REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle Et Application

Présenté Par :

Mokhtari Abd Elfetah **Mokhtari Walid**

Yahia Abd Elkader **Abid Mohamed**

Le Thème

Résolution de quelques problèmes aux limites non linéaires Par la méthode des opérateurs monotones

---

Soutenu publiquement le 18 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr HEDIA Benaouda	Pr	Université Tiaret	Président
Mr OUARDANI Abderrahmane	MCB	Université Tiaret	Examinateur
Mr BENIA Yacine	MCA	Université Alger 1	Encadreur

2020-2021

Remerciement

*Nous aimions en premier lieu remercier mon dieu "**ALLAH**" qui nos adonné la volonté et le courage pour mener à terminer notre formation de Master et réaliser ce travail.*

Nous tenons à présenter tout notre gratitude et mes remerciements à notre rapporteur de mémoire : ***Mr. Benia Yacine*** *prof à l'université Alger 1, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement,son support,ses encouragements,sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.*

Nous adressons également nos remerciements à tout messieurs les membres de jury pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignant du département de mathématique, ont aussi le métrite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique. Merci à nos camarades de **la promotion 2021** *de Mathématiques et nos amis pour leur aider et leur humour .*

Aussi, nous adressons nos sincères remerciements à nos parents, et à toute la famille.

Finalement ,Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Merci à tous !

TABLE DES MATIÈRES

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter quelques résultats classiques d'existence et d'unicité pour certaines équations abstraites à opérateurs monotones ou pseudo-monotones avec quelques applications sur la résolution de problèmes aux limites elliptiques.

Mots clés : Opérateurs monotones, existence, unicité, équations elliptiques.

Abstract

The objective of this thesis is to present some classical results of existence and uniqueness for some abstract equations of monotonic operators or pseudo-monotonous, with some applications to solve elliptic boundary value problems.

Key words : Monotonic operators, existence, uniqueness, elliptic equations.

NOTATIONS

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes

$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension N, N un nombre naturel non nul.
x	vecteur de $\mathbb{R}^N, x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq N$.
$\mathrm{d}x$	mesure de Lebesgue N-dimensionnelle.
$\lvert E\rvert$	ou $mes(E)$ est la mesure de Lebesgue d'un ensemble E.
Ω	un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
$\langle .,. \rangle$	crochet de dualité entre X et son dual.
$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$	intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue.
$\mathrm{Supp}\, u$	Support de la fonction u , Supp $u = \overline{\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}}$.
∇u	gradient de u, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
$\mathrm{div}\, u$	divergence du vecteur u, $\mathrm{div}\, u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_N}$.
$f_n \to f$	signifie que la suite (f_n) converge vers f.
$f_n \rightharpoonup f$	signifie que la suite (f_n) converge faiblement vers f.
$L^p(\Omega)$	$= \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } \left(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p \right) dx < +\infty \text{ tel que } 1 \leq p < \infty \right\}$.

$\|u\|_p =$	$\left[\int\limits_{\Omega} \|u(x)\|^p dx\right]^{1/p}.$
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $\exists M > 0,\ \|\|u(x)\|\|_{L^\infty} \leq M$ p.p. $\}$.
P'	conjugué de Hölder de $p, p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.
$D(\Omega)$	espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \{u \in L^p(\Omega) \| \nabla u \in L^p(\Omega)\}$.
p.p.	presque partout.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
$W^{-1,p'}(\Omega)$	dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$	$= W^{1,2}(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	$= W_0^{1,2}(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	dual de $H_0^1(\Omega)$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le travail présent porte sur une méthode de résolution de certaines équations abstraites à opérateurs monotones ou pseudo-monotones, étayée par des applications sur des problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Le mémoire est structuré en trois chapitres. Dans le premier chapitre nous donnons quelques définitions et résultats préliminaires avec des outils d'analyse fonctionnelle essentiels à l'atteinte des objectifs visés par le présent mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on aborde dans sa première partie des notions importantes pour la méthode des opérateurs monotones, puis on présente des théorèmes principaux d'existence pour des équations abstraites.

Le dernier chapitre est consacré à la résolution de deux problèmes aux limites pour des équations aux dérivées partielles non linéaire, en appliquant les résultats du chapitre deux.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats classiques qui seront utilisés tout au long de ce travail. En premier lieu, on rappelle quelques définitions et résultats sur les espaces fonctionnels. On présentera ensuite quelques résultats de compacité, des lemmes techniques et quelques inégalités élémentaires.

