REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

Par :

HIRED Miloud
LAOURI Sifeddine
MANDI Tahar
BACHA Fethi

Sur le thème

Quelques versions de l'inégalité de Young Relative au produit de convolution.

Soutenu publiquement le 15/07/2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr BENALI Halim	Grade	Université MCA	Président
Mr SENOUCI Abd-Elkader	Grade	Université Pr	Encadreur
Mr SOFRANI Mohamed	Grade	Université MAA	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Après avoir grâce à Dieu le Tout Puissant et le Miséricordieux, nous tenons à remercier vivement tout ceux qui, de près ou de loin ont participé à la rédaction de ce

travail. Il s'agit plus particulièrement de :

Monsieur **Senouci Abdekader** pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et son sens

d'écoute et d'échange. Nous tenons aussi à remercier les respectables membres du jury monsieurs **Benali Halim** et **Sofrani mohamed** pour bien vouloir nous accorder de leur temps précieux pour commenter, discuter et juger notre travail.
En fin, nous ne pouvons achever ce mémoire sans exprimer notre gratitude à tous les professeurs de gaculté des mathématique et informatique, unversite Ibn Khaldoun, Tiaret pour leur dévouement et leur assistance tout au long de nos études universitaires.

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes chères parents
Affable, aimable : tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse...

Pour mes frères
Merci pour tout ce que tu as fait pour moi, et je suis très content que vous avez toujours près de moi.

A tout ceux qui je respect

Bacha Fethi

Je dédie ce travail :

A mes parents et mon frère

A tout famille

A mes amies et collèges

A tout ceux qui je respect.

Mandi Tahar

Dédicace

Aucun dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime que j'ai toujours eu pour vous. D'un sentiment plein d'amour, de sincérité et fidélité, je dédie ce travail

A mes très chères parents **Mohamed et Khadidja**.

A qui je dois ce qui je suis. Votre amour, votre compréhension, votre patience et votre tendresse sont toujours pour moi sans limite, vous avez soutenu le long de mes études et

vous avez tout sacrifie pour ma réussite, que dieu vous garde en bon santé.

A toute la famille.

A toutes ceux qui j'aime et je respect.

Louri Sifeddine

Un dédicace spécial à la mère, que Dieu ait pitié d'elle,

Au père, que Dieu le protège

Salutations à la famille et à tous ceux dont j'ai appris.

Hired Miloud

Table des matières

Introduction

Dans le présent travail on traite le produit de convolution et en particulier l'inégalité de young.Les espaces de Lebesgue sont à la base de cette inégalité assez importante dans certaines applications.

Au 1^{er} chapitre sont données quelque définitions et propriétés relatives aux espaces de Lebesgue.

Dans le 2^{me} chapitre on commence par définir le produit de convolution et ensuite on énonce et on prouve l'inégalité de Young. Ici sont données deux approches pour la preuve de cette dernière.

Au denier chapitre on aborde la théorie d'interpolation où est considéré le théorème fondamental de Riesz-Thorine. Ce dernier a été appliqué pour prouver l'inégalité de Young . On considère la notion de convolution tronquée pour laquelle est énoncée et prouvée l'inégalité de Young. Ala fin viennent quelque application du produit de convolution.

A la fin on trouve une conclusion et une référence.

Chapitre 1

Espaces classiques de Lebesgue

Dans ce chapitre on considère quelques notions fondamentales sur les espaces classiques de Lebesgue.
on énonce théorèmes Riesz,Fatou,Beppo-Levi et la théorème de convergence dominée, ainsi que des inégalités importantes Young, Hölder et Minkowski.

Notations :

1) Ω est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.
2) $|\Omega|$ désigne la mesure de Ω .
3) On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle.
4) On note par p.p pour dire presque partout.
5) On définit le support d'une fonction continue f par :

$$suppf = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

6) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est noté par $C(\mathbb{R}^n)$.
7) On dit que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, et à support compact .

1.1 L'espace de Lebesgue

Définition 1.1. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *,un ensemble mesurable avec* $0 < p < \infty$ *et soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que $f \in L_p(\Omega)$ *si :*
1) f *est mesurable sur* Ω.
2) $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \mid f \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$
3) Pour $p = \infty$ *on définit* $L_\infty(\Omega)$ *par :*
$L_\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f$ *mesurable et existe une constante c telle que*

$$\mid f(x) \mid \leqslant c \ p.p \ sur \ \Omega\}.$$

1.1.1 La norme de f dans L_∞ :

Définition 1.2. *Soit $e \subset X$ tel que $mes(e) = 0$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.*
On définit le Supessentiel et l'infessentiel comme suit :

$$\sup_{x\in X} ess\, f(x) = \inf_{\{e\,:|e|=0\}} \sup_{x\in X\setminus e} f(x), \tag{1.1}$$

$$\inf_{x\in X} ess\, f(x) = \sup_{\{e:mes(e)=0\}} \inf_{x\in X\setminus e}. \tag{1.2}$$

-Le supessentiel est aussi appelé supvrai.
-L'infessentiel est aussi appelé infvrai.

Définition 1.3. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ est fonction mesurable et $a \in \mathbb{R}$,on définit l'ensemble*

$$X_a = \{x \in X : f(x) > a\}.$$

Alors :

$$\sup_{x\in X} ess\, f(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} : |X_a| = 0\}, \tag{1.3}$$

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|. \tag{1.4}$$

Remarque 1.4. *On pose $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ pour $|\Omega| = 0$.*

1.2 Théorèmes fondamentaux

Théorème 1.5. ***(Riesz)*** *Soit Ω un ensemble mesurable et f une fonction mesurable sur Ω, alors*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{1.5}$$

Lemme 1.6. ***(Fatou)*** *Soient $\forall\, k \in \mathbb{N}$,les fonctions f_k non négatives et mesurable sur $E \subset \mathbb{R}^n$ (E-mesurable) et p.p sur E il existe $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \inf f_k(x)$ (finie ou infinie). Alors*

$$\int\limits_E \lim_{k\longrightarrow\infty} \inf f_k(x)dx \leqslant \lim_{k\longrightarrow\infty} \inf \int\limits_E f_k(x)dx. \tag{1.6}$$

Théorème 1.7. ***(Beppo-Levi)*** *Soient* $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f_k$ *des fonctions positives mesurables sur* X *(ensemble mesurable), de plus* $f_{k+1} \leqslant f_k$ *p.p. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X f_k dx = \int\limits_X \lim_{k\to\infty} f_k dx. \tag{1.7}$$

Théorème 1.8. ***(Fubuni)*** *Soit* E *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ *et* $F \subset \mathbb{R}^m$ *(un ensemble mesurable) et la fonction* $f(x,y)$ *intégrable sur* $E \times F$*. Alors pour presque tous les* $x \in E$ *,* $f(x,y)$ *est intégrable sur* F*, pour presque tous* $y \in F$ $f(x,y)$ *est intégrable sur* E *et :*

$$\int\limits_{E\times F} f(x,y)\, dxdy = \int\limits_E \left(\int\limits_F f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_F \left(\int\limits_E f(x,y)\, dx \right) dy. \tag{1.8}$$

Théorème 1.9. ***(Convergence dominée)*** *Soient* $\forall\, k \in \mathbb{N},\ f_k$ *des fonctions mesurables sur* E *(ensemble mesurable) et il existe* $\lim \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ *finie et p.p.*
Si il existe g *positive intégrable sur* E *telle que* $\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad |f_k(x)| \leqslant g(x)$*, alors*

1) f_k *et* $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ *sont intégrables sur* E *et* $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_X f_k dx = \int\limits_X \lim\limits_{k\to\infty} f_k dx.$

1.3 Inégalités intégrales

1.3.1 Inégalité de Young

Lemme 1.10. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in]1, \infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Alors :*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad . \tag{1.9}$$

Preuve 1.11. *La fonction exponentielle* $x \longmapsto e^x$ *est convexe (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *). On a donc, pour tout* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *et tout* $t \in [0,1]$*,*

$$e^{tx_1+(1-t)x_2} \leqslant te^{x_1} + (1-t)e^{x_2}.$$

Soit $a, b > 0$*. On prend* $t = \frac{1}{p}$ *(de sorte que* $(1-t) = \frac{1}{q}$*) et* $\begin{cases} \frac{1}{p}x_1 = \ln(a) \\ \\ \frac{1}{q}x_2 = \ln(b) \end{cases}$*. On obtient bien :*

$$\begin{aligned} e^{\ln(a)+\ln(b)} &= e^{tx_1+(1-t)x_2} \\ &\leqslant te^{x_1} + (1-t)e^{x_2} \\ &= \frac{1}{p}e^{x_1} + \frac{1}{q}e^{x_2} \\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \ . \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (1.9)*.*

Lemme 1.12. *Pour* $0 < p < 1$ *, on a*

$$\forall\, a, b \geqslant 0\,, \quad ab \geqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.10}$$

Corollaire 1.13. *Soit* $p\,, q\,, r \geqslant 1$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *, alors*

$$\forall\, A\,, B \geqslant 0\,; (AB)^r \leqslant \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q. \tag{1.11}$$

Preuve 1.14. *Comme* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *,alors* $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$ *,*

et on applique le lemme (1.10) *avec* $a = A^r$ *et* $b = B^r$ *on trouve*

$$(AB)^r = ab \leqslant \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q.$$

Lemme 1.15. *Soit* Ω *un ensemble mesurable , si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *sont mesurables sur* Ω *, et* g *est non négative ,alors :*

$$\begin{aligned} \inf \lim_{x\in\Omega} vrai\, f(x) \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx &\leqslant \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)\,dx \\ &\leqslant \sup_{x\in\Omega} vrai\, f(x) \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Preuve 1.16. *Soit* $e \subset \Omega$ *tel que* $|e| = 0$ *, alors*

$$\int\limits_{\Omega} fg\,dx = \int\limits_{\Omega\setminus e} fg\,dx \leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus e} f(x) \int\limits_{\Omega} g\,dx\,,$$

alors

$$\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)\,dx \leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus e} f(x) \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)\,dx &\leqslant \inf_{x\in e} \sup_{x\in\Omega\setminus e} f(x) \int\limits_{\Omega} g\,dx \\ &= \sup_{x\in\Omega} vrai\, f(x) \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx \end{aligned}$$

D'une manière analogue on montre l'autre inégalité de (1.12).

