé $u_i = u(x_i)$. Il faut noter que (α_i, β_i) se calculer à partir des relations $u(x_j) = u_j$ et $u(x_k) = u_k$.

On remarque que pour un maillage rectangulaire, cette méthode fournit une approximation linéaire par quart d'élément. Sur un maillage triangulaire, l'approximation est fournie sur trois éléments triangulaires.

3.4.5 Discrétisation du problème

On considère l'élément repéré par les indices i et j . Tout d'abord, nous allons convenir des notations suivantes :

$$l_{1+}^{i,j} = X_{i+\frac{1}{2},j} - X_{i,j}, l_{2+}^{i,j} = Y_{i,j+\frac{1}{2}} - Y_{i,j}, l_{1-}^{i,j} = X_{i,j} - X_{i-\frac{1}{2},j},$$

$$l_{2-}^{i,j} = Y_{i,j} - Y_{i,j-\frac{1}{2}}, l_1^{i,j} = X_{i+\frac{1}{2},j} - X_{i-\frac{1}{2},j}, l_2^{i,j} = Y_{i,j+\frac{1}{2}} - Y_{i,j-\frac{1}{2}},$$

$\mathbf{L}_{i,j}^{e,f}$ exprime l'approximation du flux échangé entre des éléments voisins, repérés par les indices i, j et e, f .

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{i,j}^{i+1,j} &= l_{2-}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\mathbf{K}_{11}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{l_{1+}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}, \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{l_{2-}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \right)^T \\ &+ l_{2+}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{K}_{11}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{l_{1+}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}, \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{l_{2+}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \right)^T \\ &= -u_{i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\mathbf{K}_{11}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} l_{2-}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{\mathbf{K}_{11}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} l_{2+}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} - \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ u_{i+1,j} \left(\frac{\mathbf{K}_{11}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} l_{2-}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \frac{\mathbf{K}_{11}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} l_{2+}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \right) + u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ &- u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{L}_{i,j}^{i-1,j} &= -u_{i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{\mathbf{K}_{11}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} l_{2-}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{\mathbf{K}_{11}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} l_{2+}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} - \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ u_{i-1,j} \left(\frac{\mathbf{K}_{11}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} l_{2-}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} + \frac{\mathbf{K}_{11}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} l_{2+}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{l_{1+}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \right) + u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ &- u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{L}_{i-1,j}^{i,j} &= -u_{i-\frac{1}{2},j} \left[(\lambda_{11} - l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11} - l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\lambda_{12} - l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right. \\ &+ \left. (\lambda_{12} + l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] - u_{i,j} \left[-(\lambda_{11} - l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\lambda_{11} - l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] \\ &- u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} (\lambda_{12} - l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} (\lambda_{12} + l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

comme on a

$$\mathbf{L}_{i,j}^{i-1,j} + \mathbf{L}_{i-1,j}^{i,j} = 0$$

alors

$$\begin{aligned} &-u_{i-\frac{1}{2},j} \left[(\lambda_{11} - l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11} - l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\lambda_{11} + l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{12} + l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\ &u_{i,j} \left[(\lambda_{11} + l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11} + l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + u_{i-1,j} \left[(\lambda_{11} - l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11} - l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{i-1,j}}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}$$

avec

$$\mathbf{A} = (\lambda_{11+}l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11+}l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = (\lambda_{11-}l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11-}l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$\mathbf{L}_{i,j}^{i-1,j} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} - \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}\mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{A} + \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}\mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

avec

$$\delta = \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (\lambda_{12-}l_{2-})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\lambda_{12+}l_{2+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}.$$

Pour calculer $\mathbf{L}_{i,j}^{i+1,j}$, on pose $\mathbf{L}_{i-1,j}^{i,j} = -\mathbf{L}_{i,j}^{i-1,j}$. Il en résulte alors que

$$\mathbf{L}_{i-1,j}^{i,j} = -\frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} - \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}\mathbf{u}_{i,j} + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{A} + \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}\mathbf{u}_{i-1,j} - \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}.$$

Par translation, on en déduit :

$$\mathbf{L}_{i,j}^{i+1,j} = \frac{\mathbf{B}'(\mathbf{A}' + \delta')}{\mathbf{A}' + \mathbf{B}'}\mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{A}'(\mathbf{B}' - \delta')}{\mathbf{A}' + \mathbf{B}'}\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (\lambda_{11+}l_{2-})^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11+}l_{2+})^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \mathbf{B}' = (\lambda_{11-}l_{2-})^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{11-}l_{2+})^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ \delta' &= \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (\lambda_{12-}l_{2-})^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\lambda_{12+}l_{2+})^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les équations ci-dessus nous permettent de déduire par rotation $\mathbf{L}_{i,j}^{i,j+1}$ et $\mathbf{L}_{i,j}^{i,j-1}$.