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1. *(ouvert Lipschitzienne)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, On dit que Ω est Lipschitzienne s'il existe un application Lipschitzienne f tell que leurs domaine définition inclus Ω .

Définition 1.2. *(Fonction de carathéodory)*
Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction.F est dit de Carathéodory si est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, continue par rapport à $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Définition 1.3. *(Espace des fonctions tests)*

L'espace $D(\Omega)$ *(ou* $C_0^\infty(\Omega)$*) est l'ensemble des fonctions* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^\infty(\Omega)$ *et à support compact dans* Ω *.*

$D(\Omega)$ *est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle fonction test.*

Définition 1.4. *(Espace dual)*

Le dual topologique d'un espace vectoriel E *sur le corps* $\mathbb{K}$ *est l'ensemble des formes linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{K}$*. On note cet ensemble par* $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$*.*

E' *muni de la norme* $\|.\|$ *définie par*

[1] $$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Définition 1.5. *(Espace bidual)*

Le bidual topologique d'un espace vectoriel E *sur le corps* $\mathbb{K}$ *est l'ensemble des formes linéaires continues de* E' *dans* $\mathbb{K}$*. On note cet ensemble par* $E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$*.*

E'' *muni de la norme* $\|.\|$ *définie par*

[2] $$\|\varphi\|_{E''} = \sup_{f \in E', \|f\|=1} |\varphi(f)| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\varphi(f)| = \sup_{f \in E', \|f\| \neq 0} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|}.$$

1. On note la valeur de f en x par $f(x) = \langle f, x \rangle$.
2. On note la valeur de φ en f par $\varphi(f) = \langle \varphi, f \rangle$.

Définition 1.6. *(L'espace Séparable)*

Soit $(X; d)$ *un espace métrique. On dit que* X *est séparable si* X *admet une partie dénombrable et dense.*

Définition 1.7. *(Espace réflexif)*

Soit E *un espace vectoriel normé réel. Pour tout* $x \in E$*, On défini l'application* J_x *de* E' *dans* $\mathbb{K}$ *par* $J_x(f) = f(x)$ *pour tout* $f \in E'$*. On a*

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E'}\|x\|_E$$

et donc J_x *est une forme linéaire continue sur* E'*, On dit que* E *est un espace réflexif si* $Im(J) = E''$ *, ce qui revient à dire que* J_x *est surjective.*

1.2 Espaces fonctionnels classiques

Les outils d'analyse fonctionnelle sont les ingrédients quasiment essentiels à l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment les espaces de Lebesgue [3] et de Sobolev [4]. Les espaces de fonctions à valeurs vectorielles sont adaptés à l'étude de problèmes d'évolution. On rappelle dans cette partie des résultats fondamentaux pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

3. Henri Léon Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration.
4. Serguei Lvovitch Sobolev (1908-1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque sovié- tique.

1.2.1 Espaces de Lebesgue

On suppose que Ω est un ouvert borné régulier (Lipschitzienne ou de classe C^1) de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω est noté $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour $1 \leq p < \infty$, on dit que $f \in L^p(\Omega)$ si f est mesurable et $|f|^p$ est intégrable. Cet espace est mini de la norme suivante

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

On dit que $f \in L^\infty(\Omega)$ si f est mesurable et

$$\exists C \geq 0, \quad |f(x)| \leq C, \qquad \text{p.p} \quad x\text{dans}\Omega.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est munit de la norme suivante

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \text{ tel que } |f(x)| \leq C \ p.p \ x \text{ dans } \Omega\}.$$

Théorème 1.1. *(Inégalité de Hölder)*
Soient p et q deux exposants conjugués tels que $1 \leq p, p' \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Dans le cas particulier où $p = p' = 2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Théorème 1.2.

L'espace $\left(L^p(\Omega), \|f\|_{L^p(\Omega)}\right)$ *est un espace de Banach*[5] *et il est de plus un espace de Hilbert*[6] *si* $p = 2$.

Théorème 1.3. *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue).*

Soit (f_n) *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$, *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *On suppose que*

a) $f_n \to f$ *p.p sur* Ω.

b) Il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ *non négative telle que pour tout* $n, |f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p sur* Ω.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.

Théorème 1.4. *(Théorème inverse de convergence dominée de Lebesgue)*

Soient (f_n) *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$ *tels que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Alors il existe une sous-suite extraite* (f_{n_k}) *telle que*

a) $f_{n_k} \to f$ *p.p* sur Ω.

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ *et p.p sur* Ω, *avec* $h \in L^p(\Omega), h$ *non négative.*

Réflexivité, séparabilité et dualité de $L^p(\Omega)$.

