REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : **Analyse Fonctionnelle et Application**

Par :

Nouadhria Fatiha –Sibachir Ibtissam

Sur le thème

Polynômes Orthogonaux et applications

Soutenu publiquement le ??/ 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Hallouz Ahmed	MCB	Université Tiaret	Président
Mr Larabi Abderrahmane	MCA	Université Tiaret	Encadreur
Mr Benia Kheirredine	MAA	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A *mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leurs prières tout au long de mes études.*

A *toute ma famille.*

A *tous ceux qui, de près ou de loin, ont participé à mon éducation, et m'ont aidé Dans les moments difficiles à surmonter mes problèmes.*

A *tous mes amis du plus proche au plus loin.*

Sans oublier *tous les professeurs qui ont contribué à ma formation de l'enseignement primaire, moyen et secondaire jusqu'à l'enseignement supérieur.*

Si bachir Ibtissem

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leurs prières tout au long de mes études.

A toute ma famille.

A tous ceux qui, de près ou de loin, ont participé à mon éducation, et m'ont aidé Dans les moments difficiles à surmonter mes problèmes.

A tous mes amis du plus proche au plus loin.

***Sans oublier** tous les professeurs qui ont contribué à ma formation de l'enseignement primaire, moyen et secondaire jusqu'à l'enseignement supérieur.*

Nouadhria fatiha

Remerciement

En premier lieu, nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a donné le courage et la volonté de réaliser ce modeste travail.

Nous remercions nos parents qui nous ont suivis pendant nos études.

Nous remercions Mr,Larabi Abderrahmane notre encadreur, pour son aide, son encouragement, son orientation, et pour ses précieux conseils durant la réalisation de ce travail.

Nos remerciements aux membres de jury qui ont accepté de juger notre travail. Nous adressons aussi nos remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseignés durant ce cursus universitaire.

Enfin Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances à toutes personnes qui nous ont aidés de près ou de loin dans la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Depuis longtemps, les mathématiques étaient strictes et objectives, pour cela, elles sont une ressource principale pour les sciences. Aujourd'hui avec les progrès elles viennent toujours des nouveaux thèmes pour résoudre les problèmes posés tel que l'analyse numérique qui nous aide de résoudre beaucoup des problèmes.
Dans notre étude, nous étudierons des importantes polynômes du domaine d'analyse numérique ce sont les polynômes orthogonaux qui sont l'un des outils les plus importants dans les mathématique pour l'étude et la résolution de plusieurs problèmes.
Nous avons comporté notre mémoire en deux chapitres :
Dans le premier chapitre, nous présentons définition et concepts de base de les polynômes orthogonaux,on expliquer par des exemple classique Jacobi ,d'Hermite et Laguerre .
Dans le deuxiéme chapitre, nous donnons quelques applications des ces polynômes comme calcul approximation au sens des moindres carrés, calcul d'intégration numérique, calcul de la meilleure approximation.

Chapitre 1

Polynômes orthogonaux

Nous souhaitons rappeler dans ce chapitre les notions de base concernant les polynômes orthogonaux à une variable ;ceux-ci ont été largement étudiés, entre autres parce que certains exemples de tels polynômes apparaissent comme fonctions propres d'opérateurs différentielles importants en physique. Nous nous intéressons présentement au cas d'une variable, la situation à plusieurs variables sera abordée plus tard. Notre but étant d'ailleurs de généraliser les concepts que nous introduirons ici à la situation à plusieurs variable, le lecteur avide de détails pourra se référer à l'abondante littérature sur le sujet, notre développement et notation suivant essentiellement (CHIHARA ,1978). Avant d'attaquer avec rigueur les notions de base de la théorie des polynômes orthogonaux , commençons par introduire
un exemple, l'identité trigonométrique

$$2\cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n),\theta + \cos(m-n)\theta. \tag{1.1}$$

a pour conséquence que :

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0. \tag{1.2}$$

pour $m \neq n$, effectuons le changement de variable $x = \cos\theta$ et posons

$$T_n(x) = \cos n\theta. \tag{1.3}$$

L'équation (1.2) devient alors

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0. \tag{1.4}$$

pour $n \neq m$ les $T_n(x)$ sont des polynômes en x . En effet, nous avons $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ et l'identité (1.1) avec $n = 1$ nous donne que :

$$2xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x). \tag{1.5}$$

Nous concluons donc, par récurrence, que les $T_n(x)$ sont des polynômes. De plus, le degré de $T_n(x)$ et n . Les $T_n(x)$ sont appelés polynômes de tchebyshev de première espéce. Il s'agit d'un premier exemple de famille de polynômes orthogonaux puisque la formule (1.4) exprime qu'ils sont orthogonaux pour la fonction de poids $(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ sur l'intervalle $(-1, 1)$. La récurrence (1.5) qui nous a permis de conclure que les $T_n(x)$ sont des polynômes est typique pour ces familles ; en effet, nous verrons (2.1) que toute famille de polynômes orthogonaux est caractérisée par une récurrence à trois termes de cette forme. Nous nous intéressons ensuite à certains exemples particuliers .

1.1 Définitions et concepts de base

1.1.1 famille de polynômes orthogonaux

Commençons par introduire l'objet qui nous intéresse, les familles de polynômes orthogonaux. L'orthogonalité dans ce contexte est donnée par rapport à une fonctionnelle linéaire L. Nous dirons que la famille de polynômes $\{P_n(x)\}, P_n \in \mathbb{C}[x]$ de degré n, est une famille de polynômes orthogonaux, que l'on abrège par FPO, si $L[P_n(x)P_m(x)] = h_n\delta_{mn}$ pour $h_n \neq 0$ ou

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le delta de Kronecker. lorsqu'en plus nous avons $L[P_n(x)^2] = 1$ pour tout n, nous dirons que la FPO est orthonormale. l'orsque chacun des $P_n(x)$ est monique(coefficient de tete égale à 1) ,nous dirons que la FPO est monique .

Bien que, en général, la notion d'orthogonalité par rapport à une fonctionnelle diffère du concept d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire, ces deux notions coïncident lorsque certaines conditions sont satisfaites, comme nous le verrons plus tard. Lorsque ces conditions sont vérifiées, nous pouvons définir un produit scalaire à l'aide de notre fonctionnelle en posant $\langle P, Q \rangle = [P\overline{Q}]$.
Classiquement, la fonctionnelle linéaire est souvent donnée sous la forme

$$L[f] = \int_a^b f(x)w(x)dx, . \tag{1.6}$$

pour $w(x)$une fonction intégrable sur l'intervalle (a, b). L'orthogonalité est alors donnée par une formule de type (1.4). La fonction $w(x)$ est appelée fonction de poids et on parle alors d'orthogonalité par rapport à une fonctionnelle linéaire de poids $w(x)$.
Il est intéressant de constater que, souvent, les moments $\mu_n = L[x^n]$ sont des entiers positifs qui comptent des objets combinatoires. par exemple nous verrons à la section 1.2.2 une famille de polynômes $\{\overline{H_n}(x)\}$ orthogonaux pour la fonction v donnée par les moments

$$v(x^{2n}) = (2n-1)(2n-3)$$

et $v(x^{2n+1}) = 0$; nous constatons alors que $v(x^2)$ compte le nombre d'involutions sur n éléments sans point fixe. Pour une approche combinatoire des moments, nous référons le lecteur à (VIENNOT,1983).
En fonction du contexte, il peut être très utile d'utiliser une de ces trois définitions équivalentes :

1. $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale par rapport à L
2. $L[\pi(x)P_n(x)] = 0$ pour tout polynôme $\pi(x)$ de degré $m < n$
3. $L[x^m P_n(x)] = k_n\delta_{mn}$ avec $k_n \neq 0$ et m entre 0 et n

Il est clair que si $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une FPO pour la fonctionnelle L, alors $\{c_nP_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en est également une, pour toutes valeurs de c_n non nulles. Réciproquement , deux FPO pour la même fonctionnelle ne diffèrent que par une constante non nulle. En effet, soient $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ deux telles familles. le fait que chaque P_n soit exactement de degré n entraine que l'ensemble $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré au plus m. Ainsi pour chaque m, nous avons

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x).$$

En multipliant chaque coté de l'équation par P_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ et en appliquant L, nous obtenons

$$L[P_k(x)Q_m(x)] = c_k L[P_k^2],$$

et puisque $L[P_k^2] \neq 0$, nous avons

$$c_k = \frac{L[P_k(x)Q_m(x)]}{L[P_k^2]}$$

.

