REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET**

# MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Par :

**Bortal Rachida**
**Khelif Kheira**
**Zami Khedidja**

Sur le thème

---

# Résultats d'existence pour des systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes

---

Soutenu publiquement le 14 /07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr BENHABI Mohamed | M.A.A | Université Ibn Khaldoun Tiaret | Président |
| Mr BENDOUMA Bouharket | M.C.B | Université Ibn Khaldoun Tiaret | Encadreur |
| Mr MAHROUZ Tayeb | M.C.B | Université Ibn Khaldoun Tiaret | Examinateur |

2020-2021

# Remerciements

*En premier lieu, nous remercions **Allah** qui nous avoir donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur Mr : "*BENDOUMA Bouharket*", pour leur soutien, leurs conseils judicieux et leur grande bien vaillance durant l'élaboration de ce travail.*

*Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

# Dédicaces

*Je dédie ma remise de diplôme à :*
*Mes parents, mes frères Abdelkader, Yacine et Alaa, mes soeurs Khalidiya, Amina, et toute ma famille.*

*A mon professeur, le superviseur, BENDOUMA Bouharket , et mes collègues, Khelif Khaira et Zami Khedidja.*

*A mes camarades sur mon chemin, Yousra, wadaa,Saïda, Amal Iman, Aicha,*

*A tous ceux qui m'ont encouragé.* **Bortal Rachida**

*je dédie ce modeste travail*

*A mon père qui sur classe les pères de la terre entièr,*

*A mon mère dont la douceur et la patience m'ont permis d'évoluer,*

*A mes chers frères Abdelkader, Bouchra, Asma, Fatima.*

*A tous ceux qui m'ont accompagné dans le travail que j'ai accompli,*

*A tous que j'aime et qui m'aiment, Qu'il trouvent dans ce travail le résultat de leurs conseils et encouragements.* **Khelif Kheira**

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mes chèrs parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes ètudes,*

*A ma chère soeur Hadjer pour ses encouragements permanents.*

*A mes chers frères, pour leur appui et leur encouragement,*

*A toutes ma famille Zami, Naar, Sahed, Chaabane pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,*

*Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible.* **Zami Khedidja**

# Résumé

Nous présentons dans ce mémoire, des résultats d'existence de solutions pour des systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires sous certaines conditions aux limites. Ces résultats sont obtenus grâce à la notions de tube-solution adaptée à ces systèmes. Celle-ci généralise la notion de sous et sur solution.

# Table des matières

# Introduction

En 2014,Khalil et al. [15] ont présenté une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire dénommée la dérivée fractionnaire conforme (voir Définition 1.1). Les équations différentielles fractionnaires conformes on été étudiées par plusieurs auteurs, divers résultats théoriques ont été obtenus, voir par exemple les références [2, 4, 5, 7, 8, 11].

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires réels ou complexes (à des ordres entiers ou non entiers). Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du $17^{me}$ siècle, partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée en 09/1695, sur la signification de $\dfrac{d^n f}{t^n}$ (la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'une fonction $f$) si $n = \frac{1}{2}$. La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc (voir[3, 9, 10, 16, 18]).

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ avec des conditions périodiques et initiales.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le **premier chapitre** nous présentons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire conforme et nous rappelons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle et théorèmes du point fixe.

Dans le **deuxième chapitre**, nous étudions systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes linéaires d'ordre $\alpha \in (0,1]$ avec des conditions périodiques, anti-périodiques et initiales.

Dans le **le troisième chapitre,** nous établirons des théoremes d'existance pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires suivants :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a,b], 0 < a, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a,b], 0 < a, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de $x$ d'ordre $\alpha$ en $t$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Résultats d'existence pour le problème (3.2), ont été obtenus par M. Pospisil et L.P. Skripkova [19], par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach avec $f$ une fonction continue.

Pour obtenir un théorème d'existence pour le problème périodique (3.1) (resp, le problème initiale (3.2)) nous introduirons la notion de tube-solution de ce problème. L'objectif de cette méthode est de prouver que si une solution $x \in C^{(\alpha)}(I, \mathbb{R}^n)$ existe, alors elle est incluse dans un tube solution, i.e. on peut trouver des fonctions $v \in C^{(\alpha)}(I, \mathbb{R}^n)$ et $M \in C^{(\alpha)}(I, [0, \infty)))$ telles que

$$\|x(t) - v(t)\| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

La technique utilisée est de transformer le problème initial en un problème de point fixe de sorte que si l'on prouve qu'une solution du problème modifié existe, elle est aussi solution du problème initial (original).

Si nous considérons le problème (3.1)($resp$, (3.2)) comme une équation avec $n = 1$, alors la notion de tube-solution est généralise les notions de sous– et sur–solutions $\alpha$ et $\beta$ introduites par B. Bendouma et al. [7].

**Mots Clés** : Calcul fractionnaire conforme, systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes, sous et sur solutions, tube-solution, théorèmes d'existence, théorème du point fixe de Schauder.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire conforme et nous rappelons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle et théorèmes du point fixe.

## 1.1 Calcul fractionnaire conforme

### 1.1.1 La dérivée fractionnaire conforme

**Définition 1.1** *Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\alpha \in (0, 1]$. La dérivée fractionnaire conforme d'ordre $\alpha$ de $f$ est définie par :*

$$f^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{1.1}$$

*pour tout $t > 0$. Si $f^{(\alpha)}(t)$ existe et est finie, on dit que $f$ est $\alpha$-différentiable en $t$.*

*Si $f$ est $\alpha$-différentiable dans un intervalle $]0, a[$, $a > 0$, et $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ existe, alors la dérivé fractionnaire conforme de $f$ d'ordre $\alpha$ en $t = 0$ est défini comme*

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

**Exemple 1.1.1** *Soit $\alpha \in (0, 1]$. Les fonctions suivantes $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ définies par $f(t) = t^p$, $g(t) \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $h(t) = e^{pt}$ avec $p \in \mathbb{R}$, $k(t) = \sin \frac{t^\alpha}{\alpha}$, et $l(t) = \cos \frac{t^\alpha}{\alpha}$ sont $\alpha$-différentiables avec*

1. $f^{(\alpha)}(t) = p\, t^{p-\alpha}$ ;

2. $g^{(\alpha)}(t) = 0$ ;
3. $h^{(\alpha)}(t) = p\, t^{1-\alpha} e^{pt}$.
4. $k^{(\alpha)}(t) = \cos \frac{t^\alpha}{\alpha}$ ;
5. $l^{(\alpha)}(t) = -\sin \frac{t^\alpha}{\alpha}$.

**Définition 1.2** *[20] Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, $t \to f(t) := (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ une fonction et soit $\alpha \in (0, 1]$. On dit que $f$ est $\alpha$–differentiable en $t \geq 0$ si chaque composante $f_i$, $i = 1, ..., n$ est $\alpha$–differentiable en $t$. On définie $f^{(\alpha)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ par :*

$$f^{(\alpha)}(t) = (f_1^{(\alpha)}(t), f_2^{(\alpha)}(t), \cdots, f_n^{(\alpha)}(t)), \qquad \text{pour tout } t > 0. \tag{1.2}$$

*On appelle $f^{(\alpha)}(t)$ La dérivée fractionnaire conforme de $f$ d'ordre $\alpha$ en $t$.*

**Définition 1.3** *[20] Soit $\alpha \in (m,\ m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ et $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ est $m$ fois différentiable en $t > 0$. On définit la dérivée fractionnaire conforme de $f$ d'ordre $\alpha$ par*

$$f^{(\alpha)}(t) := (f^{(m)})^{(\alpha-m)}(t).$$

**Remarque 1.1** *(i) La derivée de Riemann-liouville $D_a^\alpha$ ne vérifie pas (ne satisfait pas) $D_a^\alpha(1) = 0$, si $f$ n'est pas entier naturel. ($D_a^\alpha(1) = 0$ pour la dérivée de Caupto).*

*(ii) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle du produit connue : $D_a^\alpha(fg) = f D_a^\alpha(g) + g D_a^\alpha(f)$.*

*(iii) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du quotient : $D_a^\alpha(f/g) = \dfrac{g D_a^\alpha(f) - f D_a^\alpha(g)}{g^2}$.*

*(iv) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle de la chaîne (Dérivée de fonctions composées) : $D_a^\alpha(fog) = f^\alpha(g) g^\alpha$.*

*(v) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas : $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$ en général.*

*(vi) La définition de Caputo suppose que la fonction $f$ est différentiable.*

**Théorème 1.1** *[20] Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction et soit $\alpha \in (0, 1]$. Si $f$ est $\alpha$-différentiable en $t_0 > 0$, alors $f$ est continue en $t_0$.*

**Théorème 1.2** *[20] Soit $\alpha \in (0, 1]$. Si $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ sont $\alpha$-différentiables en $t > 0$. Alors :*

*(i)* $(af+bg)^{(\alpha)} = af^{(\alpha)} + bg^{(\alpha)}$, *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *;*

*(ii)* $(fg)^{(\alpha)} = fg^{(\alpha)} + gf^{(\alpha)}$ *;*

*(iii)* $(f/g)^{(\alpha)} = \dfrac{gf^{(\alpha)} - fg^{(\alpha)}}{g^2}$.