Le tableau suivant récapitule les principales propriété de $L^p(\Omega)$

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$	oui	oui	$L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$L^1(\Omega)$	non	oui	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	non	non	contient strictement $L^1(\Omega)$

5. Stefan Banach (1892 - 1945) est un mathématicien polonais.
6. David Hilbert (1862 - 1943) est un mathématicien allemand.

Convergence faible dans les $L^p(\Omega)$

Proposition 1.1.

Soient (u_n) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite faiblement convergente, c'est-à-dire

$$\exists (u_{n_k}), \exists u \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega), \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega u_{n_k} \varphi dx = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Proposition 1.2.

Soient (u_n) une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite faiblement étoile convergente, c'est-à-dire

$$\exists (u_{n_k}), \exists u \in L^\infty(\Omega), \forall \varphi \in L^1(\Omega), \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega u_{n_k} \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Proposition 1.3.

Soient p, p' et r trois réels dans $[0, \infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}$, (u_n) est une suite de $L^p(\Omega)$ qui converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$, et (v_n) est une suite de $L^{p'}(\Omega)$ qui converge fortement vers v dans $L^{p'}(\Omega)$ alors la suite produit $(u_n v_n)$ converge faiblement vers uv dans $L^r(\Omega)$.

En particulier, si $u_n \to u$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et $v_n \to v$ fortement dans $L^2(\Omega)$ alors $u_n v_n \to uv$ converge faiblement dans $L^1(\Omega)$.

Proposition 1.4.

Si (u_n) est une suite de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ telle que

i) *$\|u_n\| \leq C < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

ii) *(u_n) possède qu'un seul point adhérent faible u.*

Alors la suite $u_n \to u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$.

Lemme 1.1.

Soit (u_n) *une suite de* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *telle que*

i) $u_n \to u$ *presque partout dans* Ω.

ii) $\|u_n\| < C < +\infty$.

Alors $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$.

1.2.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.8.

Soit Ω *un domaine non vide de* $\mathbb{R}^d$, m *est un entier naturel et* p *un réel de* $[1, +\infty[$. *On définit les espaces de Sobolev par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega);\ |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\},$$

où pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ *on note* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$ *et* $D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$.

Dans cette définition, les dérivées partielles de f *sont prises au sens faible des distributions. L'espace* $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme naturelle*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad si \quad p < \infty,$$

et pour $p = \infty$,

$$\|f\|_{W^{m,\infty}} = \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Proposition 1.5.

Pour la norme naturelle, l'espace

i) $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

ii) si $p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable.*

iii) si $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

1.2.3 Le cas $m = 1$

Définition 1.9.

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *et soit* $1 \leq p \leq \infty$. *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}$ *est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, \ldots, \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N \Big\},$$

pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *on note* $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ [7], *si* $p = 2$, *alors nous notons*

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

L'espace $W^{1,p}$ *est muni de la norme suivante*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

ou bien de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \ (\text{ si } 1 \leq p < \infty) \ .$$

7. La dérivée au sens de distribution

Remarque 1.1.

On a

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} \equiv \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|.$$

L'espace H^1 est un espace de Hilbert [8] *muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{1/2},$$

est une norme équivalente à celle de $W^{1,2}$.

Définition 1.10.

Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture (l'adhérence) de $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ $\left(W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}\right)$.

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{LP}^p\right)^{1/p} (si 1 \leq p < \infty). \tag{1.1}$$

La norme (1.1) est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 1.6.

Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ *et* $\tilde{u}$ *est définie par*

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & sur \quad \Omega, \\ 0 & sur \quad \Omega^c, \end{cases}$$

alors $\tilde{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d)$

Théorème 1.5. *(de densité)*

Si l'ouvert Ω *est Lipschitzien, l'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^1(\Omega)$ *i.e. Pour tout élément* u *de* $H^1(\Omega)$ *il existe une suite* (u_n) *de* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *tel que* $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)}$ *converge vers* 0.

Proposition 1.7.

L'espace $W_0^{1,p}$ *est un espace de Banach séparable. De plus réflexif pour* $1 < p < \infty$.

L'espace H_0^1 *est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 1.2.