Mais les Q_n sont également une FPO pour L ; en utilisant la caractérisation (2) de l'orthogonalité et le fait que Q_m et P_k soient respectivement de degrés m et k, nous obtenons que $c_k = 0$ pour $k < m$. Donc, tel qu'annonce, $Q_n(x) = c_n P_n(x)$.
Ceci signifie que de trouver une famille de polynôme orthogonaux ayant des coefficients dominants fixés pour une fonctionnelle donnée est un problème dont la solution, si elle existe, est unique ; par exemple, il ne peut y avoir qu'une seule FPO monique pour une fonctionnelle donnée ?. Mais une solution existe-t-elle toujours ?Considérons l'exemple suivant :
Soit la fonctionnelle linéaire donnée par les moments $\mu_n = a^n$ pour a un réel. Supposons que $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une FPO monique pour L, Nous avons donc $P_0(x) = 1, P_1(x) = x + \alpha$, avec α que nous pouvons déterminer par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} L[P_0(x)P_1(x)] &= L[1.(x+\alpha)] \\ &= L[x+\alpha] \\ &= L[x] + L[\alpha] \\ &= \alpha + \alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\alpha = -\alpha$. mais alors

$$\begin{aligned} L[P_1(x)^2] &= L[(x-\alpha)^2] \\ &= L[x^2 - 2\alpha x + \alpha^2] \\ &= L[x^2] - 2\alpha L[x] + \alpha^2 L[1] \\ &= \alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 \\ &= 0,. \end{aligned}$$

ce qui est bien évidemment une contradiction (nous exigeons ,pour avoir une FPO, que $L[P_n^2]$soit non nul). Il n'existe donc pas de FPO pour cette fonctionnelle. Nous aimerions donc avoir un critère pour l'existence d'une FPO pour une fonctionnelle donnée .

1.1.2 Critère d'existence d'une FPO et fonctionnelles définies positives et quasi définies

Soit L une fonctionnelle linéaire définie par la suite de moments $\{\mu_n\}$
Soit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} x^k. \tag{1.7}$$

pour que les $P_n(x)$ forment une FPO, ils doivent satisfaire la condition d'orthogonalité (3) :

$$L[x^m P_n(x)] = k_n \delta_{nm},$$

pour $m \leq n$ avec les k_n non nuls. En terme des moments, cette équation se traduit par

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} \mu_{k+m} = k_n \delta_{nm},$$

C'est -à-dire que nous avons le système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Dénotons par Δ_n le déterminant de cette matrice de moments :

$$\Delta_n = det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n}. \tag{1.9}$$

Tel que remarqué précédemment, si une solution aux système (1.8) existe, alors elle est uniquement déterminée par les valeur k_n ; par conséquent, l'existence d'une FPO implique que (1.8) posséde une unique solution et donc $\Delta_n \neq 0$. Réciproquement, si$\Delta_n \neq 0$, alors (1.7) forment une FPO pour L, il suffit de vérifier que $P_n(x)$ est de degré n. pour $n \geq 1$,nous avons, en solutionnant (1.8)

$$c_{nn} = \frac{k_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0. \tag{1.10}$$

pour $n = 0$, on a :

$$c_{00} = \frac{k_0}{\mu_0} \neq 0$$

Notons que l'égalité (1.10) demeure donc valide pour $n = 0$ si nous posons $\Delta_{-1} = 1$, ce que nous convenons de faire pour la suite des choses. Ainsi, les $P_n(x)$ sont de degré n (puisque le coefficient de x^n ,c_{nn} , est non nul) et satisfont la condition d'orthogonalité : ils forment donc une FPO pour L.
Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une FPO pour L est que tous les déterminants Δ_n soient non nul. nous appellerons les fonctionnelles L satisfaisant cette propriété les fonctionnelles quasi-définie.
Notons que nous avons obtenu; en cours de route, une description explicite d'une FPO, lors qu'elle existe :

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Les $Q_n(x) = \triangle_{n-1}^{-1} P_n(x)$ forment alors une FPO monique pour la fonctionnelle donnée par les moments μ_n. La formule (1.10) nous permet également d'obtenir une formule bien utile :

pour $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une FPO pour la fonctionnelle L et $\pi_n(x)$ un polynôme de degré n , nous avons :

$$L[\pi_n(x)P_n(x)] = \frac{a_n c_{nn}\Delta_n}{\Delta_{n-1}},. \tag{1.12}$$

ou $a_n$et c_{nn} dénotent les coefficients dominants de $\pi_n(x)$ et $P_n(x)$ respectivement. En effet écrivons $\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}$ avec $\pi_{n-1}(x)$ de degré au plus $n-1$. Alors

$$\begin{aligned} L[\pi_n(x)P_n(x)] &= a_n L[x^n P_n(x)] + L[\pi_{n-1}(x)P_m(x)] \\ &= a_n L[x^n P_n(x)] \\ &= a_n k_n. \end{aligned}$$

Le résultat découle ainsi de (1.10).
Les déterminants Δ_n nous permettent ainsi de déterminer s'il existe une FPO pour une fonctionnelle donnée, Mais ce n'est pas la seule information qu'ils renferment sur notre fonctionnelle!
Définition 1.1 : On dit qu'une fonctionnelle linéaire L est définie positive si $L[P(x)] > 0$ pour tout polynôme $P_(x) \in \mathbb{C}[x]$ non nul tel que $P(x0) \geq 0$ pour tout x_0 réel.

Remarquons immédiatement qu'alors tous les moments de L sont réels . En effet, nous avons déjà par hypothèse que les moments pairs, μ_{2n}, sont réels positifs ; il faut voir ce qui arrive aux moments impairs. Nous savons que $L[(x+1)^{2n}] > 0$, L étant définie positive. Or

$$0 < L[(x+1)^{2n}] = \sum_{k}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_{2n-k}$$

Un raisonnement par récurrence nous permet de conclure que tous les moments sont réels. Une fonctionnelle linéaire définie positive nous permet de définir un produit scalaire sur l'espace des polynômes en posant :

$$\langle P(x), Q(x)\rangle = L[P(x)\overline{Q(x)}]. \tag{1.13}$$

La notion d'orthogonalité pour une fonctionnelle L définie positive coïncide alors la notion d'orthogonalité pour le produit scalaire (1.13). Nous pouvons ainsi utiliser le processus d'orthogonalisation de Gram-schmidt pour obtenir une famille de polynômes orthonormaux ; ces polynômes seront même à coefficients réels!En multipliant par un scalaire approprié, nous trouvons également la FPO monique pour une telle fonctionnelle linéaire est une famille de polynômes à coefficients réels.

Le théorème de représentation de Riesz (il s'agit d'un théorème classique en analyse ; voir par exemple (Chihara,1978)) nous dit que les fonctionnelles définies positives sont précisément celles pouvant être réalisées sous la forme (1.6) .
Les Δ_n nous permettent de savoir si notre fonctionnelle possède cette belle qualité, puisque nous pouvons vérifier qu'une fonctionnelle est définie positive si et seulement si tous ses moments sont réels et $\Delta_n > 0$ pour tout n (entre autres, une fonctionnelle linéaire définie positive est quasi-définie ; nous parlerons alors de FPO définie positive ou quasi-définie, selon le cas). C'est d'ailleurs ce qui justifie la terminologie. En effet, en supposant que tous les moments μ_k sont réels, les conditions $\delta_n > 0$ sont équivalentes à

$$\sum_{i,j=0}^{n} \mu_{i+j} x_i x_j > 0$$

pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ (il s'agit la d'un résultat classique de la théorie des matrices symétriques à coefficients réels).

1.1.3 Récurrence à trois termes

Les familles de polynômes orthogonaux pour les fonctionnelles quasi-définie possèdent une propriété exceptionnelle :elle satisfont une récurrence à trois termes d'une forme très simple :

Théorème 1.1 (Récurrence à trois termes). Soit L une fonctionnelle linéaire quasi-définie et soit $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la FPO monique correspondance. Il existe des constantes $c_n$et $\lambda_n \neq 0$ telles que :

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \tag{1.14}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ et ou nous avons posé $P_{-1}(x) = 0$.
Lorsque L est définie positive, alors les c_n sont réels et $\lambda_n > 0$ pour $n = 2, 3, \ldots$
Démonstration :
$xP_n(x)$ étant un polynôme de degré $n + 1$, nous avons l'écriture suivante :

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} P_k(x),$$

avec

$$a_{nk} = \frac{L[xP_n(x)P_k(x)]}{L[P_k^2(x)]}$$

Mais $xP_k(x)$ est de degré $k + 1$, donc a_{nk} est nul pour k entre 0 et $n - 2$. Également , $xP_n(x)$ est monique, donc $a_{n,n+1} = 1$. Nous obtenons ainsi

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x)a_{nn}P_n(x) + a_{n,n+1}P_{n-1}(x)$$

,
pour $n \geq 1$,ou encore :

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x)c_nP_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x)$$