*(iv) Si, en plus* $f$ *est différentiable en* $t > 0$*, alors*

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

**Remarque 1.2** *Il est facile de vérifier que :*

*(i) La fonction* $x : t \mapsto e^{\frac{p}{\alpha}t^{\alpha}}$, $p \in \mathbb{R}$, *est une solution du problèeme à valeur initiale :*

$$x^{(\alpha)}(t) = p\,x(t),\ t \in [0,\infty),\ x(0) = 1. \tag{1.3}$$

*(ii) Si* $f$ *est différentiable en* $t$*, alors* $f$ *est* $\alpha$*-différentiable en* $t$*.*

Nous introduisons l'espace suivant : Soit $I = [a,b],\ a > 0$.

$$C^{\alpha}(I,\mathbb{R}^n) = \{f : I \to \mathbb{R}^n,\ est\ \alpha\text{-}diff\acute{e}rentiable\ sur\ I\ et\ f^{(\alpha)} \in C(I,\mathbb{R}^n)\}.$$

### 1.1.2 L'intégral fractionnaire conforme

**Définition 1.4** *[15] Soit* $\alpha \in (0,1]$, $0 \le a$ *et* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$*. L'intégral fractionnaire conforme de* $f$ *d'ordre* $\alpha$ *de* $a$ *à* $t$*, notée par* $I_{\alpha}^{a}(f)(t)$*, est définie par :*

$$I_{\alpha}^{a}(f)(t) := I_{1}^{a}(t^{\alpha-1}f)(t) = \int_{a}^{t} f(s)d_{\alpha}s := \int_{a}^{t} f(s)s^{\alpha-1}ds.$$

*où l'intégrale à droite est l'ntégrale usuelle de Riemann.*

**Définition 1.5** *[20] Soit* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $0 \le a$ *et* $\alpha \in (0,1]$*. L'intégral fractionnaire conforme de* $f$ *d'ordre* $\alpha$ *de* $a$ *à* $t$*, notée par* $I_{\alpha}^{a}(f)(t)$*, est définie par :*

$$I_{\alpha}^{a}(f)(t) = \int_{0}^{t} f(s)d_{\alpha}s = \Big(I_{\alpha}^{a}(f_1)(t), I_{\alpha}^{a}(f_2)(t), \cdots, I_{\alpha}^{a}(f_n)(t)\Big),$$

*où* $I_{\alpha}^{a}(f_i)(t)$ *est l'intégral fractionnaire conforme de chacune de ses composantes* $f_i : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *d'ordre* $\alpha$ *de* $a$ *à* $t$*, pour* $i = 1, ..., n.$ .

**Lemme 1.1** *[15, 19] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors pour tout $t \geq a$ on a*

$$(I_\alpha^a(f))^{(\alpha)}(t) = f(t). \tag{1.4}$$

**Lemme 1.2** *[1, 20] Soit $0 < \alpha \leq 1$. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ est différentiable, alors pour tout $t > a$ on a*

$$I_\alpha^a(f^\alpha)(t) = f(t) - f(a). \tag{1.5}$$

**Théorème 1.3** *[13] Soit $\alpha \in ]0, 1[$, $a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors, pour tout $t \in [a, b]$ nous avons,*

$$\|I_\alpha^a(f)(t)\| \leq I_\alpha^a \|f\|(t).$$

**Théorème 1.4** *Soient $W$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $0 < \alpha \leq 1$. Si $g : I \to \mathbb{R}^n$ est $\alpha$-différentiable en $t > 0$ et si $f : W \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $g(t) \in W$. Alors $f \circ g$ est $\alpha$-differentiable en $t$ et*

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = < f'(g(t)), g^{(\alpha)}(t) >. \tag{1.6}$$

**Exemple 1.1.2** *Soit une fonction $x : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$ $\alpha$-différentiable en $t$. On sait que $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to [0, \infty)$ est différentiable. En vertu du théorème précédent on a que*

$$\|x(t)\|^{(\alpha)} = \frac{< x(t), x^{(\alpha)}(t) >}{\|x(t)\|}. \tag{1.7}$$

## 1.2 Rappels d'analyse fonctionnelle

**Définition 1.6** *(Norme) Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On appelle une norme sur $E$ toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

*(i)* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

*(ii)* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

*(iii)* $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

**Définition 1.7** *(Espace vectoriel normé) Un espace vectoriel $E$ muni d'une norme $\|.\|$ noté $(E, \|.\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.*

**Définition 1.8** *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur les corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.*

**Exemple 1.2.1** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. $C(I, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions $y$ continues définie de $I$ dans $\mathbb{R}^n$ avec la norme*

$$\|y\|_\infty = \sup_{t \in I} \|y(t)\|.$$

*$L^1(I, \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables $y$ définie de $I$ dans $\mathbb{R}^n$ intégrables avec la norme,*

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b \|y(s)\| ds.$$

**Définition 1.9** *Le sous ensemble $F$ de l'espace normé $X$ est dit borné si il existe $M$ tel que*

$$\|x\| \leq M \quad \textit{pour tout } x \in F.$$

**Définition 1.10** *L'ensemble $F$ de l'espace vectoriel $X$ est dit convexe si pour tout $x, y \in F$*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in F, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

**Définition 1.11** *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application. On dit que $\mathcal{F}$ est bornée si elle envoie les parties bornées de $E$ sur des parties bornées de $F$ i.e. $\mathcal{F}$ (bornée) est bornée.*

**Remarque 1.3** *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ une application bornée, i.e, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\textit{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leq \varepsilon \qquad \textit{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x)\|_F \leq \delta.$$

**Définition 1.12** *Soient $E$ et $F$ deux espaces normés sur $\mathbb{R}$.*

*(i) L'opérateur $A : E \longrightarrow F$ est dit continu si et seulement si pour chaque suite $(u_n)$ dans $E$ telle que $\lim_{n \to \infty} u_n = u \Rightarrow \lim_{n \to \infty} Au_n = Au$.*

*Où ce qui est équivalent à*

*(ii) $A$ est dit continu si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ telle que pour tout $u, v \in E$ :*

$$\|u - v\|_E < \delta \Longrightarrow \|Au - Av\|_F < \varepsilon.$$

*Alors l'opérateur $A$ est dit continu sur $E$, ou simplement continu s'il est continu en tout point de $E$.*

**Définition 1.13** *Un sous ensemble $S$ de l'espace normé $B$ est dit compact si pour toute suite d'éléments de $S$ on peut extraire une sous suite convergente vers un élément de $S$.*
***Remarque*** *Un ensemble compact est un ensemble fermé borné ; la réciproque n'est pas toujours vraie.*

**Définition 1.14** *Un ensemble $M$ est relativement compact si $\overline{M}$ est compact.*

**Définition 1.15** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ est une fonction continue. On dit que $T$ est compacte si $\overline{T(E)}$ est compact. On dit que $T$ est complètement continue si $\overline{T(B)}$ est compact pour tout sous-ensemble borné $B \subset E$.*

**Définition 1.16** *(Ensemble équicontinue) Un ensemble $F$ de $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ est dit équicontinu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b], |t_2 - t_1| \leq \delta$ on a :*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad f \in F.$$

**Définition 1.17** *(Ensemble uniformément borné) $F$ est dit uniformément borné dans $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\|y\|_\infty \leq M$ pour tout $y \in F$.*

**Lemme 1.3** *Une application continue sur un ensemble compact est uniformément borné.*

**Théorème 1.5** *(Arzela-Ascoli) Soit $B \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$, $B$ est relativement compact dans $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ si et seulement si :*