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p < \infty$ *et par* $H^{-1}(\Omega)$ *l'espace dual de* $H_0^1(\Omega)$*. Pour les résultats des espaces* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $W^{1,p}(\Omega)$ *le lecteur pourra trouver toutes les démonstrations dans les ouvrage [1, 2, 3, 6]. Citons cependant, que dans la plupart des cas, les espaces* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $W^{1,p}(\Omega)$ *ne coïncident pas sauf dans le cas où* $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 1.6. *(inégalité de Poincaré-Friedrichs)*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$*, alors il existe une constante positive* $C_p(\Omega)$ *telle que pour tout* u *de* $H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Théorème 1.7. *(inégalité de Poincaré)*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$ *et* $1 \leq p < \infty$*, alors il existe une constante positive* $C_p(\Omega)$ *telle que pour tout* u *de* $W_0^{1,p}(\Omega)$*,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega) \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}.$$

Théorème 1.8. *(de Lax-Milgram)*

Soient H *un espace de Hilbert et* $a(\cdot,\cdot)$ *une forme bilinéaire sur* H*, continue et coercive* $(\exists \alpha > 0\ ,\ a(v,v) \geq \alpha |v|^2\ \forall v \in H)$.

Alors pour tout φ *de* H'*, il existe* u *de* H *unique tel que*

$$\forall c \in H, \quad a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle_{H',H},$$

l'application linéaire $\varphi \mapsto u$ *étant continue de* H' *dans* H*.*

De plus, si $a(\cdot,\cdot)$ *est symétrique, alors* u *est caractérisé par la propriété*

$$u \in H \quad \textit{et} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle_{H',H} = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle_{H',H} \right\}.$$

1.3 Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsque nous étudions les EDP elliptiques. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes L^p. Ce résultat de compacité est un outil fort dans l'étude des EDP qui nous permet de passer d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.9. *(Théorème de compacité)*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *avec* $N \geq 1$ *et* $1 \leq p < \infty$. *Toute partie bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est relativement compact dans* $L^p(\Omega)$.

Ceci revient à dire de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, *on peut extraire une sous suite qui converge dans* $L^p(\Omega)$.

1.4 Formules de Green dans les espaces de Sobolev

Théorème 1.10. *(Formule de Green)*

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné à frontière Lipshitzienne. Alors si* $u, \varphi \in H^1(\Omega)$ *on a la formule de Green suivante*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = -\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u \varphi \eta_i \, \mathrm{d}s \quad \forall i = 1, \ldots N$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)^\top$ *est la normale extérieure à* Ω.

Cette formule est la généralisation de l'intégration par parties dans $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 1.1. *(Formule de divergence)*

Soit $w \in (H^1(\Omega))^N$ *et* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *alors*

$$\int\limits_{\Omega} -\operatorname{div}(w) \varphi dx = \int\limits_{\Omega} w \nabla \varphi dx - \int\limits_{\partial\Omega} w \eta \varphi \, \mathrm{d}s$$

Exemple 1.1.

Soient $u \in H^2(\Omega)$ *et* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *alors*

$$\int\limits_{\Omega} -\operatorname{div}(a(x,u) \nabla u) \varphi dx = \int\limits_{\Omega} a(x,u) \nabla u \nabla \varphi dx - \int\limits_{\partial\Omega} a(x,u) \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi \, \mathrm{d}s,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\nabla u, \eta)$.
Si $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, *nous obtenons*

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(a(x,u)\nabla u)\varphi dx = \int_{\Omega} a(x,u)\nabla u \nabla \varphi dx.$$

1.5 Théorèmes de points fixes

En analyse non linéaire, les théorèmes de point fixes s'appliquent pour justifier l'existence d'une solution par une technique de passage au cas non linéaire à partir de cas linéaires bien maitrisés. Il existe plusieurs théorèmes de points fixes et leurs applications varient selon le modèle et les hypothèses.

Théorème 1.11. *(Théorème du point fixe de Brouwer)*

Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^N$ *dans elle-même admet un point fixe.*

Théorème 1.12. *(Théorème de points fixes de Schauder)*
Soit E *un espace vectoriel normé et* C *une partie convexe fermée de* E. *Si* T *est une application continue compacte de* C *dans* C, *elle admet au moins un point fixe dans* C.

Théorème 1.13. *(Théorème de points fixes de Tikhonov)*
Soit $T : K \subseteq X \to K$ *une application continue laissant invariant un ensemble non vide, convexe et compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Alors* T *admet un point fixe dans* K.

Corollaire 1.2.

(Théorème de points fixes de Schauder-Tikhonov). Soit X un espace de Banach réflexif séparable. On suppose que

i) K est un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de X.

ii) l'application $T : K \to K$ est faiblement séquentiellement continue, c'est-à-dire pour toute suite (x_n) de K qui converge faiblement vers x, lorsque $n \to \infty$, la suite $T(x_n)$ de K converge faiblement vers $T(x)$.