Corollaire 1.17. *Soit* Ω *un ensemble mesurable , si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *sont mesurables sur* Ω *et* $f \in L_\infty(\Omega)\,, g \in L_1(\Omega)$ *,alors*

$$\left|\int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|g\|_{L_1(\Omega)}\,. \tag{1.13}$$

Preuve 1.18.

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_\Omega fg\,dx\right| &\leqslant \int\limits_\Omega |fg|dx \\ &\leqslant \sup_{x\in\Omega} vrai\,|f(x)| \int\limits_\Omega |g|dx \\ &\leqslant \|f\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|g\|_{L_1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

1.3.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.19. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable , et* $0 < p \leqslant \infty\,, f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_q(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *, alors*

(i) si $1 \leqslant p \leqslant \infty$

$$\int\limits_\Omega |fg|dx \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}, \tag{1.14}$$

(ii) si $0 < p < 1$ *et avec* $|\Omega| > 0$ *et* $\forall\, x \in \Omega\,, g(x) \neq 0$

$$\int\limits_\Omega |fg|\,dx \geqslant \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.15}$$

Preuve 1.20. *a)-1-* $1 \leqslant p < \infty$ *,on applique le lemme 1.10 avec* $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}$*, et* $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}$,
on a

$$ab = \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}}$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L_p(\Omega)}} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L_q(\Omega)}}\,,$$

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}}\,dx \leqslant \frac{1}{P}\int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L_p(\Omega)}}\,dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L_q(\Omega)}}\,dx$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,,$$

d'où l'inégalité (1.14) .

a)-2- $p = \infty$ *; voir* ***corollaire 1.17*** .

b)- $0 < p < 1$ *, un raisonnement analogue au précédent avec une application de lemme* (1.12) *nous donne l'inégalité* (1.15) .

1.3.3 Inégalité de Minkowsky

Théorème 1.21.
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *, un ensemble mesurable ,*$1 \leqslant p \leqslant \infty$ *,* $f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_p(\Omega)$ *,alors :*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Preuve 1.22. *a)- Si* $p = 1$ *:*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} = \int_{\Omega} |f+g|dx$$
$$\leqslant \int_{\Omega} |f|dx + \int_{\Omega} |g|dx = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

b)- Si $p = \infty$ *:*

Soit e_1 *et* e_2 *deux ensemble tel que* $|e_1| = |e_2| = 0$ *, on pose* $e = e_1 \cup e_2$ *, alors* $\forall \epsilon > 0$ *, on a*

$$\sup_{x\in\Omega\setminus e_i} |f_i| \leqslant \|f_i\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

et donc

$$\sup_{x\in\Omega\setminus e} |f_1+f_2| \leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus e} (|f_1| + |f_2|) \,,$$
$$\leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus e} |f_1| + \sup_{x\in\Omega\setminus e} |f_2| \,,$$
$$\leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus e_1} |f_1| + \sup_{x\in\Omega\setminus e_2} |f_2| \,,$$
$$\leqslant \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \epsilon \,;$$

$$\inf_{e} \sup_{x\in\Omega\backslash e} |f_1 + f_2| \leqslant \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \epsilon \ ,$$

on fait tendré ϵ vers 0 , on trouve :

$$\inf_{e} \sup_{x\in\Omega\backslash e} |f_1 + f_2| \leqslant \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \ ,$$

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

3. Si $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f+g|^p \, dx \ &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1} dx \\ &\leqslant \int_\Omega |f||f+g|^{p-1} dx \ + \int_\Omega |g||f+g|^{p-1} dx. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |f+g|^p \, dx \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} \||f+g|^{p-1}\|_{L_q(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \||f+g|^{p-1}\|_{L_q(\Omega)} \ ,$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *,et donc* $q = \frac{p}{p-1}$ *,alors :*

$$\begin{aligned} \||f+g|^{p-1}\|_{L_q(\Omega)} \ &= \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \ , \\ &= \left(\left(\int_\Omega |f+g|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{p-1} \ , \\ &= \|f+g\|^{p-1}_{L_p(\Omega)} \ , \end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega |f+g|^p \, dx \ \leqslant \|f+g\|^{p-1}_{L_p(\Omega)} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right)$$

on déduit que :

$$\|f+g\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f+g\|^{p-1}_{L_p(\Omega)} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}\right).$$

Et par conséquent

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

1.4 Propriétés des espaces de Lebesgue.

1.4.1 Convergences dans L_p .

Définition 1.23. *On dit qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ converge en mesure vers une fonction $f(x)$ si pour tout $\sigma > 0$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty} |\{x \,:\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\}| = 0. \tag{1.17}$$

Théorème 1.24. *Si une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$,elle converge vers la même fonction $f(x)$ en mesure .*

Théorème 1.25. *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions mesurables convergeant en mesure vers $f(x)$. Alors de cette suite on peut extraire une sous suite $\{f_{n_k}(x)\}$ convergeant vers $f(x)$ presque partout.*

Définition 1.26. *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n(x))$ de L_p converge en moyenne vers $f(x) \in L_p$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ si l'égalité suivante est vérifiée*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} \to 0.$$

1.4.2 Complétude

Théorème 1.27. *(Fischer-Riesz)*
Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$,alors L_p est un espace de Banach.

Preuve 1.28.
a)- Si $p = \infty$:

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L_\infty(\Omega)$,donc pour $k \geqslant 1$ il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, m, n \geqslant N_k$ on a

$$\|f_m - f_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Donc il existe une ensemble E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega \setminus E_k, \forall m, n \geqslant N_k . \tag{1.18}$$

Posons $E = \cup E_k$,donc $(f_n(x))$ est de Cauchy pour tout $x \in \Omega \setminus E$.Passant à la limite dans (1.12) *quand $m \to \infty$,on obtient*

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \forall n \geqslant N_k.$$

Donc $f \in L_\infty(\Omega)$ et $\|f - f_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}$, $\forall n \geqslant N_k$ donc $\|f - f_n\|_{L_\infty(\Omega)} \quad \to 0$.

b)- Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L_p(\Omega)$.Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L_p. On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2^k} \ \forall k \geqslant 1,$$

(on procède comme suit : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2}$ pour $m, n \geqslant n_1$,on prend ensuite $n_2 \geqslant n_1$ tel que $\|f_m - f_n\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2^2}$ pour $m, n \geqslant n_2$, etc).

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| ,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_{L_p} &= \| \sum_{k=1}^{n} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|\|_{L_p} , \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_{L_p} , \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} , \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Alors d'après le théorème de la convergence monotone sur Ω p.p $g_n(x)$ converge vers une limite notée $g(x)$ avec $g \in L_p$.

D'autre part on a pour $m \geqslant n \geqslant 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ... + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) - g_{n-1}(x) .$$

Il en résulte que p.p sur Ω $(f_n(x))$ *est de Cauchy et converge vers une limite notée* $f(x)$. *On a p.p sur* Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) - g_n(x) \leqslant g(x)$$

pour $n \geqslant 2$.

D'où $f \in L_p(\Omega)$.

Enfin $\|f_n - f\|_{L_p} \to 0$, *en effet on a* $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ *p.p ,et* $|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant g^p(x)$ *majorant intégrable.On conclut grâce au théorème de Lebesgue.*

1.4.3 Réflexivité

Définition 1.29. ***(Réflexivité)***
Soit E *un espace de Banach et* J *l'injection canonique de* E *dans* E''.
On dit que est réflexif si $J(E) = E''$.

Théorème 1.30. L_p *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

1.4.4 Séparabilité.

Définition 1.31. *On dit qu'un espace métrique* E *est séparable si il existe un sous-ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense .*

Théorème 1.32. $L_p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leqslant p < \infty$

Preuve 1.33. *Soit* E *l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *d'indicatrice de pavés de la forme* $\Pi_{i=1}^{d}]x_i, y_i[$ *inclus dans* Ω *et avec les* x_i, y_i *à coordonnées rationnelles.*
Par construction E *est dénombrable, il nous suffit donc de montrer que* E *est dense dans* $L_p(\Omega)$.
Soit $f \in L_p(\Omega)$ *et* $\varepsilon > 0$, *on commence par choisir* $g \in C_c(\Omega)$ *tel que* $\|f - g\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. *Soit* ω *un ouvert borné contenant supp*(g), *en utilisant l'uniforme continuité de* g, *on construit facilement* $h \in E$ *tel que supp*$(h) \subset \omega$ *et* $\|g - h\|_{L_\infty(\omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{(2|\omega|^{\frac{1}{p}})}$, *de sorte que l'on a* $\|g - h\|_{L_p(\Omega)} \frac{\varepsilon}{2}$ *et donc aussi* $\|f - h\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \varepsilon$.