C'est ainsi qu'on obtient

$$\mathbf{L}_{i,j}^{i,j+1} = \frac{\mathbf{B}''(\mathbf{A}'' + \delta'')}{\mathbf{A}'' + \mathbf{B}''}\mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{A}''(\mathbf{B}'' - \delta'')}{\mathbf{A}'' + \mathbf{B}''}\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= (\lambda_{22+}l_{1-})^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{22+}l_{1+})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \mathbf{B}'' = (\lambda_{22-}l_{1-})^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\lambda_{22-}l_{1+})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ \delta'' &= \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\lambda_{21-}l_{1-})^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (\lambda_{21+}l_{1+})^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

De même on a

$$\mathbf{L}_{i,j}^{i,j-1} = \frac{\mathbf{A}_3(\mathbf{B}_3 - \delta_3)}{\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3}\mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{B}_3(\mathbf{A}_3 + \delta_3)}{\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3}\mathbf{u}_{i,j-1} + \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3 &= (\lambda_{22+}l_{1-})^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\lambda_{22+}l_{1+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \mathbf{B}_3 = (\lambda_{22-}l_{1-})^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\lambda_{22-}l_{1+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ \delta_3 &= \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = (\lambda_{21-}l_{1-})^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (\lambda_{21+}l_{1+})^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Une fois les approximations des flux écrites, le système discret s'obtient en faisant le bilan de flux sur chaque élément du premier maillage, puis sur chaque élément du second maillage. Ce bilan se traduit au niveau de l'élément $(M_{i,j})$ par l'équation [9] :

$$\mathbf{L}_{i,j} = \mathbf{L}_{i,j}^{i+1,j} + \mathbf{L}_{i,j}^{i,j+1} + \mathbf{L}_{i,j}^{i-1,j} + \mathbf{L}_{i,j}^{i,j-1} = \int_{M_{i,j}} f(w)dw$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{i,j} &= \frac{\mathbf{B}'(\mathbf{A}' + \delta')}{\mathbf{A}' + \mathbf{B}'} \mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{A}'(\mathbf{B}' - \delta')}{\mathbf{A}' + \mathbf{B}'} \mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\mathbf{B}''(\mathbf{A}'' + \delta'')}{\mathbf{A}'' + \mathbf{B}''} \mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{A}''(\mathbf{B}'' - \delta'')}{\mathbf{A}'' + \mathbf{B}''} \mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} - \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}} \mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{A} + \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}} \mathbf{u}_{i-1,j} + \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\mathbf{A}_3(\mathbf{B}_3 - \delta_3)}{\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3} \mathbf{u}_{i,j} - \frac{\mathbf{B}_3(\mathbf{A}_3 + \delta_3)}{\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3} \mathbf{u}_{i,j-1} + \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{L}_{i,j} &= M_1 u_{i-1,j} + M_2 u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + M_3 u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + M_4 u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + M_5 u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + M_6 u_{i,j} \\ &+ M_7 u_{i+1,j} + M_8 u_{i,j-1} + M_9 u_{i,j+1} \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{\mathbf{B}(\mathbf{A} + \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}}, \quad M_2 = -\mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad M_3 = \mathbf{K}_{12}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{21}^{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\ M_4 &= -\mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad M_5 = \mathbf{K}_{12}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \mathbf{K}_{21}^{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ M_6 &= \frac{\mathbf{B}'(\mathbf{A}' + \delta')}{\mathbf{A}' + \mathbf{B}'} + \frac{\mathbf{B}''(\mathbf{A}'' + \delta'')}{\mathbf{A}'' + \mathbf{B}''} + \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} - \delta)}{\mathbf{A} + \mathbf{B}} + \frac{\mathbf{A}_3(\mathbf{B}_3 - \delta_3)}{\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3} \\ M_7 &= -\frac{\mathbf{A}'(\mathbf{B}' - \delta')}{\mathbf{A}' + \mathbf{B}'}, \quad M_8 = -\frac{\mathbf{B}_3(\mathbf{A}_3 + \delta_3)}{\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3}, \quad M_9 = -\frac{\mathbf{A}''(\mathbf{B}'' - \delta'')}{\mathbf{A}'' + \mathbf{B}''} \end{aligned}$$

3.5 Propriétés de la méthode

* **Conservativité.**

Par construction, le schéma est conservatif.