,
pour $n \geq 2$ Cette équation est également vérifiée pour $n = 1$ si nous posons $P_{-1} = 0$ et choisissons $c_1 = -P_1(0)$ (λ peut être choisi arbitrairement.
Maintenant, en multipliant chaque membre de (1.14) par x^{n-2} et en appliquant ensuite L , nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= L[x^{n-2}P_n(x)] \\ &= L[x^{n-1}P_{n-1}] - c_n L[x^{n-2}P_{n-1}] - \lambda_n L[x^{n-2}P_{n-2}] \\ &= L[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n L[x^{n-2}P_{n-2}(x)]. \end{aligned}$$

A l'aide de la formule (1.12),nous obtenons alors

$$\lambda_{n+1} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}$$

par conséquent, λ_n est toujours non nul lorsque L est quasi-définie et est un réel strictement positif lorsque L est définie positive. Dans ce dernier cas, les c_n sont des réels puisque les $P_k(x)$ sont à coefficients réels, tel que nous l'avons fait remarqué à la fin de la section 1.1 .2
Nous avons obtenu une formule explicite pour les λ_n : il est possible d'en faire autant pour les c_n .En multipliant (1.14) par $P_{n-1}(x)$ puis en appliquant la fonctionnelle L , nous obtenons

$$c_n = \frac{L[xP_{n-1}^2(x)]}{L[P_{n-1}^2(x)]}$$

Lorsque notre FPO $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monique, elle satisfait plutôt une récurrence de la forme

$$P_{n+1}(x) = (\alpha_n x + \beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x). \tag{1.15}$$

Si nous écrivons $P_n(x) = a_n\widehat{P_n}(x)$ avec $\widehat{P_n}(x)$ FPO monique, nous avons

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \beta_n = -\frac{a_{n+1}c_{n+1}}{a_n}, \gamma_n = \frac{a_{n+1}\lambda_{n+1}}{a_{n-1}}. \tag{1.16}$$

pour $n \geq 0$, avec $a_{-1} = 1$ et où les c_n et les λ_n sont les constantes de données par (1.14) pour la FPO monique $\{\widehat{P_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple, nous avons obtenu, pour les polynômes de Tchebyshev de première sorte (1.3) , la récurrence (1.5)

$$2xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x);$$

qui se réécrit sous la forme (1.15)

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x)$$

Ceci montre que le coefficient dominant de $T_n(x)$ est 2^{n-1} pour $n \geq 1$; la famille de polynômes donnés par $\widehat{T_0}(x) = T_0(x) = 1$ et $\widehat{T(x)} = 2^{-(n-1)T_n(x)}$ pour $n \geq 1$; satisfait la récurrence de type (1.14)

$$\widehat{T_n}(x) = x\widehat{T_{n-1}}(x) - \frac{1}{4}\widehat{T_{n-2}}(x)$$

avec $n \geq 3$ et

$$\widehat{T_2}(x) = x\widehat{T_1}(x) - \frac{1}{4}\widehat{T_0}(x)$$

Nous avons également la réciproque :

Théorème 1.2 (de favard).Pour deux suites de complexes $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}; \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. soit $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définies par la récurrence (1.14) avec les conditions initiales

$$P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1$$

Alors il existe une unique fonctionnelle linéaire L :$\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ telle que $L[1] = \lambda_1$ et $L[P_n(x)P_m(x)] = 0$ si $n \neq m$. L est quasi-définie si et seulement si $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(x)$ est alors la FPO monique associée à L. L est définie positive si et seulement si tous les c_n sont réels et tous les λ_n sont réels strictement positifs.

⊞ Ainsi , on peut définir une famille de polynômes orthogonaux soit en spécifiant la fonctionnelle où la suite de ses moment, où encore en donnant la récurrence (1.14) qu'elle satisfait. En fait , $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}; \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous pouvons calculer les moments de la fonctionnelle pour laquelle les polynômes données par données par (1.14) sont orthogonaux ; voir à sujet (VIENNOT,1983) .

1.2 Exemples classiques

Certaines familles de polynômes orthogonaux revêtent une importance particulière puisqu'elles apparaissent dans de nombreuses applications, entre autres comme solutions d'équations différentielles ayant une signification physique .C'est le cas de notre premièr exemple.

1.2.1 Polynômes de Jacobi

Soient $\alpha, \beta > -1$. Nous définissons les polynômes de Jacobi (nommes ainsi car c'est Jacobi qui les a introduits en 1859)par l'équation suivante :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}. \tag{1.17}$$

En effectuant la dérivée du produit, nous obtenons une formule explicite pour les $P_m^{(\alpha,\beta)(x)}$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{(n+\beta)}{k}$$

Cette équation met en lumière le fait que $p_n^{(\alpha+\beta)}(x)$ est un polynôme de degré n et de coefficient dominant

$$K_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n} \tag{1.19}$$

Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux pour la fonction de poids $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ sur l'intervalle $(-1,1)$; il suffit pour cela de vérifier (condition(2))que ,pour $m < n$,

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n^{\alpha,\beta}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = 0.$$

Une fois que nous constatons que

$$\frac{d^k}{dx^k}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta})| - 1^1 = 0$$

pour tout $0 \leq k < n$, l'intégration par parties nous donne

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta})dx = -m\int_{-1}^{1} x^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta})dx.$$

et donc, en itérant, que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^m P_n^{(\alpha+\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx &= (-1)^m m!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta})dx\\ &= (-1)^m m!\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta})| - 1^1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Remarquons que les dérivées des polynômes de Jacobi$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha+\beta)}$ forment également une famille de polynômes orthogonaux puisque nous calculons directement à partir de (1.22)que

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2}(n+\beta+\alpha+1)P_{n-1}^{(\alpha+1+\beta+1)}(x). \tag{1.20}$$

La famille $Qn = \frac{d}{dx}P_{n-1}^{(\alpha+\beta)}$ et donc orthogonal par rapport à la fonction de poids $(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$.
Ainsi, nous venons de voir que les polynômes de Jacobi peuvent être définis comme la FPO pour la fonctionnelle définie positive donnée par (1.6)avec la fonction de poids$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$sur l'intervalle $(-1,1)$ ayant les $k_n^{(\alpha,\beta)}$ (voir (1.6)) pour coefficients dominants .par conséquent,les polynômes de Tchebyshev de première sorte ne différent que par une constante des polynômes de Jacobi avec $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$:

$$T_n(x) = 2^{2n}\binom{2_n}{2}^{-1} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

Les polynômes de Tchebyshev de second sorte $U_n(x)$ s'obtiennent de façons similaire :

$$U_n(x) = 2^{2n}\binom{2_n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x). \tag{1.21}$$

Ces polynômes se définissent également a l'aide des fonctions trigonométriques, de façons analogue à ceux de première sorte :

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

ou $x = \cos\theta$. Ils satisfont la récurrence à trois termes

$$U_n(x) = 2_x U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

lorsque $\alpha = \beta > -1$, le polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ est appelé un polynômes ultra sphérique (où encore polynômes de Gegenbauer). On considère généralement la renormalisation

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha.}^{-1} \binom{n+2\alpha}{\alpha.} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x). \tag{1.22}$$

avec$\alpha = \lambda > -1$, Les polynômes ultra sphériques sont orthogonaux pour la fonction de poids $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ et satisfont la récurrence

$$nP_n^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda-1)xP_{n-1}^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-2)P_{n-2}^{(\lambda)}(x)$$

pour $n = 2, 3, \ldots$ avec condition initiale $P_0^{(\lambda)}(x) = 1, P_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x$. Dans le cas particulier $\alpha = \beta = 0$, Les $P_{n^{(0,0)}}(x)$ sont appelé les polynômes de Legendre car Legendre les à étudiés des 1785, donc avant L'introduction des polynômes de Jacobi .
L'équation (1.21)avec $(\alpha = \beta = 0)$ est appelée formule de Rodrigues et (1.21)en général est un exemple de formule de type Rodrigues ;une telle formule exprime , que le polynôme s'obtient par applications successives d'opérateurs de création a une solution triviale.
La récurrence a trois termes satisfaite par les polynômes de Jacobi de paramétrés α, β est de la forme générale (1.15)avec les paramétré A_n, B_n etC_n se calculant par (1.16). Dans ce cas, nous utilisons (1.16)pour trouver A_n,puis nous posons successivement $x = 1etx = -1$dans (1.15)pour obtenir $B_n etC_n$. La récurrence trouvée est :

$$\begin{aligned}2_n(n+\alpha+\beta)(2_n+\alpha+\beta-2)P_{n^{(\alpha,\beta)}}(x) &= (2_n+\alpha+\beta-1).((2_n+\alpha+\beta)(2_n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2)P_{n\cdot}^{(} \\ &\quad - 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2_n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned}$$

