REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Application / Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles.

Par :

TELLI NAIMA INSAF
YAGOUB NADJET
YAHI TORKIA

Sur le thème

OPÉRATEURS DE SUPERPOSITION SUR QUELQUES ESPACES FONCTIONNELS ET APPLICATION AUX PROBLÈMES ELLIPTIQUES

Soutenu publiquement le 17/ 09 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Aissani Mouloud	MCA	Université Tiaret	Président
Mr Halim Benali	MCA	Université Tiaret	Examinateur
Mr Dieb Abdelrazek	MCB	Université Tiaret	Encadreur

2020-2021

Remerciement

Nos remerciements vont avant tout à ***ALLAH*** *le tout puisant*
pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a données pour accomplir ce modeste travail

Nous tenons à exprimer nos remerciements avec un grand plaisir et un grand respect à notre encadreur ***Mr Dieb Abdelrazek****,*
pour ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements qui nous ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

Nous remercions vivement ***Mr Aissani Mouloud****, qui nous a fait l'honneur en présidant notre jury.*

Toute notre gratitude va vers ***Mr Halim Benali*** *qui est aimablement accepté d'examiner ce travail.*

Nous remercions aussi en particulier tous les enseignants de la
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
qui on contribué à notre formation.

Remerciement

Merci *à Dieu de m'avoir donné le pouvoir d'achever ce travail.*

Je dédie de tout mon coeur ce travail :

À ma famille qui était toujours présente pour croire en moi, pour m'avoir permis de mener à bien ce rêve et qui à chaque fois m'a fait confiance quand il m'est arrivé de douter. Pour leur soutien inconditionnel, leur présence discrète dans ma vie et aussi pour avoir fait de moi ce que je suis, quoi que vous en pensiez, je vous assure que si je suis arrivée là, c'est grâce à vous :

Mon père" Benoumrane"
Ma mère " Mecheria "
Mes chers frère " Mohammed ,Missoum , Zine Elabidine et Zakaria "
Ma chère amie-soeur "Lina "
Ma chère "Souad "
Mes amies " Nadjet et torkia"

Avec les plus sincères sentiments je dédie ce travail à mon fiancé " Nour Eddine " et toute sa famille.

À tous ceux qui me sont chers Merci.

Telli Insaf Naima

Remerciement

Je dédie ce travail

À mon chèr père

À ma chère mère

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

À ma sœur Fatima

Pour ses soutiens moraux et ses conseils précieux tout au long de mes études.

À mes sœurs et tous mes amis.

À ma chère amie Hanane

Qui je lui souhaite une bonne santé.

Yagoub Nadjet

Remerciement

Je dédie ce travail

À l'âme de mon père
À ma chère mère
Pour leurs amour et leurs confiance à chaque moment de ma vie, pour leurs soutien dans les moments les plus difficiles dans ma vie.
Ces quelques lignes ne peuvent pas rèsumer tout l'amour que je porte dans mon coeur pour vous.
À mes sœurs et mes frères.
Mes chères amies-soeurs Fadhila et Saadia
Á mes amis Djamila Khaldia Rekia Ikram Meriem Chaima Sabrina Nouna.

Yahi Torkia

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse à étudier les propriétés de quelques opérateurs non linéaires agissant sur les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev, à savoir les opérateurs de superposition " Nemytskii"
Cette classe d'opérateur admet des propriétés remarquables, l'une de ces propriété est le fait que si un tel opérateur agit d'un espace à un autre alors la fonction définissant cet opérateur doit saisfaire une condition de type croissance bien définie.
Comme application on va traité deux types de problème elliptique quasi-linéaire. Le premier problème fait intervenir un terme sous linéaire en gradient et dans ce cas nous démontrons l'existence en utilisant l'alternative de Leray Schauder, de plus en utilisant un principe de comparaison nous obtenons l'unicité de cette solution.
Dans le deuxième la non linéarité est sous quadratique en gradient, et pour voir l'existence d'une solution en appliquant le théorème du point fixe de Schauder, où nous démontrons l'existence d'un exposant critique la où notre approche n'est plus applicable.

Notre travail est organisé en trois chapitres :
Dans le premier chapitre, on présente quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue et de Sobolev.
Le deuxième chapitre est consacré aux propriétés topologique de l'opérateur de superposition dans quelques espaces fonctionnels.
Dans le dernier chapitre, on va étudier l'existence des solutions pour deux types de problème elliptique quasi-linéaire, en utilisant la méthode du point fixe.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre
contient un ensemble de définitions
et résultats qui seront utiles dans la suite de cette étude

Dans tout ce qui va suivre, l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ où $N > 1$, sera muni de la mesure de Lebesgue notée dx, et Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Les espaces de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, notament les espaces $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, jouent un rôle central dans de nombreuses questions de l'analyse Mathématique. L'importance toute particulière des espaces $L^p(\Omega)$ provient du fait qu'ils offrent une généralisation partielle, mais utiles, des espaces de Hilbert $L^2(\Omega)$ des fonctions carré intégrable sur Ω. Dans cette section, on prédente brièvement un certains nombres des résultats concernant les espaces $L^p(\Omega)$ qui nous serons utiles dans la suite, pour une présentation plus complète des espaces $L^p(\Omega)$, ou pour la démonstration des résultats que nous annonçons ici. on pourra consulter [3],[2].

Définition 1.1.1. *(Les espaces $L^p(\Omega)$)*
Pour un exposant p satisfait $1 \leq p < +\infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est constitué des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ est\ mesurable\ et\ satisfait\ \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

On pose alors :

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel, et l'application définie de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ par :
$f \longmapsto \|f\|_{L_p(\Omega)}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

De plus l'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_{L_p(\Omega)}\right)$ *est un espace de Banach.*

Lorsque $p = 2$*, une structure supplémentaire très importante enrichit* $L^2(\Omega)$*, à savoire la structure d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Définition 1.1.2. *(L'espace* $L^\infty(\Omega)$*)*
On définie l'espace $L^\infty(\Omega)$ *des fonctions essentiellement bornées sur* Ω *par :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \exists C > 0,\ \text{telle que } |f(x)| \le C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Ainsi on définie la norme de f *dans* $L^\infty(\Omega)$*, par :*

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = inf\,\{C > 0,\ |f(x)| \le C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L_\infty(\Omega)}$ *est un espace de Banach.*

Remarque 1.1.1. *Lorsque* $0 < p < 1$*, l'espace* $L^p(\Omega)$ *(que l'on peut définie comme dans le cas* $1 \le p < +\infty$*) est un espace vectoriel, et l'application définie de* $L^p(\Omega)$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $f \longmapsto \|f\|_{L_p(\Omega)}$ *est une quasi-norme sur* $L^p(\Omega)$*. De plus l'espace* $(L^p(\Omega), \|f\|_{L_p(\Omega)})$ *est complet.*

1.1.1 Quelques inégalités importantes

Notation 1.1.1. *Soit* $1 \le p \le +\infty$*, on designe par* p' *l'exposant conjugué de* p*.*
i.e :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lemme 1.1.1. *Soient* a, b *des réels positifs et* $1 \le p < +\infty$*. Alors :*

$$a^p + b^p \le (a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Lemme 1.1.2. *(Inégalité de Young)*
Soient a, b *des réels positifs, pour tout couple d'exposants conjugués* p *et* p'*, on a :*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Théorème 1.1.1. *(Inégalité de Hôlder)*
Soient p *et* p' *deux exposants conjugués, si* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$*. Alors* $fg \in L^1(\Omega)$*, et :*

$$\int_\Omega |fg|dx \le \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Théorème 1.1.2. *(Inégalité de Hôlder généralisée)*
Soient $1 \leq p, p' \leq +\infty$ *des re*$\surd$©*lsetrdfinipar* : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}$. *Si* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ *alors* $fg \in L^r(\Omega)$, *et :*

$$\|fg\|_{L_r(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}$$

Théorème 1.1.3. *(Inégalité de Mikowsky)*
Soit $f, g \in L^p(\Omega)$, *où* $p \in [1, +\infty]$. *Alors :*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

1.1.2 Définitions et propriétés d'espace $L^p(\Omega)$

Théorème 1.1.4. *(Classification des espaces* $L^p(\Omega)$*)*
Si $mes(\Omega) < +\infty$, *alors pour tout couple d'exposants* $1 \leq p < p' \leq +\infty$, *l'espace* $L^{p'}(\Omega)$ *s'injecte continûement dans* $L^p(\Omega)$, *et on écrit :*

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega),$$

et lorsque de plus : $1 \leq p < p' < +\infty$, *on a :*

$$\frac{1}{mes(\Omega)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \frac{1}{mes(\Omega)^{\frac{1}{p'}}} \|f\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Où mes designe la mesure de Lebesgue.

Nous allons maintenant présenter des résultats consernant la dualité des espaces de Lebesgue.

Théorème 1.1.5. *Soient* p *et* p' *deux exposants conjugu*$\surd$©*s.*
Si$g \in L^{p'}(\Omega)$ *et* $1 \leq p' < \infty$ *il suit de l'inégalité de Hôlder que* $fg \in L^1(\Omega)$ *pour chaque* $f \in L^p(\Omega)$ *fixé .*
On peut définir une fonction $\varphi_g : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *par :*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg.$$

Alors φ_g *est une fonctionnelle linéaire continue sur* $L^p(\Omega)$ *et de plus* $\|\varphi_g\| = \|g\|_{L_{p'}}$ *pour* $1 \leq p < \infty$ *.*

La réciproque du théorème précédent est aussi vraie dans le sens que chaque fonctionnelle linéaire bornée sur $L^p(\Omega)$ est représentable .

Théorème 1.1.6. *(Représentation de Riesz)*
Soit φ *une fonctionnelle linéaire continue sur* $L^p(\Omega)$ *où* $1 \leq p < \infty$. *Alors il existe une fonction* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *telle que :*

$$\varphi(f) = \int_\Omega fg.$$

Satisfait :

$$\|\varphi\| = \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

Ce th√©or√®mepermetd'identifierledualde$L^p(\Omega)$ *à* $L^{p'}(\Omega)$*, où* p' *désigne l'exposant conjugé de* p.

Nous concluons ce paragraphe par les théorèmes de réflexivité et séparabilité d'espace $L^p(\Omega)$, mais tout d'abord on a les définitions suivantes :

Définition 1.1.3. *(Espace réflexif)*
Soit $(E, \|.\|_E)$ *un espace de Banach, on note* E' *le dual de* E *et* E'' *le bidual, pour* $x \in E$*, on définit l'application* $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ *par :*

$$J_x(T) = T(u)$$

pour tout $T \in E'$.
J *est injective par construction, et si l'application* J *est surjective l'espace* E *est dit r√©flexif.*

Définition 1.1.4. *(Espace séparable)*
Un espace métrique E *est dit séparable si il existe un sous ensemble dénombrable au plus dense dans* E.

Théorème 1.1.7. *Pour* $1 < p < \infty$ *les espaces* $L^p(\Omega)$ *sont réflexifs .*

Théorème 1.1.8. *Pour* $1 \leq p < \infty$ *les espaces* $L^p(\Omega)$ *sont des espaces séparables .*

1.1.3 Quelques critères de convergence

Nous regroupons ici des résultats qui permettront de manipuler les différentes notions de convergence de suites dans les espaces $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.1.9. *(Convergence dominée dans* $L^p(\Omega)$*)*
Soient $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n$ *une suite d'éléments de* $L^p(\Omega)$*, et* f *une fonction mesurable, telles que :*

(1) f_n *converge presque partout sur* Ω *vers* f.

(2) $\exists g \in L^p(\Omega)$*, telle que :* $|f_n| \leq g$*, p.p pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$.

Dans le théorème 1.1.9, l'hypothèse de domination sur la suite $(f_n)_n$ (l'hypothèse 2) implique que la suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^p(\Omega)$. La réciproque de cette impliquation est fausse, c'est à dire le fait que $(f_n)_n$ soit bornée dans $L^p(\Omega)$ ne donne pas l'hypothèse (2) du théorème 1.1.9. Toutefois, le théorème 1.1.10 ci dessous donne un résultat de convergence intéressant sous l'hypothèse "$(f_n)_n$ bornée dans $L^p(\Omega)$".

Théorème 1.1.10. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $p > 1$, $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$ et f une fonction mesurable, telles que :*

(1) f_n converge presque partout sur Ω vers f.

(2) La suite f_n est bornée dans $L^p(\Omega)$.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \to f$ fortement dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < p$ et faiblement dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.1.11. *(Réciproque partielle de la convergence dominée)*
Soient $1 \leq p < +\infty$, $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^p(\Omega)$, et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

(1) f_{n_k} converge presque partout sur Ω vers f.

(2) $\exists g \in L^p(\Omega)$, telle que : $|f_{n_k}| \leq g$ p.p pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il faut bien noter que dans ce résultat on affirme uniquement l'existence d'une sous suite convergeant presque partout.