* **Consistance de l'approximation des flux.**

En considérant le flux à travers une facette séparant deux éléments, on peut prouver que l'approximation des flux est consistante. On suppose ici que le maillage est tel que le ratio entre la longueur de la plus grande arête et celle de la plus petite arête reste inférieur à un réel C défini à l'avance, quel que

soit le raffinement du maillage.

On pose

$$h = \max(l_2^{i,j}, l_2^{i,j})$$

Dès lors on a

$$\begin{aligned} L_{i,j}^{i+1,j} &= \int_{\Gamma} (-K\vec{n}) \text{grad } u = l_2^{i,j} \times (-K\vec{n}) \text{grad } u_{i+\frac{1}{2},j} + O(h^2) \\ &= -l_2^{i,j} \times \begin{bmatrix} K_{11}^{ij} & K_{12}^{ij} \\ K_{21}^{ij} & K_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right) \frac{\partial u}{\partial y} \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right) \right] + O(h^2) \\ &= -l_2^{i,j} \times (K_{11}^{ij}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) + K_{12}^{ij}u_y(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)) + O(h^2) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{L_{i,j}^{i+1,j}}{l_2^{i,j}} = (K_{11}^{ij}u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) + K_{12}^{ij}u_y(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)) + O(h) \quad (3.62)$$

Comme

$$u_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i,j}}{l_{1+}^{i,j}} \right) + O(h_1), \quad u_y(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{l_{2+}^{i,j}} \right) + O(h_2) \quad (3.63)$$

L'équation de continuité du flux nous d'obtenir :

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})(\lambda_{12}^{i+1,j} - \lambda_{12}^{i,j})}{\lambda_{11+}^{i,j} + \lambda_{11-}^{i+1,j}} + \frac{\lambda_{11+}^{i,j}u_{i,j} + \lambda_{11-}^{i+1,j}u_{i+1,j}}{\lambda_{11+}^{i,j} + \lambda_{11-}^{i+1,j}} + \frac{O(h_1 + h_2)}{\lambda_{11+}^{i,j} + \lambda_{11-}^{i+1,j}} \quad (3.64)$$

avec

$$\lambda_{11+}^{i,j} = \frac{K_{11}^{ij}}{l_{1+}^{i,j}}, \quad \lambda_{11-}^{i,j+1} = \frac{K_{11}^{ij+1}}{l_{1-}^{i,j+1}} \quad \text{et} \quad \lambda_{12}^{i,j} = \frac{K_{12}^{ij}}{l_2^{i,j}}$$

En combinant les équations (3.62)-(3.64), on obtient

$$\frac{L_{i,j}^{i+1,j}}{l_2^{i,j}} = \frac{\bar{L}_{i,j}^{i+1,j}}{l_2^{i,j}} + O(h_1 + h_2)$$

où $\bar{L}_{i,j}^{i+1,j}$ représente le flux approché et où $L_{i,j}^{i+1,j}$ représente le flux physique.

On voit alors que l'approximation du flux est consistante.

* **Convergence.**

On rappelle que la conservativité d'un schéma aux volumes finis et la consistance de l'approximation du flux sont les deux propriétés qui assurent la convergence théorique voir [16]. Le test numérique ci-dessous montre la convergence empirique de cette méthode. Dans le cas des problèmes présentant un

grand contraste des perméabilités ou de grandes discontinuités la convergence de la méthode est confirmée. Pour certains problèmes, la valeur calculée de l'ordre de convergence est supérieure à deux.

3.6 Tests numériques et comparaison aux MPFA

- Les erreurs calculées :

$$\text{Erreur} = \sqrt{\sum_k \frac{\|u - \bar{u}\|^2}{\|\bar{u}\|}}$$

où \bar{u} est la solution exacte et u la solution approchée du problème de diffusion.