**(a)** *$B$ est uniformément borné.*

**(b)** *$B$ est équicontinu.*

**Définition 1.18** *(Point fixe) Un point fixe de l'opérateur $\mathcal{F} : E \to E$ est un point $x \in E$ tel que $\mathcal{F}(x) = x$.*

**Théorème 1.6** *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit* $C$ *un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach* $E$ *et* $A : C \to C$ *une application compact i.e* ($\overline{A(C)}$ *est compact). Alors* $A$ *admet au moins un point fixe.*

**Définition 1.19** *(Opérateur contractant) Soit* $(E, \| \,.\, \|_E)$ *un espace de Banach, un opérateur* $\mathcal{N} : E \to E$ *est dite contractant sur* $E$ *s'il exist un nombre réel* $k \in ]0;1[$ *tel que :*

$$\forall y_1, y_2 \in E, \qquad \|\mathcal{N}(y_1) - \mathcal{N}(y_2)\|_E \leq k \, \|y_1 - y_2\|_E \,,$$

**Théorème 1.7** *(Théorème du point fixe de Banach) [12] Soit* $(E, \| \,.\, \|_E)$ *un espace de Banach et* $\mathcal{F} : E \to E$ *est un opérateur continue et contractant, alors l'opérateur* $\mathcal{F}$ *admet un point fixe unique* $x \in E$.

# Chapitre 2

# Systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes linéaires d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ avec des conditions périodiques, anti-périodiques et initiales :

## 2.1 Le problème périodique

**Théorème 2.1** *Si $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 1$, $I = [a, b]$, $0 < a < b$ et $p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, alors le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = -px(t) + g(t), & t \in I, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{2.1}$$

*admet une solution unique $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$ donnée par :*

$$x(t) := \int_a^b G_{Pe}(t, s) g(s) d_{\alpha} s, \tag{2.2}$$

*où $G_{Pe}$ est la fonction de Green donnée par*

$$G_{Pe}(t, s) = \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(s^{\alpha} - t^{\alpha})}}{1 - e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}, & a \leq t < s \leq b, \end{cases} \tag{2.3}$$

***Preuve***.
Montrons (2.2) pour chaque paire de composantes vectorielles $(x_i, g_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour alléger la notation, nous omettrons les indices $i$.
Soit $x$ est solution du problème (2.1), on a :

$$\begin{aligned}\left[x(t)e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}\right]^{(\alpha)} &= x^{(\alpha)}(t)e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha} + pt^{1-\alpha}t^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}x(t),\\ &= e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}g(t),\end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a, t]$ et on obtient

$$x(t)e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha} - x(a)e^{\frac{p}{\alpha}a^\alpha} = \int_a^t e^{\frac{p}{\alpha}s^\alpha}g(s)d_\alpha s. \tag{2.4}$$

Donc,

$$x(t) = e^{\frac{-p}{\alpha}t^\alpha}\left(e^{\frac{p}{\alpha}a^\alpha}x(a) + \int_a^t s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}s^\alpha}g(s)ds\right). \tag{2.5}$$

Par (2.1) et(2.5), on obtient

$$x(a) = \frac{1}{1 - e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\int_a^b s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - b^\alpha)}g(s)ds. \tag{2.6}$$

En substituant (2.6) à (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{1 - e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\int_a^t s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - b^\alpha)}g(s)ds + \int_a^t s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}g(s)ds\\ &\quad + \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{1 - e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\int_t^b s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - b^\alpha)}g(s)ds\\ &= \frac{1}{1 - e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\left(\int_a^t s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}\ g(s)ds + \right.\\ &\quad\left.\int_t^b s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha + s^\alpha - t^\alpha)}g(s)ds\right)\\ &= \int_a^b G_{Pe}(t, s)g(s)d_\alpha s.\end{aligned}$$

## 2.2 Le problème anti-périodique

**Théorème 2.2** *Si $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 1$, $I = [a, b]$, $0 < a < b$ et $p \in \mathbb{R}$, alors le problème anti-périodique*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = -px(t) + g(t), & t \in I, \\ x(a) = -x(b), \end{cases} \tag{2.7}$$

*admet une solution unique $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$ donnée par :*

$$x(t) := \int_a^b G_{AP}(t,s) g(s) d_{\alpha} s, \tag{2.8}$$

*où $G_{AP}$ est la fonction de Green donnée par*

$$G_{AP}(t,s) = \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(s^{\alpha} - t^{\alpha})}}{1 + e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ -e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}, & a \leq t < s \leq b, \end{cases} \tag{2.9}$$

***Preuve***.
Montrons (2.8) pour chaque paire de composantes vectorielles $(x_i, g_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour alléger la notation, nous omettrons les indices $i$.
Soit $x$ est solution du problème (2.7), on a :

$$x(t) = e^{\frac{-p}{\alpha} t^{\alpha}} \left( e^{\frac{p}{\alpha} a^{\alpha}} x(a) + \int_a^t s^{\alpha - 1} \; e^{\frac{p}{\alpha} s^{\alpha}} g(s) ds \right). \tag{2.10}$$

Par (2.7) et(2.10), on obtient

$$x(a) = \frac{-1}{1 + e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}} \int_a^b s^{\alpha - 1} \; e^{\frac{p}{\alpha}(s^{\alpha} - b^{\alpha})} g(s) ds. \tag{2.11}$$

En substituant (2.11) à (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{-e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - t^{\alpha})}}{1 + e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}} \int_a^t s^{\alpha-1} e^{\frac{p}{\alpha}(s^{\alpha} - b^{\alpha})} g(s) ds + \int_a^t s^{\alpha-1} e^{\frac{p}{\alpha}(s^{\alpha} - t^{\alpha})} g(s) ds \\ & - \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - t^{\alpha})}}{1 + e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha} - b^{\alpha})}} \int_t^b s^{\alpha-1} e^{\frac{p}{\alpha}(s^{\alpha} - b^{\alpha})} g(s) ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}} \left( \int_a^t s^{\alpha-1}\, e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}\, g(s)ds - \right.$$
$$\left. \int_t^b s^{\alpha-1} e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha + s^\alpha - t^\alpha)} g(s)ds \right)$$
$$= \int_a^b G_{AP}(t,s)g(s)d_\alpha s.$$

## 2.3 Le problème à valeur initiale

**Théorème 2.3** *Si $g \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leq 1$, $I = [a,b]$, $0 < a < b$ et $p \in \mathbb{R}$, alors le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = -px(t) + g(t), & t \in I, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

*admet une solution unique $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^n)$ donnée par :*

$$x(t) := \int_a^b G_{In}(t,s)g(s)d_\alpha s + x_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}, \tag{2.13}$$

*où $G_{In}$ est la fonction de Green donnée par*

$$G_{In}(t,s) = e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 0, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{2.14}$$

***Preuve***. Montrons (2.13) pour chaque paire de composantes vectorielles $(x_i, g_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour alléger la notation, nous omettrons les indices $i$. Soit $x$ est solution du problème (2.12), on a :

$$x(t) = e^{\frac{-p}{\alpha}t^\alpha} \left( e^{\frac{p}{\alpha}a^\alpha} x(a) + \int_a^t s^{\alpha-1}\, e^{\frac{p}{\alpha}s^\alpha} g(s)ds \right). \tag{2.15}$$

Donc

$$x(t) = \int_a^t s^{\alpha-1} e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} g(s)ds + x_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}$$
$$= \int_a^b G_{In}(t,s)g(s)d_\alpha s + x_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}.$$

## 2.4 Le problème à valeur terminale

**Théorème 2.4** *Si $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha \leq 1$, $I = [a, b]$, $0 < a < b$ et $p \in \mathbb{R}$, alors le problème à valeur terminale*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + p\, x(t) = g(t), & \text{pour tout } t \in I, \\ x(b) = y_0, \end{cases} \tag{2.16}$$

*admet une solution unique $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_T(t,s) g(s) d_\alpha s + y_0 e^{\frac{p}{\alpha}(b^\alpha - t^\alpha)}, \tag{2.17}$$

*où $G_T$ est la fonction de Green (fractionnaire) donnée par*

$$G_T(t,s) = -e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} \begin{cases} 0, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 1, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{2.18}$$