Définition 1.1.5. *Soit $1 \leq p < +\infty$. On dit q'une suite de fonctions $(f_n)_n$ de $L^p(\Omega)$ est p-équi-intégrable si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(1) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A \subset \Omega$ de mesure finie tel que $\forall n \geq 1$, on a :

$$\int_{\Omega\setminus A} |f_n|^p < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que $\forall n \geq 1$, $\forall E \subset \Omega$, mes$(E) < \delta$, on a :

$$\int_E |f_n|^p < \varepsilon.$$

On remarquera que dans le cas particulier où Ω de mesure finie, l'équi-integrabilité se réduit à la deuxième condition.

Le théorème de Vitali que nous avons rappeler maintenant est particulièrement utile pour les situations où on dipose d'une suite de fonctions convergeant presque partout et dont on souhaite montrer la convergence dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.1.12. *(Vitali)*
Soient $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$ *qui converge presque partout vers une fonction mesurable* f. *Alors :* f_n *tend vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *si et seulement si* $(f_n)_n$ *est équi-intégrable.*

Théorème 1.1.13. *Soient* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions et* f *une fonction de* $L^p(\Omega)$, *alors* f_n *converge vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *si et seulement si :*

(1) $f_n \to f$ *en mesure .*

(2) $\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |f_n|^p = 0$ *uniformement par rapport à* n, *pour tout* $E \subset \Omega$ *mesurable.*

1.2 Les espaces de Sobolev

Dans cette section, nous allons introduire les espaces de Sobolev et quelques propriétés consernant ces espaces, ainsi on va présenter des résultats qui concerne la compacité des injections des espaces Sobolev.

Définition 1.2.1. *(Espaces de Sobolev)*
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$. On dit que $u \in W_p^m(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et les dérivées faibles jusqu'à l'ordre m satasfait $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| < m$. Autrement dit, il existe des fonctions $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ telles que :

$$\int_\Omega u\partial^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi dx, \quad \textit{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Par convention, si $m = 0$: $W_p^0(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Si $p = 2$, on note $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$.

1.2.1 Définitions et propriétés d'espace Sobolev

Les espaces $W_p^m(\Omega)$ sont des espaces vectoriels complet lorsqu'on les munit de la norme :

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & si \;\; 1 \leq p < \infty. \\ \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} & si \;\; p = +\infty. \end{cases}$$

De plus la norme

$$\|u\|_{m.p} = \begin{cases} \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} & si \;\; 1 \leq p < \infty. \\ \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} & si \;\; p = +\infty. \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente. Les deux normes sont notées indéfférement $\|.\|_{W_p^m(\Omega)}$ et $\|.\|_{m.p}$.
De plus :
— si $1 \leq p < \infty$ alors $W_p^m(\Omega)$ est séparable.
— si $1 < p < \infty$ alors $W_p^m(\Omega)$ est réflixif .

Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit de produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$. On définit l'espace $W_0^{m.p}(\Omega)$ comme la fermeture dans $W_p^m(\Omega)$ de $C_0^\infty(\Omega)$.

L'espace $W_0^{m.p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W_p^m(\Omega)$ est un espace de Banach séparable lorsque $p < +\infty$, et réflexif si $1 < p < \infty$. De plus est un espace de Hilbert lorsque $p = 2$, et on note $H_0^m(\Omega) = W_0^{m.2}(\Omega)$.
On note aussi :

$$W_0^{m.p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W_p^m(\Omega)}$$

et

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

1.2.2 Espace dual de $W_0^{1.p}(\Omega)$

Notation 1.2.1. *On désigne par $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1.p}(\Omega)$ où $1 \leq p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.*

On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual, et on écrit :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

— *Si Ω est borné on a :*

$$W_0^{1.p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W_{p'}^{-1}(\Omega)$$

où $\dfrac{2N}{N+2} \leq p < \infty$ avec injections continues et denses.

— *Si Ω n'est pas borné on a :*

$$W_0^{1.p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W_{p'}^{-1}(\Omega)$$

où $\dfrac{2N}{N+2} \leq p \leq 2$.

Les éléments de $W_{p'}^{-1}(\Omega)$ sont caractérisés par la proposition suivante :

Théorème 1.2.1. *Soit p' un réel, $1 < p' \leq \infty$ le conjugué de p, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'élément $f \in W_{p'}^{-1}(\Omega)$.*
2. *L'élément $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et il existe $(v_0, v_1, ..., v_n) \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^{n+1}$.*

Tel que :

$$f = v_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(v_i)}{\partial x_i}.$$

La forme de dualité est donnée par :

$$\forall u \in W_0^{1.p}(\Omega) : \langle f, u\rangle = \int_\Omega v_0 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Lorsque Ω est borné on peut prendre $v_0 = 0$.

1.2.3 Théorème de Trace

Définition 1.2.2. *Soit* Ω *un ouvert born*$\surd$©*etr*$\surd$©$gulierdeR^N$. *On peut d*$\surd$©$finiruneapplicationlin\surd$

$\psi : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$

$u \mapsto \psi(u)$

$Prolongeantl'applicationtracepourlesfonctionscontinuessur\overline{\Omega}$:

$$\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}$$

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\partial\Omega)$, *ce qui signifie qu'il existe une constante* C_Ω *telle que*

$$\forall u \in H^1(\Omega), ||\psi(u)||_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega ||u||_{H^1(\Omega)}$$

Proposition 1.2.1. *Soit* Ω *un ouvert born*$\surd$©*etr*$\surd$©$gulierdeR^N$, *on d*$\surd$©$finitl'applicationtrace^{\psi : H}$

pour les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$:

$$\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}$$

Donc, on peut d$\surd$©$finirl'espace H_0^1(\Omega)$ *comme suit :*

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) = Ker\ \psi &= \{u \in H^1 : \psi(u) = 0\} \\ &= \{u \in H^1 : u|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

1.2.4 Théorèmes d'injection de Sobolev

Théorème 1.2.2. *(Inégalité de poincaré)*
Soient Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, p *un réel tel que* $1 \leq p < \infty$, *il existe une constante* $C_\Omega > 0$ *telle que pour tout* $u \in W_0^{1.p}(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient l'important résultat suivant :

Corollaire 1.2.1. *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $p \geq 1$ *réel alors l'application :*

$$\begin{aligned} W_p^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \end{aligned}$$

définit sur $W_0^{1.p}(\Omega)$ *est une norme équivalente à celle induite par* $W_p^1(\Omega)$.

Nous allons voir maintenant un résultat fondamental consernant les espaces da Sobolev est l'inégalité, ou le théorème d'injection de Sobolev.

Théorème 1.2.3. *(Inégalité de Sobolev)*
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $1 \leq p < N$. Il existe une constante $C_{N.p} > 0$ (ne dépend que de p, N) telle que :

$$\forall u \in W_p^1(\Omega) : \|u\|_{L_{p^*(\Omega)}} \leq C_{N.p} \|u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Notons que $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.

Théorème 1.2.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*

1. *Si $p < N$: alors $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.*
2. *Si $p = N$: alors $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si $p > N$: alors $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Avec injections continues.

Un cadre général des injections précédentes est fourni par le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. *Soient Ω ouvert régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $m \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$. On a les injections continues suivantes :*

1. *Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, alors $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$.*
2. *Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, alors $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*
3. *Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, alors $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Un résultat particulièrement important est le théorème de Rellich-Kondrachov, qui concerne l'injection compacte des espaces de Sobolev $W_p^1(\Omega)$ dans certains espaces $L^q(\Omega)$. On définie d'abord la notion d'opérateur compact.

Définition 1.2.3. *(Opérateur compact)*
Soient E, F deux espaces de Banach et $A : E \to F$ un opérateur compact. On dit que A est un opérateur compact si l'image de tout borné de E par A est relativement compacte dans F.

Dans le cas où $E \subset F$, on peut considérer l'application identité Id de E dans F, si elle est compacte on dit que l'injection de E dans F est compacte et on note $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$.

Théorème 1.2.6. *(Rellich-Kondrachov)*
Soit Ω ouvert borné de Classe C^1, on a les injections compactes suivantes :

1. *Si $p < N$ alors $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$.*
2. *Si $p = N$ alors $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.*
3. *Si $p > N$ alors $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

1.3 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.3.1. *Soit H un espace de Hilbert, on dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, est :*

(i) continue s'il existe une constante C telle que :

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \ , \ \forall u, v \in H.$$

(ii) coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2 \ , \ \forall u \in H.$$

Théorème 1.3.1. *(Lax-Milgram)*
Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que ;

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

1.4 Élément de la théorie du point fixe

Commençons par rappeler un résultat classique d'existence et d'unicité de point fixe pour des applications contractantes.

Théorème 1.4.1. *(Point fixe de Banach, Picard)*
Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante c'est à dire : il existe $0 < K < 1$ telle que pour tout $x, y \in E$:

$$d(f(x), f(y) \leq Kd(x,y).$$

Alors, f admet unique point fixe $\bar{x}$ dans E, i.e :

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Nous somme maintenant en mesure d'établir le théorème de Schauder avec deux versions.

Théorème 1.4.2. *(La première version)*
Soit E un espace de Banach, C un convexe compact non vide de E et T un opérateur continu de C dans C. Alors T admet un point fixe.

Définition 1.4.1. *Soit E un espace de Banach, on dit qu'un opérateur $T : E \longrightarrow E$ est complètement continu si il est continu, et pour tout borné B de E, $\overline{T(B)}$ est compact dans E.*

Théorème 1.4.3. *(La deuxième version)*
Soit E un espace de Banach, C un convexe borné fermé non vide de E et T un opérateur complètement continu de C dans C. Alors T admet un point fixe.

En fin, on termine cette section par l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 1.4.4. *Soit E un espace de Banach, $B := B(0, R)$ une boule fermée. Supposons que l'opérateur $T : B \longrightarrow E$ continu, compact. Alors :*

— *Ou bien T possède un point fixe dans B.*

— *Ou bien il existe $x \in \partial B$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda T(x)$.*

Théorème 1.4.5. *Soit E un espace et T un opérateur de E dans E, alors si :*

(i) T *continu.*

(i.i) T *complètement continu.*

(i.i.i) $\exists M > 0$ *pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que :* $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$ *et pour tout* $\delta \in [0, 1]$ *:*

$$u = \delta T(u).$$

L'opérateur T admet au moins un point fixe.

Chapitre 2

OPÉRATEURS DE SUPERPOSITION

Dans ce chapitre
nous présentons quelques propriétés topologiques
de l'opérateur de superposition dans quelques espaces fonctionnels

---

2.1 Fonction de carathéodory

Définition 2.1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on dit que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est satisfait la condition de carathéodory si :*

- *$\forall\ s \in \mathbb{R}$ la fonction $f(.,s)$ est mesurable sur Ω.*
- *La fonction $f(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et p.p en $x \in \Omega$.*

Définition 2.1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on dit que la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est satisfait la condition de carathéodory si :*

- *$\forall\ (u,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ la fonction $x \mapsto f(x,u,\eta)$ est mesurable.*
- *La fonction $(u,\eta) \mapsto f(x,u,\eta)$ est continue pour p.p $x \in \Omega$.*

Lemme 2.1.1. *[5]*
Soient $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de carathéodory et $(u_n)_n$ une suite mesurable telle que $u_n \longrightarrow u$ en mesure.
Alors :

$$f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u) \quad \text{en mesure.}$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$, et v une fonction mesurable. Pour $k > 0$, on désigne des ensembles mesurables Ω_k par :

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : |u(x) - v(x)| < \frac{1}{k} \Longrightarrow |f(x, u(x)) - f(x, v(x))| < \varepsilon \right\}$$

La fonction f étant de Carathéodory, on a que f continue par rapport à s, alors :

$$\Omega = \cup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$$

Pour $i < j$ on a :$|u(x) - v(x)| < \frac{1}{j} < \frac{1}{i}$, ainsi : $\Omega_i \subset \Omega_j$. Par conséquent la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
Par ailleurs :

$$\lim_{k \to +\infty} mes(\Omega_k) = mes(\Omega).$$

Donc pour tout $\eta > 0$ fixé, il existe k_0 tel que :

$$mes(\Omega) - mes(\Omega_{k_0}) < \frac{\eta}{2}.$$

Considérons maintenant les ensembles A_n par :

$$A_n = \left\{ x \in \Omega : |u_n(x) - u(x)| < \frac{1}{k_0} \right\}.$$

Ainsi la convergence en mesure de u_n vers u implique qu'il existe $n_0 > 0$ tel que :

$$mes(\Omega) - mes(A_n) < \frac{\eta}{2}.$$

pour tout $n > n_0$. Soit donc :

$$D_n = \{ x \in \Omega : |f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))| < \varepsilon \}.$$

Alors :

$$A_n \cap \Omega_{k_0} \subset D_n.$$

Par suite :

$$mes(\Omega) - mes(D_n) < (mes(\Omega) - mes(A_n)) + (mes(\Omega) - mes(\Omega_{k_0})) < \eta.$$

Ce qui prouve la convergence en mesure de $f(x, u_n(x))$ vers $f(x, u(x))$.