Problème test Le coefficient de diffusion K est une matrice pleine

$-\text{div}[K \text{ grad } u] = 1001\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) - 20\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ dans $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ où on a posé

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 1000 \end{bmatrix}$$

avec comme conditions aux limites :

$$U(x, 0) = U(x, 1) = U(1, y) = U(0, y) = 0 \text{ avec } 0 \leq x, y \leq 1$$

La solution exacte est : $U(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

On trace la solution trouver avec la méthode MPFA et la solution exacte pour $nx = 20$ dans la figure suivante :

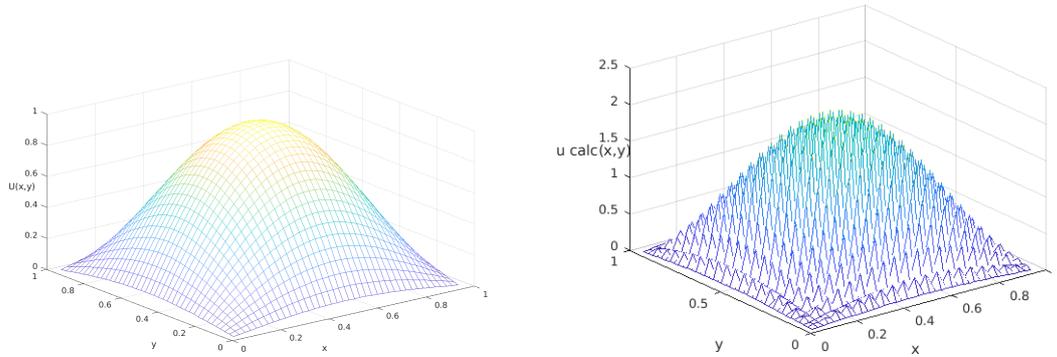


FIGURE 3.5 – La solution exacte et notre solution calculé avec $nx = ny = 20$

et dans la figure suivante elles ont calculées pour $nx = 80$

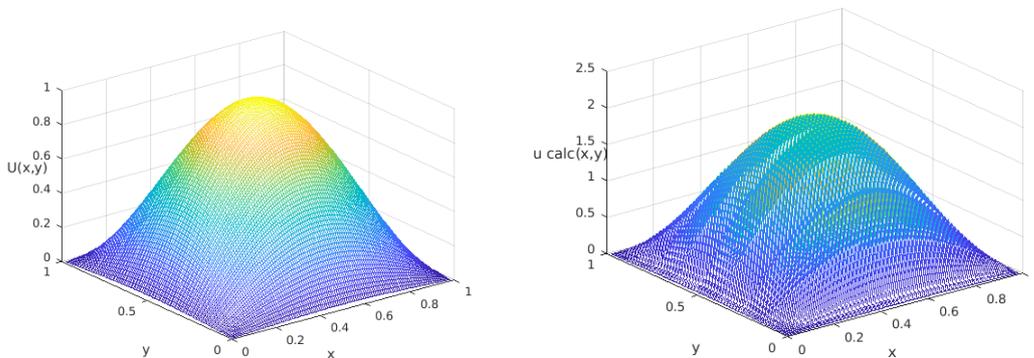


FIGURE 3.6 – La solution exacte et notre solution calculé avec $nx = ny = 80$

On a calculé l'erreur pour nombres des points différents qu'ils ont présenté dans le tableau suivant :

dx	0.10000	0.07142	0.05555	0.045454	0.031250	0.01923	0.012195	0.00980	0.00704	0.00617
err	0.529804	0.52965	0.52574	0.52212373	0.515923	0.50998	0.50635	0.50511	0.5036	0.50321

TABLE 3.1 – :L'erreur

et on l'a tracé dans la figure suivante :

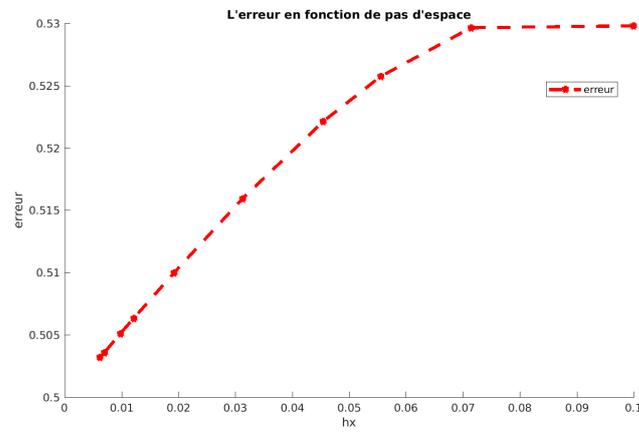


FIGURE 3.7 – L'erreur en fonction de pas d'espace

On remarque que l'erreur approche à 0 quant le pas dx tends vers à 0. Donc notre solution calculé avec MPFA est proche de la solution exacte.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail est d'étudier des schémas numériques de type volumes finis. Nous avons limité notre étude à les deux types, **TPFA**(Two-Point Flux Approximation) et **MPFA**(Multiple-Point Flux Approximation)