***Preuve***. Montrons (2.17) pour chaque paire de composantes vectorielles $(x_i, g_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour alléger la notation, nous omettrons les indices $i$. Soit $x$ est solution du problème (2.16), on a :

$$\left[x(t) e^{\frac{p}{\alpha} t^\alpha}\right]^{(\alpha)} = e^{\frac{p}{\alpha} t^\alpha} g(t).$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[t, b]$ et on obtient

$$x(b) e^{\frac{p}{\alpha} b^\alpha} - x(t) e^{\frac{p}{\alpha} t^\alpha} = \int_t^b e^{\frac{p}{\alpha} s^\alpha} g(s) d_\alpha s, \tag{2.19}$$

d'ou,

$$x(t) = e^{\frac{p}{\alpha}(-t^\alpha)} \left( e^{\frac{p}{\alpha} b^\alpha} x(b) - \int_t^b s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha} s^\alpha} g(s) ds \right). \tag{2.20}$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_t^b s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} g(s) ds + y_0 e^{\frac{p}{\alpha}(b^\alpha - t^\alpha)} \\ &= \int_a^b G_T(t,s) g(s) d_\alpha s + y_0 e^{\frac{p}{\alpha}(b^\alpha - t^\alpha)}. \end{aligned}$$

## 2.5 Exemples

**Exemple 2.1** *On considère le problème*

$$\begin{cases} x^{'}(t) + 2\ x(t) = te^{-2t}, & \text{pour tout } t \in I = [1,2], \\ x(1) = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.21}$$

*Ce problème est sous la forme* (2.12)*, avec* $\alpha = 1$*,* $n = 1$*,* $p = 2$*,* $g(t) = te^{-2t}$*,* $a = 1, b = 2$ *et* $x_0 = \frac{1}{2}$*. D'aprés le Théorème 2.3, le problème* (2.21) *admet une solution* $x \in C^1([1,2],\mathbb{R})$ *telle que*

$$x(t) := \int_1^2 G_{In}(t,s)se^{-2s}ds + \frac{1}{2}e^{2(1-t)},$$

*où* $G_{In}$ *est la fonction de Green donnée par*

$$G_{In}(t,s) = e^{2(s-t)}\begin{cases} 1, & 1 \le s \le t \le 2, \\ 0, & 1 \le t \le s \le 2, \end{cases}$$

*D'ou*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_1^t G_{In}(t,s)se^{-2s}ds + \int_t^2 G_{In}(t,s)se^{-2s}ds + \frac{1}{2}e^{2(1-t)} \\ &= \int_1^t e^{2(s-t)}se^{-2s}ds + \frac{1}{2}e^{2(1-t)} \\ &= e^{-2t}\int_1^t sds + \frac{1}{2}e^{2(1-t)} = \frac{1}{2}(t^2-1)e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2(1-t)} \\ &= \frac{1}{2}(t^2+e^2-1)e^{-2t}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.2** *Considérons le système :*

$$\begin{cases} x_1^{(\alpha)}(t) + 3x_1(t) = 5, & \text{pour tout } t \in I = [\frac{1}{2},1], \\ x_2^{(\alpha)}(t) + 3x_2(t) = 3, & \text{pour tout } t \in I = [\frac{1}{2},1], \\ x_1(\frac{1}{2}) = x_1(1), \quad x_2(\frac{1}{2}) = x_2(1) \end{cases} \tag{2.22}$$

*Ce problème est sous la forme* (2.1)*, avec* $0 < \alpha \le 1$*,* $n = 2$*,* $p = 3$*,* $x = (x_1, x_2)$*,* $x^{(\alpha)} = (x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)})$*,* $g(t) = (5,3) \in \mathbb{R}^2$*. D'aprés le Théorème 2.1, le* *problème (2.22) admet une solution $x \in C^\alpha([\frac{1}{2},1],\mathbb{R}^2)$ telle que*

$$x(t) := \int_{\frac{1}{2}}^{1} G_{Pe}(t,s)g(s)d_\alpha s,$$

*où $G_{Pe}$ est la fonction de Green donnée par*

$$G_{Pe}(t,s) = \frac{e^{\frac{3}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}} \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \le s \le t \le 1, \\ e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}, & \frac{1}{2} \le t < s \le 1. \end{cases}$$

*D'ou*

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{t} 5G_{Pe}(t,s)d_\alpha s + \int_t^1 5G_{Pe}(t,s)d_\alpha s \\
&= \frac{1}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{t} 5e^{\frac{3}{\alpha}(s^\alpha-t^\alpha)}s^{\alpha-1}ds + \int_t^1 5e^{\frac{3}{\alpha}(s^\alpha-t^\alpha)}e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}s^{\alpha-1}ds\Big] \\
&= \frac{5e^{-\frac{3}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{t} e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}s^{\alpha-1}ds + e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}\int_t^1 e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}s^{\alpha-1}ds\Big] \\
&= \frac{5e^{-\frac{3}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big(\Big[\frac{1}{3}e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}\Big]_{\frac{1}{2}}^{t} + e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}\Big[\frac{1}{3}e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}\Big]_t^1\Big) \\
&= \frac{5}{3}\frac{e^{-\frac{3}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big([e^{\frac{3}{\alpha}t^\alpha} - e^{\frac{3}{\alpha}\frac{1}{2^\alpha}}] + e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}[e^{\frac{3}{\alpha}} - e^{\frac{3}{\alpha}t^\alpha}]\Big) = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{t} 3G_{Pe}(t,s)d_\alpha s + \int_t^1 3G_{Pe}(t,s)d_\alpha s \\
&= \frac{1}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{t} 3e^{\frac{3}{\alpha}(s^\alpha-t^\alpha)}s^{\alpha-1}ds + \int_t^1 3e^{\frac{3}{\alpha}(s^\alpha-t^\alpha)}e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}s^{\alpha-1}ds\Big] \\
&= \frac{3e^{-\frac{3}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{t} e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}s^{\alpha-1}ds + e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}\int_t^1 e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}s^{\alpha-1}ds\Big] \\
&= \frac{3e^{-\frac{3}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}}\Big(\Big[\frac{1}{3}e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}\Big]_{\frac{1}{2}}^{t} + e^{\frac{3}{\alpha}(\frac{1}{2^\alpha}-1)}\Big[\frac{1}{3}e^{\frac{3}{\alpha}s^\alpha}\Big]_t^1\Big) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

*Donc $x(t) = (\frac{5}{3},1)$, pour tout $t \in I = [\frac{1}{2},1]$.*

# Chapitre 3

# Systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires

Dans ce chapitre, nous établirons des théoremes d'existance pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaires suivants :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a, b], 0 < a, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a, b], 0 < a, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de $x$ d'ordre $\alpha$ en $t$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Résultats d'existence pour le problème (3.2), ont été obtenus par M. Pospisil et L.P. Skripkova [19], par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach avec $f$ une fonction continue.

Pour obtenir un théorème d'existence pour le problème périodique (3.1) (resp, le problème initiale (3.2)) nous introduirons la notion de tube-solution de ce problème qui généralise la notion de sous- et sur-solution introduite par B. Bendouma et al. [7]. Les résultats de ce travail se trouvent dans [5, 7, 8]

Pour l'existence de solutions pour les problèmes (3.1) et (3.2), nous avons besoin des résultats suivants :

**Proposition 3.1** *Soit $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$. Alors $\|x\| \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ et*

$$\|x(t)\|^{(\alpha)} = \frac{< x(t), x^{\alpha}(t) >}{\|x(t)\|}, \text{ pour } \{t \in I : \|x(t)\| > 0\}.$$

**Lemme 3.1** *(Principe du maximum) Soit une fonction $r \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, telle que $r^{(\alpha)}(t) < 0$ sur $\{t \in I : r(t) > 0\}$. Si une des conditions suivantes est satisfaite,*

*(i) $r(a) \leq 0$,*

*(ii) $r(a) \leq r(b)$,*

*alors*

$$r(t) \leq 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

***Preuve***.

Supposons qu'il éxiste un $t \in [a, b]$ tel que $r(t) > 0$. Dans ce cas, il existe un $t_\circ \in [a, b]$ tel que $r(t_\circ) = \max_{a \leq t \leq b}(r(t)) > 0$ car $r \in C^{(\alpha)}([a, b])$ et $r(t) > 0$. Si $t_\circ > a$, alors il existe un intervalle $[t_1, t_\circ] \subset [a, t_\circ]$ tel que $r(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, t_\circ]$. Ainsi, $I_{\alpha}^{t_1}\left(r^{(\alpha)}\right)(t_\circ) = r(t_\circ) - r(t_1) < 0$ par hypothèse et par le Lemme 1.2, ceci contredit la maximalité de $r(t_\circ)$. Le cas $t_\circ = a$ est impossible. En prenant $t_\circ = b$, par ce qui précède, on trouverait que $r(b) < 0$, ce qui nous mène directement à la conclusion.