Ces polynômes ont une importance en physique en raison, ente autres, du fait qu'ils sont solutions de l'équation différentielle suivants :

$$(1-x^2)y" + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 \tag{1.23}$$

et que toute solution polynomiale de cette équation est un multiple de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

1.2.2 Polynômes d'Hermite et de Laguerre

Deux autres grandes familles de polynômes orthogonaux possèdent des propriétés semblables aux polynômes de Jacobi ; ceci s'explique par le fait qu'elle peuvent être introduites via une formule de types Rodrigues On les appelle les polynômes d'Hermite , $H_n(x)$, et les polynômes de Laguerre, L_n^α, avec $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{d_x^n} e^{-x^2}, \tag{1.24}$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{d_x^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \tag{1.25}$$

Un raisonnement similaire à celui fait à la section précédente nous permet de conclure aux relations d'orthogonalité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \tag{1.26}$$

et

$$\int_0^{\infty} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = 0 \tag{1.27}$$

pour $n \neq m$
les polynômes de Laguerre sont alors solution d'une équation différentielle semblable à celle satisfaite par les Jacobi (équation (1.27)) ; en effet l'équation

$$xy\prime\prime + (\alpha + 1 - x)y\prime + \lambda y = 0 \tag{1.28}$$

Possédé une solution polynomiale si et seulement si $\lambda = n$ et alors la seule solution polynomiale est, a une constante prés, $L_n^{(\alpha)}(x)$ comme pour les polynômes de Jacobi, effectuer la dérivée dans (1.29)nous permet d'obtenir une expression pour $L_n^{(\alpha)}(x)$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} \tag{1.29}$$

Nous calculons, à L'aide de cette formule explicité, que

$$\frac{d}{d_x} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \tag{1.30}$$

Ceci implique que les dérivée des polynômes de Laguerre forment une famille de polynômes orthogonaux .
Les polynômes d'Hermite peuvent etre introduits via la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{w^n}{n!} = e^{2xw-w^2}, \tag{1.31}$$

ce qui nous permet d'obtenir une formule explicite pour les $H_n(x)$. Attardons nous a une certaine renormalisation des polynômes d'Hermite $H_n(x)$,donnée par $H_n(x) = 2^{n/2}\overline{H}_n(\sqrt{2x})$ de fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{H}_n(x)\frac{w^n}{n!} = e^{xw-\frac{1}{2}w^2.} \tag{1.32}$$

Nous trouvons alors la récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{1.33}$$

et l'equation différentielle

$$H_n^{"}(x) - 2xH_n^{'}(x) + 2nH_n(x) = 0. \tag{1.34}$$

De plus, la fonction génératrice nous permet de voir que

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}\prime(x) \tag{1.35}$$

Caractérisation des familles classiques de polynômes orthogonaux

Les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite sont connus comme les familles classiques de polynômes orthogonaux . Les équation (1.24) (1.33) et(1.37) montrent que ces trois familles partagent la propriété que leurs dérivée forment également une FPO .En fait, cette propriété caractérise les familles classique de polynômes orthogonaux ; en effet, il a été montré (krall,1936)que si $P_n(x)$ est une FPO définie positive telle que la famille de ses dérivées $P_n\prime(x)$est également une FPO définie positive, alors $P_n(x)$ se ramené a une des trois familles classiques de polynômes orthogonaux par un changement de variable linéaire. Une autre caractéristique comme des familles classiques de polynômes orthogonaux permet de les caractériser. En effet satisfont (voir (1.27),(1.32)et(1.36))une équation différentielle de la forme

$$a_2(x)y^{"} + a_1(x)y^{'} + \lambda y = 0 \tag{1.36}$$

avec$a_i(x)$ un polynome de degré au plus i,$i = 1, 2$et$\lambda \neq 0$. Une étude détaillée de cette équation permet de conclure que les seules solutions polynômiales $P_n(x), P_n$ de degré n , se ramènent, par un changement linéaire de variables et multiplication par une constante non nulle, a l'une des cas suivants :

1. $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,avec$\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 \geq 0$;
2. $y = L_n^{(\alpha)}(x)$ avec $\alpha \neq -1, -2, \ldots$;
3. $y = H_n(x)$
4. $y = x^n$
5. $y = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\alpha + n)_k x^k$ avec $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ et ou $(a)_k = a(a + 1) \ldots (a + k - 1)$ et $(a)_0 = 1$

Il est clair que le cas (4) ne nous donne pas une FPO. En effet, si $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constituait une FPO pour la fonctionnelle L, alors $0 \neq L[x^m x^m] = L[x^{m-1}x^{m+1}] = 0$, ce qui est bien sur contradictoire les solutions donnes par (5) sont connues sous le nom de polynômes de Bessel ces polynômes forment bien une FPO mais celle ci n est pas définie positive équation différentielle qu elle satisfait est reliée a l'équation dune onde en coordonnées sphériques les trois familles classiques de polynômes orthogonaux sont donc les seules FPO définies positives satisfaisant une équation différentielle de forme (1.38) notons de plus que les conditions sur les degrés des $a_i(x)$ de l'équation (1.38) apparaissent naturellement ; de plus grands degrés empêchent obtenir que le degré deP_n soit exactement n ces FPO (Jacobi , hermite , languerre et Bessel) sont également caractérisées par le fait qu elles sont les seules a pouvoir être définies par une équation de type Rodrigues :

$$P_n(x) = K_n^{-1}(w(x))^{-1}\frac{d^n}{dx^n}(\rho^n(x)w(x), \tag{1.37}$$

ou $\rho(x)$ est un polynôme ; l étude de (1.39) montre que son degré doit être inférieur a deux pour que les $P_n(x)$ forment une FPO. lorsque $\rho(x)$ a des zéros réels tous distincts, alors $P_n(x)$ peut être ramenés via un changement de variables linéaire a un polynôme d'Hermite, de Laguerre ou de Jacobi (suivant le degré de $\rho_n(x)$. si $\rho(x)$ à des zéros non réels, alors nous obtenons des polynômes de Jacobi de paramétrés non réels et si $\rho(x)$ a des zéros de multiplicité plus grande que 1 , alors nous obtenons les polynômes de Bessel. pour terminer, notons que les FPO classiques forment toutes trois des systèmes compléts de $L^2(a,b)$. elles perméttent ainsi d'obtenir des développements en séries.

Chapitre 2

Quelques application des polynômes orthogonaux

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications fondamentales des polynômes orthogonaux (Legendre ,TChebychev et Hermite) comme le calcul de l'approximation au sens des moindres carrés, calcul intégration numérique .

2.1 Meilleure Approximation

Considérons la fonction $f \in C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$. On dit qu'un polynôme $p_n^\star \in \mathbb{P}_n$ est le polynôme de meilleure approximation de f s'il satisfait

$$\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_\infty \qquad \forall p_n \in \mathbb{P}_n \tag{2.1}$$

ou $\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$ est la norme du maximum sur$[a,b]$, il s'agit d'un problème d'approximation de type minimax (puisque on cherche l'erreur minimale mesurée dans la norme du maximum)

2.1.1 Théorème d'équi-oscillation de Chebyshev

si $f \in C^0([a,b])$ et $n \geq 0$, le polynôme de meilleure approximation $\mathcal{P}_n^\star$ de f existe et est unique . De plus, il existe $n+2$ points $s_0 < s_1 < \cdots < s_{n+1}$ dans $[a,b]$ tels que

$$f(s_j) - \mathcal{P}_n^\star(s_j) = \sigma(-1)^j E_n^\star(f), \qquad j = 0, \ldots, n+1$$

ou $E_n^\star(f) = \|f - \mathcal{P}_n^\star\|_\infty$,et où ,une fois f et n fixés , σ est une constante égale à 1 ou -1

Par conséquent, il existe $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ à déterminer dans $[a,b]$ tels que :

$$\mathcal{P}_n^\star(x_j) = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

de sorte que le polynôme de meilleure approximation soit un polynôme de degré n qui interpole f en $n+1$ noeuds inconnus .
Le résultat suivant donne une estimation de $E_n^\star(f)$ sans calculer explicitement $p_n^\star$

2.1.2 théorème de de la Vallée-poussin

soient $f \in C^0([a,b])$ et $n \geq 0$ et soient $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ $(n+2)$ points de $[a,b]$ .S'il existe un polynôme q_n de degré $\leq n$ tel que

$$f(x_j) - q_n(x_j) = (-1)^j e_j \qquad j = 0, 1, \ldots, n+1,$$

ou tous les e_j ont même signe et sont non nuls ,alors

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} |e_j| \leq E_n^\star(f)$$

on peut alors relier $E_n^\star(f)$ à l'erreur d'interpolation :

$$\|f - \Pi_n f\|_\infty \leq \|f - \mathcal{P}_n^\star\|_\infty + \|\mathcal{P}_n^\star - \Pi_n f\|_\infty$$