La méthode **TPFA**(Two-Point Flux Approximation) comme son nom l'indique, elle est utilisé que deux points pour approximer le flux, l'un des points forts du ce schéma est sa facilité de mise en œuvre. La méthode **MPFA**(Multiple-Point Flux Approximation) est une nouvelle approche volumes finis adaptée au traitement des anisotropies et des hétérogénéités en simulation d'écoulement dans un milieu poreux. L'originalité de cette méthode réside dans la souplesse avec laquelle elle prend en compte les hétérogénéités du milieu, en combinaison avec les anisotropies décrites par un tenseur plein.

Chacune de ses deux méthodes ont leurs avantages et leurs inconvénients respectifs. La mise en œuvre d'un schéma de type **MPFA** été plus aisée et offrant en général plus de souplesse pour une approche, cette méthode a montré une grande capacité de calcul, avec une précision satisfaisante. La méthode **TPFA** présente des limitations en ce sens qu'elles ne prend pas en compte les anisotropies des perméabilités en dehors des directions des axes des coordonnées. Dans un cas unidimensionnel, la méthode **MPFA** est simplement réduite à la méthode d'approximation de flux en deux points **TPFA**.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Éric Bellanger, Raphaël Girardi, Sébastien Paulin, Baptiste Portelli, Eddie Saundrais *Physique MP-MP*-PT-PT**
- [2] F. Moukalled, L. Mangani M. Darwish *The Finite Volume Methode in Computational Fluid Dynamics*
- [3] Jerome Droniou. FINITE VOLUME SCHEMES FOR DIFFUSION EQUATIONS : INTRODUCTION TO AND REVIEW OF MODERN METHODS. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, World Scientific Publishing*, 2014, 24(8), pp.1575-1619. 10.1142/S0218202514400041. hal-00813613v3
- [4] I. Faille. A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 100(2) :275-290, 1992.
- [5] I. Aavatsmark. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Comput. Geosci.*, 6(3-4) :405-432, 2002. Locally conservative numerical methods for flow in porous media.
- [6] I. Aavatsmark, T. Barkve, O. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. I. Derivation of the methods. *SIAM J. sci. comput.*, 19(5) :1700-1716(electronic), 1998.
- [7] I. Aavatsmark, G. T. Eigestad, B. T. Mallison, and J. M. Nordbotten. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 24(5) :1329-1360, 2008.
- [8] C,-A. Laisant, Émile Lemoine. *L'intermédiaire des mathématiciens*, Tome III.-1896.

-
- [9] A.Njifenjou et I.Moukouop Nguena, Traitement des anisotropies de perméabilité en simulation d'écoulements en milieu poreux par les volumes finis, colloque SIGE, 22-25 octobre 2001, Douala (Cameroun), pp. 245-259.
- [10] L. Angermann, S. Wang, Convergence of a fitted finite volume method for the penalized Black-Scholes equation governing European and American Option pricing. *Numerische Mathematik* 106(1) (2007) 1-40.
- [11] L. A. P. Knabner, *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Vol. 44, Springer, 2002.
- [12] Haug, Espen Gaarder, *The complete guide to option pricing formulas*. Vol 2, McGraw-Hill New York, 2007.
- [13] R. Eymad, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite Volume methods. In P. G. Ciarlet and J.-L. Lions, editors, *Techniques of Scientific Computing, Part III*, Handbook of Numerical Analysis, *VII*, pages 713-1020. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [14] RocK S. Koffi, Antoine Tambue, Convergence of the Two Point Flux Approximation and a novel fitted Two-Point Flux Approximation method for pricing options
- [15] I. MouKouop-Nguena, A. Njifenjou, Formulations Volumes Finis des problèmes de diffusion en milieu anisotrope et hétérogène
- [16] I. Faille, Modélisation bidimensionnelle de la genèse et de la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire (PhD, 1992)