$\square$

2.2 Opérateurs de superposition dans $L^p(\Omega)$

2.2.1 Condition suffisante

Proposition 2.2.1. *[1]*
Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p, q < \infty$ des réels et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfait la condition de carathéodory. On suppose qu'il existe $b \geq 0$ et $a \in L^q(\Omega)$ tels que la condition de croissance :

$$\forall s \in \mathbb{R} \text{ et p.p sur } \Omega \ : |f(.,s)| \leq a(.) + b|s|^{\frac{p}{q}} \tag{2.2.1}$$

est satisfaite. Pour toute fonction u mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, on définit l'opérateur de superposition B par $(Bu)(x) = f(x, u(x))$. Alors B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Montrons d'abord que B est bien défini :
Soit $u \in L^p(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q \, dx = \int_\Omega |f(x, u(x))|^q \, dx.$$

D'après (2.2.1), on obtient :

$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q \, dx \leq \int_\Omega \left| a(x) + b|u(x)|^{\frac{p}{q}} \right|^q dx.$$

En vertu de lemme 1.1.1, il vient :

$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q \, dx \leq 2^{q-1} \int_\Omega |a(x)|^q + b^q |u(x)|^p dx.$$

Or : $a \in L^q(\Omega)$ et $u \in L^p(\Omega)$, par suite :

$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx < \infty.$$

Ainsi B est bien défini.

Montrons maintenant la continuité de B, par deux méthodes :

— **Méthode 01** :

Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergeant vers u dans $L^p(\Omega)$, d'après la réciproque partielle du théorème de la convergence dominée de Lebesgue il existe une sous suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $g \in L^p(\Omega)$ telles que :

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

et :

$$|u_{n_k}| \leq g \quad p.p \ dans \ \Omega.$$

La fonction f étant de Carathéodory, on a que $f(x,.)$ continue presque partout sur $\mathbb{R}$. Par suite :

$$f(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow f(x, u(x)), \quad p.p \ dans \ \Omega.$$

D'après la condition de croissance (2.2.1) on déduit :

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leqslant a(x) + b|g(x)|^{\frac{p}{q}}.$$

Comme $a \in L^q(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, on conclut bien que $f(x, u_{n_k})$ est dominée dans $L^q(\Omega)$. Par suite, on en déduit (par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue) que $Bu_{n_k} \longrightarrow Bu$ dans $L^q(\Omega)$.

En raisonnant par l'absurde, on démontre que cette convergence reste vraie sans extration de sous suite.
En effet, supposons qu'il existe une suite $(u_n)_n$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$, et que $(Bu_n)_n$ ne converge pas vers $B(u)$ dans $L^q(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.
Il existe donc $\varepsilon > 0$, et une sous suite $(u_{n_k})_k$ de $(u_n)_n$ tels que :

$$\|B(u_{n_k}) - B(u)\|_{L^q(\Omega)} \geq \varepsilon \tag{2.2.2}$$

Grâce à la convergence $u_{n_k} \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et la réciproque partielle de la convergence dominée dans $L^p(\Omega)$ on peut supposer qu'il existe une fonction $h \in L^p(\Omega)$ et une sous suite de $(u_{n_k})_k$, encore notée $(u_{n_k})_k$ telles que pour presque partout sur Ω :

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad et \quad |u_{n_k}| \leq h.$$

Par conséquent :

$$f(x, u_{n_k}(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \quad p.p \ sur \ \Omega.$$

Remarquons aussi que :

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leq a(x) + b|u_{n_k}|^{\frac{p}{q}}$$

Or :

$$a(x) + b|u_{n_k}|^{\frac{p}{q}} \in L_q(\Omega).$$

Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée, on en déduit bien que $Bu_{n_k} \longrightarrow Bu$ dans $L^q(\Omega)$ ce qui est en contraduction avec (2.2.2). Alors B en tant qu'opérateur de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continu.

— **Méthode 02 :**

Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers u dans $L^p(\Omega)$, alors :

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{en mesure.}$$

En vertu de lemme 2.1.1, on obtient :

$$f(x, u_n(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \quad \textit{en mesure.}$$

i.e

$$B(u_n) \longrightarrow B(u) \quad \textit{en mesure.}$$

Montrons maintenant que $\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |B(u_n)|^q = 0$ uniformement par rapport à n :
Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable. On a :

$$\int_E |(Bu_n)(x)|^q dx = \int_E |f(x, u_n(x))|^q dx$$

En utilisant la condition de croissance (2.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_E |(Bu_n)(x)|^q dx &\leq \int_E \left| a(x) + b|u_n(x)|^{\frac{p}{q}} \right|^q dx. \\ &\leq 2^{q-1} \int_E |a(x)|^q dx + 2^{q-1} b^q \int_E |u_n(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Comme $a \in L^q(\Omega)$, on a :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |a(x)|^q = 0.$$

Et d'après le théorème 1.1.13 :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |u_n(x)|^p = 0.$$

En regroupant les deux convergences ci-dessus, on aura :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |B(u_n)|^q = 0.$$

Nous somme alors en mesure d'appliquer le théoréme 1.1.13 qui montre que $B(u_n) \longrightarrow B(u)$ dans $L^q(\Omega)$, par suite B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

$\square$

2.2.2 Condition nécessaire

Le résultat suivant montre que la réciproque du la Proposition 2.2.1 est vraie dans le sens où : si B envoie $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ alors la condition de croissance (2.3.1) est satisfaite (et en particulier B est continu). Ici nous nous bornerons à démontrer cette réciproque dans le cas où la fonction f ne dépend pas de x, i.e. $f(.,s) \equiv f(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.2.2. *[1] Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1 \leqslant p,\ q < \infty$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour toute fonction u définie p.p sur Ω on définit l'opérateur $(Bu)(x) \equiv f(u(x))$.*
On suppose que si $u \in L^p(\Omega)$, on a $Bu \in L^q(\Omega)$. Il existe alors $a \geq 0$, $b \geq 0$ tels que :

$$\forall s \in \mathbb{R}\ ,\ |f(s)| \leqslant a + b|s|^{\frac{p}{q}}$$

En particulier B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. En remplaçant $f(s)$ par $f(s)-f(0)$ on peut se ramener au cas où $f(0) = 0$. Supposons que la condition de croissance n'est pas satisfaite, alors $\forall n \geq 1,\ \exists s_n \in \mathbb{R}$ tel que $|s_n| \geqslant 1$ et :

$$|f(s_n)| \geqslant n^{\frac{1}{q}}(1 + |s_n|^{\frac{p}{q}}).$$

On peut supposer que la suite $|s_n|$ est croissante et que $|s_n| \longrightarrow \infty$.
Considérons maintenant des ensembles mesurables A_n deux à deux disjoints tels que :

$$mes(A_n) = \frac{mes(\Omega)}{(1 + |s_n|^p)n^2}.$$

Soit donc la fonction $u = \sum_{n \geqslant 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}$. Montrons que $u \in L^p(\Omega)$:
On a :

$$\int_\Omega |\sum_{n \geqslant 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p dx = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n} |\sum_{n \geqslant 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p dx + \int_{\Omega \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n} |\sum_{n \geq 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p dx.$$

Comme les ensembles A_n sont deux à deux disjoints, on obtient :

$$\int_{\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n} |\sum_{n \geq 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p = \sum_{n \geq 1} \int_{A_n} |\sum_{n \geq 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p$$

Or :

$$\int_{A_n} |\sum_{n \geq 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p = \int_{A_n} |s_n|^p$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} |\sum_{n\geq 1} s_n \mathbb{1}_{A_n}|^p &= \sum_{n\geq 1}\int_{A_n} |s_n|^p \\
&= \sum_{n\geq 1} |s_n|^p mes(A_n) \\
&= \sum_{n\geq 1} |s_n|^p \frac{mes(\Omega)}{n^2(1+|s_n|^p)} \\
&\leqslant mes(\Omega)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Grâce à la bornétude de Ω, et la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, on déduit que :

$$\int_{\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} |u(x)|^p dx < \infty.$$

D'autre part si : $x \in \Omega \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, par suite $x \notin A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. D'où :

$$u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n.$$

Par conséquent :

$$\int_{\Omega\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} |u(x)|^p dx = 0.$$

Alors $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$, ce qui prouve que $u \in L^p(\Omega)$.

Mais on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx &= \int_\Omega |f(u(x))|^q dx. \\
&= \int_{\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} |f(u(x))|^q dx + \int_{\Omega\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} |f(u(x))|^q dx. \\
&= \sum_{n\geq 1}\int_{A_n} |f(u(x))|^q dx + \int_{\Omega\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n} |f(u(x))|^q dx.
\end{aligned}$$

On a déjà montrer que $u(x) = s_n$ *pour tout* $x \in A_n$, et $u(x) = 0$ *pour tout* $x \in \Omega\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n$. Et par suite :

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |(Bu)(x)|^q dx &= \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} |f(s_n)|^q dx + \int_{\Omega\setminus\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n} |f(0)|^q dx. \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} |f(s_n)|^q dx. \\
&\geq \sum_{n\geq 1} n(1+|s_n|^{\frac{p}{q}})^q mes(A_n). \\
&\geq \sum_{n\geq 1} n(1+|s_n|^p) mes(A_n). \\
&\geq mes(\Omega) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Comme la série harmonique est divergente et Ω borné, on conclut bien que $\int_{\Omega} |(Bu)(x)|^q dx = +\infty$, ce qui signifie que $Bu \notin L^q(\Omega)$: autrement dit B en tant qu'opérateur de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, n'est pas défini en u. On en conclut donc que la fonction f satisfait la condition de croissance et d'après la proposition précédente, B est continu. $\square$

2.3 Opérateurs de superposition dans $W_p^1(\Omega)$

Proposition 2.3.1. *Soient Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1 < q \leqslant p < N$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne et sa dérivée qui existe p.p sur $\mathbb{R}$ satisfait la condition de croissance :*

$$\exists a, b \geqslant 0, \forall s \in \mathbb{R} : |f'(s)| \leqslant a + b|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}} \tag{2.3.1}$$

On pose : $(Bu) \equiv f(u(.))$. Alors B continu de $W_p^1(\Omega)$ dans $W_q^1(\Omega)$.

Démonstration. Montrons que B est bien défini :
Tout d'abord on va montrer que f satisfait une condition de croissance :
Comme f est localement lipschitzienne, on a :

$$f(s) = \int_0^s f'(t)dt + f(0)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|f(s)| &\leq \int_0^s |f'(t)|dt + |f(0)| \\
&\leq \int_0^s a + b|t|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}} dt + |f(0)| \\
&\leq as + \frac{b}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1}|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1} + |f(0)| \\
&\leq a|s| + \frac{b}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1}|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1} + |f(0)|
\end{aligned}$$

En appliquant l'inegalité de young avec les exposants $\left(\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1; \frac{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|f(s)| &\leq \frac{1}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1}|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1} + \frac{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1} a^{\frac{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}} + \frac{b}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1}|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1} + |f(0)| \\
&\leq \frac{1+b}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1}|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1} + \frac{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1} a^{\frac{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}+1}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}} + |f(0)|
\end{aligned}$$

Prenons :

$$\bar{a} = \frac{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1} a^{\frac{\frac{N(p-q)}{Npq-pq}+1}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}} + |f(0)| \quad et \quad \bar{b} = \frac{1+b}{\frac{N(p-q)}{Nq-pq} + 1}$$

On obtient :

$$|f(s)| \leqslant \bar{a} + \bar{b}|s|^{\frac{Np-pq}{Nq-pq}} \tag{2.3.2}$$

— Montrons donc que $B(u) \in L^q(\Omega)$:

Soit $u \in W_p^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx = \int_\Omega |f(u(x))|^q dx.$$

D'après (2.3.2), on aura :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx &\leq 2^{q-1} \int_\Omega \left(\bar{a}^q + \bar{b}^q |u(x)|^{\frac{Np-pq}{N-p}}\right) dx. \\ &\leq 2^{q-1} \left(\bar{a}^q \; mes(\Omega) + \bar{b}^q \int_\Omega |u(x)|^{\frac{Np-pq}{N-p}} dx\right).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $mes(\Omega) < +\infty$ et $\dfrac{Np-pq}{N-p} < p^\star$, on obtient :

$$W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np-pq}{N-p}}(\Omega).$$

Par ailleurs il existe $M > 0$ tel que :

$$\|u\|_{L_{\frac{Np-pq}{N-p}}} \leq M \|u\|_{W_p^1(\Omega)} < +\infty.$$

Par conséquent $B(u) \in L^q(\Omega)$.

— Montrons que $\nabla(Bu) \in L^q(\Omega)$:

Soit $u \in W_p^1(\Omega)$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\nabla(Bu) = \nabla(f(u)) = f'(u)\nabla u.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(Bu)|^q dx &= \int_\Omega |f'(u)\nabla u|^q dx \\ &= \int_\Omega |f'(u)|^q |\nabla u|^q dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $\left(\dfrac{p}{p-q} \; , \; \dfrac{p}{q}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(Bu)|^q dx &\leq \left(\int_\Omega |f'(u)|^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \|\nabla u\|^q_{L_p(\Omega)} \left(\int_\Omega |f'(u)|^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}}.\end{aligned}$$

De plus la condition de croissance imposée à f' implique :

$$\int_\Omega |\nabla(Bu)|^q dx \leq 2^{\frac{pq}{p-q}-1} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^q \left(a^{\frac{pq}{p-q}} mes(\Omega) + b^{\frac{pq}{p-q}} \int_\Omega |u|^{\frac{Np}{N-p}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}}$$

Et comme : $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$, on déduit que :

$$\int_\Omega |u|^{\frac{Np}{N-p}} dx < +\infty.$$

Ainsi $\nabla(Bu) \in L^q(\Omega)$.