1.4.5 Invariance de la norme dans $L_p(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la translation

Lemme 1.34. *Soit* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $h \in \mathbb{R}^n$ *et* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *,alors :*

$$\|f(x + h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.19}$$

Preuve 1.35.
a)- $1 \leqslant p < \infty$

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

on fait le changement de variable $x+h=y \Leftrightarrow x=y-h$ d'où :

$$\|f(x+h)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

b)- $p=\infty$

$$\|f(x+h)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} vrai\, |f(x+h)| = \inf_{\{e\,:|e|=0\}} \sup_{\mathbb{R}^n\setminus e} |f(x+h)| \,,$$

où e est l'ensemble de mesure nulle .
En fait le changement de variable $x+h=y \in (\mathbb{R}^n \setminus e)+h$,c-à-d $y \in \mathbb{R}^n \setminus (e+h)$ car : $(\mathbb{R}^n \setminus e)+h = \mathbb{R}^n \setminus (e+h)$ (somme arithmétique).On pose $X = e+h$; si $|e|=0$ alors $|X|=0$ et réciproquement.

$$\inf_{\{e\,:|e|=0\}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus(e+h)} |f(y)| = \inf_{\{X\,:|X|=0\}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n\setminus X} |f(y)| = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 1.36. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p < \infty$,alors pour tout $f \in L_p(\Omega)$ on a :*

$$\lim_{h\to 0} \|f^0(x+h) - f(x)\|_{L_p(\Omega)} = 0 \,; \tag{1.20}$$

d'où

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in \Omega, \\ 0 & si \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

Remarque 1.37. *1) $x+h \in \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega - h$*
2) Pour $p=\infty$ le théorème n'est plus valable.
En effet :
Soit $|\Omega| > 0$,on considère $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $0 < |\Omega_1| < |\Omega|$ et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \Omega_1, \\ 0 & si \quad x \in \Omega \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \|f^0(x+h) - f(x)\|_{L_\infty(\Omega)} &= \|\chi_{\Omega_1}(x+h) - \chi_{\Omega_1}(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\geqslant \|1\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = 1 \nrightarrow 0 \,. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Produit de convolution et Inégalité de Young

On a entamé le concept de convolution des fonctions et certaines des propriétés générales avant d'aborder l'application de la convolution dans les espaces classiques de Lebesgue. Dans ce chapitre, a été étudiée l'inégalité de Young.

Dans ce suit f et g sont deux fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, f_σ et $\tau_h f$ désignent respectivement la symétrie de f et la translatée de f, par définition, on a

$$f_\sigma(x) = f(-x)$$

et

$$(\tau_h f)(x) = \ f(x-h) \ , \forall \, x \in \mathbb{R}^n.$$

2.1 Définitions et propriétés générales.

Définition 2.1. *Soient E_1 et E_2 dans $\mathbb{R}^n$, on désigne par E_1+E_2 (resp E_1-E_2) la somme (resp : différence) arithmétique des ensembles E_1 et E_2*

$$E_1 \pm E_2 \ = \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = x_1 \pm x_2 \ o\grave{u}\, x_1 \in E_1 \, , x_2 \in E_2\}$$

Exemple 2.2. **:** *a)* $[0,1]+[0,2]=[0,3]$ *et* $[0,1]-[0,2]=[-2,1]$
b) $\forall \, x_1 \, , x_2 \in \mathbb{R}^n \, , \forall \, r_1, r_2 > 0$*, on a*

$$B(x_1,r_1) \pm B(x_2,r_2) \ = \ B(x_1 \pm x_2, r_1+r_2)$$

En effet si $y \in B(x_1,r_1) \pm B(x_2,r_2)$*,alors* y_1+y_2*,où* $y_1 \in B(x_1,r_1)$ *et* $y_2 \in B(x_2,r_2)$ *donc :*

$$\begin{aligned} |y-(x_1 \pm x_2)| &= |(y_1-x_1) \pm (y_2-x_2)| \\ &\leqslant |y_1-x_1| + |y_2-x_2| \\ &\leqslant r_1+r_2 \end{aligned}$$

c-à-d : $y \in B(x_1 \pm x_2, r_1+r_2)$.
Réciproquement :

On suppose que $y \in B(x_1 \pm x_2, r_1 + r_2)$ *et montrons que* $y \in B(x_1, r_1) \pm B(x_2, r_2)$.

a)- Soit $y \in B(x_1 + x_2, r_1 + r_2)$*,tel que* $r_1, r_2 > 0$.
On pose : $u = y - (x_1 + x_2)$, $u_1 = \frac{r_1}{r_2+r_1} u$, $u_2 = \frac{r_2}{r_1+r_2} u$, $y_1 = x_1 + u_1$, $y_2 = x_2 + u_2$.
En effet : $y = u + (x_1 + x_2) = u_1 + u_2 + (x_1 + x_2) = y_1 + y_2$
Donc montrons que :

$$|y_1 - x_1| < r_1 \quad et \quad |y_2 - x_2| < r_2$$

.

$$|y_1 - x_1| = |x_1 + u_1 - x_1| = |\frac{r_1}{r_2 + r_1} u| \leqslant \frac{r_1}{r_2 + r_1}(r_1 + r_2) = r_1$$

donc : $y_1 \in B(x_1, r_1)$

$$|y_2 - x_2| = |x_2 + u_2 - x_2| = |\frac{r_2}{r_2 + r_1} u| \leqslant \frac{r_2}{r_2 + r_1}(r_1 + r_2) = r_2$$

donc $y_2 \in B(x_2, r_2)$.
Alors $y \in B(x_1, r_1) + B(x_2, r_2)$.

b)- Soit $y \in B(x_1 - x_2, r_1 + r_2)$*,tel que* $r_1, r_2 > 0$.
On suppose que :
$u = y - (x_1 - x_2)$, $u_1 = \frac{r_1}{r_2+r_1} u$, $u_2 = \frac{r_2}{r_1+r_2} u$, $y_1 = x_1 + u_1$, $y_2 = -x_2 + u_2$.
en effet : $y_1 + y_2 = x_1 - x_2 + u_1 + u_2 = y$
donc montrons que : $y_1 \in B(x_1, r_1)$ *et* $y_2 \in B(-x_2, r_2)$

$$|y_1 - x_1| = |u_1| = \frac{r_1}{r_2 + r_1}|u| \leqslant \frac{r_1}{r_2 + r_1}(r_1 + r_2) = r_1$$

$$|y_2 + x_2| = |u_2| = \frac{r_2}{r_2 + r_1}|u| \leqslant \frac{r_2}{r_2 + r_1}(r_1 + r_2) = r_2$$

d'où $y_2 \in B(-x_2, r_2)$.
Il suffit de montre que : $B(-x_2, r_2) = -B(x_2, r_2)$.

I. Soit $z \in B(-x_2, r_2)$ *on a :*
$|z + x_2| \leqslant r_2$ *alors* $|-z - x_2| \leqslant r_2$ *c-à-d :* $-z \in B(x_2, r_2) \Longrightarrow z \in -B(x_2, r_2)$.

II. Soit $z \in -B(x_2, r_2)$ *c-à-d :* $\exists t \in B(x_2, r_2)$ *tel que* $z = -t$ *alors* $-z \in B(x_2, r_2)$ *en effet :*
$|-z - x_2| \leqslant r_2 \Longrightarrow |z + x_2| \leqslant r_2$.
D'où $z \in B(-x_2, r_2)$.

c) On a

$$C^{B(x_1,r_1)\pm B(x_2,r_2)} = \begin{cases} C^{B(x_1\pm x_2,r_1-r_2)}, \ si\, r_1 > r_2 \\ \mathbb{R}^n \setminus x_1 \pm x_2, \ si\, r_1 = r_2 \\ \mathbb{R}^n, \ si\, r_1 < r_2 \end{cases}$$

En effet, soit $y \in C^{B(x_1,r_1)\pm B(x_2,r_2)}$, *alors*

$$y \notin B(x_1,r_1) \pm B(x_2,r_2)$$

, d'où :

$$y \notin B(x_1 \pm x_2, r_1 + r_2)$$

ce qui donne

$$|y - (x_1 \pm x_2)| > r_1 + r_2$$

On considère trois cas :
1. si $r_1 > r_2$: $|y - (x_1 \pm x_2)| > r_1 + r_2 > r_1 - r_2$, *c-à-d :* $y \notin B(x_1 \pm x_2, r_1 - r_2)$ *veut dire que* $y \in C^{B(x_1\pm x_2,r_1-r_2)}$.

2. si $r_1 = r_2 : |y - (x_1 \pm x_2)| > r_1 + r_2 > r_1 - r_2 = 0$ *c'est à dire*

$$y \notin B(x_1 \pm x_2, 0) = \{x_1 \pm x_2 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

, donc

$$y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_1 \pm x_2 : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

3. si $r_1 < r_2 : |y-(x-1\pm x_2)| > r_1+r_2 > r_1-r_2 < 0$, *c'est à dire* $y \notin B(x_1\pm x_2, r_1-r_2) = \emptyset$ *tel que* $r_1 - r_2 < 0$ *ce qui donne* $y \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.3. *Soit* $E \subset \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$
On pose

$$E + y = \{x \in \mathbb{R}^n, x = z + y, \text{où } z \in E\} \ ;$$

$$\alpha E = \{x \in \mathbb{R}^n \, , \, x = \alpha z = (\alpha z_1, ..., \alpha z_n) \, , \, z \in E\}.$$

On aura besoin des égalités suivantes

$$\|f(x+y)\|_{L_{p,x}(E)} = \|f\|_{L_p(E+y)}, \ \|f(x+y)\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)} = \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \ ; \tag{1}$$

$$\|f(ax)\|_{L_{p,x}(E)} = |a|^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L_p(aE)}, \ \|f(ax)\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)} = |a|^{-\frac{n}{p}}\|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = |a|^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

2.2 Convolution des fonctions

Définition 2.4. *Soient $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ c-à-d : $\forall K \subset \mathbb{R}^n$,$K$ compact,$f, g \in L_1(K)$ l'opération*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \ ;$$

est appelée ***convolution des fonctions*** *f et g au point x (si l'intégrale est finie)c-à-d si $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $(f * g)(x)$ est finie.*

Exemple 2.5. *Soit la fonction de Heaviside*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leqslant 0 \end{cases}$$

on va calculer

$$\begin{aligned} (\theta * \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-y)\theta(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} \theta(x-y)\theta(y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} \theta(x-y)\theta(y)\, dy \\ &= \int_{0}^{+\infty} \theta(x-y)\, dy, \end{aligned}$$

faisons le changement de variable $z = x - y$,on obtient

$$(\theta * \theta)(x) = -\int_{x}^{-\infty} \theta(z)\, dz = \int_{-\infty}^{x} \theta(z)\, dz.$$

On distingue deux cas :
1. Si $x \leqslant 0$,alors $(\theta * \theta)(x) = 0$.
2.Si $x > 0$,alors $(\theta * \theta)(x) = \int_{0}^{x} \theta(z)\, dz = \int_{0}^{x} dz = x$

Finalement on obtient :

$$(\theta * \theta)(x) = \begin{cases} x & ,x > 0 \\ 0 & ,x \leqslant 0\ . \end{cases}$$

2.2.1 Propriétés

Soient $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$,alors

1- $f * g = g * f$ (commutativité)

2- $f*(g*h) = (f*g)*h$ (associativité)
3- Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$: si $f*g = 0 \implies f(x)=0$ ou $g(x)=0$.