D'autre part, en utilisant la représentation Lagrangienne de $\mathcal{P}_n^\star$,on a

$$\|\mathcal{P}_n^\star - \Pi_n f\|_\infty = \|\sum_{i=0}^{n} (\mathcal{P}_n^\star - f(x_i) l_i)\|_\infty \leq \|\mathcal{P}_n^\star - f\|_\infty \|\sum_{i=0}^{n} |l_i|\|_\infty,$$

d'où on déduit

$$\|f - \Pi_n f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n^\star(f)$$

Les résultats ci dessus conduisent à une caractérisation du polynôme de meilleure approximation ,

2.2 Intégration numérique

2.2.1 Interpolation et intégration de Gauss

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle crucial dans la construction de formules de quadrature ayant un degré d'exactitude maximal. Soient $x_0, \dots x_n$,$n+1$ points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.Pour approcher l'intégrale pondérée $I_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx$, ou $f \in C^0([-1, 1])$, on considére les formules de quadrature de type

$$I_{n,w}(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i). \tag{2.2}$$

ou les α_i sont des coefficients à déterminer. Il est clair que les noeuds et poids dépendent de n, mais cette dépendance sera sous-entendue. On note

$$E_{n,w}(f) = I_w(f) - I_{n,w}(f)$$

L'erreur entre l'intégrale exacte et son approximation (2.2) . Si $E_{n,w}(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{P}_r$ (avec $r \geq 0$), On dira que la formule (2.1) a un degré d'exactitude r par rapport au poids w . pour le cas ou$w = 1$ on peut obtenir un degré d'exactitude (au moins) égal à n en prenant

$$I_{n,w}(f) = \int_{-1}^{1} \Pi_n f(x)w(x)dx,$$

ou $\Pi_n f \in \mathbb{P}_n$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux nœuds $\{x_i, i = 0 \dots, n\}$. La formule (2.1) à alors un degré d'exactitude égal à n si on prend

$$\alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)w(x)dx, i = 0, \dots, n, . \tag{2.3}$$

ou $l_i \in \mathbb{P}_n$ est le i-iéme polynômes caractéristique de Lagrange , c'est -à-dire tel que $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 0, \dots, n$.

Se pose alors la question de savoir s'il existe des choix de nœuds permettant d'obtenir un degré d'exactitude supérieur à n , disons égal à $r = n + m$ pour un $m > 0$. La réponse à cette question est fournie par le théorème suivant, du à Jacobi .

Théorème : pour un entier $m > 0$ donné , la formule de quadrature (2.2) a un degré d'exactitude $n+m$ si et seulement si elle est de type interpolatoire et si le polynôme nodal $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ associé aux nœuds $\{x_i\}$ est tel que

$$\int_{-1}^{1} w_{n+1}(x)P(x)w(x)dx = 0. \qquad \forall P \in \mathbb{P}_{m-1} \tag{2.4}$$

Démonstration : Montrons que ces conditions sont suffisantes. Si $f \in \mathbb{P}_{n+m}$, il existe $\phi_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$et $q_n \in \mathbb{P}_n$ tels que $f = w_{n+1}\phi_{m-1} + q_n$ (ϕ_{m-1} est le quotient et q_n le reste de la division euclidienne). puisque le degré d'exactitude d'une formule interpolation à $n+1$ nœuds est au moins égal à n , on a

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i q_n(x_i) = \int_{-1}^{1} q_n(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx - \int_{-1}^{1} w_{n+1}(x)\phi_{m-1}(x)w(x)dx.$$

D'après (2.4) , la dernière intégrale est nulle , et donc

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Le polynôme f étant arbitraire, on en déduit que $E_{n,w}(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{P}_{n+m}$

Corollaire : Le degré d'exactitude maximal de la formule de quadrature (2.2) à $n+1$ nœuds est égal à $2n+1$
Démonstration : Si ce n'était pas vrai, on pourrait prendre $m \geq n+2$ dans le théorème précédent.Ceci permettrait de choisir $P = w_{n+1}$ dans (2.4), d'où on déduirait que w_{n+1} est identiquement nul, ce qui est absurde . En prenant $m = n+1$ (la plus grande valeur admissible), on déduit de (2.4)que le polynôme nodal w_{n+1} satisfait la relation

$$\int_{-1}^{1} w_{n+1}(x)p(x)w(x)dx = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{P}_n.$$

Comme w_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ orthogonal à tous les polynômes de degré plus bas, w_{n+1} est égal à p_{n+1} à un coefficient multiplicatif prés (on rappelle que $\{p_k\}$ est la base des polynômes orthogonaux introduite précedement). En particulier, ses racines $\{x_j\}$ coïncident avec celles de p_{n+1} :

$$p_{n+1}(x_j) = 0, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Les points $\{x_j\}$ sont les nœuds de Gauss associés au poids $w(x)$. On peut à présent conclure que la formule de quadrature (2.2), dont les coefficients et les nœuds sont donnés respectivement par (2.3)et (2.5), à un degré d'exactitude égal à $2n+1$, c'est -à-dire le degré maximal pouvant être atteint avec une formule interpolatoire à $n+1$ nœuds. On l'appelle formule de quadrature de Gauss.
Ses poids sont tous positifs et ses nœuds sont dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$. Néanmoins, il peut être utile de prendre aussi les extrémités de l'intervalle comme nœuds de quadrature. La formule de Gauss ainsi obtenue possédant le plus grand degré d'exactitude est celle ayant pour nœuds les $n+1$ racines du polynôme

$$\overline{w}_{n+1}(x) = p_{n+1}(x) + ap_n(x) + bp_{n-1}(x). \tag{2.6}$$

ou les constantes a et b sont telles que $\overline{w}_{n+1}(-1) = \overline{w}_{n+1}(1) = 0$.
En notant ces racines $\overline{x}_0 = -1, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n = 1$,les coefficients $\{\overline{\alpha}_i, i = 0, \ldots, n\}$ peuvent être obtenus avec les formules usuelles (2.3) :

$$\overline{\alpha_i} = \int_{-1}^{1} \overline{l_i(x)w(x)dx}, \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{2.7}$$

ou $\bar{l}_i \in \mathbb{P}_n$ est le iéme polynôme caractéristique de Lagrange, C'est à dire tel que $\bar{l}_i(\overline{x}_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 0, \ldots, n$ la formule de quadrature

$$I_{n,w}^{GL}(f) = \sum_{i=0}^{n} \overline{\alpha}_i f(\overline{x}_i). \tag{2.8}$$

est appelée formule de Gauss-lobatto à $n+1$ nœuds.
Vérifions qu'elle a un degré d'exactitude égale à $2n+1$ .pour tout $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$,il existe $\phi_{n-2} \in \mathbb{P}_{n-2}$ et $q_n \in \mathbb{P}_n$ tels que $f = \overline{w}_{n+1}\phi_{n-2} + q_n$. La formule de quadrature (2.2) à un degré d'exactitude au moins égal à n (en tant que formule interpolation à $n+1$ noeuds distincts), on à donc :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha}_j q_n(x_j) &= \int_{-1}^{1} q_n(x)w(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx - \int_{-1}^{1} \overline{w}_{n+1}(x)\phi_{n-2}(x)w(x)dx..\end{aligned}$$

On déduit de (2.6) que $\overline{w}_{n+1}$est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-2$, la dernière intégral est donc nulle . de plus, puisque $f(\overline{x}_j) = q_n(\overline{x}_j)$ pour $j = 0, \ldots, n$, on conclut que

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \overline{\alpha}_i f(\overline{x}_i) \qquad \forall f \in \mathbb{P}_{2n-1}$$

En notant $\Pi_{n,w}^{GL} f$ le polynôme de degré n interpolant f aux noeuds $\{\overline{x}_j, j = 0, \ldots, n\}$,on a :

$$\Pi_{n,w}^{GL} f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\overline{x}_i)\bar{l}_i(x). \tag{2.9}$$

et donc $I_{n,w}^{GL}(f) = \int_{-1}^{1} \Pi_{n,w}^{GL} f(x)w(x)dx$
Remarque
Dans le cas particulier où la quadrature de Gauss Lobatto est relative à un poids de Jacobi $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ attent ses extréma avec $\alpha, \beta > -1$, les noeuds intérieurs $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}$ sont les racines du polynôme $(J_n^{(\alpha,\beta)})'$,c'est à dire les points ou le nième polynôme de Jacobi $J_n^{(\alpha,\beta)}$ attaint extimat
On peut montrer le résultat de convergence suivant pour l'intégration de Gauss

$$\lim n \to +\infty \left| \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_j) \right| = 0 \qquad \forall f \in C^0([-1,1])$$