On peut déduire du Théorème 2.1, le résultat suivant :

**Corollaire 3.1** *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha x(t) = g(t), & t \in I = [a, b], \ 0 < a < b, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{3.3}$$

*avec $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 1$, admet une solution unique $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_P(t, s) g(s) d_{\alpha} s, \tag{3.4}$$

*où $G_P$ est la fonction de Green donnée par*

$$G_P(t, s) = \frac{e^{(s^{\alpha} - t^{\alpha})}}{1 - e^{a^{\alpha} - b^{\alpha}}} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ e^{a^{\alpha} - b^{\alpha}}, & a \leq t < s \leq b, \end{cases} \tag{3.5}$$

On peut déduire du Théorème 2.3, le résultat suivant :

**Corollaire 3.2** *Le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha x(t) = g(t), & t \in I = [a,b],\ 0 < a < b, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

*avec* $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *admet une solution unique* $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_I(t,s) g(s) d_{\alpha}s + x_0 e^{a^{\alpha} - t^{\alpha}}, \tag{3.7}$$

*où* $G_I$ *est la fonction de Green donnée par*

$$G_I(t,s) = e^{(s^{\alpha} - t^{\alpha})} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 0, & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \tag{3.8}$$

*Dans ce cas on :*

$$x(t) := \int_a^t s^{\alpha-1} e^{(s^{\alpha} - t^{\alpha})} g(s) ds + x_0 e^{a^{\alpha} - t^{\alpha}}, \tag{3.9}$$

## 3.1 Résultat d'existence pour le problème (3.1)

Une solution du problème sera une fonction $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$ satisfaisant (3.1). Introduisons la notion de tube-solution pour le problème (3.1). C'est à partir de cette notion que nous obtiendrons notre résultat d'existence.

**Définition 3.1** *Soit* $(v, M) \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n) \times C^{\alpha}(I, [0, \infty))$. *On dira que* $(v, M)$ *est un tube-solution de (3.1) si*

*(i)* $\langle x - v(t),\ f(t,x) - v^{(\alpha)}(t) \rangle \leq M(t) M^{(\alpha)}(t)$ *pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|x - v(t)\| = M(t)$,

*(ii)* $v^{(\alpha)}(t) = f(t, v(t))$ *et* $M^{\alpha}(t) = 0$ *pour tout* $t \in I$ *tel que* $M(t) = 0$,

*(iii)* $\|v(b) - v(a)\| \leq M(a) - M(b)$.

**Remarque 3.1** *Si* $\alpha = 1$, *notre définition de tube solution est équivalente à la notion de tube solution introduite par B. Mirandette [17] pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.*

On notera

$$T(v,M)=\{x\in C^{\alpha}(I,\mathbb{R}^n):\|x(t)-v(t)\|\leq M(t) \text{ pour tout } t\in I\}.$$

Afin de démontrer le théorème d'existence, nous aurons recours au problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t)+\alpha\ x(t)=f(t,\overline{x}(t))+\alpha\ \overline{x}(t), \quad t\in I,\\ x(a)=x(b), \end{cases} \tag{3.10}$$

où

$$\overline{x}(t)=\begin{cases} \frac{M(t)}{\|x-v(t)\|}(x-v(t))+v(t), & \text{si } \|x-v(t)\|>M(t),\\ x(t), & \text{si } \|x-v(t)\|\leq M(t). \end{cases} \tag{3.11}$$

Il est clair qu'une solution $x$ de (3.10) telle que $\|x(t)-v(t)\|\leq M(t)$ pour tout $t\in I$ (c-à-d. $x\in T(v,M)$) est une solution de (3.1).

Définissons l'opérateur $\mathcal{F}_1 : C(I,\mathbb{R}^n)\to C(I,\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathcal{F}_1(x)(t)=\int_a^b G_P(t,s)\Big(f(s,\overline{x}(s))+\alpha\ \overline{x}(s)\Big)s^{\alpha-1}ds, \tag{3.12}$$

où $G_P$ est la fonction de Green du problème périodique (3.3).

D'après le Corollaire 3.1, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{F}_1$ sont les solutions du problème (3.10).

**Proposition 3.2** *Si $(v,M)\in C^{\alpha}(I,\mathbb{R}^n)\times C^{\alpha}(I,[0,\infty))$ est un tube-solution de (3.1), alors l'opérateur $\mathcal{F}_1 : C(I,\mathbb{R}^n)\to C(I,\mathbb{R}^n)$ est compact.*

**Preuve :** La preuve est donnée en plusieures étapes.
**Etape 1 :** Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur $\mathcal{F}_1$.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(I,\mathbb{R}^n)$ convergeant vers $x\in C(I,\mathbb{R}^n)$. Alors

pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}\Big\|\mathcal{F}_1(x_n(t)) - \mathcal{F}_1(x(t))\Big\| &\leq \int_a^b s^{\alpha-1}|G_P(t,s)|\Big\|\Big(f(s,\overline{x_n}(s)) + \alpha\ \overline{x_n}(s)\Big) \\ &\qquad - \Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)\Big\|ds \\ &\leq M\int_a^b s^{\alpha-1}\Big\|\Big(f(s,\overline{x_n}(s)) - f(s,\overline{x}(s))\Big) \\ &\qquad + \alpha\ \Big(\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big)\Big\|ds \\ &\leq M\int_a^b s^{\alpha-1}\Big(\Big\|f(s,\overline{x_n}(s)) - f(s,\overline{x}(s))\Big\| \\ &\qquad + \alpha\Big\|\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big\|\Big)ds.\end{aligned}$$

où $M := \max_{s,t\in I}|G_p(t,s)|$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R}^n)} < R$, il existe un indice $N$ tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(I,\mathbb{R}^n)} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, $f$ uniformément continue sur $I \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}^n$ où

$$\|y - x\| < \delta < \frac{\epsilon}{2M(b^\alpha - a^\alpha)}, \|f(s,y) - f(s,x)\| < \frac{\epsilon\alpha}{2M(b^\alpha - a^\alpha)},$$

pour tout $s \in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $\|\overline{x_n} - \overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R}^n)} < \delta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{F}_1(x_n(t)) - \mathcal{F}_1(x(t))\Big\| \\ &\qquad \leq M\int_a^b \Big(\frac{\epsilon\alpha}{2M(b^\alpha - a^\alpha)} + \alpha\frac{\epsilon}{2M(b^\alpha - a^\alpha)}\Big)ds \\ &\qquad \leq \epsilon,\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{F}_1$.

**Etape 2 :**Montrons maintenant que l'ensemble $\mathcal{F}_1(C(I,\mathbb{R}^n))$ est relativement compact. Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}_1(C(I,\mathbb{R}^n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(I,\mathbb{R}^n)$ tell que $y_n = \mathcal{F}_1(x_n(t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\Big\|\mathcal{F}_1(x_n)(t)\Big\| &\leq \int_a^b s^{\alpha-1}|G_P(t,s)|\Big(\|f(s,\overline{x_n}(s))\| + \alpha\ \|\overline{x_n}(s)\|\Big)ds\\ &\leq M\int_a^b \Big(\|f(s,\overline{x_n}(s))\| + \alpha\|\overline{x_n}(s)\|\Big)s^{\alpha-1}ds.\end{aligned}$$

Puisque $\|\overline{x}_n(s)\| \leq R$, pour tout $s\in I$ et tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $I\times\overline{B}\,(0,R)$ est un ensemble sur $I\times\mathbb{R}$ et $f$ étant continue sur $I\times\overline{B}\,(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A>0$, telle que

$$\|f(s,\overline{x}_n(s)\| \leq A, \qquad \text{pour tout } s\in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n\in\mathbb{N}.$$

Donc,

$$\|y_n(t)\| = \|\mathcal{F}_1(x_n)(t)\| \leq M(A+\alpha R)\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in I$, on a