Par suite l'opérateur B est bien defini de $W_p^1(\Omega)$ dans $W_q^1(\Omega)$.

Montrons donc la continuité de B :
Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers u dans $W_p^1(\Omega)$, on a donc u_n et ∇u_n convergent vers u et ∇u dans $L^p(\Omega)$. La réciproque partielle de la convergence dominée de Lebesgue montre qu'il existe une sous suite $(u_{n_k})_k$ telle que u_{n_k} et ∇u_{n_k} convergent vers u et ∇u presque partout dans Ω.
En utilisant le fait que f est localement lipschitzienne, on a donc f continue. Par suite :

$$f(u_{n_k}) \to f(u) \ \ p.p \ sur \ \Omega. \tag{2.3.3}$$

— Montrons que $\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |B(u_{n_k})|^q dx = 0$:
Soit E un ensemble mesurable de Ω, on a :

$$\int_E |B(u_{n_k})|^q dx = \int_E |f(u_{n_k})|^q dx.$$

D'après (2.3.2), on obtient :

$$\int_E |B(u_{n_k})|^q dx \leq \int_E \left| \bar{a} + \bar{b} |u_{n_k}|^{\frac{Np-pq}{Nq-pq}} \right|^q dx.$$

En vertu de lemme 1.1.1, il vient :

$$\int_E |B(u_{n_k})|^q dx \leq 2^{q-1} \left(\bar{a}^q mes(E) + \bar{b}^q \int_E |u_{n_k}|^{\frac{Np-pq}{N-p}} dx \right).$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $\left(\dfrac{Np}{Np-pq}, \dfrac{N}{q} \right)$, on aura :

$$\int_E |B(u_{n_k})|^q dx \leq 2^{q-1} \left(\bar{a}^q mes(E) + \bar{b}^q mes(E)^{\frac{q}{N}} \left(\int_\Omega |u_{n_k}|^{\frac{Np}{N-p}} dx \right)^{\frac{Np-pq}{Np}} \right).$$

En faisant tendre $mes(E)$ vers zéro, on obtient finalement :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |B(u_{n_k})|^q dx = 0.$$

— Montrons que $\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |\nabla B(u_{n_k})|^q dx = 0$:
On a :

$$\nabla(Bu_{n_k}) = \nabla(f(u_{n_k})) = f'(u_{n_k})\nabla u_{n_k}.$$

D'où :

$$\int_E |\nabla B(u_{n_k})|^q dx = \int_E |f'(u_{n_k})|^q |\nabla u_{n_k}|^q dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $\left(\dfrac{p}{p-q}, \dfrac{p}{q}\right)$, il découle :

$$\int_E |\nabla B(u_{n_k})|^q dx \leq \left(\int_E |f'(u_{n_k})|^{\frac{pq}{p-q}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_E |\nabla u_{n_k}|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Comme ∇u_{n_k} converge dans $L^p(\Omega)$, le théorème 1.1.13 montre que

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |\nabla u_{n_k}|^p dx = 0. \tag{2.3.4}$$

D'autre part, la condition (2.3.1), nous donne :

$$\int_E |f'(u_{n_k})|^{\frac{pq}{p-q}} dx \leq 2^{\frac{pq}{p-q}-1} \left(a^{\frac{pq}{p-q}} mes(E) + b^{\frac{pq}{p-q}} \int_E |u_{n_k}|^{\frac{Np}{N-p}} dx\right).$$

Et comme $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega)$, on a : $u_{n_k} \to u$ dans $L^{p^\star}(\Omega)$. Par suite en utilisant le théorème 1.1.13, on obtient :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |u_{n_k}|^{p^\star} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |f'(u_{n_k})|^{\frac{pq}{p-q}} = 0. \tag{2.3.5}$$

De (2.3.4) et (2.3.5), il vient :

$$\lim_{mes(E)\to 0} \int_E |\nabla B(u_{n_k})|^q dx = 0.$$

Nous somme alors en mesure d'appliquer le théorème de Vitali, ce qui montre bien que $(Bu_{n_k})_k \to Bu$, et $(\nabla Bu_{n_k})_k \to \nabla Bu$ dans $L^q(\Omega)$.
Notons que les convergences ci-dessus sont obtenues seulement pour la suite extraite $(u_{n_k})_k$, le raisonnement par l'absurde ce que nous avons fait dans la démonstration du proposition 2.2.2 (la méthode 1) montre bien que les convergences ainsi obtenues sont vraies pour la suite entière $(u_n)_n$. Par conséquent $(Bu_n)_n$ converge vers Bu dans $W_q^1(\Omega)$, ce qui prouve bien la continuité de B.

$\square$

Proposition 2.3.2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $1 < q \leq p < N$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne si f' satisfait la condition* (2.3.1)*, alors l'opérateur B défini par :$(Bu) \equiv f(u(.))$ est un opérateur borné de $W_p^1(\Omega)$ dans $W_q^1(\Omega)$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que B est borné de $W_p^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ Soient $u \in W_p^1(\Omega)$ et $M > 0$ tels que : $\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leq M$.
On a :

$$\|Bu\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(u(x))|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

En vertu de (2.3.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\|Bu\|^q_{L_q(\Omega)} &\leq 2^{q-1}\int_\Omega \left(\bar{a}^q + \bar{b}^q |u(x)|^{\frac{Np-pq}{N-p}}\right) dx\\ &\leq 2^{q-1}\left(\bar{a}^q \ mes(\Omega) + \bar{b}^q \int_\Omega |u(x)|^{\frac{Np-pq}{N-p}} dx\right).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^\star}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np-pq}{N-p}}(\Omega)$, alors il existe $C > 0$ tel que :

$$\|u\|_{L_{\frac{Np-pq}{N-p}}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Par suite :

$$\|Bu\|^q_{L_q(\Omega)} \leq 2^{q-1}\left(\bar{a}^q mes(\Omega) + \bar{b}^q C^{\frac{Np-pq}{N-p}} \|u\|^{\frac{Np-pq}{N-p}}_{W_p^1(\Omega)}\right) \leq 2^{q-1}\left(\bar{a}^q mes(\Omega) + \bar{b}^q C^{\frac{Np-pq}{N-p}} M^{\frac{Np-pq}{N-p}}\right).$$

Par conséquent B est born$\surd$©deW$_p^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. Montrons donc la bornétude de $\nabla(Bu)$, en effet :
Soit $u \in W_p^1(\Omega)$, d'aprés le théorème de dérivation des fonctions composées on a :

$$\nabla(Bu) = f'(u)\nabla u.$$

D'où :

$$\int_\Omega |\nabla B(u)|^q dx = \int_\Omega |f'(u)|^q |\nabla u|^q dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $\left(\dfrac{p}{p-q}, \dfrac{p}{q}\right)$ et la condition imposée à f', on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(Bu)|^q dx &\leq 2^{\frac{pq}{p-q}-1}\|\nabla u\|^q_{L_p(\Omega)}\left(a^{\frac{pq}{p-q}} mes(\Omega) + b^{\frac{pq}{p-q}} \int_\Omega |u|^{\frac{Np}{N-p}} dx\right)^{\frac{p-q}{p}}\\ &\leq 2^{\frac{pq}{p-q}-1}\|\nabla u\|^q_{L_p(\Omega)}\left(a^{\frac{pq}{p-q}} mes(\Omega) + b^{\frac{pq}{p-q}} \|u\|^{p^\star}_{W_p^1(\Omega)}\right)^{\frac{p-q}{p}}\\ &\leq 2^{\frac{pq}{p-q}-1}\|\nabla u\|^q_{L_p(\Omega)}\left(a^{\frac{pq}{p-q}} mes(\Omega) + b^{\frac{pq}{p-q}} M^{p^\star}\right)^{\frac{p-q}{p}}.\end{aligned}$$

Ainsi $\nabla(Bu)$ est born$\surd$©$, nousavonsdonctablique$B$estborndans$W$_q^1(\Omega)$.

□

Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie dans le sens où : si B envoie $W_p^1(\Omega)$ dans $W_q^1(\Omega)$ alors la condition de croissance (2.3.1) est satisfaite (et en particulier B est continu).

Lemme 2.3.1. *[6] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et ϕ une fonction mesurable non négative sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définie l'opérateur B_ϕ par :*

$$(B_\phi)(x) = \phi(u(x), \nabla u(x)).$$

Si B_ϕ envoie $W_p^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ où $1 \leq p < +\infty$, alors ϕ satisfait la condition suivante :

$$|\phi(u,\eta)| \leq C(1 + |u|^{\frac{Np}{N-p}} + |\eta|^p) \tag{2.3.6}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Voir [6], page 179 □

Proposition 2.3.3. *[6] Soient $1 < q \leq p < N$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On pose : $Bu \equiv f(u(.))$ pour une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Alors si B est bien défini de $W_p^1(\Omega)$ dans $W_q^1(\Omega)$, f' satisfait la condition de croissance :

$$\exists a, b \geq 0, \forall s \in \mathbb{R} : |f'(s)| \leq a + b|s|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}. \tag{2.3.7}$$

Démonstration. On définie tout d'abord la fonction ϕ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par :

$$\phi(u,\eta) = |f'(u)\eta|^q.$$

D'après l'hypothèse, lorsque $u \in W_p^1(\Omega)$ on a que $B(u) \in W_q^1(\Omega)$, alors $\nabla B(u) \in L^q(\Omega)$, or $\nabla B(u) = f'(u)\nabla u$.
Ainsi :

$$|f'(u)\nabla u|^q \in L^1(\Omega).$$

Par conséquent, l'opérateur B_ϕ envoie $W_p^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$.
Par ailleurs le lemme 2.3.1 montre bien que ϕ satisfait la condition (2.3.6), par suite :

$$|\phi(u,\eta)| = |f'(u)\eta|^q \leq C(1 + |u|^{\frac{Np}{N-p}} + |\eta|^p).$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donc on a

$$|f'(u)|^q \leq C(1 + |u|^{\frac{Np}{N-p}} + |\eta|^p)|\eta|^{-q}. \tag{2.3.8}$$

pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Posons

$$g(\eta) = (1 + |u|^{\frac{Np}{N-p}} + |\eta|^p)|\eta|^{-q}.$$

En calculant la dérivée de g, on obtient :

$$g'(\eta) = \left(p|\eta|^{p-1} - q|\eta|^{-1}(1 + |u|^{\frac{Np}{N-p}} + |\eta|^p)\right)|\eta|^{-q}.$$

De plus, remarquons que si $g'(\eta) = 0$, alors $|\eta| \sim |u|^{\frac{N}{N-p}}$. Ainsi g atteint son minimum lorsque $|\eta| \sim |u|^{\frac{N}{N-p}}$.
Comme f' satisfait la condition (2.3.8) pour tout $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors cette condition est satisfaite lorsque en remplaçant $|\eta|$ par $|u|^{\frac{N}{N-p}}$, et on aura :

$$|f'(u)|^q \leq C\left(1 + 2|u|^{\frac{Np}{N-p}}\right)|u|^{\frac{-Nq}{N-p}}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}|f'(u)| &\leq \left(C\left(1 + 2|u|^{\frac{Np}{N-p}}\right)|u|^{\frac{-Nq}{N-p}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C^{\frac{1}{q}}|u|^{\frac{-N}{N-p}} + 2^{\frac{1}{q}}C^{\frac{1}{q}}|u|^{\frac{N(p-q)}{Nq-pq}}.\end{aligned}$$

Par conséquent f' satisfait (2.3.1). □

Proposition 2.3.4. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $1 < p, q < \infty$ des réels et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ satisfait la conditon de carathéodory.*

— *Pour $p < N$, supposons que :*

$$f(x, u, \eta) \leq a(x) + b|u|^{\frac{Np}{q(N-p)}} + c|\eta|^{\frac{p}{q}} \tag{2.3.9}$$

tels que : $a \in L^q(\Omega)$ et $b, c \geq 0$.

— *Pour $p = N$, supposons que :*

$$|f(x, u, \eta)| \leq a(x) + b|u|^{\frac{r}{q}} + c|\eta|^{\frac{p}{q}} \tag{2.3.10}$$

tels que $a \in L^q(\Omega)$, $b, c \geq 0$ et $r \geq 1$.

— *Pour $p > N$, supposons que :*

$$|f(x, u, \eta)| \leq b(u)(a(x) + c|\eta|^{\frac{p}{q}}) \tag{2.3.11}$$

tels que $a \in L^q(\Omega)$, $b \in C_0(\mathbb{R})$ et $c > 0$.