Un résultat similaire existe aussi pour l'intégration de Gauss Lobatto :

$$\lim n \to +\infty \left| \int_{-1}^{1} f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha}_j f(\overline{x}_j) \right| = 0 \qquad \forall f \in C^0([-1,1])$$

Si la fonction à intégrer n'est pas seulement continue mais aussi différentiable jusqu'à un ordre $p \geq 1$,nous verrons que l'intégration de Gauss converge avec un ordre par rapport à $\frac{1}{n}$ d'autant plus grand que p est grand. Dans les prochaines sections, les résultats précédents seront

appliquées aux polynômes de Chebyshev et de Legendre .
Remarque : (intégration sur un intervalle arbitraire)
Une formule de quadrature de noeuds ξ_j et de coefficients $\beta_j, j = 0, \ldots, n$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ peut être transportée sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ .En effet ,si $\varphi : [-1, 1] \to [a, b]$ est l'application affine définie par $x = \varphi(\xi) = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{a+b}{2}$, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 (f \circ \varphi)(\xi)d\xi$$

On peut donc employer sur l'intervalle $[a, b]$ la formule de quadrature avec les noeuds $x_j = \varphi(\xi_j)$ et les poids $\alpha_j = \frac{b-a}{2}\beta_j$. Noter que cette formule conserve sur $[a, b]$ le meme degré d'exactitude que la formule initiale sur [-1,1] . En effet, si

$$\int_{-1}^1 p(\xi)d\xi = \sum_{j=0}^n p(\xi_j)\beta_j$$

Pour tout polynôme p de degré r sur $[-1, 1]$, alors pour tout polynôme q de même degré sur $[a, b]$ on a

$$\sum_{j=0}^n q(x_j)\alpha_j = \frac{b-a}{2}\sum_{j=0}^n (q \circ \varphi)(\xi_j)\beta_j = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 (q \circ \varphi)(\xi)d\xi = \int_a^b q(x)dx$$

car $(q \circ \varphi)(\xi)$ est un polynôme de degré r sur $[-1, 1]$

2.2.2 Interpolation et intégration de Chebychev

Si on considéré les quadratures de Gauss relatives au poids de Chebyshev $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, les noeuds et les coefficients de Gauss sont donnés par

$$x_j = -\cos\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}, \qquad \alpha_j = \frac{\pi}{n+1}, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{2.10}$$

tandis que les noeuds et les poids de Gauss Lobatto sont

$$\overline{x}_j = -\cos\frac{\pi j}{n}, \qquad \overline{\alpha}_j = \frac{\pi\Xi}{d_j n}, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{2.11}$$

ou $d_0 = d_n = 2$ et $d_j = 1$ pour $j = 1, \dots, n-1$. Remarque que les noeuds de Gauss (2.10) sont , à $n \geq 1$ fixé ,les zéros du polynôme de Chebyshev $T_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$,tandis que, pour $n \geq 1$,les noeuds intérieurs $\{\overline{x}_j, j = 1, \dots, n-1\}$ sont les zéros de $T_n^{'}$, comme on l'avait annoncé à la remarque.
En notant $\Pi_{n,w}^{GL} f$ le polynôme de degré $n+1$ qui interpole f aux noeuds (2.11) et en supposant que les dérivées $f^{(k)}$ d'ordre $k = 0, \dots, s$ de la fonction f sont dans L_w^2 (avec $s \geq 1$), on peut montrer que l'erreur d'interpolation est majorée ainsi :

$$\|f - \Pi_{n,w}^{GL} f\|_w \leq C n^{-s} \|f\|_{s,w} \qquad pour \qquad s \geq 1. \tag{2.12}$$

ou C désigne une constante indépendante de n (dans la suite, on notera encore C des constantes n'ayant pas nécessairement la même valeur) et ou $\|\cdot\|_w$ est la norme L_w^2 définie par

$$\|f\|_w = \left\{ \int_{-1}^{1} f^2(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} dx \right\}^{1/2}.$$

donc nous avons :

$$\|f\|_{s,w} = \left(\sum_{k=0}^{s} \|f^{(k)}\|_w^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

En particulier, pour toute fonction continue f ,on peut établir l'estimation d'erreur ponctuelle suivante

$$\|f - \Pi_{n,w}^{GL} f\|_\infty \leq C n^{\frac{1}{2}-s} \|f\|_{s,w}. \tag{2.14}$$

Ainsi, $\Pi_{n,w}^{GL} f$ converge ponctuellement vers f quand $n \to \infty$, pour tout $f \in C^1([-1,1])$. On a le même type de résultat que (2.12)et (2.14) si on remplace $\Pi_{n,w}^{GL} f$ par le polynôme $\Pi_n^G f$ de degré n qui interpole f aux n noeuds de Gauss x_j donnés en (2.10)
On a aussi l'inégalité suivante :

$$\|f - \Pi_n^G f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n^*(f) \qquad \Lambda_n \leq \frac{2}{\pi} \log(n+1) + 1. \tag{2.15}$$

ou $E_n^*(f) = \inf_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty$ est la meilleure erreur d'approximation de f dans $\mathbb{P}_n$. pour ce qui est de l'erreur d'intégration numérique, considérons par exemple la formule de quadrature de Gauss Lobatto (2.8) dont les noeuds et les poids sont donnés en (2.11). Remarquons tout d'abord que

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}) dx = \lim_{n \to \infty} I_{n,w}^{GL}(f)$$

Pour toute fonction f telle que l'intégrale du membre de gauche est finie. pour des fonctions (plus régulières) telles que $\|f\|_{s;w}$ est finie pour un certain $s \geq 1$,on a :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx - I_{n;w}^{GL}(f) \right| \leq C n^{-s} \|f\|_{s,w}. \tag{2.16}$$

Ceci découle du résultat plus général suivant :

$$|(f, v_n)_w - (f, v_n)_n| \leq Cn^{-s}\|f\|_{s,w}\|v_n\|_w \qquad \forall v_n \in \mathbb{P}_n. \tag{2.17}$$

Ou on à introduit le produit scalaire discret

$$(f, g)_n = \sum_{j=0}^{n} \overline{\alpha}_j f(\overline{x}_j)g(\overline{x}_j) = I_{n,w}^{GL}(fg). \tag{2.18}$$

On peut en effet déduire (2.16)et (2.17) en posant $v_n = 1$ et en remarquant que $\|v_n\|_w = \left(\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ L'inégalité (2.16) permet de conclure que la formule de (Chebyshev)Gauss Lobatto a un degré d'exactitude $2n - 1$ et une précision d'ordre s (par rapport à n^{-1}) dés lors que $\|f\|_{s,w} < \infty$, la précision n'étant limitée que par la régularité s de la fonction à intégrer. Des considérations similaires peuvent être faites pour les formules de (Chebyshev) Gauss à $n + 1$ noeuds
Déterminons enfin les coefficients $\widetilde{f}_k, k = 0, \ldots, n$ du développement sur la base des polynômes de Chebyshev (1.3) du polynôme d'interpolation

$$\Pi_{n,w}^{GL} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{f} T_k(x). \tag{2.19}$$

Noter que
$pi_{n,w}^{GL} f$ coïncide avec la troncature discrète f_n^* de la série de Chebyshev définie par

$$f_n^*(x) = \frac{(f, p_k)_n}{\|p_k\|_n^2}.$$

. appelé troncature discréte à l'ordre n de la série de fourier de f,En imposant l'égalité
$pi_{n,w}^{GL} f(\overline{x}_j) = f(\overline{x}_j), j = 0, \ldots, n$ on trouve :

$$f(\overline{x}_j) = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{kjpi}{n}\right)\widetilde{f}_k, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Etant donné le degré d'exactitude des quadratures de Gauss Lobatto, on peut vérifier que :

$$\widetilde{f}_k = \frac{2}{nd_k}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{d_j}\cos\left(\frac{kjpi}{n}\right)f(\overline{x}_j) \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{2.21}$$

Ou $d_j = 2$ si $j = 0, n$ et $d_j = 1$ si $j = 1, \ldots, n - 1$, la relation (2.21) donne les coefficients discrets $\{\widetilde{f}_k, k = 0, \ldots, n\}$ en fonction des valeurs nodales $\{f(\overline{x}_j), j = 0? \ldots, n\}$. Pour cette raison , on l'appelle transformée de Chebyshev discrète. çrace à sa structure trigonométrique ,on peut la calculer efficacement en utilisant l'algorithme de transformation de fourier rapide avec un nombre d'opérations de l'ordre de $n \log_2 n$