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{F}_1\left(x\right)\left(t_2\right) - \mathcal{F}_1\left(x\right)\left(t_1\right)\Big\|\\ &= \Big\|\int_a^{t_2} G_P(t_2,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)d_\alpha s + \int_{t_2}^b G_P(t_2,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)d_\alpha s\\ &\quad - \int_a^{t_1} G_P(t_1,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)d_\alpha s - \int_{t_1}^b G_P(t_1,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)d_\alpha s\Big\|\\ &\leq \frac{|e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|}{1-e^{a^\alpha - b^\alpha}}\Big(\int_a^{t_1} e^{s^\alpha}\Big\|f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big\|s^{\alpha-1}ds\\ &\qquad + \int_{t_2}^b e^{s^\alpha + a^\alpha - b^\alpha}\Big\|f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big\|s^{\alpha-1}ds\Big)\\ &\qquad + \int_{t_1}^{t_2} \|G_P(t_2,s) - G_P(t_1,s)\|\Big\|f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big\|s^{\alpha-1}ds\\ &\leq K|e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|\Big(2\int_a^b (A+\alpha R)s^{\alpha-1}ds\Big) + 2M\int_{t_1}^{t_2}(A+\alpha R)s^{\alpha-1}ds\\ &\leq 2K|e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|(A+\alpha R)\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} + 2M(A+\alpha R)\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha},\end{aligned}$$

où $K := \max_{s\in I}\{\frac{e^{s^\alpha}}{1-e^{a^\alpha - b^\alpha}}, \frac{e^{s^\alpha + a^\alpha - b^\alpha}}{1-e^{a^\alpha - b^\alpha}}\}$. Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{F}_1\left(C(I,\mathbb{R}^n)\right)$

est relativement compacte dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. Ainsi, $\mathcal{F}_1$ est compact.
Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

**Théorème 3.1** *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $(v, M) \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^n) \times C^\alpha(I, [0, \infty))$ est un tube-solution de (3.1), alors le problème (3.1) possède une solution $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{T}(v, M)$.*

**Preuve**.
Par la Proposition 3.2, l'opérateur $\mathcal{F}_1$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{F}_1$ admet un point fixe. Le Corollaire 3.1 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (3.10). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution $x$ de (3.10), $x \in T(v, M)$.
Considérons l'ensemble $\mathcal{A} := \{t \in I : \|x(t) - v(t)\| > M(t)\}$. Si $t \in \mathcal{A}$, alors par la Proposition 3.1, nous avons

$$(\|x(t) - v(t)\| - M(t))^{(\alpha)} = \frac{\langle x(t) - v(t), x^{(\alpha)}(t) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} - M^{(\alpha)}(t).$$

Nous allons montrer que $(\|x(t) - v(t)\| - M(t))^{(\alpha)} < 0$ pour tout $t \in \mathcal{A}$.
Si $t \in \mathcal{A}$ et : $M(t) > 0$, alors par hypothèse du tube-solution, on a

$$\begin{aligned}
&(\|x(t) - v(t)\| - M(t))^{(\alpha)} \\
&= \frac{\langle x(t) - v(t), x^{(\alpha)}(t) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} - M^{(\alpha)}(t) \\
&= \frac{\langle x(t) - v(t), f(t, \bar{x}(t)) + \alpha\bar{x}(t) - \alpha x(t) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} - M^{(\alpha)}(t) \\
&= \frac{\langle \bar{x}(t) - v(t), f(t, \bar{x}(t)) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{M(t)} + \alpha\ \frac{\langle \bar{x}(t) - v(t), \bar{x}(t) - x(t)\rangle}{M(t)} \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&\leq \frac{M(t)M^{(\alpha)}(t)}{M(t)} + \alpha\Big(M(t) - \|x(t) - v(t)\|\Big) - M^{(\alpha)}(t) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

De plus, si $M(t) = 0$, alors par hypothèse du tube-solution

$$\begin{aligned}
(\|x(t)-v(t)\| - M(t))^{(\alpha)} &= \frac{\langle x(t)-v(t), f(t,\bar{x}(t)) + \alpha\bar{x}(t) - \alpha x(t) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&= \frac{\langle x(t)-v(t), f(t,v(t)) + \alpha v(t) - \alpha x(t) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&\leq \frac{\langle x(t)-v(t), f(t,v(t)) - v^{(\alpha)}(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} - \alpha\,\|x(t)-v(t)\| \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

En posant $r(t) = \|x(t)-v(t)\| - M(t)$, il en résulte que $r^{(\alpha)} < 0$ pour tout $t \in \{t \in I : r(t) > 0\}$. De plus, par hypothèse du tube-solution, remarquons que $r(a)-r(b) \leq \|v(a)-v(b)\| - (M(a)-M(b)) \leq 0$, alors $r(a) \leq r(b)$. Ainsi, les hypothèses du Lemme 3.1 sont satisfaites, ce qui démontre le théorème.

## 3.2 Résultat d'existence pour le problème (3.2)

Une solution du problème sera une fonction $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}^n)$ satisfaisant (3.2). La notion de tube-solution pour le problème (3.2) est similaire à celle du problème périodique. Dans ce cas, seule la condition aux limites change dans la définition.

**Définition 3.2** *Soit $(v, M) \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R}) \times C^{\alpha}(I, [0,\infty))$. On dira que $(v, M)$ est un tube-solution de (3.2) si*

*(i)* $\langle x - v(t),\ f(t,x) - v^{(\alpha)}(t)\rangle \leq M(t)M^{(\alpha)}(t)$ *pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|x - v(t)\| = M(t)$,

*(ii)* $v^{(\alpha)}(t) = f(t, v(t))$ *et* $M^{\alpha}(t) = 0$ *pour tout* $t \in I$ *tel que* $M(t) = 0$,

*(iii)* $\|x_0 - v(a)\| \leq M(a)$.

En suivant un raisonnement similaire à la section précédente, nous pouvons obtenir le théorème d'existence suivant.

**Théorème 3.2** *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $(v, M) \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^n) \times C^\alpha(I, [0, \infty))$ est un tube-solution de (3.2), alors le problème (3.2) possède une solution $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{T}(v, M)$.*

Pour y arriver, il suffit d'utiliser le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha\, x(t) = f(t, \overline{x}(t)) + \alpha\, \overline{x}(t), \quad t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} \frac{M(t)}{\|x - v(t)\|}(x - v(t)) + v(t), & \text{si } \|x - v(t)\| > M(t), \\ x(t), & \text{si } \|x - v(t)\| \leq M(t). \end{cases} \tag{3.14}$$

Il est clair qu'une solution $x$ de (3.13) telle que $\|x(t) - v(t)\| \leq M(t)$ pour tout $t \in I$ (c-à-d. $x \in T(v, M)$) est une solution de (3.2).

Ensuite, on démontre que l'opérateur $\mathcal{F}_2 : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(x)(t) &= \int_a^b G_I(t, s)\Big(f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s)\Big)s^{\alpha-1}ds + x_0 e^{(a^\alpha - t^\alpha)} \\ &= \int_a^t s^{\alpha-1}e^{(s^\alpha - t^\alpha)}\Big(f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s)\Big)ds + x_0 e^{(a^\alpha - t^\alpha)}, \end{aligned}$$

où $G_I$ est la fonction de Green du problème initiale (3.6) est compact.
En effet, montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur $\mathcal{F}_2$.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(I, \mathbb{R}^n)$ convergeant vers $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned} \Big\|\mathcal{F}_2(x_n(t)) - \mathcal{F}_2(x(t))\Big\| &\leq \int_a^t s^{\alpha-1}|e^{(s^\alpha - t^\alpha)}|\Big\|\Big(f(s, \overline{x_n}(s)) + \alpha\, \overline{x_n}(s)\Big) \\ &\qquad - \Big(f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s)\Big)\Big\|ds \\ &\leq M\int_a^t a^{\alpha-1}\Big(\Big\|f(s, \overline{x_n}(s)) - f(s, \overline{x}(s))\Big\| \\ &\qquad + \alpha\Big\|\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big\|\Big)ds. \end{aligned}$$

où $M := \max_{s,t\in I} |e^{(s^\alpha - t^\alpha)}|$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R}^n)} < R$, il existe un indice $N$ tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(I,\mathbb{R}^n)} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, $f$ uniformément continue sur $I \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}^n$ où

$$\|y - x\| < \delta < \frac{\epsilon}{2Ma^{\alpha-1}(b-a)}, \|f(s,y) - f(s,x)\| < \frac{\epsilon\alpha}{2Ma^{\alpha-1}(b-a)},$$

pour tout $s \in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $\|\overline{x_n} - \overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R}^n)} < \delta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}_2(x_n(t)) - \mathcal{F}_2(x(t))\Big\| \\
&\qquad \leq Ma^{\alpha-1}\int_a^t \Big(\frac{\epsilon\alpha}{2Ma^{\alpha-1}(b-a)} + \alpha\frac{\epsilon}{2Ma^{\alpha-1}(b-a)}\Big)ds \\
&\qquad \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{F}_2$.