On définit l'opérateur de superpostion B par :

$$(Bu)(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)).$$

Alors B continu de $W_p^1(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Démonstration. Montrons d'abord que B est bien défini :

Soit $u \in W_p^1(\Omega)$, on distingue trois cas :

— **1^{er} cas $p < N$:**
On a :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx = \int_\Omega |f(x, u(x), \nabla u(x))|^q dx.$$
En utilisant (2.3.9) on obtient :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx \leq \int_\Omega |a(x) + b|u(x)|^{\frac{Np}{q(N-p)}} + c|\nabla u(x)|^{\frac{p}{q}}|^q dx.$$
avec : $a \in L^q(\Omega)$ et $b, c \geq 0$.
Ainsi :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{2(q-1)} \left(\int_\Omega |a(x)|^q dx + b^q \int_\Omega |u(x)|^{\frac{Np}{N-p}} dx + c^q \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right).$$
Par suite :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{2(q-1)} \left(\int_\Omega |a(x)|^q dx + b^q C_{N.p}^{p*} \|u\|_{W_p^1(\Omega)}^{p*} + c^q \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right).$$
avec $C_{N.p} > 0$, donnée par l'inégalité de Sobolev. Comme $a \in L^q(\Omega)$, $u \in W_p^1(\Omega)$ on en déduit bien que $\|B\|_{L_q(\Omega)} < \infty$, par conséquent B est bien défini.

— **2^{me} cas $p = N$:**
On a :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx = \int_\Omega |f(x, u(x), \nabla u(x))|^q dx.$$
De (2.3.10) et d'après le lemme 1.1.1, on obtient :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{2(q-1)} \left(\int_\Omega |a(x)|^q dx + b^q \int_\Omega |u(x)|^r dx + c^q \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right).$$
Où $a \in L^q(\Omega)$, $b, c \geq 0$ et $r \geq 1$.
D'où :
$$\int_\Omega |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{2(q-1)} \left(\int_\Omega |a(x)|^q dx + R^r b^q \|u\|_{L_r(\Omega)}^r + c^q \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \right).$$
avec R donnée par le théorème de Rellich-Kondrachov ($W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ pour tout $r \geq 1$). Et comme $a \in L^q(\Omega)$, $u \in L^r(\Omega)$, $\nabla u \in L^p(x)$, on trouve que B est bien défini.

— 3^{me} **cas** $p > N$ **:**

On a :

$$\int_{\Omega} |(Bu)(x)|^q dx = \int_{\Omega} |f(x, u(x), \nabla u(x))|^q \, dx.$$

En vertu de (2.3.11), on obtient :

$$\int_{\Omega} |(Bu)(x)|^q dx \leq \int_{\Omega} \left| b(u) \left(a(x) + c|\nabla u(x)|^{\frac{p}{q}} \right) \right|^q dx.$$

Où : $b \in C(\mathbb{R})$, $a \in L^q(\Omega)$ et $c > 0$.

En utilisant le lemme 1.1.1, il vient :

$$\int_{\Omega} |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{q-1} \int_{\Omega} |b(u)|^q \left(|a(x)|^q + c^q |\nabla u(x)|^p \right) dx.$$

En utilisant le fait que $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, et $b \in C(\mathbb{R})$, en déduit bien que $b(u)$ born$\surd$©$e, etparsuite : \int_{\Omega} |($ $2^{q-1} \|b(u)\|^q_{L_\infty(\Omega)} \left(\|a\|^q_{L_q(\Omega)} + c^q \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)} \right) < +\infty$. Donc il reste de montrer que B est continu, pour ce faire on considère une suite d'éléments de $W_p^1(\Omega)$ notée $(u_n)_n$ convergente vers $u \in W_p^1(\Omega)$, et on va prouver que $(Bu_n)_n$ converge vers Bu dans $L^q(\Omega)$.

En effet, comme $(u_n)_n$ converge vers u dans $W_p^1(\Omega)$, on déduit bien que u_n et ∇u_n convergent dans $L^p(\Omega)$ vers u et ∇u respectivement, et par suite :

$$u_n \longrightarrow u \quad \textit{en mesure}.$$

et :

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \textit{en mesure}.$$

Par conséquent :

$$f\left(x, u_n(x), \nabla u_n(x)\right) \longrightarrow f\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) \quad \textit{en mesure}.$$

Ainsi, on va montrer que $\lim_{mes(E) \longrightarrow 0} \int_E |B(u_n)|^q = 0$ pour $E \subset \Omega$ mesurable, on distingue donc trois cas :

— 1^{er} **cas** $p < N$ **:**

En utilisant (2.3.9), on obtient :

$$|f(x, u_n(x), \nabla u_n(x))| \leq a(x) + b|u_n(x)|^{\frac{Np}{q(N-p)}} + c|\nabla u_n(x)|^{\frac{p}{q}}.$$

avec $a \in L^q(\Omega)$ et $b, c \geq 0$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\int_E |(Bu_n)(x)|^q dx &\leq \int_E \left| a(x) + b|u_n(x)|^{\frac{Np}{q(N-p)}} + c|\nabla u_n(x)|^{\frac{p}{q}} \right|^q dx. \\
&\leq 2^{2(q-1)} \int_E |a(x)|^q dx + b^q \int_E |u_n(x)|^{\frac{Np}{N-p}} dx + c^q \int_E |\nabla u_n(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

Comme $a \in L^q(\Omega)$, on a : $\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |a(x)|^q dx = 0$.

Et grâce à la convergence $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$ et le théorème (1.1.13), on trouve :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |\nabla u_n|^p = 0.$$

D'après l'inégalité de Sobolev et la convergence $u_n \to u$ dans $W_p^1(\Omega)$, il existe $C_{N.p} > 0$ tel que :

$$\|u_n - u\|_{L_{p^\star}(\Omega)} \leq C_{N.p} \|u_n - u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

Ainsi $u_n \longrightarrow u$ dans $L^{p^\star}(\Omega)$, le théorème 1.1.13 montre que :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |u_n|^{p^\star} = 0$$

Par ailleurs :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |B(u_n)|^q = 0$$

— 2^{me} **cas** $p = N$ **:**

D'une manière analogue on démontre que $\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |B(u_n)|^q = 0$ pour $p = N$, en effet :
De la condition de croissance (2.3.10), on a :

$$|f(x, u_n(x), \nabla u_n(x)| \leq a(x) + b|u_n(x)|^{\frac{r}{q}} + c|\nabla u_n(x)|^{\frac{p}{q}}.$$

Où $a \in L^q(\Omega)$ et $b, c \geq 0,\ r \geq 1$.
Par suite :

$$\begin{aligned}\int_E |B(u_n)|^q dx &\leq \int_E \left|a(x) + b|u_n(x)|^{\frac{r}{q}} + c|\nabla u_n(x)|^{\frac{p}{q}}\right|^q dx. \\ &\leq 2^{2(q-1)} \int_E |a(x)|^q dx + b^q \int_E |u_n(x)|^r dx + c^q \int_E |\nabla u_n(x)|^p dx.\end{aligned}$$

Comme $a \in L^q(\Omega)$ et $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$, on a :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |a(x)|^q dx = 0.$$

Et :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |\nabla u_n|^p = 0.$$

De même par l'injection continue de $W_p^1(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$ pour $\forall r \in [1, \infty[$, il existe $R > 0$ de sorte que :

$$\|u_n - u\|_{L^r(\Omega)} \leq R \|u_n - u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Par conséquent :

$$u_n \longrightarrow u \quad dans \quad L^r(\Omega)$$

En appliquant le théorème 1.1.13, on obtient :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |u_n|^r = 0$$

Par suite :

$$\lim_{mes(E)\longrightarrow 0} \int_E |B(u_n)|^q = 0.$$

— <u>3^{me} **cas** $p > N$ **:**</u>
D'après la condition (2.3.11) imposée à f, on a :

$$\int_E |(Bu)(x)|^q dx \leq \int_E \left| b(u) \left(a(x) + c|\nabla u|^{\frac{p}{q}} \right) \right|^q dx.$$

Ainsi :

$$\int_E |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{q-1} \int_E |b(u)|^q \left(|a(x)|^q + c^q |\nabla u|^p \right) dx.$$

Et comme $b(u)$ born$\surd$ ⓒe :$\int_E |(Bu)(x)|^q dx \leq 2^{q-1} \|b(u)\|_{L_\infty}^q \left(\int_E |a(x)|^q dx + c^q \int_E |\nabla u(x)|^p dx \right) .Demmee$

On peut maintenant appliquer le théorème 1.1.13, on déduit bien que (Bu_n) converge vers $B(u)$ dans $L^q(\Omega)$. On a ainsi démontrer la continuité de B.

$\square$

Chapitre 3

Application à une classe de problèmes elliptiques quasi-linéaires

Dans ce chapitre
On s'intéresse à étudier l'existence des solutions de quelques problèmes elliptiques quasi-linéaire par la méthode du point fixe.

3.1 Application à un problème elliptique avec croissance sous linéaire en gradient

3.1.1 Position du problème

Dans cette section on va étudier l'existence et l'unicité d'une solution pour un problème quasi-linéaires, en utilisant l'alternative de Leray-Schauder.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, et $\lambda \geq 0$. On considère le problème suivant :

$$(P) : \begin{cases} -div(A(x)\nabla u) + \lambda u = H(x, \nabla u) + f & \Omega \\ \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Où : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice qui vérifie les propiétés suivantes :

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad pour\ tout\ 1 \leq i, j \leq N \tag{3.1.1}$$

Ainsi la condition d'ellipticité (ou de coercivité) :

$$\exists \alpha > 0 : A(x)\xi\xi = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \ \ p.p \ \ x \in \Omega \ , \ et\ tout\ \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1.2}$$

$$f \in H^{-1}(\Omega) \tag{3.1.3}$$

Et $H(x,\xi)$ une fonction satisfait :

$$|H(x,\xi)| \leq |b(x)|\,(|\xi|+1) \tag{3.1.4}$$

$$|H(x,\xi)-H(x,\eta)| \leq |b(x)||\xi-\eta| \tag{3.1.5}$$

où :

$$b \in L^N(\Omega). \tag{3.1.6}$$

Proposition 3.1.1. *[4](Principe de maximum)*
Soit ω une fonction de $H_0^1(\Omega)$, qui satisfait :

$$-div(A(x)\nabla\omega)+\lambda\omega \leq |b(x)||\nabla\omega| \quad sur\ \Omega.$$

où $b \in L^N(\Omega)$. Alors : $\omega \leq 0$.

Démonstration. Pour $k>0$, prenons $(\omega-k)_+$ comme fonction test, on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla\omega\nabla(\omega-k)_+dx+\lambda\int_\Omega \omega(\omega-k)_+dx \leq \int_\Omega |b(x)||\nabla\omega|(\omega-k)_+dx.$$

Notons $\omega_k=(\omega-k)_+$, alors $\nabla\omega_k=\mathbb{1}_{\omega>k}\nabla(\omega-k)$, et comme $\nabla\omega=\nabla(\omega-k)$, il vient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(x)\nabla\omega\nabla\omega_k dx &= \int_\Omega A(x)\nabla(\omega-k)\nabla\omega_k dx\\ &= \int_\Omega A(x)\nabla(\omega-k)\mathbb{1}_{\omega>k}\nabla(\omega-k)dx\\ &= \int_\Omega A(x)\nabla(\omega-k)\mathbb{1}^2_{\omega>k}\nabla(\omega-k)dx\\ &= \int_\Omega A(x)\nabla\omega_k\nabla\omega_k dx\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega \omega(\omega-k)_+dx &= \lambda\int_\Omega(\omega-k+k)(\omega-k)_+dx\\ &= \lambda\int_\Omega(\omega-k)(\omega-k)_+dx+\lambda k\int_\Omega(\omega-k)_+dx\\ &= \lambda\int_\Omega(\omega-k)\mathbb{1}_{\omega\geq k}(\omega-k)dx+\lambda k\int_\Omega(\omega-k)_+dx\\ &= \lambda\int_\Omega(\omega-k)_+^2dx+\lambda k\int_\Omega(\omega-k)_+dx\\ &= \lambda\|\omega_k\|^2_{L_2(\Omega)}+\lambda k\|\omega_k\|_{L_1(\Omega)} \geq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(x)\nabla\omega_k\nabla\omega_k dx &\leq \int_\Omega |b(x)||\nabla\omega_k|\omega_k dx\\ &\leq \int_\Omega \mathbb{1}_{E_k}|b(x)||\nabla\omega_k|\omega_k dx\end{aligned}$$

Où :

$$E_k = \{x \in \Omega : \omega(x) > k \ , \ |\nabla\omega(x)| > 0\}.$$

Il vient donc par la coercivité de A que :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla\omega_k|^2 dx \leq \int_\Omega \mathbb{1}_{E_k} |b(x)||\nabla\omega_k|\omega_k dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $\left(N, 2, \frac{2N}{N-2}\right)$, on trouve :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla\omega_k|^2 dx \leq \|b\|_{L_{N(E_k)}} \|\nabla\omega_k\|_{L_2(\Omega)} \|\omega_k\|_{L_{2^\star}(\Omega)}.$$

Rappelons que $2^\star = \frac{2N}{N-2}$.
Par ailleurs :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla\omega_k|^2 dx \leq C_{N.p} \|b\|_{L_{N(E_k)}} \int_\Omega |\nabla\omega_k|^2 dx. \tag{3.1.7}$$

avec $C_{N,p}$ donnée par L'inégalité de Sobolev.