Alors, T admet au moins un point fixe dans K.

Théorème 1.14.

Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C un sous-ensemble convexe de E et f une fonction continue de C dans C. Si $f(C)$ est continu dans un sous-ensemble compact de C, alors f a un point fixe.

1.6 Lemmes techniques

Lemme 1.2. *(Inégalité de Cauchy)*

Pour tout réel positif a et b et pour tout ε strictement positif on a

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$$

Lemme 1.3. *(Inégalité de Young)*

Soient p et p' deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour tout réel positif a et b, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Lemme 1.4. *(de Gronwall)*
Soient $y \in L^\infty(]0,T[)$ *et* $g \in L^1(]0,T[)$ *deux fonctions positives et* y_0 *une constante positive, telles que*

$$\text{pour presque tout } t \in]0,T[, y(t) \leq y_0 + \int_0^t g(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Alors, on a

$$\text{pour presque tout } t \in]0,T[, \quad y(t) \leq y_0 \exp\left(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

CHAPITRE 2

MÉTHODE DES OPÉRATEURS MONOTONES

2.1 Méthode des opérateurs monotones

2.1.1 Opérateurs monotones

Soit V un espace de Banach réflexif, et $A : V \to V'$ un opérateur.

Définition 2.1.

On dit que

1) *A est monotone si et seulement si*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

2) *A est strictement monotone si et seulement si*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \quad \forall u, v \in V, \quad u \neq v.$$

Exemple 2.1.

L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *défini par* $Au = -\Delta u$ *est monotone,* $H_0^1(\Omega)$ *étant muni de la norme du gradient. En effet, pour tout* $u, v \in H_0^1(\Omega)$*, on a*

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_\Omega \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v)\,\mathrm{d}x \\ &= \|u - v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

2.1.2 Opérateurs bornés

Définition 2.2.

Soient V *et* W *deux espaces de Banach et soit* $A : V \to W$ *un opérateur. On dit que* A *est borné s'il envoie tout borné de* V *dans un borné de* W*, c'est-à-dire*

$$\forall r > 0, \quad \exists C_r > 0 : \quad A\left(B_V(0, r)\right) \subset B_W\left(0, C_r\right).$$

Exemple 2.2.

L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *défini par* $Au = -\Delta u = -\operatorname{div}(\nabla u)$ *est Borné. Soient*

$u \in H_0^1(\Omega)$ *et* $r > 0$, *pour tout* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *on a*

$$\begin{aligned}
\langle Au, \varphi \rangle &= \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega |\nabla \varphi|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_V \|\varphi\|_V \\
&\leq r \|\varphi\|_V .
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle Au, \varphi \rangle| = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} \left| \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \right|,$$

ainsi

$$\|Au\|_{V'} \leq r,$$

d'où

$$A\left(B_V(0, r)\right) \subset B_{V'}\left(0, r\right).$$

2.1.3 Opérateurs hémicontinus

Définition 2.3.

A est dit hémicontinu, si pour tous $u, v, w \in V$, *l'application*

$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle,$$

est continue de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.

L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *défini par* $Au = -\Delta u = -\operatorname{div}(\nabla u)$ *est hénicontinu.*

En effet, soient $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ *et* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}\langle A(u+tv), w\rangle &= \int_\Omega \nabla(u+tv)\cdot\nabla w \\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w + t\int_\Omega \nabla v\nabla w \\ &= a + bt\end{aligned}$$

ce qui montre que $t \to \langle A(u+tv), w\rangle$ *est continue.*

2.2 Théorème d'existence

Théorème 2.1.

Soient V *un espace de Banach réflexif séparable et* $A : V \to V'$ *un opérateur*

1) *borné,*

2) *hemicontinu,*

3) *coercitif, au sens*

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty$$

4) *monotone.*

Alors, A *est surjectif .*

Définition 2.4. *(Propriété de type (M))*

On dit que l'opérateur A est de type (M) si

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \\ Au_n \rightharpoonup \xi \text{ dans } V' \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow Au = \xi.$$

2.2.1 Opérateurs pseudo-monotones

Définition 2.5.

Soit $A : V \to V'$ un opérateur.

1) *On dit que A est pseudo-monotone (au sens 1) si*

$$\left.\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle, \quad \forall v \in V.$$

2) *On dit que A est pseudo-monotone (au sens 2) si*

$$\left.\begin{array}{r} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \\ Au_n \rightharpoonup \xi \text{ dans } V' \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow Au = \xi \text{ et } \langle Au_n, u_n\rangle \to \langle Au, u\rangle.$$

Proposition 2.1.