Montrons maintenant que l'ensemble $\mathcal{F}_2(C(I,\mathbb{R}^n))$ est relativement compact. Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}_2(C(I,\mathbb{R}^n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(I,\mathbb{R}^n)$ tell que $y_n = \mathcal{F}_2(x_n(t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{F}_2(x_n)(t)\Big\| &\leq \int_a^t s^{\alpha-1}|G_P(t,s)|\Big(\|f(s,\overline{x_n}(s))\| + \alpha\ \|\overline{x_n}(s)\|\Big)ds \\
&\leq Ma^{\alpha-1}\int_a^t \Big(\|f(s,\overline{x_n}(s))\| + \alpha\|\overline{x_n}(s)\|\Big)ds.
\end{aligned}$$

Puisque $\|\overline{x}_n(s)\| \leq R$, pour tout $s \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $I \times \overline{B}\,(0,R)$ est un ensemble sur $I \times \mathbb{R}$ et $f$ étant continue sur $I \times \overline{B}\,(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$\|f(s,\overline{x}_n(s)\| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$\|y_n(t)\| = \|\mathcal{F}_2(x_n)(t)\| \leq Ma^{\alpha-1}(A + \alpha R)(b-a) < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$.

D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in I$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big\| \mathcal{F}_2(x)(t_2) - \mathcal{F}_2(x)(t_1) \Big\| \\
&= \Big\| \int_a^{t_2} s^{\alpha-1} e^{(s^\alpha - t_2^\alpha)} \Big( f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s) \Big) ds + x_0 e^{(a^\alpha - t_2^\alpha)} - x_0 e^{(a^\alpha - t_1^\alpha)} \\
&\qquad - \int_a^{t_1} s^{\alpha-1} e^{(s^\alpha - t_1^\alpha)} \Big( f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s) \Big) ds \Big\| \\
&\leq |e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}| \Big( \int_a^{t_1} e^{s^\alpha} \Big\| f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s) \Big\| s^{\alpha-1} ds + \|x_0\| e^{a^\alpha} \Big) \\
&\qquad + \int_{t_1}^{t_2} |e^{(s^\alpha - t_2^\alpha)}| \Big\| f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\, \overline{x}(s) \Big\| s^{\alpha-1} ds \\
&\leq |e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}| \Big( e^{b^\alpha} \int_a^b (A + \alpha R) a^{\alpha-1} ds + \|x_0\| e^{a^\alpha} \Big) + M \int_{t_1}^{t_2} (A + \alpha R) a^{\alpha-1} ds \\
&\leq |e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}| \Big( e^{b^\alpha} (A + \alpha R)(b - a) + \|x_0\| e^{a^\alpha} \Big) + M a^{\alpha-1} (A + \alpha R)(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{F}_2\left(C(I, \mathbb{R}^n)\right)$ est relativement compacte dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. Ainsi, $\mathcal{F}_2$ est compact.

Finalement, on démontre que toute solution du problème (3.13) est élément de $T(v, M)$ à l'aide du Lemme 3.1.

**Remarque 3.2** *Si $\alpha = 1$, alors le problème* (3.2) *se réduit au problème de Cauchy classique :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.15}$$

*dont la solution existe.*

## 3.3 Sous et sur-solutions

Si nous considérons maintenant le problème (3.1)(*resp*, (3.2)) comme une équation avec $n = 1$ et $f$ est continue sur $I$, alors la notion de tube-solution est généralise les notions de sous– et sur–solutions $\alpha$ et $\beta$ introduites par B. Bendouma et al. [7]. Rappelons ces définitions.

**Définition 3.3** (*Sur-solution*) *On dit qu'une fonction* $\gamma \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ *est une sur-solution de* (3.1)(*resp*, (3.2)), *si*

*(i)* $\gamma^{(\alpha)}(t) \geq f(t, \gamma(t)), \quad$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $\gamma(a) \geq \gamma(b)$.

*(resp,*

*(i)* $\gamma^{(\alpha)}(t) \geq f(t, \gamma(t)), \quad$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $\gamma(a) \geq x_0$).

**Définition 3.4** (*Sous-solution*) *On dit qu'une fonction* $\delta \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ *est une sous-solution de* (3.1)(*resp*, (3.2)), *si*

*(i)* $\delta^{(\alpha)}(t) \leq f(t, \delta(t)), \quad$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $\delta(a) \leq \delta(b)$.

*(resp,*

*(i)* $\delta^{(\alpha)}(t) \leq f(t, \delta(t)), \quad$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*(ii)* $\delta(a) \leq x_0$).

Nous définissons l'ensemble :

$$[\delta, \gamma] = \{x \in C(I) : \delta(t) \leq x(t) \leq \gamma(t), \text{ pour tout } t \in I\}.$$

Dans ce cas $(n = 1)$, la notion de tube solution de problème (3.1)($resp$, (3.2)) est équivalente à la notion de sous- et sur-solution $\delta$ et $\gamma$.
En effet, si $(v, M)$ est un tube-solution pour (3.1)($resp$, (3.2)), alors $\delta = v - M$ et $\gamma = v + M$ sont respectivement sous- et sur-solution de (3.1)($resp$, (3.2)).
Par ailleurs si $\delta$ et $\gamma$ sont respectivement sous- et sur-solutions de (3.1)($resp$, (3.2)), alors le couple $(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2})$ est un tube-solution pour (3.1)($resp$, (3.2)).

**Exemple 3.3.1** *On considère le problème :*

$$\begin{cases} x^{(\frac{1}{2})}(t) = \dfrac{2\sqrt{t} - 1 - x^3(t)}{\sqrt{t}}, & t \in I = [\frac{1}{3}, 1], \\ x(\frac{1}{3}) = x(1). \end{cases} \tag{3.16}$$

*Ici* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $f(t, x(t)) = \dfrac{2\sqrt{t} - 1 - x^3(t)}{\sqrt{t}}$. *Il est clair que* $f$ *est une fonction continue sur* $[\frac{1}{3}, 1] \times \mathbb{R}$. *On vérifie que* $\delta(t) = -1$ *et* $\gamma(t) = 1$ *sont des sous et* *sur-solutions de* (3.16) *avec* $\delta(t) \leq \gamma(t)$ *pour* $t \in [\frac{1}{3}, 1]$. *En effet,*

$$\begin{cases} \gamma^{(\frac{1}{2})}(t) = 0 \geq f(t, \gamma(t)) = \dfrac{2(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} \ \ \textit{pour tout } t \in I \quad \textit{et } \gamma(\frac{1}{3}) \geq \gamma(1), \\ \delta^{(\frac{1}{2})}(t) = 0 \leq f(t, \delta(t)) = 2 \ \ \textit{pour tout } t \in I \quad \textit{et } \delta(\frac{1}{3}) \leq \delta(1). \end{cases}$$

*On peut vérifier que* $(v, M) = (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2}) = (0, 1)$ *est un tube-solution pour* (3.16). *En effet, on a :*
$v^{(\frac{1}{2})}(t) = M^{(\frac{1}{2})}(t) = 0$, *et* $|v(1) - v(\frac{1}{3})| = 0 \leq M(\frac{1}{3}) - M(1) = 0$.
*Pour* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$, *alors* $x = 1$ *ou* $x = -1$, *et on a pour* $t \in [\frac{1}{3}, 1]$

$$\begin{aligned} (x - v(t))\Big(f(t, x) - v^{(\frac{1}{2})}(t)\Big) &= (x)(\frac{2\sqrt{t} - 1 - x^3(t)}{\sqrt{t}}), \\ &= \begin{cases} -2 \quad si\ x = -1, \\ \dfrac{2(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} \quad si\ x = 1, \end{cases} \\ &\leq 0 = M(t)M^{\frac{1}{2}}(t) \quad \textit{pour tout } t \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{aligned}$$