En raisonnant donc par l'absurde, supposons que $\sup\omega > 0$ et $M = \sup\omega$, on distigne deux cas :

1 - Si $M = +\infty$, alors $\lim_{k\to M} E_k = \varnothing$ et par suite :

$$\lim_{k\to M} mes(E_k) = 0 \tag{3.1.8}$$

2 - Si $M < +\infty$, en faisant tendre k vers M, il suit :

$$\begin{aligned} E_M &= \{x \in \Omega : \omega(x) \geq M \ , \ |\nabla\omega(x)| > 0\} \\ &= \{x \in \Omega : \omega(x) > M \ , \ |\nabla\omega(x)| > 0\} \cup \{x \in \Omega : \omega(x) = M \ , \ |\nabla\omega(x)| > 0\}. \end{aligned}$$

Or $M = \sup\omega$, par conséquent :

$$\{x \in \Omega : \omega(x) > M \ , \ |\nabla w(x)| > 0\} = \varnothing.$$

D'autre part, si $\omega(x) = M$ alors $|\nabla w(x)| = 0$ p.p sur Ω, donc :

$$\{x \in \Omega : w(x) = M \ , \ |\nabla w(x)| > 0\} = \varnothing.$$

Ainsi :

$$\lim_{k\to M} E_k = \varnothing.$$

D'où :

$$\lim_{k\to M} mes(E_k) = 0 \tag{3.1.9}$$

On conclut bien avec (3.1.8) et (3.1.9) que :

$$\lim_{k\to M} mes(E_k) = 0.$$

Par conséquent $\|b\|_{L_N(E_k)} \longrightarrow 0$ quand $k \to M$, c'est à dire $\exists k_0 < M$ tel que :

$$\|b\|_{L_N(E_k)} < \frac{\alpha}{2C_{N.p}} \ , \ pour \ k \geq k_0.$$

Quitte à remplaçer k par k_0 dans (3.1.7), on en déduit :

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla \omega_{k_0}|^2 dx &\leq C_{N.p} \|b\|_{L_N(E_{k_0})} \int_\Omega |\nabla \omega_{k_0}|^2 dx.\\ &\leq \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla \omega_{k_0}|^2 dx.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla \omega_{k_0}|^2 dx \leq 0.$$

En utilisant le fait que $\nabla \omega_{k_0} = \mathbb{1}_{\omega > k_0} \nabla \omega$, on aura que :

$$\frac{\alpha}{2} \int_\Omega \mathbb{1}_{\omega > k_0} |\nabla \omega|^2 dx \leq 0.$$

Comme $\nabla \omega \neq 0$ sur E_{k_0}, on déduit bien (comme $E_{k_0} \subset \{x \in \Omega,\ \omega(x) > k_0\}$) que

$$\nabla \omega \neq 0 \ \ sur \ \ \{x \in \Omega,\ \omega(x) > k_0\}.$$

Ce qui justifie bien que : $\mathbb{1}_{\omega > k_0} = 0$. Ainsi $\omega \leq k_0 < M$.
Par passage au sup, on obtient : sup $\omega < M$, on aura finalement une contradiction, nous avons donc établi que $\omega(x) \leq 0$.

□

3.1.2 Existence et unicité

Théorème 3.1.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe au moins une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de (P). C'est à dire :*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla\phi(x)dx + \lambda \int_\Omega u(x)\phi(x)dx = \int H(x,\nabla u)\phi(x)dx + \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Proposition 3.1.2. *Sous les hypothèses* (3.1.3),(3.1.2),(3.1.4),(3.1.5),(3.1.6) *on définit pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ l'opérateur $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ par :*

$$T(v) = u \Leftrightarrow \begin{cases} -div(A(x)\nabla u) + \lambda u = H(x,\nabla v) + f \qquad \Omega & (P.1) \\ \\ u \in H_0^1(\Omega) & (P.2) \end{cases}$$

Alors :

(i) T *continu.*

(i.i) T *complètement continu.*

(i.i.i) $\exists M > 0$ *pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$ *et pour tout* $\delta \in [0,1]$ *tel que :* $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M$

$$u = \delta T(u).$$

Démonstration. 1. Montrons d'abord que T est bien défini :

En multipliant l'équation $(P.1)$ par un élément $\phi \in H_0^1(\Omega)$, en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega H(x, \nabla v)\phi dx + (f, \phi)$$

Posons :

$$a(u, \phi) = \int_\Omega A(x)\nabla u \nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega u\phi dx.$$

$$l(\phi) = \int_\Omega H(x, \nabla v)\phi dx + (f, \phi).$$

Il est clair que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, montrons qu'elle est coercive :

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$a(u, u) = \int_\Omega A(x)\nabla u \nabla u dx + \lambda \int_\Omega u^2 dx.$$

En vertu de (3.1.2), on a qu'il existe $\alpha \geq 0$, tel que :

$$a(u, u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_\Omega u^2 dx$$

Comme $\lambda \geq 0$, On obtient :

$$a(u, u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Par conséquent $a(.,.)$ est coercive. Donc il suffit de montrer qu'elle est continue.

En effet, soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$:

On a :

$$|a(u, \phi)| \leq \int_\Omega |A(x)\nabla u \nabla \phi| dx + \lambda \int_\Omega |u\phi| dx$$

De (3.1.1), il existe $C > 0$ tel que :

$$|a(u, \phi)| \leq C\|A\|_{L_\infty} \int_\Omega |\nabla u \nabla \phi| dx + \lambda \int_\Omega |u\phi| dx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$|a(u, \phi)| \leq C\|A\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla \phi\|_{L_2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L_2(\Omega)}\|\phi\|_{L_2(\Omega)}$$

Par suite :

$$|a(u,\phi)| \leq C\|A\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L_2(\Omega)} + \lambda C_\Omega^2\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L_2(\Omega)}$$

avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré.
Par conséquent :

$$|a(u,\phi)| \leq (C\|A\|_{L_\infty(\Omega)} + \lambda C_\Omega^2)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où $a(.,.)$ continue .
Montrons donc que $H(x,\nabla v) \in H^{-1}(\Omega)$:
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, d'après (3.1.4), on a :

$$\int_\Omega |H(x,\nabla v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx \leq \int_\Omega |b(x)|^{\frac{2N}{N+2}}(|\nabla v|+1)^{\frac{2N}{N+2}}\,dx$$

En vertu de lemme 1.1.1, on obtient :

$$\int_\Omega |H(x,\nabla v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx \leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1}\left[\int_\Omega |b(x)|^{\frac{2N}{N+2}}|\nabla v|^{\frac{2N}{N+2}}dx + \int_\Omega |b(x)|^{\frac{2N}{N+2}}dx\right]$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $(\frac{N+2}{2}, \frac{N+2}{N})$, on aura :

$$\int_\Omega |H(x,\nabla v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx \leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1}\left(\int_\Omega |b(x)|^N dx\right)^{\frac{2}{N+2}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{N}{N+2}}$$

$$+2^{\frac{2N}{N+2}-1}\int_\Omega |b(x)|^{\frac{2N}{N+2}}dx$$

Et comme $L^N(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, alors il existe un $C > 0$ tel que :

$$\|b\|_{L_{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \leq C\|b\|_{L_N(\Omega)}.$$

Par conséquent :

$$\int_\Omega |H(x,\nabla v)|^{\frac{2N}{N+2}}dx \leq 2^{\frac{2N}{N+2}-1}\left(\|b\|_{L_N(\Omega)}^{\frac{2N}{N+2}}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2N}{N+2}} + C^{\frac{2N}{N+2}}\|b\|_{L_N(\Omega)}^{\frac{2N}{N+2}}\right) < \infty$$

D'où :

$$H(x,\nabla v) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$$

Par conséquent :

$$H(x,\nabla v) \in H^{-1}(\Omega).$$

Par ailleurs $l \in H^{-1}(\Omega)$. Nous somme donc en mesure d'appliquer le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'un $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u\nabla\phi dx + \lambda\int_\Omega u\phi dx = a(u,\phi) = l(\phi) = \int_\Omega H(x,\nabla v)\phi dx + (f,\phi)$$

pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$
On conclut alors que T est bien défini.

2. Montrons que T continu :
   Soit $(v_n)_n$ une suite d'élèments de $H_0^1(\Omega)$ convergente vers v, on note $u_n = T(v_n)$ et $u = T(v)$.
   On ait :
   $$\begin{cases} -div(A(x)\nabla u_n) + \lambda u_n = H(x, \nabla v_n) + f \\ \\ -div(A(x)\nabla u) + \lambda u = H(x, \nabla v) + f \end{cases}$$
   En faisant la différence entre ces deux égalités, il vient :
   $$-\, div(A(x)\nabla(u_n - u)) + \lambda(u_n - u) = H(x, \nabla v_n) - H(x, \nabla v) \tag{3.1.1}$$
   En multipliant (3.1.1) par $(u_n - u)$ et en intégrant sur Ω, on trouve :
   $$\int_\Omega A\nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u) + \lambda \int_\Omega (u_n - u)^2 = \int_\Omega (H(x, \nabla v_n) - H(x, \nabla v))\,(u_n - u).$$
   En vertu de (3.1.2), on en déduit :
   $$\alpha|\nabla(u_n - u)|^2 \leq A(x)\nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u).$$
   Comme $\lambda \geq 0$:
   $$\begin{aligned} \alpha|\nabla(u_n - u)|^2 &\leq \alpha|\nabla(u_n - u)|^2 + \lambda|u_n - u|^2 \\ &\leq A(x)\nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u) + \lambda|u_n - u|^2. \end{aligned}$$
   En intégrant sur Ω, il vient :
   $$\begin{aligned} \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx &\leq \int_\Omega A(x)\nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u)dx + \lambda \int_\Omega |u_n - u|^2 dx \\ &\leq \int |H(x, \nabla v_n) - H(x, \nabla v)|\,|u_n - u|dx. \end{aligned}$$
   D'après (3.1.5) :
   $$\alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq \int_\Omega |b(x)||\nabla v_n - \nabla v||u_n - u|dx.$$
   En utilisant l'inégalité de Hôlder, on aura :
   $$\alpha \int |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq \|b\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla(v_n - v)\|_{L_2(\Omega)}\|u_n - u\|_{L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)}$$
   Par suite :
   $$\alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq C_{N.p}\|b\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla(v_n - v)\|_{L_2(\Omega)}\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

avec $C_{N.p}$ donnée par l'inégalité de Sobolev. D'où :

$$\alpha\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{N.p}\|b\|_{L_N(\Omega)}\|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)}\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Par conséquent :

$$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_{N.p}\|b\|_{L_N(\Omega)}}{\alpha}\|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

On conclut bien avec la convergence de $(v_n)_n$ vers v dans $H_0^1(\Omega)$, que $(u_n)_n$ converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers u. Ce qui prouve la continuité de l'opérateur T.

3. Montrons donc que T est complètement continu :
Soit $(v_n)_n$ une suite bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on note $u_n = T(v_n)$.
On ait :

$$-div(A(x)\nabla u_n) + \lambda u_n = H(x, \nabla v_n) + f$$

On prend u_n comme fonction test, on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n \nabla u_n dx + \lambda \int_\Omega u_n^2 dx = \int_\Omega H(x, \nabla v_n)u_n dx + (f, u_n)$$

D'après (3.1.2), on aura :

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx &\leq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda \int_\Omega u_n^2 dx \\ &\leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)u_n dx + (f, u_n) \\ &\leq \int_\Omega |H(x, \nabla v_n)u_n|\, dx + |(f, u_n)|\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (3.1.4) :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega |b(x)||\nabla v_n||u_n| dx + \int_\Omega |b(x)||u_n| dx + |(f, u_n)|$$

Comme $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe $C > 0$ tel que :

$$|(f, u_n)| \leq C\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Par conséquent :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \int_\Omega |b(x)||\nabla v_n||u_n| dx + \int_\Omega |b(x)||u_n| dx + C\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder aux deux premiers termes obtenus avec les exposants $(N, 2, \frac{2N}{N-2})$ et $(2, 2)$ respectivement, on obtient :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \|b\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)}\|u_n\|_{L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} + \|b\|_{L_2(\Omega)}\|u_n\|_{L_2(\Omega)} + C\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Par suite :

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq C_{N.p} \|b\|_{L_N(\Omega)} \|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$
$$+C_{\Omega} \|b\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)} + C \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Avec $C_{N.p}$ et C_{Ω} données par le théorème d'injection de sobolev et l'inégalité de poincaré.
D'où :

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_{N.p}\|b\|_{L_N(\Omega)}}{\alpha} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{C_{\Omega}\|b\|_{L_2(\Omega)} + C}{\alpha}$$