Preuve 2.6. *a)- Considérons $f, g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

faisons le changement de variable $z = x-y$.Le jacobien de sous changement est $(-1)^n$,par conséquent

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz$$

donc $f*g = g*f$.

b)- Soient f, g et $h \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x-y)h(y)\,dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)\,dz \right) h(y)\,dy.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x) &= \int\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)h(y)\,dy\,dz \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)h(y)\,dy\,dz,\end{aligned}$$

faisons le changement de variable $z+y = z'$, donc

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x) &= \int\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-z')g(z'-y)h(y)\,dy\,dz' \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z')g(z'-y)h(y)\,dy\,dz' \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z')(g*h)(z')\,dz' \\ &= (f*(g*h))(x).\end{aligned}$$

Rappelons qu'on appelée espace vectoriel un ensemble non vide muni de deux opérations appelées addition et multiplication par un scalaire .

Définition 2.7. *Un espace vectorielle X s'appelle algèbre s'il est muni d'une troisième opération , nommée multiplication et satisfait aux axiomes suivants :*
Soit x, y et $z \in X$ et $\alpha \in \mathbb{K}$
1.$(xy)z = x(yz)$.
2. $x(y+z) = xy + xz$ et $(y+z)x = yx + zx$.
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.
4. S'il existe un élément $e \in X$ tel que $ex = xe = x\,, \forall\, x \in X$.On dit que e est l'unité de l'algèbre X et que X est une algèbre avec unité.
5. Si la multiplication est commutative, c-à-d. si elle satisfait à l'axiome

$$xy = yx,$$

on dit que X est une algèbre commutative.

Corollaire 2.8. *L'espace vectoriel $C_0(\mathbb{R}^n)$ de fonction continues à support compact dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit convolutif est une algèbre commutative.*

2.2.2 Supports dans la convolution

La notion de support d'une fonction continue est bien connue : c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle.

Proposition 2.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une fonction définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i\in I}$, $\omega_i \in \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ p.p sur ω_i, on pose $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$. Alors $f = 0$ p.p sur ω.*

Définition 2.10. *Le support d'une fonction f est noté par : $supp(f) = \Omega \setminus \omega$.*

Proposition 2.11. *Soient f, g deux fonctions localement intégrables dans $\mathbb{R}^n$,alors*

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}\ .$$

Preuve 2.12. *Soit $x \notin \overline{supp(f) + supp(g)}$. Donc il suffit de montrer que $x \notin supp(f * g)$. En effet $x \notin [supp(f) + supp(g) = \cup_{y\in supp(g)}(supp(f) + y)]$,*
d'où

$$\forall\, y \in supp(g)\ , x \notin (supp(f) + y),\ x - y \notin supp(f)\ \text{ et } f(x-y) = 0,$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \\ &= \int_{supp(g)} f(x-y)g(y)\,dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

Proposition 2.13. ***(Inégalité de Minkowsky)****. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables $1 \leqslant p \leqslant \infty$, f une fonction mesurable sur $E \times F$. Alors*

$$\left\| \int_F f(x,y)dy \right\|_{L_{p,x}(E)} \leqslant \int_F \|f(x,y)\|_{L_{p,x}(E)} dy.$$

Proposition 2.14.

Lemme 2.15. *Si $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ et supp(g) est compacte, alors pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists (f*g)(x)$, $(f*g) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, de plus pour chaque $K \subset \mathbb{R}^n$ on a :*

$$\|f*g\|_{L_1(K)} \leqslant \|f\|_{L_1(K-supp(g))}.\|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

Preuve 2.16. *La fonction $f(x-y)g(y)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^n$, par conséquent en utilisant l'inégalité de Minkowsky*

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L_1(K)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right\|_{L_1(K)} && (2.1)\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)\|_{L_{1x}(K)}.|g(y)|dy && (2.2)\\
&= \int_{supp(g)} \|f(x-y)\|_{L_{1x}(K)}|g(y)|dy && (2.3)\\
&= \int_{supp(g)} \|f\|_{L_1(K-y)}|g(y)|dy && (2.4)\\
&\leqslant \int_{supp(g)} \|f\|_{L_1(K-supp(g))}|g(y)|dy && (2.5)\\
&= \|f\|_{L_1(K-supp(g))}\|g\|_{L_1(supp(g))}. && (2.6)
\end{aligned}$$

A partir de l'inégalité obtenue, on déduit que

$$\dot{\forall}\, x \in \mathbb{R}^n \quad (f*g)\ \exists \text{ et } f*g \in L_1(K).$$

Remarque 2.17. *Bien entendu si f et g sont toutes deux à supports compacts , alors $f*g$ est à support compact.*
En général ,si l'un des supports seulement est compact , alors $f*g$ n'est pas à support compact.

2.3 Convolution dans les espaces de Lebesgue.

2.3.1 Inégalité de Young

Théorème 2.18. *Soit $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ et r tels que :*
$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $\quad (\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q})$, et $f \in L_r(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Alors :
$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \;\; \exists\, (f * g)(x)$ *finie,* $f * g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, *tels que :*

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

preuve de l'inégalité de Young :

1^{er} méthode.

Preuve 2.19. *:*

1. *pour* $p = 1 \Longrightarrow r = q$

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} = \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$$

On utilise l'inégalité intégrale de Minkowsky

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)g(y)\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)} dy \tag{2.7}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)} |g(y)| dy \tag{2.8}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)} . |g(y)| dy \tag{2.9}$$

$$= \|f(x)\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \tag{2.10}$$

$$= \|f(x)\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)} . \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.11}$$

Donc

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} . \|g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.$$

2. *pour* $1 < p = q < \infty$ *, d'après l'inégalité intégrale de Young et* $f * g$ *est commutative (i.e :* $f * g = g * f$*) on a*

$$\begin{aligned}
\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy \right\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|g(x-y)f(y)\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)} dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|g(x-y)\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)} |f(y)| dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|g(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} |f(y)| dy \\
&= \|g(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\
&= \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

3. *pour* $q = +\infty \implies r = p'$

$$|(f*g)(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\right| \tag{2.12}$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \tag{2.13}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy \leqslant \|f(x-y)\|_{L_{p',x}(\mathbb{R}^n)}.\|g(y)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.14}$$

$$= \|f(x)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}.\|g(y)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.15}$$

$$\|f*g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\mathbb{R}^n} vrai|(f*g)(x)| \tag{2.16}$$

$$|(f*g)(x)| \leqslant \|f\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.17}$$

$$\sup_{\mathbb{R}^n} vrai|(f*g)(x)| \leqslant \|f\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.18}$$

$$\|f*g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.19}$$

(car $p' = r$*), donc :*

$$\|(f*g)(x)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

4. $1 < p, r < q < \infty$

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dy \tag{2.20}$$

$$|f(x-y)||g(y)| = (|f(x-y)|^r)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\,(|g(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,(|f(x-y)|^r|g(y)|^p)^{\frac{1}{q}} \tag{2.21}$$

On a $(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}) + (\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) + \frac{1}{q} = 1$
(à partir des hypothèses du théorème). Alors :
de l'inégalité de Hölder pour 3 facteurs on obtient :

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|f(x-y)|^r)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\,(|g(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\,(|f(x-y)|^r|g(y)|^p)^{\frac{1}{q}}\,dy \tag{2.22}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r|g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.23}$$

Donc

$$|(f*g)(x)| \leqslant \|f\|^{1-\frac{r}{q}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}\|g\|^{1-\frac{p}{q}}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r|g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.24}$$

On élève à la puissance q puis on intègre (2.23) et par conséquent :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^q dx \leqslant \|f\|^{q-r}_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{q-p}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r |g(y)|^p dy \right) dx.$$

Dans $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r |g(y)|^p dy \right) dx$ *on change l'ordre d'intégration, alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r |g(y)|^p dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy \right) dx \tag{2.25}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^r dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy \right) \tag{2.26}$$

$$= \|f\|^r_{L_r(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy \tag{2.27}$$

$$= \|f\|^r_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.28}$$

Finalement on a obtenu

$$\|(f*g)\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|^{q-r}_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|^{q-p}_{L_p(\mathbb{R}^n)} \|f\|^r_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.29}$$

$$\leqslant \|f\|^q_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.30}$$

d'où

$$\|(f*g)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

.