2.2.3 Interpolation et intégration de Legendre

On à vu plus haut que le poids de Legendre est défini par $w(x) = 1$. Pour $n \geq 0$, les noeuds et les coefficients de Gauss correspondants sont donnée par :

$$x_j \qquad Zerosde \qquad L_{n+1}(x), \alpha_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[L'_{n+1}(x_j)]^2}, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Tandis que ceux de Gauss lobatto sont, pour $n \geq 1$:

$$\overline{x}_0 = -1, \overline{x}_n = 1, \overline{x}_j zerosde L'_n(x), j = 1, \ldots, n-1. \tag{2.23}$$

$$\overline{\alpha}_j = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{[L_n(x_j)]^2}, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{2.24}$$

Ou L_n est le n-iéme polynôme de Legendre défini par

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^l \binom{k}{l.} \binom{2k-2l}{k.} x^{k-2l} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

. On peut vérifier que, pour une certaine constante C indépendante de n :

$$\frac{2}{n(n+1)} \leq \overline{\alpha}_j \leq \frac{C}{n} \qquad \forall j = 0, \ldots, n$$

Alors ,si $\Pi_n^{GL} f$ est le polynôme de degré n interpolant f aux $n+1$ noeuds $\overline{x}_j$ données par (2.23) , on peut montrer que $\Pi_n^{GL} f$ vérifie les mêmes estimations d'erreur que celles vues pour les polynômes de Chebyshev correspondants.
La norme $\|\cdot\|_w$ correspond simplement à la norme $\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}$ et $\|f\|_{s,w}$ devient :

$$\|f\|_s = \left(\sum_{k=0}^{s} \|f^{(k)}\|_{L^2(-1,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

On à le même type de résultat si $\Pi_n^{GL} f$ est remplacé par le polynôme $\Pi_n^G f$ de degré n qui interpole f aux $n+1$ noeuds x_j données par (2.22).
En reprenant la définition du produit scalaire discret (2.18) ,mais avec les noeuds (2.23) et les coefficients (2.24), on voit que $(\cdot, \cdot)_n$ est une approximation du produit scalaire usuel $(\cdot, \cdot)$ de $L^2(-1, 1)$.En effet ,l'analogue de (2.17) s'écrit :

$$|(f, v_n) - (f, v_n)_n| \leq C n^{-s} \|f\|_s \|v_n\|_{L^2(-1,1)} \qquad \forall v_n \in \mathbb{P}_n. \tag{2.26}$$

Cette relation est valable pour tout $s \geq 1$ tel que $\|f\|_s < \infty$. En particulier, en posant $v_n = 1$, on a $\|v_n\| = \sqrt{2}$, et on déduit de (2.26) que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - I_n^{GL}(f) \right| \leq C n^{-s} \|f\|_s. \tag{2.27}$$

Ceci qui prouve la convergence de la formule de quadrature de Gauss Legendre lobatto vers l'intégrale exacte de f avec un ordre s par rapport à n^{-1} (à condition que $\|f\|_s < \infty$) . Il existe un résultat similaire pour les formules de quadrature de Gauss Legendre à $n+1$ noeuds .

2.2.4 Intégration de Gauss sur des intervalles non bornés

Nous considérons maintenant l'intégration sur le demi axe réel et sur l'axe réel tout entier. nous utilisons les formules d'interpolation de Gauss dont les noeuds sont données dans le premier cas par les zéros des polynômes de Laguerre et dans le second cas par ceux des polynômes d'Hermite .

Les polynômes de Laguerre

Ce sont des polynômes orthogonaux relativement au poids $w(x) = e^{-x}$ définis sur l'intervalle $[0, \infty[$. Il sont donnés par :

$$\mathcal{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n), \qquad n \geq 0$$

Dans le cas des polynômes de Laguerre, la relation de récurrence à trois termes s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{n+1}(x) = (2n+1-x)\mathcal{L}_n(x) - n^2\mathcal{L}_{n-1}(x), & n \geq 0 \\ \mathcal{L}_{-1} = 0, 1 & \mathcal{L}_0 = 1 \end{cases}$$

pour toute fonction f ,on définit $\varphi(x) = f(x)e^x$ .Alors ,$I(f) = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)dx$, de sorte qu'il suffit d'appliquer à cette dernière intégrale les quadratures de Gauss Laguerre pour obtenir, pour $n \geq 1$ et $f \in C^{2n}([0, +\infty[)$

$$I(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(x_k) + \frac{(n!)^2}{(2n)!}\varphi^{(2n)}(\xi), \qquad 0 < \xi < +\infty. \tag{2.28}$$

Ou les noeuds x_k, pour $k = 1, \ldots, n$ sont les zéros de $\mathcal{L}_n$ et les poids sont $\alpha_k = (n!)^2 x_k/[\mathcal{L}_{n+1}(x_k)]^2$.On déduit de (2.28) que les formules de Gauss Laguerre sont exactes pour les fonctions f du type φe^{-x} , ou $\varphi \in \mathbb{P}_{2n-1}$. On peut dire qu'elles ont un degré d'exactitude (dans un sens généralisé) optimal et égal à $2n - 1$.

les polynômes d'Hermite

Ce sont des polynômes orthogonaux relativement au poids $w(x) = e^{-x^2}$ définis sur l'axe réel tout entier. Ils sont donnés par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \qquad n \geq 0$$

Les polynômes d'Hermite peuvent être construits par récurrence avec la formule

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), & n \geq 0 \\ H_{-1} = 0, & H_0 = 1 \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, en posant $\varphi(x) = f(x)e^{x^2}$, on a $I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x)dx$. En appliquant à cette dernière intégrale les quadratures de Gauss Hermite on obtient, pour $n \geq 1$ et $f \in C^{2n}(\mathbb{R})$

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(x_k) + \frac{(n!)\sqrt{\pi}}{e^n(2n)!}\varphi^{(2n)}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

ou les noeuds $x_k, k = 1, \ldots, n$, sont les zéros de H_n et les poids sont $\alpha_k = 2^{n+1}n!\sqrt{\pi}/[H_{n+1}(x_k)]^2$. Comme pour les quadratures de Gauss Laguerre, les formules de Gauss Hermite sont exactes pour des fonction f de la forme φe^{-x^2},$\varphi \in \mathbb{P}_{2n-1}$

2.3 Approximation au sens des Moindres Carrés

Etant donné une fonction $f \in L^2_w(a,b)$, ou cherche un polynôme r_n de degré $\leq n$ qui satisfait

$$\|f - r_n\|_w = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|f - p_n\|_w, \tag{2.30}$$

où $w(x)$ est une fonction poids sur $]a,b[$. Quand il existe , r_n est appelé polynôme des moindres carrée. Ce nom vient du fait que, si $w = 1$, r_n est le polynôme qui minimise l'erreur en moyenne quadratique $E = \|f - r_n\|_{L^2(a,b)}$ r_n coïncide avec la troncature f_n d'ordre n de la série de fourrier. En fonction du choix du poids w_x , on obtient des polynômes des moindre carrée différents possédant des propriétés de convergence également différentes.
On peut introduire la troncature discrète $f_n^\star$ de la série de Chebyshev (en posant $p_k = T_k$)ou de la série de Legendre (en posant $p_k = L_k$). Si on utilise implémentations des quadratures de Gauss le produit scalaire discret induit par la quadrature de Gauss Lobatto (2.18) alors les $\widetilde{f}_k$ coïncident avec les coefficients du développement du polynôme d'interpolation $\Pi^{GL}_{n,w} f$ dans le cas de Chebychev ou dans le cas de Legendre.
Par conséquent, $f_n^\star = \Pi^{GL}_{n,w} f$, autrement dit la troncature discrète de la série de Chebychev ou de Legendre de f coïncide avec le polynôme d'interpolation aux $n+1$ noeuds de Gausse Lobatto. En particulier l'égalité (2.1) est trivialement satisfaite dans ce cas puisque $\|f - f_n^\star\|_n = 0$

2.3.1 Approximation au sens des moindres carrés discrets

De nombreuses applications nécessitent de représenter de maniére synthétique, en utilisant des fonction élémentaires, un grand ensemble de donnée discrètes pouvant résulter, par exemple, de mesures expérimentales. Ce types d'approximation, parfois appelé lissage ou fitting de donnée peut être effectué de façons satisfaisante en utilisant la méthode discréte des moindres carrée qu'on va présenter maintenant. On se donne $m + 1$ couples de valeurs

$$(x_i, y_i), i = 0, \ldots, m \tag{2.31}$$

Ou y_i représente, par exemple, une quantité physique mesurée à la position x_i .En supposant toutes les abscisses distinctes, on se demande s'il existe un polynôme $p_n \in \mathbb{P}_n$ tel que $p_n(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, \ldots, m$. Si $n = m$ on retrouve l'interpolation polynômial. supposons donc que $n < m$ et notons $\{\varphi_i\}$ une base de $\mathbb{P}_n$.
On cherche un polynôme $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$ tel que

$$\sum_{j=0}^{m} w_j |p_n(x_j - y_i)|^2 \leq \sum_{j=0}^{m} w_j |q_n(x_j) - y_j|^2 \qquad \forall q_n \in \mathbb{P}_n. \tag{2.32}$$

pour des coefficients $w_j > 0$ données (2.32) est appelé problème aux moindres carrés discrets, car on fait intervenir un produit scalaire discret, et que c'est la contrepartie discréte du problème continu vu ci dessus. La solution p_n sera donc appelée polynôme aux moindres carrés .noter que

$$|||q||| = \left\{ \sum_{j=0}^{m} w_j [q(x_j)]^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.33}$$

est une semi norme essentiellement stricte sur $\mathbb{P}_n$ et une norme discréte$\| \cdot \|_\star$ est non nuls tels que $\alpha f(x_i) + \beta g(x_i) = 0$ pour $i = 0, \ldots, m$ comme $|||\cdot|||$ est une semi norme essentiellement stricte ,le problème (2.32) admet une unique solution. En procédant comme dans le cas continu on trouve les équation