Si A est borné, alors A est pseudo-monotone au sens 1 si et seulement s'il est pseudo-monotone au sens 2.

Démonstration.

Supposons d'abord que A soit pseudo-monotone au sens 1 (pas nécessairement borné). Soit (u_n) une suite telle que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \ , \\ Au_n \rightharpoonup \xi \text{ dans } V' \ , \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle. \end{cases}$$

On déduit que

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = \limsup_{n\to\infty} \left(\langle Au_n, u_n\rangle - \langle Au_n, u\rangle\right) \leq 0,$$

par pseudo-monotonie au sens 1, il vient que pour tout $v \in V$

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle,$$

en développant le crochet de gauche, on trouve

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n\rangle - \langle \xi, v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle,$$

Prenant $v = u$, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \geq \langle \xi, u\rangle,$$

d'où

$$\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle \xi, u\rangle.$$

Il résulte que

$$\langle \xi, u - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle.$$

Prenant maintenant $v = u + w$, on en déduit que $\xi = Au$ et que A est pseudo-monotone au sens 2.

Supposons maintenant que A soit pseudo-monotone au sens 2 et borné.

Soit $v \in V, (u_n)$ une suite telle que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0. \end{cases}$$

Comme A est borné, on peut extraire une suite noté $u_{\sigma(n)}$ telle que

$$Au_{\sigma(n)} \rightharpoonup \xi \text{ et } \langle Au_{\sigma(n)}, u_{\sigma(n)} - v\rangle \to \langle Au, u - v\rangle.$$

Comme

$$\langle Au_{\sigma(n)}, u\rangle \to \langle \xi, u\rangle,$$

on a d'abord

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle Au_{\sigma(n)}, u_{\sigma(n)}\rangle \leq \langle \xi, u\rangle.$$

Par pseudo-monotonie au sens 2, il vient que

$$\xi = Au,$$

et

$$\langle Au_{\sigma(n)}, u_{\sigma(n)}\rangle \to \langle Au, u\rangle.$$

On voit donc que

$$\langle Au_{\sigma(n)}, u_{\sigma(n)} - v\rangle \to \langle Au, u - v\rangle,$$

A est pseudo-monotone au sens 1 □

Proposition 2.2.

Si $A : V \to V'$ est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone (au sens 1).

Définition 2.6.

Soit X un espace de Banach séparable réflexif. Un opérateur T de X dans X' est dit du type du "calcul des variations", s'il est borné et si on peut le représenter par

$$Tv = A(v, v), \tag{2.1}$$

où A est un opérateur défini comme suite

$$\begin{aligned} A: \quad & X \times X \to X' \\ & (u, v) \mapsto A(u, v) \end{aligned}$$

et vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \forall u \in X, v \mapsto A(u, v) \text{ est hémicontinu borne de } X \to X', \\ \langle A(u, u) - A(u, v), u - v \rangle \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\forall v \in X, u \mapsto A(u, v) \text{ est borné hémicontinu de } X \to X'. \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \text{Si } u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \text{ faible et si } \langle A(u_n, u_n) - A(u_n, u), u_n - u \rangle \to 0, \\ \text{alors } , \forall v \in X, A(u_n, v) \to A(u, v) \text{ dans } X' \text{ faible.} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X \text{ faible et si } A(u_n, v) \rightharpoonup \psi \text{ dans } X' \text{ faible} \\ \text{alors } , \langle A(u_n, v), u_n \rangle \to \langle \rangle \psi, u \rangle \ . \end{cases} \tag{2.5}$$

Proposition 2.3.

T est du calcul des variations $\Rightarrow$ T est pseudo-monotone.

Théorème 2.2.

Soit T un opérateur pseudo-monotone coercif. Alors pour tout $f \in X'$, l'équation $Tu = f$ admet au moins une solution.

2.2.2 Théorème de la surjectivité

Lemme 2.1.

Soit $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *une application continue. Supposons qu'il existe* $\rho > 0$ *tel que* $T(\xi) \cdot \xi \geq 0$*, pour tous* ξ *avec* $|\xi| = \rho$*. alors il existe* ξ *avec* $|\xi| \leq \rho$ *tel que* $T(\xi) = 0$*.*

Démonstration.