2.3.2 Conséquence de l'inégalité généralisée de Minkowsky

Si on pose à la place de f, $|f|$ dans l'inégalité intégrale de Minkowsky, on obtient

$$\Big\| \|f(x,y)\|_{L_{1,y}(F)} \Big\|_{L_{p,x}(E)} \leqslant \Big\| \|f(x,y)\|_{L_{p,x}(E)} \Big\|_{L_{1,y}(F)}. \tag{2.31}$$

A partir de (2.31), on peut obtenir la généralisation suivante :

Proposition 2.20. *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensemble mesurable $0 < q \leqslant p \leqslant \infty$, le fonction f est mesurable sur $E \times F$. Alors :*

$$\| \|f(x,y)\|_{L_{q,y}(F)} \|_{L_{p,x}(E)} \leqslant \| \|f(x,y)\|_{L_{p,y}(E)} \|_{L_{q,y}(F)}. \tag{2.32}$$

Preuve 2.21. *Si $q < \infty$, en appliquant* (2.31) *avec l'exposant $\frac{p}{q} \geqslant 1$ et à partir de la mesurabilité de f sur $E \times F$ s'ensuit que $|f|$ est aussi mesurable sur $E \times F$.*

2^{me} **méthode pour la preuve de l'inégalité de Young.**

Preuve 2.22. *Comme*

$$\frac{r}{q}+\frac{r}{p'}=r\left(\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}\right)=1$$

alors d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right| \\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|g(y)||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right)|f(x-y)|^{\frac{r}{p'}}\, dy \\
&\leqslant \left\| \, |g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}} \right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)} \left\| \, |f(x-y)|^{\frac{r}{p'}} \right\|_{L_{p',y}(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \, |g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}} \right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)} \| f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)} .
\end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned}
\left\| f^{\frac{r}{p'}} \right\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|(f(y))^{\frac{r}{p'}}\right|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{r}{p'}.p'} dy\right)^{\frac{1}{r}.\frac{r}{p'}} \\
&= \|f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

on a donc,

$$|(f*g)(x)| \leqslant \left\| \, |g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}} \right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)} \| f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)} .$$

Alors

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^q dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left\| \, |g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}} \right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)} \| f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}\right)^q dx,$$

d'où,

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left\| \, |g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}} \right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)} \| f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Donc

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \left\|\left\||g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)}.\,\|f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}\\ &= I.\,\|f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

puisque $p \leqslant q$*, d'après l'inégalité intégrale généralisée de Minkowsky ci-dessous :*

$$\|\|f(x,y)\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)}\|_{L_{q,y}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\|f(x,y)\|_{L_{q,y}(\mathbb{R}^n)}\|_{L_{p,x}(\mathbb{R}^n)},$$

on obtient

$$\begin{aligned}I &\leqslant \left\|\left\||g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \left\||g(y)|\left\||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,x}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \left\||g(y)|\,\||f(x-y)|\|^{\frac{r}{q}}_{L_{r,x}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \left\||g(y)|\,\|f(x-y)\|^{\frac{r}{q}}_{L_{r,x}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \left\||g(y)|\,\|f\|^{\frac{r}{q}}_{L_{r,x}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}\\ &= \|g(y)\|_{L_{p,y}(\mathbb{R}^n)}.\,\|f\|^{\frac{r}{q}}_{L_{r,x}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} &\leqslant \|f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.\|f\|^{\frac{r}{q}}_{L_r}\\ &= \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}.\|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Chapitre 3

L'inégalité de Young via l'interpolation et la convolution tronquée

Dans ce chapitre, on a va traiter la $3^{\text{ème}}$ preuve de l'inégalité de Young à partir du théorème de Riesz-Thorine. Ensuite on aborde la convolution tronquée. A la fin d'une manière assez brieve on considère le notion de régularisation.

3.1 Aperçu historique

La théorie d'interpolation des espaces vectoriels a été introduite par Józef Marcinkiewicz, et qui fut généralisée sous le nom de théorème de Riesz-Thorin. En analyse, un espace d'interpolation est un espace qui se construit à partir de deux autre espaces et le théorème de Riez [1]-Thorin [2] est un exemple pour les espaces L_p.

3.2 Espace d'interpolation

Définition 3.1. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach, tels que $X, Y \subset Z$ de plus on définit la norme sur $X \cap Y$ et $X + Y$ par :*

$$\|u\|_{X\cap Y} := \max(\|u\|_X, \|u\|_Y)$$
$$\|u\|_{X+Y} := \inf\{\|u_1\|_X + \|u_2\|_Y;\ u = u_1 + u_2,\ u_1 \in X,\ u_2 \in Y\}$$

*un **espace d'interpolation** est un espace de Banach W ayant les propriétés suivantes : Si L est un opérateur linéaire de $X+Y$ dans lui-même qui est continu de X dans lui-même*

1. **Riez Marcel**(1886-1969) est un mathématicien hongrois, élève de Lipot Fejér.
2. **Thorin Olof**(1912-2004) est un mathématicien suédois travaillant sur l'analyse et les probabilités, qui a introduit le théorème de Riesz-Thorin, élève de Riez Marcel .

et de Y dans lui-même, alors L est aussi continu de W dans lui-même.
De plus, l'espace W est dit d'exposant $\theta\,(0 < \theta < 1)$ s'il existe une constante C telle que, l'opérateur L satisfaisant les conditions ci-dessus, on ait :

$$\|L\|_{W;W} \leqslant C\|L\|_{X;X}^{1-\theta}\|L\|_{Y;Y}^{\theta} .$$

On a utilisé la notation $\|L\|_{A;B}$ pour la norme de l'opérateur L en tant qu'application de A dans B.

Si $C = 1$ (ce qui est la plus petite valeur possible), on peut dire que W est un espace exactement interpolé.

Il y a de nombreuses manières de construire des espaces interpolés (interpolation complexe et interpolation réelle).

3.2.1 Interpolation complexe :

Définition 3.2. *Soient deux espaces de Banach X et Y, la méthode d'interpolation complexe consiste à considérer l'espace des fonctions analytiques F à valeurs dans $X+Y$ définie sur la bande ouverte $0 < Re(Z) < 1$, continue sur la bande fermée $0 \leqslant Re(Z) \leqslant 1$, et telles que $f(iy)$ est borné dans X, $f(1+iy)$ est borné dans Y.*
On définit la norme

$$\|f\| = \max\left\{\sup_y \|f(iy)\|_X, \sup_y \|f(1+iy)\|_Y\right\}.$$

Et pour $0 < \theta < 1$, on définit
$[X,Y]_\theta = \{u \in X+Y\}$, muni de la norme $\|u\| = \inf\limits_{f(\theta)=u} \|f\|$.

Théorème 3.3. *$W = [X,Y]_\theta$ est un espace exactement interpolé d'exposant θ.*

3.2.2 Interpolation réelle

la méthode K :

La méthode K d'interpolation réelle peut être utilisée même quand le champ des scalaires est celui des nombres réels.

Définition 3.4. *Pour tout $u \in X+Y$, on pose $K(t,u) = \min\limits_{u=u_1+u_2} \|u_1\|_X + \|u_2\|_Y$ et*

$$\|u\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,u))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \leqslant q < \infty.$$

$$\|u\|_{\theta,\infty} = \sup_{t>0}(t^{-\theta}K(t,u)) \qquad , \qquad q = \infty.$$

Alors la méthode K d'interpolation consiste à définir $K_{\theta,q}(X,Y)$ comme l'ensemble de tout les éléments u de $X+Y$ que $\|u\|_{\theta,q;K} < \infty$.
$K_{\theta,q}(X,Y)$ est un espace exactement interpolé de degré θ.

la méthode J :

Comme avec la méthode K, la méthode J peut aussi être utilisée pour les espaces vectoriels sur le corps des réels.

Définition 3.5. *Pour tout $u \in X \cap Y$, on pose $J(t,u) = \max(\|u\|_X, t\|u\|_Y)$. Alors, u est $u = \int_0^\infty v(t)\frac{dt}{t}$, où la un élément de $J_{\theta,q}$ si et seulement si il peut être écrit comme fonction v(t) mesurable à valeurs dans $X \cap Y$, et telle que*

$$\Phi(v) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t, v(t)))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

La norme de u est $\|u\|_{\theta,q} := \inf_v \Phi(v)$.
Ici encore, $J_{\theta,q}(X,Y)$ est un espace exactement interpolé de degré θ.

3.2.3 Relations entre les méthodes d'interpolation :

Les deux méthodes d'interpolation réelles sont souvent équivalentes.

Théorème 3.6. *Si $0 < \theta < 1$ et $1 \leqslant q \leqslant \infty$, alors $J_{\theta,q}(X,Y) = K_{\theta,q}(X,Y)$ avec équivalence des normes.*

Quand les deux méthodes sont équivalentes, on écrit $[X,Y]_{\theta,q}$ pour la méthode d'interpolation réelle. En contraste, la méthode d'interpolation complexe n'est habituellement pas équivalente à la méthode d'interpolation réelle. Cependant, il y a quand même une relation entre les deux.

Théorème 3.7. *Si $0 < \theta < 1$, alors*

$$[X,Y]_{\theta,1} \subset [X,Y]_1 \subset [X,Y]_{\theta,\infty}.$$

3.3 Théorème de Riesz-Thorin

Théorème 3.8. *-Soient (U, μ) et (V, ν) des espaces mesurés, μ et ν étant des mesures positives sigma-finies. On considère les espaces de Lebesgue $L_p(\mu)$ et $L_q(\nu)$ de fonctions à valeurs complexes.*
Soient $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ et T un opérateur linéaire de $L_{p_1}(\mu) + L_{p_2}(\mu)$ dans $L_{q_1}(\nu) + L_{q_2}(\nu)$:

$$T : L_{p_1}(U, \mu) + L_{p_2}(U, \mu) \xrightarrow{linaire} L_{q_1}(V, \nu) + L_{q_2}(U, \nu),$$

borné de $L_{p_1}(\mu)$ dans $L_{q_1}(\nu)$:

$$T : L_{p_1}(U, \mu) \xrightarrow{born} L_{q_1}(V, \nu),$$

de norme M_1, et de $L_{p_2}(\mu)$ dans $L_{q_2}(\nu)$:

$$T : L_{p_2}(U, \mu) \xrightarrow{born} L_{q_2}(V, \nu),$$

de norme M_2.