Comme $(v_n)_n$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$ on conclut bien que $(u_n)_n$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui est réflexif, on peut donc supposer après l'extration d'une sous suite encore notée $(u_n)_n$ qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ telles que :

$$u_n \rightharpoonup u \ \ faiblement \ dans \ H_0^1(\Omega)$$

Par ailleurs, le théorème de Rellich on a :

$$u_n \longrightarrow u \ \ fortement \ dans \ L^2(\Omega)$$

Ainsi, la réciproque de la convergence dominée montre qu'on peut encore extraire une sous suite (on ne renumérote pas) et une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$u_n \longrightarrow u \ \ p.p \ sur \ \Omega$$

Et :

$$|u_n| \leq g \ \ p.p \ sur \ \Omega$$

D'autre part on a :

$$A(x)\nabla u_n + \lambda u_n = H(x, \nabla v_n) + f.$$

En prenant donc $u_n - u$ comme fonction test, on aura :

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla u_n \nabla(u_n - u)dx + \lambda \int_{\Omega} u_n(u_n - u)dx = \int_{\Omega} H(x, \nabla v_n)\nabla(u_n - u)dx + (f, u_n - u)$$

D'où :

$$\int_{\Omega} A(x)\nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u)dx = \int_{\Omega} H(x, \nabla v_n)\nabla(u_n - u)dx + (f, u_n - u)$$
$$-\int_{\Omega} A(x)\nabla u \nabla(u_n - u)dx - \lambda \int_{\Omega} u_n(u_n - u)dx$$

En utilisant l'hypothèse (3.1.2), il vient :

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq \int_{\Omega} H(x, \nabla v_n)\nabla(u_n - u)dx + (f, u_n - u)$$
$$-\int_{\Omega} A(x)\nabla u \nabla(u_n - u)dx - \lambda \int_{\Omega} u_n(u_n - u)dx$$

On en déduit que (en utilisant le fait que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$) :

$$(f, u_n - u) \longrightarrow 0$$

De même, grâce à (3.1.1) et la convergence faible de ∇u_n dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla(u_n - u)dx \leq C\|A\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega \nabla u \nabla(u_n - u)dx \longrightarrow 0$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz et la bornétude de $(u_n)_n$ dans $H_0^1(\Omega)$ et la convergence forte de $u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$, il découle :

$$\int_\Omega u_n(u_n - u)dx \longrightarrow 0$$

En regroupant les trois convergences ci-dessus, on en déduit :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx + \varepsilon_n$$

Où : $\varepsilon_n \longrightarrow 0$.

Afin de démontrer que le deuxième terme l'inégalité tend vers zéro, nous utilisons une technique de troncature.On définit pour $k > 0$ les fonctions de trancature suivantes :

$$T_k(s) = \begin{cases} s & |s| \leq k \\ k\dfrac{s}{|s|} & |s| > k \end{cases}$$

Ainsi, on définit $G_k(s)$ par $G_k(s) = s - T_k(s)$.
Pour $k > 0$ posons $A_k = \{|u_n - u| > k\}$, alors on obtient :

$$\int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx = \int_\Omega H(x, \nabla v_n)\left(T_k(u_n - u) + G_k(u_n - u)\right)dx$$

Comme $G_k(s) \leq |s|$ et $suppG_k = A_k$, on aura :

$$\int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)T_k(u_n - u)dx + \int_{A_k} H(x, \nabla v_n)|u_n - u|dx$$

D'après (3.1.4), on obtient :

$$\int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)T_k(u_n - u)dx +$$

$$\int_{A_k} |b(x)||\nabla v_n||u_n - u|dx + \int_{A_k} |b(x)||u_n - u|dx$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $(N, 2, \frac{2N}{N-2})$ et l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)T_k(u_n - u)dx$$

$$+\|b\|_{L_N(A_k)}\|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)}\|u_n - u\|_{L_{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} + \|b\|_{L_2(A_k)}\|u_n - u\|_{L_2(A_k)}$$

Par conséquent :

$$\int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)T_k(u_n - u)dx$$

$$+C_{N.p}\|b\|_{L_N(A_k)}\|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)}\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|b\|_{L_2(A_k)}\|u_n - u\|_{L_2(A_k)}$$

Où $C_{N.p}$ donnée par le théorème d'inégalité de Sobolev .
Et comme les suites $(v_n)_n$ et $(u_n)_n$ sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$, on peut supposer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que :

$$\int_\Omega H(x, \nabla v_n)(u_n - u)dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla v_n)T_k(u_n - u)dx$$

$$+C_0 \left(\int_{A_k} |b(x)|^N \right)^{\frac{1}{N}} + \|b\|_{L_2(A_k)}\|u_n - u\|_{L_2(A_k)}$$

Lorsque en faisant tendre n vers $+\infty$, le dernier terme sera tend vers zéro (car $u_n \to u \ dans \ L^2(\Omega)$). De plus pour tout réel $p \geq 1$, $T_k(u_n - u) \to 0$, en effet :
À partir de la définition de T_k on obtient Pour tout $k > 0$ fixé :

$$T_k(u_n - u) = \begin{cases} k & si \ u_n - u > k \\ u_n - u & si \ |u_n - u| \leq k \\ -k & si \ u_n - u < k \end{cases}$$

Ainsi :

$$|T_k(u_n - u)| \leq k$$

D'autre part on a :

$$u_n(x) \to u(x) \quad p.p \ x \in \Omega.$$

Par concéquent lorsque $n \to +\infty$, on obtient : $|u_n(x) - u(x)| < k$.
Par ailleurs :

$$T_k(u_n(x) - u(x)) = u_n(x) - u(x) \to 0 \quad p.p \ x \in \Omega.$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée on en déduit bien que $T(u_n - u)$ converge fortement vers 0 dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$.

Par suite, de l'hypothèse (3.1.4) et l'inégalité de Hôlder, on obtient :

$$\left| \int_\Omega H(x, \nabla v_n)T_k(u_n - u)dx \right| \leq \|b\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)}\|T_k(u_n - u)\|_{L_2^\star(\Omega)}$$

$$+\|T_k(u_n - u)\|_{L_2(\Omega)}\|b\|_{L_2(\Omega)}$$

Comme $(v_n)_n$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et $b \in L^N(\Omega)$ on conclut bien qu'il existe $C > 0$, tel que :

$$\left| \int_\Omega H(x, \nabla v_n) T_k(u_n - u) dx \right| \leq C \|T_k(u_n - u)\|_{L_2^\star(\Omega)} + \|T_k(u_n - u)\|_{L_2(\Omega)} \|b\|_{L_2(\Omega)}$$

Or : $T_k(u_n - u) \to 0$ fortement dans $L^p(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.
Alors :

$$\int_\Omega |H(x, \nabla v_n) T_k(u_n - u)| \, dx \to 0 \; quand \; n \to +\infty$$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq C_0 \sup_n \left(\int_{A_k} |b(x)|^N \right)^{\frac{1}{N}}$$

Comme $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que $u_n \to u$ en mesure, et par suite $mesA_k \to 0$ quand $k \to +\infty$.
Par conséquent :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \to 0.$$

D'où : $u_n \to u$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$, (On note que cette convergence est obtenue seulement pour la suite extraite). Donc on a bien montrer que T est complètement continu.
Il reste alors de montrer (iii), pour ce faire, en raisonnant par l'absurde.
Pour tout $n \geq 0$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ et $\delta_n \in [0, 1]$, supposons que :

$$u = \delta_n T(u_n) \;\; et \;\; \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \geq n.$$

Par suite :

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$$

Et :

$$-div(A(x)\nabla u_n) + \lambda u_n = \delta_n H(x, \nabla u_n) + \delta_n f(x)$$

Posons donc :

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

Par conséquent :

$$\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$$

Et :

$$- div(A(x)\nabla w_n) + \lambda w_n = \delta_n \frac{H(x, \nabla u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} + \delta_n \frac{f}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \tag{3.1.2}$$

Or :

$$\left| \frac{H(x, \nabla u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \right| \leq |b(x)| \left(|\nabla w_n| + \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)$$

Grâce à la bornétude de la suite $(\omega_n)_n$ dans $H_0^1(\Omega)$, on déduit bien que $\dfrac{H(x,\nabla u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$ est bornée dans $H^{-1}(\Omega)$.
D'autre part $(w_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc après extraction eventuelle d'une sous suite, on supposer qu'il existe $w \in H_0^1$ telle que :

$$w_n \rightharpoonup w \;\; faiblement\ dans\ H_0^1(\Omega).$$

$$\nabla w_n \rightharpoonup \nabla w \;\; faiblement\ dans\ L^2(\Omega).$$
$$w_n \to w \;\; fortement\ dans\ L^2(\Omega).$$

Par un raisonnement similaire à celui de la suite $(u_n)_n$, on montre que la suite $(\omega_n)_n$ converge vers w dans $H_0^1(\Omega)$.
En effet :
Prenons $(\omega_n - \omega)$ comme fonction test dans (3.1.2), on obtient :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(\omega_n - \omega)|^2 dx \le \int_\Omega \frac{H(x,\nabla u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}(\omega_n-\omega)dx + \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}(f,\omega_n-\omega)$$

$$-\lambda \int_\Omega \omega_n(\omega_n-\omega)dx - \int_\Omega A(x)\nabla\omega\nabla(\omega_n-\omega)dx$$

Grâce à la bornétude de $\dfrac{H(x,\nabla u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$dans $H^{-1}(\Omega)$ et la convergence faible de ω_n dans $H_0^1(\Omega)$, on aura :

$$\int_\Omega \frac{H(x,\nabla u_n)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}(\omega_n-\omega)dx \longrightarrow 0$$

De même pour les derniers termes en utilisant le fait que :

$$w_n \rightharpoonup w \;\; faiblement\ dans\ H_0^1(\Omega).$$

$$w_n \to w \;\; fortement\ dans\ L^2(\Omega).$$
$$\nabla w_n \rightharpoonup \nabla w \;\; faiblement\ dans\ L^2(\Omega).$$

On déduit bien que ω_n converge vers ω dans $H_0^1(\Omega)$.
En vertu de (3.1.2) et (3.1.4), on onbtient :

$$-\,div(A(x)\nabla\omega_n) + \lambda\omega_n \le |b(x)|\left(|\nabla\omega_n| + \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}\right) + \delta_n \frac{f(x)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \qquad (3.1.3)$$

En multipliant (3.1.3) par un élément $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\phi \ge 0$ et en integrant, on aura :

$$\int_\Omega A(x)\nabla\omega_n\nabla\phi dx + \lambda\int_\Omega \omega_n\phi dx$$

$$\leq \int_{\Omega} |b(x)| \left(|\nabla \omega_n| + \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) \phi dx + \delta_n \int_{\Omega} \frac{f}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \phi dx$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla \omega \nabla \phi dx + \lambda \int_{\Omega} \omega \phi dx \leq \int_{\Omega} |b(x)| \nabla \omega \phi dx \tag{3.1.4}$$

D'après la proposition 3.1.1, on conclut bien que $\omega \leq 0$.
D'une manière analogue on démontre que $-\omega$ vérifie (3.1.4), par suite $\omega \geq 0$. Par conséquent $\omega = 0$ ce qui contredit avec $\|\omega_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Nous allons donc établi que l'opérateur T satisfait *(i.i.i)*.

□

Nous somme alors en mesure d'appliquer le théorème de Leray-Schauder qui montre que l'opérateur T admet au moins un point fixe, il existe donc $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que : $T(u) = u$. Autrement dit :

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \nabla \phi dx + \lambda \int_{\Omega} u \phi dx = \int_{\Omega} H(x, \nabla u) \phi dx + (f, \phi) \quad , \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

La fonction u ainsi trouver est une solution de (P).
En concluant cette section par un résultat d'unicité qui montre qu'il n'y a pas d'autre solution que celle que nous avons déjà construire. Le résultat repose sur l'utilisation du principe de comparaison que nous allons énoncer après le lemme et la définition suivants :

Définition 3.1.1. *(sous et sur solution)*
Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On dit que u est une sur-(resp.sous-) solution de (P) si pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\phi \geq 0$, on a :

$$\int_{\Omega} A(x) \nabla u \nabla \phi dx + \lambda \int_{\Omega} u \phi dx \geq \int_{\Omega} H(x, \nabla u) \phi dx + (f, \phi).$$

$$\left(resp \ \leq \int_{\Omega} H(x, \nabla u) \phi dx + (f, \phi) \right).$$

Lemme 3.1.1. *[1](Kato)*
Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$, et ϕ une fonction convexe, alors on a :

$$\Delta \phi(u) \geq \phi'(u) \Delta u.$$

Théorème 3.1.2. *[4](Principe de comparaison)*
Soit u_1 et u_2 sous et sur-solution de (P). Supposons que $u_1 \leq u_2$ sur le bord de Ω.
Alors $u_1 \leq u_2$ sur Ω tout entier.