Par contradiction , supposons que $T(\xi) \neq 0$ sur $\overline{B(0,\rho)}$. Nous considérons l'application définie sur $\overline{B(0,\rho)}$ dans elle-même par

$$\xi \to \frac{-T(\xi)\rho}{|T(\xi)|}.$$

D'après le théorème de point fixe de Brouwer, il existe un point fixe ξ tel que

$$\xi = \frac{-T(\xi)\rho}{|T(\xi)|}.$$

on déduire que $|\xi| = \rho$. D'autre part

$$T(\xi) \cdot \xi = -\rho|T(\xi)| < 0,$$

contradiction avec le fait que $T(\xi) \cdot \xi \geq 0$ vérifie $|\xi| = \rho$ pour tout ξ. $\square$

Théorème 2.3. *(Théorème de la surjectivité)*

Soit V *un espace de Banach réflexif et séparable. Soit* $A : V \to V'$ *un opérateur borné, coercitif, pseudo-monotone(au sens 1), alors* A *est surjectif, c'est-à-dire pour tout* $f \in V'$ *il existe* $u \in V$ *tel que* $A(u) = f$*.*

2.2.3 Théorème de Leray-Lions

Théorème 2.4. *(Leray-Lions)*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $p \in]1, \infty[$. *Soit* $k : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *et* f : $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *deux fonctions de Carathéodory. Supposons que* f *et* g *vérifient les propriétés suivants*

$(H1)$ *Il existe* $b \in L^{p'}(\Omega)$ *et une constante* β *tels que*

$$|k(x,s,\xi)| \leq b(x) + \beta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}), \quad \forall (x,s,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

$(H2)$ *Il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$k(x,s,\xi).\xi \geq \alpha |\xi|^p, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

$(H3)$ *Pour* x *et* s *fixés,* k *est monotone par rapport à* ξ.

$(H4)$ $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Alors il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que*

$$\int_\Omega k(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_\Omega F(x,u,\nabla u) v \, \mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Les opérateurs de la forme $Lu = -div(F(x,u,\nabla u))$ *sont appelés opérateurs de Leray-Lions .*

CHAPITRE 3

QUELQUES APPLICATIONS

3.1 Étude d'un problème elliptique non linéaire

Dans cette section nous étudieront le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -div(k(x,u,\nabla u)) = F(x,u,\nabla u), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

telle que $k : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions Carathéodory, vérifiant les propriétés suivantes

$(H1)$ Il existe $b \in L^{p'}(\Omega)$ et $\beta > 0$ telles que

$$|k(x,s,\xi)| \leq b(x) + \beta\left[|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right], \quad \forall (x,s,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N..$$

$(H2)$ Il existe $\alpha > 0$ telle que

$$k(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

$(H3)$ Pour x et s fixés, k est monotone par rapport à ξ, c'est-à-dire

$$[k(x,s,\xi) - k(x,s,\eta)]\cdot[\xi - \eta] > 0, \quad \xi \neq \eta.$$

$(H4)$ $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Théorème 3.1.

Sous les hypothèse $(H1)-(H4)$, l'opérateur $A(u) = -div(k(x,u,\nabla u))$ est borné, pseudo-monotone et coercif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$

Démonstration.

1) L'opérateur A est bien défini.

Pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$|\langle Au, v\rangle| = \left| -\int_\Omega div(k(x,u,\nabla u))v \,\mathrm{d}x \right|.$$

En utilisant la formule de Green, l'hypothèse $(H1)$ ensuite l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle Au, v\rangle| &= \left|\int_\Omega k(x,u,\nabla u)\nabla v \,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_\Omega |b(x)||\nabla v| \,\mathrm{d}x + \beta\left[\int_\Omega |u|^{p-1}|\nabla v|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\,\mathrm{d}x\right] \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,p}} + \beta\left[\|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right]
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Poincarè, on trouve

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{W^{-1,p'}} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle Au, v\rangle| \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} + \beta \left[\|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right] \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} + \beta \left[c\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right] \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} + C'\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

où $C' = (1 + C)\beta$.

2) L'opérateur A est borné.

Soit $u \in B(u_0, r)$, en utilisant (**??**)50), on obtient

$$\begin{aligned}
\|Au\|_{W^{-1,p'}} &= \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle Au, v\rangle| \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} + C'\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} + C'\|u - u_0 + u_0\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} + C'' \left(r^{p-1} + \|u_0\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right) \\
&= R,
\end{aligned}$$

donc

$$A\left(B_{W_0^{1,p}(\Omega)}(u_0, r)\right) \subset B_{W^{-1,p'}}(0, R).$$

3) L'opérateur A est coercif.

En utilisant la formule de Green et l'hypothèse $(H2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle Au, u\rangle &= -\int_\Omega div(k(x,u,\nabla u))u \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega k(x,u,\nabla u)\nabla u \,\mathrm{d}x \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} &\geq \lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\alpha\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \\
&\geq \lim_{\|u\|\to+\infty} \alpha\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&= +\infty \text{ (car } p>1).
\end{aligned}$$

4) L'opérateur A est pseudo-monotone au sens 2 .