Alors, pour tous $p, q \in [1, +\infty]$ tels que le couple $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ appartienne au segment $[(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}), (\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2})]$, T est aussi borné de $L_p(\mu)$ dans $L_q(\nu)$ (i.e) :

$$T : L_p(U, \mu) \xrightarrow{born} L_q(V, \nu),$$

de norme M satisfaisant l'inégalité suivante :

$$M \leqslant M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \qquad (1)$$

où $\theta \in [0, 1]$ est tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \ \ et \ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}. \qquad (2)$$

Représentation géométrique La signification géométrique de (2) sont les points sur le segment de droite entre $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$ et $(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2})$.

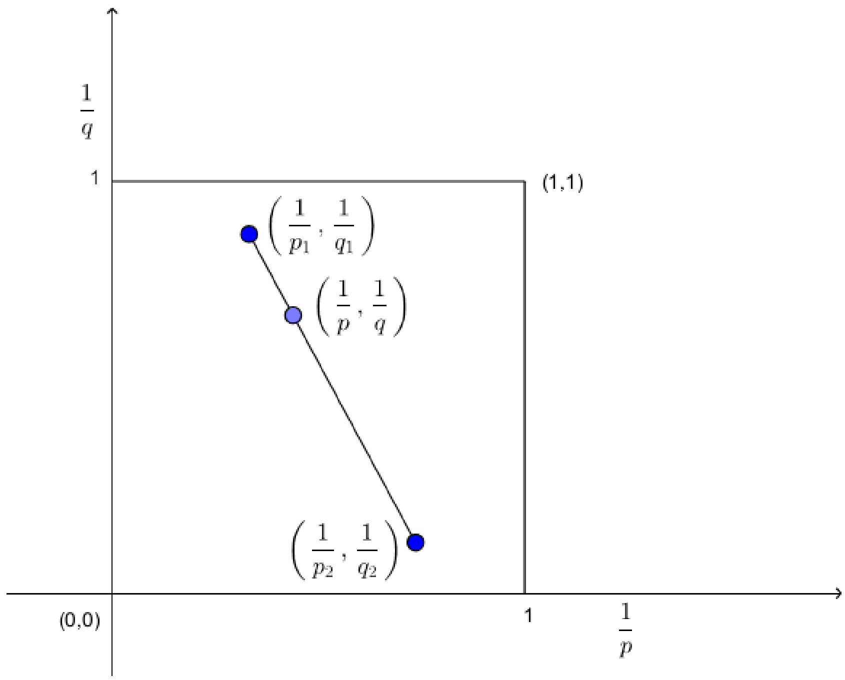

FIGURE 3.1 – Représentation géométrique des exposants des espaces de départ et d'arrivée de l'opérateur interpolé par un point ayant pour coordonnées l'inverse de ces exposants

3.3.1 Application du théorème de Riesz-Thorin

Conséquence 3.9. *Du théorème de Riesz-Thorin on peut déduire que pour établir :*
Pour une certaine constante $c_0 > 0$, $\forall f \in L_p(E)$

$$\|Tf\|_{L_q(F)} \leqslant c_0 \|f\|_{L_p(E)} , \tag{3.1}$$

il est suffisant de prouver les deux inégalités suivantes :
Pour une certaine constante $c_1 > 0$, $\forall f \in L_{p_1}(E)$,

$$\|Tf\|_{L_{q_1}(F)} \leqslant c_1 \|f\|_{L_{p_1}(E)} , \tag{3.2}$$

et pour une certaine constante $c_2 > 0$, $\forall f \in L_{p_2}(E)$,

$$\|Tf\|_{L_{q_2}(F)} \leqslant c_2 \|f\|_{L_{p_2}(E)} , \tag{3.3}$$

où p, q, p_1, q_1 *et* p_2, q_2 *sont liées par la relation :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \quad et \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2} \ . \tag{3.4}$$

Preuve 3.10. *(*3^{me} ***méthode)***
Pour les espaces complexes on réelles, si $p \leqslant q$, *on a*

$$c_0 \leqslant c_1^{1-\theta} . c_2^{\theta} \ . \tag{3.5}$$

Dans certains cas on peut choisir p_1, q_1 *et* p_2, q_2 *tels que les inégalités* (3.2) *et* (3.3) *soient facilement prouvées par rapport à l'inégalité* (3.1).
Comme exemple on considère la preuve de l'inégalité de Young pour les convolutions.
Soit à prouver

$$\|f * g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

où $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty \quad , \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}.$

Soit T *l'opérateur de convolution définie par :*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy = (K * f)(x) \tag{3.6}$$

où $K,\ f \in L_p$

d'après l'inégalité intégrale de Minkowsky on obtient

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_{r,x}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy \right\|_{L_{r,x}} \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|K(x-y) f(y)\|_{L_{r,x}} dy. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|K(x-y)\|_{L_{r,x}} |f(y)| dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|K(x)\|_{L_{r,x}} |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|K\|_{L_r} |f(y)| dy \\ &= \|K\|_{L_r} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\|Tf\|_{L_r} \leqslant \|K\|_{L_r} \|f\|_{L_1}\,, \tag{3.7}$$

de plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$|Tf(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) f(y)| dy\,,$$

d'après l'inégalité de Hölder où r, r' *sont des conjugués, on obtient*

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leqslant \|K.f\|_{L_1} \\ &\leqslant \|K\|_{L_r} \|f\|_{L_{r'}}, \end{aligned}$$

par passage au $\sup vrai$ *on obtient*

$$\begin{aligned}\sup vrai(|Tf(x)|) &\leqslant \sup vrai(\|K\|_{L_r}\|f\|_{L_{r'}})\\ &= \|K\|_{L_r}\|f\|_{L_{r'}},\end{aligned}$$

d'où

$$\|Tf\|_{L_\infty} \leqslant \|K\|_{L_r}\|f\|_{L_{r'}}. \tag{3.8}$$

En comparant (3.2) *et* (3.7) *on déduit que* $q_1 = r$
En comparant (3.3) *et* (3.8) *on déduit que* $q_2 = \infty$
où :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} - \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'} - \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}\\ &= 1-\theta+\frac{\theta}{r'} - \frac{1}{r} + \frac{\theta}{r}\\ &= 1-\theta+\theta-\frac{1}{r}\\ &= 1-\frac{1}{r}\\ &= \frac{1}{r'}\ ,\end{aligned}$$

d'où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'}$.
$c_1 = c_2 = \|K\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}$.
D'après (3.1) *on a :*

$$\|K * f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_0\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

En prenant en compte (3.5), *avec* $c_1 = c_2 = \|K\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}$, *on peut écrire*

$$\|K * f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|K\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

En résolvant le système d'équation (3.9), *on obtient* $\theta = 1 - \frac{r}{q}$.
Les inégalités $1 \leqslant r \leqslant \infty$ *et* $0 \leqslant \theta = 1 - \frac{r}{q} \leqslant 1$ *sont équivalentes aux inégalités* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

3.4 L'inégalité de Young relative au produit de Convolution tronquée

Définition 3.11. *Soient* $B \subset \mathbb{R}^n$, *un ensemble mesurable. Le produit de convolution tronqué de* f *et* g *est défini par*

$$(f*g)_B(x) = \int_B f(x-y)g(y)dy\ , \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

On suppose que g est mesurable sur B et f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et l'intégrale (3.10) *est existe et finie p.p, $x \in \mathbb{R}^n$.*
La différence arithmétique (vectorielle) des ensembles A et B est definie comme suit :

$$A - B = \{z \in \mathbb{R}^n : \ z = x - y \, , x \in A, \, y \in B\}.$$

Soient le boule $B(x, r)$, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, Alors

$$B(x, r_1) - B(y, r_2) = B(x - y, r_1 + r_2)$$

en particulière

$$B(0, r_1) - B(0, r_2) = B(0, r_1 + r_2).$$

On remarque que si la convolution tronquée est considérée pour $x \in A$, alors la fonction f doit être définie sur l'ensemble $A - B$.

3.5 Conséquence d'inégalité de Young

Théorème 3.12. *Soient $1 \leqslant p, \, r \leqslant q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$,* $(*)$
$A, B \subset \mathbb{R}^n -$des ensembles mesurables.
Si $f \in L_r(A - B)$, $g \in L_p(B)$, alors l'intégrale $\int\limits_B f(x - y) g(y) dy$ existe et est finie pour presque tous les $x \in A$ et

$$\begin{aligned} \|(f * g)_B\|_{L_q(A)} &= \left\| \int\limits_B f(x - y) g(y) dy \right\|_{L_q(A)} \\ &\leqslant \|f\|_{L_r(A-B)} . \|g\|_{L_p(B)} . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve 3.13. *Soient*
$f^0(z) = \begin{cases} f(z) \, , & z \in A - B \, , \\ 0 \, , & z \notin A - B \, , \end{cases}$, $g^0(z) = \begin{cases} g(z) \, , & z \in B \, , \\ 0 \, , & z \notin B . \end{cases}$ *Alors*

$$\begin{aligned} (f * g)_B(x) &= \int\limits_B f(x - y) g(y) dy \\ &= \int\limits_B f^0(x - y) g(y) dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^0(x - y) g^0(y) dy \\ &= (f^0 * g^0)(x) \ , \ x \in \mathbb{R}^n , \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\|(f*g)_B\|_{L_q(A)} &= \|f^0 * g^0\|_{L_q(A)} \\
&\leqslant \|f^0 * g^0\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \|f^0\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}.\|g^0\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|f\|_{L_r(A-B)}.\|g\|_{L_p(B)}.
\end{aligned}
$$

Remarque 3.14. . *L'inégalité ainsi prouvée est assez grossière. En effet si $mes(A) \to 0$, alors le coté gauche de cette inégalité $\to 0$ et le coté droit $\nrightarrow 0$.*