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{m} w_j \varphi_k(x_j) \varphi_i(x_j) = \sum_{j=0}^{m} w_j i_j \varphi_i(x_i) \qquad \forall i = 0, \ldots, n$$

qui constituent un système d'équation normales, et qu'on écrit plus commodément sous la forme

$$B^T B A = B^T y. \tag{2.34}$$

ou B est matrice rectangulaire $(m+1) \times (n+1)$ de coefficients $b_{ij} = \varphi_j(x_i), i = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, n, a \in \mathbb{R}^{n+1}$ est le vecteur des coefficients inconnus et$y \in \mathbb{R}^{m+1}$ le vecteur des données . Si$w_j = 1$ pour $j = 0, \ldots, m$, le systeme peut etre vu comme la solution au sens des moindes carrés du systeme

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, m,$$

qui n'admet en général pas la solution classique ,puisque la nombre de lignes est grand que le nombre de colonnes .Dans le cas ou $n = 1$, la solution de (2.32) est une fonction affine, appelée régression linéaire associée aux données (2.31) , Le systeme d'equation normales correspondant est

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{m} w_j\varphi_i(x_j)\varphi_k(x_j)a_k = \sum_{j=0}^{m} w_j\varphi_i(x_i)y_i, \qquad i = 0, 1$$

En posant $(f, g)_m = \sum_{j=0}^{m} f(x_j)g(x_j)$, on obtient

$$\begin{cases} (\varphi_0, \varphi_0)_m a_0 + \varphi_1, \varphi_0)_m a_1 = (y, \varphi_0)_m \\ (\varphi_0, \varphi_1)_m a_0 + \varphi_1, \varphi_1)_m a_1 = (y, \varphi_1)_m. \end{cases}.$$

ou $y(x)$ est une fonction qui prend la valeur y_i aux noeuds $x_i, i = 0, \ldots, m$
Âprés un peu d'algèbre, on trouve la forme explicite des coefficients :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(y, \varphi_0)_m(\varphi_1, \varphi_1)_m - (y, \varphi_1)_m(\varphi_1, \varphi_0)_m}{(\varphi_1, \varphi_1)\varphi_0, \varphi_0)_m - (\varphi_0, \varphi_1)_m^2}, \\ a_1 &= \frac{(y, \varphi_1)_m(\varphi_0, \varphi_0)_m - (y, \varphi_0)_m(\varphi_1, \varphi_0)_m}{(\varphi_1, \varphi_1)\varphi_0, \varphi_0)_m - (\varphi_0, \varphi_1)_m^2}, . \end{aligned}.$$

2.3.2 Approximation au sens des Moindres Carrés continue

Nous avons présenté la méthode des moindres carrés discrète consistant a trouver par exemple un polynôme $P^\star$ qui approche une fonction connue seulement en certains points $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ La méthode des moindres carrés continue consiste a approcher une fonction $f$par un polynôme $P^\star \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ qui minimise la norme $\|f - P\|_{l^2_w}$ sur l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égal a n, noté $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Pour la construction d'une telle approximation, nous utilisons des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire associé a l'espace L^2_ω.
Pour tout $n \geq 1.$, choisissons $(p_k)_{0\leq k\leq n}$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ ou w représente la fonction poids et notons $P_n(a, b)$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal a n restreints a l'intervalle [a,b] .
Observons que puisque la famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre ,nous avons

$$\mathcal{P}_n(a, b) = vect\{P_0, \ldots, P_n\} \tag{2.35}$$

Pour une fonction f définie de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $f \in L^2_w(]a, b[)$, nous recherchons un polynôme $P^\star \in \mathcal{P}_n(a, b)$ solution du problème

$$\|f - P^\star\|^2_{L^2_w} = \inf_{P\in\mathcal{P}_n(a,b)} \|f - P\|L^2_w \tag{2.36}$$

Démontrons alors le résultat suivants :
théorème : Meilleure approximation
soient $n \geq 1$ et $f \in L^2_w(]a, b[)$. Il existe un unique polynôme $P^\star \in \mathcal{P}_n(a, b)$ solution de (2.36) qui d'écrite sous la forme $P^\star(x) = \sum_{i=0}^n c_iP_i(x)$ où les coefficients $(c_i)_{0\leq i\leq n}$ sont donnés par

$$c_i = \frac{\langle P_i, f\rangle_w}{\langle P_i, P_i\rangle_w}, i = 0, \ldots, n.$$

DÉMONSTRATION :
La démonstration de l'existence et de l'unicité de $P^\star \in \mathcal{P}_n(a, b)$ est clair. En outre ,en écrivant $P^\star$ sous la forme $P^\star(x) = \sum_{i=0}^n c_iP_i(x)$, Les coefficients $(c_i)_{0\leq i\leq n}$

$$\sum_{j=0}^n c_j\langle P_j, P\rangle_w = \langle f, P\rangle_w, \qquad \forall P \in \mathcal{P}_n(a, b).$$

En choisissant $P = P_i$, pour $i = 0, \ldots, n$ et en utilisant l'orthogonalité des polynômes, nous obtenons le résultat

$$c_i\langle p_i, p_i\rangle_w = \langle f, P_i\rangle_w, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

ce qui correspond a l'expression souhaitée de c_i
Ce dernièr théorème permet de comprendre pourquoi dans la pratique nous utilisons un espace fonctionnel muni d'un produit scalaire ; ce cadre permet en effet de donner une expression simple de la solution du problème de minimisation .

Exemple : approximation de l'exponentielle
Recherchons le polynôme $p$de degré inférieur ou égal a trois qui minimise

$$\int_{-1}^{1} |e^x - P_{(x)}|^2 dx.$$

Utilisons pour cela la base de polynôme de Legendre $L_0(x) = 1$,$L_1(x) = x$ et $L_2(x) = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})$,$L_3(x) = \frac{5}{2}(x^3 - \frac{3}{5}x)$
calculons alors

$$\begin{array}{rl} \langle f, L_0\rangle_1 = & \int_{-1}^{1} e^x dx = e - 1/e, \\ \langle f, L_1\rangle_1 = & \int_{-1}^{1} xe^x dx = 2/e, \\ \langle f, L_2\rangle_1 = & \dfrac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^2 - \dfrac{1}{3})e^x dx = e - 7/e, \\ \langle f, L_3\rangle_1 = & \dfrac{5}{2}\int_{-1}^{1}(x^3 - \dfrac{3}{5}x)e^x dx = -5e + 37/e \\ .. & \end{array} . \tag{2.37}$$

Par ailleurs , nous montrons que$\langle L_n, L_n\rangle_1 = 2/(2n+1)$et déduisons alors l'expression du polynôme de degré inférieur ou égal a trois qui est la meilleure approximation au sens des moindre carrée de e^x

$$P^\star(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\langle f, L_k\rangle_1}{\langle L_k, L_k\rangle_1} L_k(x), \qquad x \in [-1, 1].$$

conclusion

Les polynômes orthogonaux est un outil fondamentale pour la résolution de plusieurs problèmes d'analyse théorique ou pratique.
Nous avons devisé notre mémoire en deux chapitre tel que au premier chapitre nous avons présenté définition et concepts de base et on expliquer par des exemple classique .
Dans le deuxième chapitre nous avons utilisé les polynômes orthogonaux dans quelques applications comme approximation au sens de moindres carré, calcul d'intégration numérique .

Références

[1] T.S.Chihara An introduction to orthogonal polynomial Gordon and Breach 1978.
[2] A.F.Nikiforov ,S.k Suslov et V.B Uvarov Classical orthogonal polynomial of a discrete variable .Springer -Verlag 1991.2-3
[3] Francis Filbet Analyse numérique ,2009
[4]Alfio Quarteroni,Riccard Sacco ,Fausto Saleri Méthodes Numériques 2007