*D'aprés le Théorème* 3.1, *le problème (3.16) admet une solution* $x \in C^{\frac{1}{2}}([\frac{1}{3}, 1], \mathbb{R})$ *telle que* $|x(t)| \leq 1$ *pour tout* $t \in [\frac{1}{3}, 1]$,

$$\textit{c'est-à-dire,} \qquad -1 = \delta(t) \leq x(t) \leq 1 = \gamma(t) \ \textit{pour tout } t \in [\frac{1}{3}, 1].$$

## 3.4 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

**Exemple 3.4.1** *Considérons le système :*

$$\begin{cases} x^{(\frac{1}{3})}(t) = a_1\|x(t)\|^2 x(t) - a_2 x(t) + a_3\varphi(t), \quad t \in I = [\frac{1}{4}, 1], \\ x(\frac{1}{4}) = x(1). \end{cases} \tag{3.17}$$

*où* $\alpha = 1/3$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $a_1 - a_2 + a_3 = 0$ *et* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction continue telle que* $\|\varphi(t)\| = 1$ *pour tout* $t \in I$. *On peut vérifier que*

*$v(t) = 0$ et $M(t) = 1$ est un tube-solution pour (3.17). En effet, on a :*
*$v^{(\frac{1}{3})}(t) = 0$, $M^{(\frac{1}{3})}(t) = 0$, et*

$$\|v(1) - v(\frac{1}{4})\| \leq M(\frac{1}{4}) - M(1).$$

*Pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x - v(t)\| = M(t)$, alors $\|x\| = 1$, et on a pour $t \in I = [\frac{1}{4}, 1]$*

$$\begin{aligned}\langle x - v(t),\ f(t,x) - v^{(\frac{1}{3})}(t)\rangle &= \langle x,\ a_1\|x\|^2 x - a_2 x + a_3\varphi(t)\rangle \\ &= a_1\|x\|^4 - a_2\|x\|^2 + a_3\langle x, \varphi(t)\rangle \\ &\leq a_1\|x\|^4 - a_2\|x\|^2 + a_3\|x\|\|\varphi(t)\| \\ &= a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ &\leq M(t)M^{(\frac{1}{3})}(t).\end{aligned}$$

*D'aprés le Théorème 3.1, le problème (3.17) admet une solution $x \in C^{\frac{1}{3}}(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|x(t)\| \leq 1$ pour tout $t \in I$.*

**Exemple 3.4.2** *On considère le problème à valeur initiale suivant :*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = \|x(t)\|\, x(t) - 3x(t), \quad t \in [a,b], a > 0, \\ x(a) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

*Ici, $\alpha \in ]0,1]$ et $f(t,x) = \|x\|\, x - 3x$. Il est clair que $f$ est une fonction continue sur $[a,b] \times \mathbb{R}^n$. On peut vérifier que $(v, M) = (0, 1)$ est un tube-solution de (3.18). En effet, on a :*
*$v^{(\alpha)}(t) = 0$, $M^{(\alpha)}(t) = 0$, et $\|0 - v(a)\| = 0 \leq M(a) = 1$.*
*Pour $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x - v(t)\| = M(t)$, alors $\|x\| = 1$, et on a pour $t \in [a,b]$*

$$\begin{aligned}\langle x - v(t),\ f(t,x) - v^{(\alpha)}(t)\rangle &= \langle x,\ \|x(t)\|\, x(t) - 3x(t)\rangle \\ &= \|x\|^3 - 3\|x\|^2 \\ &= 1 - 3 = -2 \\ &\leq M(t)M^{(\alpha)}(t) = 0.\end{aligned}$$

*Du Théorème 3.2, on déduit que le problème (3.18) admet une solution $x \in C^{\alpha}([a,b], \mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|x(t)\| \leq 1, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

**Exemple 3.4.3** *On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$\begin{cases} x^{(\frac{2}{5})}(t) = -3x^5(t) - \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + te^t, & \textit{pour tout } t \in I = [1,3]\,, \\ x(1) = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.19}$$

*Ce problème est un cas particulier de (3.2) avec* $n = 1$ *et* $f(t, x(t)) = -3x^5(t) - \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + te^t$. *Il est clair que* $f$ *est une fonction continue sur* $[1,3] \times \mathbb{R}$. *On peut vérifier que* $(v, M) = (1,1)$ *est un tube-solution pour (3.19). En effet, nous avons*
$v^{(\frac{2}{5})}(t) = 0$, $M^{(\frac{2}{5})}(t) = 0$, *et* $|x_0 - v(1)| = |-\frac{1}{2}| \leq M(1) = 1$.
*Pour* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$, *(i.e.,* $|x-1| = 1$*) alors* $x = 0$ *ou* $x = 2$, *et nous avons pour* $t \in I = [1,3]$

$$\begin{aligned} (x - v(t))\left(f(t,x) - v^{(\frac{2}{5})}\right) &= (x-1)\left(-3x^5(t) - \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + te^t\right), \\ &= \begin{cases} 1 - te^t & \textit{si } x = 0, \\ -95 + te^t & \textit{si } x = 2, \end{cases} \\ &\leq 0 = M(t)M^{(\frac{2}{5})}(t) \quad \textit{pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

*D'aprés le Théorème* 3.2, *le problème (3.19) admet une solution* $x \in C^{\frac{2}{5}}([1,3], \mathbb{R})$ *telle que* $|x(t) - 1| \leq 1$ *pour tout* $t \in [1,3]$.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des systèmes d'équations différentielles fractionnaires conformes non-linéaire d'ordre $\alpha \in ]0,1]$, ce résultat est obtenu grâce a la notion de tube solution et théorème de point fixe de Schauder.

# Bibliographie


[1] T. Abdeljawad, *On conformable fractional calculus*, J. Comput. Appl. Math. **279** (2015), 57–66.

[2] M. Abu Hammad and R. Khalil, *Conformable fractional heat differential equations*, Int. J. Pure. Appl. Math. **94** (2014), 215–221.

[3] D.R. Anderson and D.J. Ulness, *Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 6, 063502, 18 pp.

[4] H. Batarfi, J. Losada, J. J. Nieto and W. Shammakh, *Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations*, J. Funct. Spaces. **2015** (2015), Art. ID 706383, 6 pp.

[5] B. Bayour and D. F. M. Torres, *Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation*, J. Comput. Appl. Math. **312** (2016), 127–133.

[6] M.Benchohra, A. Cabada and D. Seba, *An existence result for nonlinear fractional differential equations on Banach spaces.* Bound. Value Probl. (2009), Art. ID 628916, 11 pp.

[7] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence of solutions for conformable fractional problems with nonlinear functional boundary conditions*, Malaya Journal of Mathematik. **7** (2019), no. 4, 700-708.

[8] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence results for systems of conformable fractional differential equations,* Archivum Mathematicum (BRNO). **55** (2019), 69-83.

[9] L. Gaul, P.Klein and S.Kempfle, *Damping description involving fractional operators,* Mech.Systems Signal Processing **5** (1991),81-88.

[10] W.G. Glockle nd T.F. Nonenmacher, *A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics,* Biophys.J. **68** (1995),46-53.

[11] N.Y. Gözütok and U. Gözütok, *Multivariable Conformable Fractional Calculus*, math.CA 2017.

[12] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York 2003.

[13] O.S. Iyiola and E.R. Nwaeze, *Some new results on the new conformable fractional calculu swith application using D'Alambert approach*, Progr. Fract. Differ. Appl. **2**(2016), (2), 115–122.

[14] R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud, *Lyapunov inequality for a boundary value problem involving conformable derivative*, Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2017.

[15] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. **264** (2014), 65–70.

[16] R. L. Magin, *Fractional calculus in Bioengineering*, CR in Biomedical Engineering. **32** (2004), no. 1, 1-104.

[17] B. Mirandette, *Résultats d'existence pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec tube-solution.* M.Sc. thesis, University of Montréal. 1996.

[18] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, San Diego, **198**, 1999.

[19] M. Pospisil and L.P. Skripkova, *Sturm's theorems for conformable fractional differential equations*, Math. Commun. **21**(2016), 273–281.

[20] Y. Wang, J. Zhou and Y. Li, *Fractional Sobolev's Spaces on Time Scales via Conformable Fractional Calculus and Their Application to a Fractional Differential Equation on Time Scales.* Advances in Mathematical Physics. (2016), 1-21.