Théorème 3.15. *Soient $1 \leqslant p\ ,\ r \leqslant q \leqslant \infty,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+1$.*
$A, B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables.
Si $g \in L_p(B)$ et

$$\sup_{y\in B} \|f\|_{L_r(A-y)} < \infty\ ,\ \sup_{x\in A} \|f\|_{L_r(x-B)} < \infty,$$

alors l'intégrale $\int\limits_B f(x-y)g(y)dy$ existe et est finie $\dot{\forall}\, x$ [3] $\in A$ et

$$
\begin{aligned}
\|(f*g)_B\|_{L_q(A)} &= \left\| \int\limits_B f(x-y)g(y)dy \right\|_{L_q(A)} \\
&\leqslant \left(\sup_{y\in B} \|f\|_{L_r(A-y)}\right)^{\frac{r}{q}} \left(\sup_{x\in A} \|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{1-\frac{r}{q}} \|g\|_{L_p(B)}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Preuve 3.16. . *Comme $\frac{r}{q}+\frac{r}{p'}=1$, alors d'après l'inégalité de Hölder pour $x \in A$*

$$
\begin{aligned}
|(f*g)_B(x)| &= \left| \int\limits_B f(x-y)g(y)dy \right| \\
&\leqslant \int\limits_B |f(x-y)|.|g(y)|dy \\
&= \int\limits_B \left(|g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right) |f(x-y)|^{\frac{r}{p'}} dy \\
&\leqslant \||g(y)|.|f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\|_{L_{p,y}(B)}.\||f(x-y)|^{\frac{r}{p'}}\|_{L_{p',y}(B)}.
\end{aligned}
$$

3. $\dot{\forall} x$: presque tous les x

Ici d'après le changement de variable $x-y=z$ donc

$$\begin{aligned}\left\||f(x-y)|^{\frac{r}{p'}}\right\|_{L_{p',y}(B)} &= \left\||f(z)|^{\frac{r}{p'}}\right\|_{L_{p',z}(x-B)}\\ &= \|f\|^{\frac{r}{p'}}_{L_r(x-B)}\\ &\leqslant \left(\sup_{x\in A}\|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{\frac{r}{p'}}\\ &= \left(\sup_{x\in A}\|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{1-\frac{r}{q}}.\end{aligned}$$

par conséquent $x\in A$

$$|(f*g)_B(x)| \leqslant \left\||g(y)||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{p,y}(B)}\left(\sup_{x\in A}\|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{1-\frac{r}{q}}.$$

Comme $p\leqslant q$, alors d'après l'inégalité intégrale généralisée de Minkowsky.

$$\begin{aligned}\|(f*g)_B\|_{L_q(A)} &\leqslant \left\|\left\||g(y)||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{p,y}(B)}\right\|_{L_{q,x}(A)}\left(\sup_{x\in A}\|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{1-\frac{r}{q}}\\ &\leqslant \left\|\left\||g(y)||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,x}(A)}\right\|_{L_{p,y}(B)}\left(\sup_{x\in A}\|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{1-\frac{r}{q}}.\end{aligned}$$

Ici

$$\begin{aligned}\left\||g(y)||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,x}(A)} &= |g(y)|\left\||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,x}(A)}\\ \text{[On fait le changement } (x-y)=z] \quad &= |g(y)|\left\||f(z)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,z}(A-y)}\\ &= |g(y)|\|f\|^{\frac{r}{q}}_{L_r(A-y)}\\ &\leqslant |g(y)|\left(\sup_{y\in B}\|f\|_{L_r(A-y)}\right)^{\frac{r}{q}},\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left\|\left\||g(y)||f(x-y)|^{\frac{r}{q}}\right\|_{L_{q,x}(A)}\right\|_{L_{p,y}(B)} \leqslant \|g\|_{L_p(B)}\left(\sup_{y\in B}\|f\|_{L_r(A-y)}\right)^{\frac{r}{q}},$$

et

$$\|(f*g)_B\|_{L_q(A)} \leqslant \left(\sup_{y\in B}\|f\|_{L_r(A-y)}\right)^{\frac{r}{q}}.\left(\sup_{x\in A}\|f\|_{L_r(x-B)}\right)^{1-\frac{r}{q}}.\|g\|_{L_p(B)}$$

Des raisonnements précèdents on peut déduire que les conditions $p\leqslant q$, et $r\leqslant q$, la condition $(*)$ et $p\geqslant 1$, $r\geqslant 1$ sont aussi nécessaires pour la validité suivante :

$$\|f*g\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant A\|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.13}$$

Remarque 3.17. *On considère l'opérateur K_f définie sur $L_p(\mathbb{R}^n)$ $\Big(f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)\Big)$ par l'égalité*

$$\Big(K_f\, g\Big)(x) = (f * g)(x)\,. \tag{3.14}$$

si $f \in L_r(\mathbb{R}^n)\,, 1 \leqslant p\,, r \leqslant q \leqslant \infty$ et est vérifiée la condition $(*)$, alors l'opérateur $(K_f g)(x)$ est bornée en tout qu'opérateur agissant de $L_p(\mathbb{R}^n)$ en $L_q(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|K_f g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.15}$$

Théorème 3.18. *Si $0 < q < p \leqslant \infty$, f une fonction mesurable dans $\mathbb{R}^n$, alors l'opérateur K est bornée en tout qu'opérateur agissant de $L_p(\mathbb{R}^n)$ vers $L_q(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f \approx 0$ dans $\mathbb{R}^n$.*

3.6 Exemple d'application du produit de convolution :

3.6.1 l'opérateur de régularisation dans les espaces $L_p\,, 0 < p < 1$.

Il est bien connu le rôle des opérateurs de régularisation (Sobolev) en analyse mathématique.
Ces opérateurs sont défini $\forall\, E \subset \mathbb{R}^n\,, E$ mesurable, $\forall\, f$ intégrable sur l'intersection E avec une boule arbitraire dans $\mathbb{R}^n$ $(E \cap B_\delta)$ et $\forall \delta > 0$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad (A_\delta f)(x) \;=\; (\omega_\delta * f^0)(x) \;=\; \frac{1}{\delta^n} \int\limits_{E\cap\, B(x,\delta)} \omega(\frac{x-y}{\delta}) f(y)dy. \tag{3.16}$$

Ici ω est le noyau de régularisation du type

$$\omega(x) = C \begin{cases} exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.17}$$

où la constante C est choisie de telle façon que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(x)dx = 1, \tag{3.18}$$

$\omega_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n}\omega(\frac{x}{\delta})$, f^0 est le prolongement de f de E à $\mathbb{R}^n$ si $(x \in E,\, f^0(x) = f(x))$ si $(x \notin E,\, f^0(x) = 0); B(x,\delta)$ une boule ouverte. Ces opérateurs possèdent les propriétés suivantes :
Si $f \in L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, alors

$$(A_\delta f) \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.19}$$

C'est à dire $A_\delta f$ admet des dérivées d'ordre arbitraire continues.

$$\|A_\delta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{L_p(E)} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{3.20}$$

Et

$$\lim_{\delta\to\infty} \|A_\delta f - f\|_{L_p(E)} = 0 \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty)\ , \tag{3.21}$$

voir ([6]) Sont utilisés d'autres noyaux de régularisation vérifiant (3.18), mais pour la suite il est important pour que ω ait la forme (3.17)

Remarque 3.19. *Si $f \in L_p(E)$ et $0 < p < 1$, il se peut qu'il existe un point $x_0 \in \bar{E}$ tel que $\delta > 0$, $f \notin L_1(E \cap B(x,\delta))$.Dans* (3.16) *n'a aucun sens pour $\delta > 0$, et des arbitraires, $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \in B(x,\delta)$.*

Le but de ce travail est de construire un tel opérateur $B_\delta \equiv B_{p,\delta}$ pour la quel $f \in L_p(E)$ avec $0 < p < 1$ possédant les propriétés (3.19), (3.20) et (3.21)
On noté par $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$(alors $f = f_+ - f_-$; $|f| = f_+ + f_-$).

Définition 3.20. *Soient $0 < p < 1; \forall\, E \subset \mathbb{R}^n$, E mesurable $\forall\, f \in L_p$ sur $E \cap B_\delta(\forall B_\delta)$ on pose*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad (B_\delta f)(x) = \, (A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}}(x) - (A_\delta f_-^p)^{\frac{1}{p}}(x). \tag{3.22}$$

Théorème 3.21. *Soient $0 < p < 1$, $\forall\, E \subset \mathbb{R}^n$, E mesurable et $f \in L_p(E)$ c'est à dire f mesurable sur E et $\|f\|_p(E) = \left(\int\limits_E |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ alors*

$$B_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{3.23}$$

$$\|B_\delta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_p(E) \tag{3.24}$$

$$\lim_{\delta\to 0^+} \|B_\delta f - f\|_{L_p(E)} = 0 \tag{3.25}$$

pour la preuve du théorème, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.22. *Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, f non négative. Alors $\forall\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, α multi-indice où $\forall\, j \in \{1, ..., n\}$, α_n entier non négatifs et $\forall\epsilon \in [0,1), \exists$ un nombre positif $C_{\alpha,\epsilon}$ tel que*

$$\forall\delta > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad |D^\alpha(A_\delta f)(x)| \leqslant \frac{C_{\alpha,\epsilon}}{\delta^{|\alpha|+n(1-\epsilon)}}\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{1-\epsilon}(A_\delta f)^\epsilon(x). \tag{3.26}$$

(Si $\epsilon = 0$ on suppose que $0^0 = 1$)

Preuve 3.23. *Comme* $\forall\alpha$; $\exists$ *un tel polynôme* P_α *tel que* $|x| < 1$

$$(D^\alpha \omega)(x) = \frac{P_\alpha(x)}{(1 - |x|^2)^{2|\alpha|}} \omega(x).$$