Démonstration. Soit u_1 sous-solution et u_2 sur-solution de (P), alors pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\phi \geq 0$, on a :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_1 \nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega u_1 \phi dx \leq \int_\Omega H(x, \nabla u_1)\phi dx + (f, \phi).$$

et :

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_2 \nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega u_2 \phi dx \geq \int_\Omega H(x, \nabla u_2)\phi dx + (f, \phi).$$

D'où :

$$\int_\Omega A(x)\nabla(u_1 - u_2)\nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega (u_1 - u_2)\phi dx \leq \int_\Omega (H(x, \nabla u_1) - H(x, \nabla u_2))\, \phi dx.$$

Posons $\omega = u_1 - u_2$, alors pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\phi \geq 0$ on obtient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla \omega \nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega \omega \phi dx \leq \int_\Omega (H(x, \nabla u_1) - H(x, \nabla u_2))\, \phi dx.$$

En vertu de (3.1.5), il vient :

$$\int_\Omega A(x)\nabla \omega \nabla \phi dx + \lambda \int_\Omega \omega \phi dx \leq \int_\Omega |b(x)||\nabla \omega|\phi dx.$$

Ainsi ω satisfait :

$$-\,div(A(x)\nabla \omega) + \lambda \omega \leq |b(x)||\nabla \omega|. \tag{3.1.5}$$

Il suffit donc de montrer que ω_+ satisfait (3.1.5), pour cela on utilise le lemme de Kato il vient :

$$-div(A(x)\nabla \omega_+) \leq -\mathbb{1}_{\omega>0} div(A(x)\nabla \omega).$$

il s'ensuit :

$$-div(A(x)\nabla \omega_+) + \lambda \omega_+ \leq -\mathbb{1}_{\omega>0} div(A(x)\nabla \omega) + \lambda \omega_+.$$

Nous avons que $\omega_+ = \mathbb{1}_{\omega>0}\omega$, remplaçons cette égalité dans l'inégalité qui la précède, on obtient :

$$-div(A(x)\nabla \omega_+) + \lambda \omega_+ \leq -\mathbb{1}_{\omega>0} div(A(x)\nabla \omega) + \lambda \mathbb{1}_{\omega>0}\omega.$$

En utilisant (3.1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} -div(A(x)\nabla \omega_+) + \lambda \omega_+ &\leq -\mathbb{1}_{\omega>0}|b(x)||\nabla \omega|. \\ &\leq |b(x)||\nabla \omega_+|. \end{aligned}$$

Nous avons donc établi que ω_+ satisfait (3.1.5), il suffit ici d'appliquer la proposition du Principe de maximum (3.1.3), il suit que $u_1 \leq u_2$ sur Ω tout entier.

□

3.2 Application à un problème elliptique avec croissance sous quadratique

3.2.1 Position du problème

Dans la section précédente, nous avons vu que lorsque le comportement de H et linéaire en gradient, alors nous avons l'existence et l'unicité d'une solution faible dans $H_0^1(\Omega)$.
Si l'on s'interesse à un comportement surlinéaire en gradient nous considérons le problème suivant :

$$(P_2) : \begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^p + f \qquad dans\ \Omega \\ \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Où $f \in L^\infty(\Omega)$ et $p \geq 1$.

Le problème (P_2) admet au moins une solution, plus précisément, pour montrer l'existence d'une solution de (P_2), on applique le théorème du point fixe de Schauder. Pour cela, on considère l'opérateur $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ qui à $v \in H_0^1(\Omega)$ associe l'unique solution $u = T(v) \in H_0^1(\Omega)$ du problème suivant :

$$T(v) = u \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u = |\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| + f \qquad \Omega \\ \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Tout d'abord, on va montrer que T est bien défini, pour ce faire en considérant l'opérateur de superposition B par :

$$\begin{aligned} B:\ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow L^N(\Omega) \\ v &\longmapsto B(v) = |\nabla v|^{p-2}\nabla v \end{aligned}$$

Lorsque $p \leq 1 + \dfrac{2}{N}$, on a :

$$|B(v)| = \left||\nabla v|^{p-2}\nabla v\right| \leq |\nabla v|^{\frac{2}{N}}.$$

D'où B satisfait la condition de croissance (2.3.9), ainsi la proposition 2.3.4 montre que B est bien défini de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^N(\Omega)$, on peut alors utiliser le résultat déjà démontré dans la proposition 3.1.2, on en déduit que T est bien défini.
De plus lorsque $p \leq \dfrac{2}{N} + 1$, l'opérateur B est continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^N(\Omega)$, et :

$$\|B(v)\|_{L_N(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^{(p-1)N} dx\right)^{\frac{1}{N}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{N}} \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \qquad (3.2.1)$$

3.2.2 Existence de solutions

Dans ce qui suit nous allons montrer que l'opérateur T admet au moins un point fixe en utilisant le théorème de Schauder. On va montrer pour un certain rayon $R > 0$ bien choisi, que l'opérateur T envoie la boule $C = \left\{v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R\right\}$ dans elle même, ainsi on montre que T est continu et complétement continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. En effet :
On ait :

$$-\Delta u = |\nabla v|^{p-2}|\nabla v||\nabla u| + f.$$

Prenons u comme fonction test, et en utilisant l'inégalité de Hôlder, il vient :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla v|^{p-1}\nabla v \nabla u u dx + \int_\Omega f u dx \\ &= \int_\Omega B(v)\nabla u u dx + \int_\Omega f u dx \\ &\leq \|B\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_{2^\star}(\Omega)} + \int_\Omega f u dx.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $f \in L^\infty(\Omega)$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz nous en déduisons que :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \|B\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_{2^\star}(\Omega)} + (mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\, \|u\|_{L_2(\Omega)}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

Avec C_Ω et $C_{N.p}$ données par les inégalités de poincaré et Sobolev, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{N.p}\|B\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} + C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

Par suite :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{N.p}\|B\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} + C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

D'où :

$$\left(1 - C_{N.p}\|B\|_{L_N(\Omega)}\right)\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

Alors si : $1 - C_{N.p}\|B\|_{L_N(\Omega)} > 0$, on a :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{1 - C_{N.p}\|B\|_{L_N(\Omega)}}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

En vertu (3.2.1), on obtient :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{1 - C_{N.p}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{1 - C_{N.p}R}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

Ainsi, on choisit R de sorte que : $1 - C_{N.p}R > 0$ et $\dfrac{C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{1 - C_{N.p}R}\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq R.$
D'où :

$$R < \frac{1}{C_{N.p}}. \tag{3.2.1}$$

et :

$$C_{N.p}R^2 - R + C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 0 \tag{3.2.2}$$

Lorsque $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} < \dfrac{1}{4C_{N.p}C_\Omega(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}$, le discriminant d'équation :

$$C_{N.p}R^2 - R + C_\Omega\,(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$$

est donc positif, par ailleurs l'équation admet deux solution :

$$R_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_{N.p}C_\Omega(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}}}{2C_{N.p}}$$

$$R_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C_{N.p}C_\Omega(mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}}}{2C_{N.p}}$$

Donc il suffit ici de prendre $R = R_1$, pour que R vérifie (3.2.1) et (3.2.2). Ce qui montre bien que $T(C) \subset C$.

Montrons alors que T continu :
Soit $(v_n)_n$ une suite d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ convergente vers v dans $H_0^1(\Omega)$, on note $T(v) = u$, et $B(v) = |\nabla v|^{p-2}\nabla v$, alors :

$$-\Delta u = B(v)\nabla u + f.$$

$$-\Delta u_n = B(v_n)\nabla u_n + f.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\Delta(u_n - u) &= B(v_n)\nabla u_n - B(v)\nabla u.\\ &= B(v_n)\nabla u_n - B(v)\nabla u - B(v_n)\nabla u + B(v_n)\nabla u.\\ &= B(v_n)\left(\nabla u_n - \nabla u\right) + \nabla u\left(B(v_n) - B(v)\right).\end{aligned}$$

En mulltipliant par $(u_n - u)$, et en integrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx = \int_\Omega B(v_n)\nabla(u_n - u)(u_n - u)dx + \int_\Omega \nabla u\left(B(v_n) - B(v)\right)(u_n - u)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hôlder, on aura :

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \leq \|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla(u_n - u)\|_{L_2(\Omega)}\|u_n - u\|_{L_{2^\star}(\Omega)}$$

$$+\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|B(v_n) - B(v)\|_{L_N(\Omega)}\|u_n - u\|_{L_{2^\star}(\Omega)}.$$

Par conséquent :

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2dx \le C_{N.p}\|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla(u_n-u)\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla(u_n-u)\|_{L_2(\Omega)}$$

$$+C_{N.p}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|B(v_n)-B(v)\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla(u_n-u)\|_{L_2(\Omega)}$$

avec $C_{N.p}$ donnée par l'inégalité de Sobolev.
Par suite :

$$\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_{N.p}\|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} + C_{N.p}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|B(v_n)-B(v)\|_{L_N(\Omega)}.$$

Alors :

$$\left(1-C_{N.p}\|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}\right)\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_{N.p}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|B(v_n)-B(v)\|_{L_N(\Omega)}.$$

Par conséquent :

$$\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_{N.p}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}}{1-C_{N.p}\|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}}\|B(v_n)-B(v)\|_{L_N(\Omega)}.$$

Nous verons plus loin que si $p \le 1+\dfrac{2}{N}$, alors T en tant qu'un opérateur est continu et borné de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^N(\Omega)$, par suite on aura :

$$\|B(v_n)-B(v)\|_{L_N(\Omega)} \to 0$$

et :

$$\|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)} \le \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \le R$$

D'où :

$$\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$$

Ce qui prouve la continuité de T.

Il nous reste à montrer que T est complètement continu, pour ce faire, on considère une suite $(v_n)_n$ bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on note $T(v_n)=u_n$, on trouve :

$$-\Delta u_n = B(v_n)\nabla u_n + f.$$

Prenons u_n comme fonction test, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx = \int_\Omega B(v_n)\nabla u_n u_n dx + \int_\Omega f u_n dx$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder avec les exposants $(N,2,2^\star)$, il vient :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2dx \le \|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)}\|u_n\|_{L_{2^\star}(\Omega)} + \int_\Omega f u_n dx$$

En utilisant le fait que $f \in L^\infty(\Omega)$, on aura :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)} \|u_n\|_{L_{2^\star}(\Omega)} + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_n| dx$$

Par suite d'après les inégalités de sobolev et Cauchy Schwartz, on onbtient :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq C_{N.p} \|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} (mes(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}$$

Par conséquent :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq C_{N.p} \|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)}$$

$$+ C_\Omega \|f\|_{L_\infty(\Omega)} (mes(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_n\|_{L_2(\Omega)}$$

Avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré.
Ainsi :

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega (mes(\Omega))^{\frac{1}{2}}}{1 - C_{N.p} \|B(v_n)\|_{L_N(\Omega)}} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

En vertu de (3.2.1), on déduit d'après la bornétude de v_n que $B(v_n)$ born$\surd$©$edans$L$^N(\Omega)$, par conséquent on conclut bien que u_n bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc supposer après extraction d'une sous suite qu'il existe $u \in H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \ \ faiblement \ \ dans \ H_0^1(\Omega).$$

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \ \ faiblement \ \ dans \ L^2(\Omega).$$

D'autre part on a :

$$-\Delta u_n = B(v_n) \nabla u_n + f.$$

En multipliant par $u_n - u$, et en integrant sur Ω, on trouve :

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) dx = \int_\Omega B(v_n) \nabla u_n (u_n - u) dx + (f, u_n - u).$$

D'où :

$$\int_\Omega |\nabla (u_n - u)|^2 dx = \int_\Omega B(v_n) \nabla u_n (u_n - u) dx + (f, u_n - u) - \int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u) dx.$$

De même en utilisant l'inégalité de Hôlder, et on divise sur $\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}$, on aura :

$$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{1 - C_{N.p} \|B\|_{L_N(\Omega)}} (f, u_n - u) - \frac{1}{1 - C_{N.p} \|B\|_{L_N(\Omega)}} \int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u) dx.$$

Comme $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient :

$$(f, u_n - u) \to 0 \ \ et \ \ \int_\Omega \nabla u \nabla (u_n - u) dx \to 0$$

Par conséquent :$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, (on notera que la convergence est obtenue seulement pour la suite extraite). Alors on a bien montrer que T est complètement continu.

Il suffit ici d'appliquer le théorème de Schauder . L'opérateur T est bien défini continu et complètement continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe $R > 0$ tel que T envoie la boule de centre 0 et de rayon R dans elle même. Le théorème de Schauder 1.4.3 permet alors de dire qu'il existe u dans cette boule(et donc dans $H_0^1(\Omega)$) telle que $T(u) = u$. La fonction u ainsi trouvée est une solution de (P_2).

Bibliographie

[1] Kavian, O. Introduction á la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques, Springer-Verlag, Paris, New York, 1993.

[2] H. Brezis . Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications ; Editions Masson, Paris 1983.

[3] Thierry Gallouët, Raphaèl Herbin. Mesure,Integration,Probabilites, 2013.

[4] Alessio Porretta . Elliptic equations with first order terms.

[5] Lucio Boccardo, Gisella Croce.Elliptic equations with first order terms

[6] J'urgen Appell,nonlinear superposition operators,1989.

[7] Antonio Ambrosetti, Giovanni Prodi.A Primer of Nonlinear Analysis