Et $\forall\, \lambda > 0$, $\exists$ *le nombre positive* C_λ *tel que* $|x| < 1$

$$(1 - |x|^2)^{-1} \leqslant C_\lambda \omega^{-\lambda}(x).$$

Alors $\forall\, \alpha$ *et* $\forall\, \epsilon \in [0, 1]$, *il existe un nombre* $C_{\alpha,\epsilon} > 0$ *tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad |(D^\alpha \omega)(x)| \leqslant C_\lambda \omega^{-\lambda}(x).$$

D'où

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad |(D^\alpha \omega_\delta)(x)| \leqslant \frac{C_{\alpha,\epsilon}}{\delta^{|x|+n(1-\epsilon)}} \omega^\epsilon(x).$$

Si $0 < \epsilon < 1$ *en prenant en compte que* f *est non négative ; on obtient*

$$\begin{aligned} |D^\alpha (A_\delta f)(x)| &= |D^\alpha (\omega_\delta * f)(x)| \\ &= |(D^\alpha \omega_\delta * f)(x)| \\ &\leqslant (|D^\alpha \omega_\delta| * f)(x) \\ &\leqslant \frac{C_{\alpha,\epsilon}}{\delta^{|\alpha|+n(1-\epsilon)}} (\omega_\delta^\epsilon * f)(x). \end{aligned}$$

On utilisant l'inégalité de Hölder ; on a :

$$\begin{aligned} (\omega_\delta^\epsilon * f)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\delta^\epsilon (x - y) f^\epsilon(y) f^{1-\epsilon}(y) dy \\ &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\delta(x - y) f(y) dy \right)^\epsilon \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \right)^{1-\epsilon} \\ &= \|f\|^{1-\epsilon}_{L_1(\mathbb{R}^n)} (A_\delta f)^\epsilon(x). \end{aligned}$$

D'où on déduit (3.26) *pour* $0 < \epsilon < 1$. *Si* $\epsilon = 0$ *; on a*

$$\begin{aligned} (|D^\alpha \omega_\delta| * f)(x) &= \int\limits_{B(x,\delta)} |(D^\alpha \omega_\delta)(x - y)| f(y) dy \\ &\leqslant \frac{C_{\alpha,0}}{\delta^{|\alpha|+n}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

D'où (3.26) *avec* $\epsilon = 0$.

Lemme 3.24. *Soit la fonction* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *non négative :* $\forall\, \alpha$ *multi-indice et de plus* $\forall\, \epsilon \in (0, 1)$; *existe un nombre positive* $C_{\alpha,\epsilon}$, *tel que :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad |(D^\alpha \psi)(x)| \leqslant C_{\alpha,\epsilon} \psi^\epsilon(x). \tag{3.27}$$

Alors $\forall\gamma > 0 \quad \psi^\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve 3.25. *(Preuve du théorème) Comme les fonctions* $f_\pm^p \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *et les fonctions* $A_\delta f_\pm^p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *et sont non-négative.*
D'après (3.16), *elle vérifient les conditions du , c'est à dire* $(A_\delta f^p)^{\frac{1}{p}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et alors* $B_\delta f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Comme $0 < p < 1$, *pour* $f, g \in L_p(E)$

$$\|f+g\|_{L_p(E)} \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)}) \tag{3.28}$$

En utilisant (3.20) *et l'inégalité numérique*

$$x^\alpha + y^\alpha \leqslant (x+y)^\alpha$$

pour $x, y \leqslant 0$, $\alpha > 1$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|B_\delta f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &= \left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - (A_\delta f_-^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\|(A_\delta f_-^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right) \\
&= 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|A_\delta f_+^p\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} + \|A_\delta f_-^p\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f_+^p\|_{L_1(E)}^{\frac{1}{p}} + \|f_-^p\|_{L_1(E)}^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f_+^p\|_{L_1(E)} + \|f_-^p\|_{L_1(E)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\|f\|_{L_p(E)}.
\end{aligned}$$

Et on obtient (3.24).
De (3.28) *on déduit que*

$$\begin{aligned}
\|B_\delta f - f\|_{L_p(E)} &= \left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - (A_\delta f_-^p)^{\frac{1}{p}} - f_+ + f_-\right\|_{L_p(E)} \\
&\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - f_+\right\|_{L_p(E)} + \left\|(A_\delta f_-^p)^{\frac{1}{p}} - f_-\right\|_{L_p(E)}\right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

de l'inégalité

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leqslant \alpha|x-y|\left(|x|^{\alpha-1} + |y|^{\alpha-1}\right),$$

valable pour $x, y, \alpha \geqslant 0$ (*si* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, x, y > 0$) *et de* 3.25, *on déduit*

$$\begin{aligned}
\left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - f_+\right\|_{L_p(E)} &= \left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - (f_+^p)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L_p(E)} \\
&\leqslant \frac{1}{p}\left\||A_\delta f_+^p - f_+^p|\left((A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}-1} + (f_+^p)^{\frac{1}{p}-1}\right)\right\|_{L_p(E)} \\
&= \frac{1}{p}\left\||A_\delta f_+^p - f_+^p|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}-1} + |A_\delta f_+^p - f_+^p|(f_+^p)^{\frac{1}{p}-1}\right\|_{L_p(E)} \\
&\leqslant C_p\left(\left\||A_\delta f_+^p - f_+^p|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}-1}\right\|_{L_p(E)} + \left\||A_\delta f_+^p - f_+^p|(f_+^p)^{\frac{1}{p}-1}\right\|_{L_p(E)}\right).
\end{aligned}$$

Où $C_p = \frac{2^{\frac{1}{p}-1}}{p}$.
En appliquant l'inégalité (conséquence de l'inégalité de Hölder)

$$\|gh\|_{L_p(E)} \leqslant \|g\|_{L_1(E)}\|h\|_{L_{\frac{p}{1-p}}(E)}, \quad \textit{pour} \;\; 0 < p < 1$$

et de l'inégalité (3.29) *on obtient*

$$\begin{aligned} \left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - f_+\right\|_{L_p(E)} &\leqslant C_p\|A_\delta f_+^p - f_+^p\|_{L_1(E)} \left(\left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1-p}{p}}\right\|_{L_1(E)} + \left\|f_+^{p\,\frac{1-p}{p}}\right\|_{L_1(E)}\right) \\ &\leqslant 2C_p\|f_+\|_{L_p(E)}^{1-p}\|A_\delta f_+^p - f_+^p\|_{L_1(E)}, \end{aligned}$$

mais $\|A_\delta f_+^p - f_+^p\|_{L_1(E)}$ *tend vers* 0 *quand* $\delta \to 0_+$ *car* $f_+^p \in L_1(E)$ *d'après* (3.21)*, alors* $\left\|(A_\delta f_+^p)^{\frac{1}{p}} - f_+\right\|_{L_p(E)}$ *tend vers* 0.
D'une manière analogue on prouve le deuxième membre de (3.29) *tend vers zéro quand* $\delta \to 0_+$ *et on obtient* (3.25).

Conséquence 3.26. *Soient* $0 < p < 1$, $E \subset \mathbb{R}^n$, E *un ensemble mesurable. Alors l'ensemble* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L_p(E)$*. Si* E *est un ouvert dans* $\mathbb{R}^n$*, alors l'ensemble* $C_0^\infty(E)$ *est dense dans* $L_p(E)$.

Preuve 3.27. *La première partie de la conséquence est déduit de* (3.23) *et* (3.25)*. La deuxième partie démontre d'une manière standard à l'aide le multiplication par une fonction troncature.*

Conclusion

La notion de produit de convolution joue un rôle fondamental en mathématiques. C'est un thème d'actualité où les chercheurs continuent à le développer et l'appliquer. Par exemple on peut citer l'inégalité de Oneil qui est directement liée aux convolutions et en particulier à l'inégalité de Young en considérant les espaces de Marcinkiewicz.

the concept of convolution product plays a fundamental role in mathematics. It is a topical topic where researchers continue to develop and apply it. for example we can cite the inequality of Oneil which is directly related to convolution and in particular to the inequality of Young considering the Marcinkiewicz spaces.

Bibliographie

[1] A. Kolmongorov, S. Fomine, Elments de la thiorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition MIR, Moscou, 2^{me}

[2] B.N Maslenikova, Equations différentielles aux dérivées partielle, Moscou 1997.

[3] C.Gasquet, P.Witomski, Analyse de Fourier et application(1994)

[4] D.E.Edmunds, J. Lang, A. Nekvinda, On $L_{p(x)}$ normes, Proc. R. Soc. Lond, Ser. A 445,219-225 (1999)

[5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Théorie et application, MASSON, Paris 1983

[6] S.L. Sobolov, Quelques applications de l'analyse fonctinnelle en mathématique, physique, Novosibitsk 192-UR. SS

[7] S. G. Samko, Diferentiation and integration of variable ordr and the spaces $L_{p(x)}$. Contemporary Mathematics, Volume 212. 1998.

[8] V.A. Ténoguine, T.S.Sobolova, B.M. Pussarevski, Analyse fonctionnelle Tome 2, Moscou 2013.

[9] V.I Brenkov, Mans inequalities in L_p, Moscou-university 1989.

[10] V.I Brenkov, sobolov spaces on domains, Moscou 1997.

[11] V.I.Burenkov,T.y.Tararykofa.L'analogue de l'inégalité de Young pour des convolutions dans les espaces généralisés type de Morrey.Trudy MIAN(2016), 113-132.

[12] V.S Vladimirov, Equations de la phisique mathématique, Moscou 1981.

[13] W.DONOGHUE, JR, Distribution and Fourier transforms, New York and London 1969.

[14] E. Lieb, M. Loss, Analysis. American Mathematical Society. volume 14. 2000, Prilary 28-01, 42-01, 46-01, 49-01.