Soit (u_n) une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases}
u_n \rightharpoonup u, \\
-div(k(x,u_n,\nabla u_n)) \rightharpoonup \xi, \\
\limsup\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega k(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \leq \langle \xi, u\rangle.
\end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse $(H1)$, on a

$$\begin{aligned}
|k(x,u_n,\nabla u_n)|^{p'} &\leq C_1\left(|b(x)|^{p'} + \beta^{p'}(|u_n|^p + |\nabla u_n|^p)\right) \\
&\leq C_2\left(|b(x)|^{p'} + |u_n|^p + |\nabla u_n|^p\right).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |k(x,u_n,\nabla u_n)|^{p'} &\leq C_3 \left(\int_{\Omega} |b(x)|^{p'} + \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p \right) \\ &\leq C_3 \left(\|b(x)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + C_4 \right).\end{aligned}$$

Alors, on peut extraire une sous suite de u_n note de même telle que.

$$k(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup g \text{ dans } L^{p'}(\Omega), \tag{3.2}$$

et

$$\xi = -div(g).$$

En utilisant $(H3)$, pour tout $\varphi \in L^p(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} (k(x,u_n,\nabla u_n) - k(x,u_n,\phi)) \cdot (\nabla u_n - \phi) > 0 \, \mathrm{d}x,$$

Alors

$$\int_{\Omega} k(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} k(x,u_n,\nabla u_n)\phi \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} k(x,u_n,\phi) \cdot (\nabla u_n - \phi) \; \mathrm{d}x > 0.$$

En posant $k(x,u_n,\nabla u_n) = g_n$, on trouve

$$\int_{\Omega} g_n \nabla u_n \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} g_n \phi \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} k(x,u_n,\phi) \cdot (\nabla u_n - \phi) \; \mathrm{d}x > 0. \tag{3.3}$$

$u_n \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$, par le théorème l'inverse de convergence dominée de

Lebesgue, on peut extraire une sous suite noté (u_n) telle que

$$u_n \to u \qquad \text{p.p dans } \Omega,$$

et dominée par $h \in L^p(\Omega)$.

k est une fonction de Carathéodory, alors

$$k(x, u_n, \phi) \to k(x, u, \phi) \qquad \text{p.p dans } \Omega,$$

grâce à $(H1)$, on déduit que

$$\begin{aligned} |k(x, u_n, \phi)| &\leq b(x) + \beta(|u_n|^{p-1} + |\phi(x)|^{p-1}) \\ &\leq b(x) + \beta(|h(x)|^{p-1} + |\phi(x)|^{p-1}), \end{aligned}$$

alors d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$k(x, u_n, \phi) \to k(x, u, \phi) \qquad \text{dans } L^{p'}(\Omega),$$

ainsi

$$\int_\Omega k(x, u_n, \phi) \cdot (\nabla u_n - \phi) \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega k(x, u, \phi) \cdot (\nabla u - \phi) \,\mathrm{d}x,$$

d'après (3.2), on obtient

$$\int_\Omega g_n \phi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega g\phi \,\mathrm{d}x.$$

En passent à la limite supérieur dans (3.3), on déduit

$$\int_\Omega g \nabla u \,\mathrm{d}x - \int_\Omega g\phi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega k(x, u, \phi) \cdot (\nabla u - \phi) \,\mathrm{d}x \geq 0,$$

puis

$$\int_{\Omega} (g - k(x, u, \phi)) \cdot (\nabla u - \phi) \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

On prenant (astuce de minty), pour tout $\phi \in D(\Omega)$

$$\phi = \nabla u - t\varphi, \qquad t > 0,$$

il vient

$$\int_{\Omega} (g - k(x, u, \nabla u - t\varphi)) \cdot \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

lorsque $t \to 0$, on déduit que

$$g - k(x, u, \nabla u - t\varphi) \cdot \varphi \to (g - k(x, u, \nabla u)) \cdot \varphi,$$

et

$$\begin{aligned} |g - k(x, u, \nabla u - t)| \, |\varphi| &\leq |g||\varphi| + |\varphi||b| + \beta|\varphi||u|^{p-1} + \beta c|\nabla u|^{p-1}|\varphi| + \beta c|\varphi||t|^{p-1}|\varphi|^{p-1} \\ &\leq |g||\varphi| + |\varphi||b| + \beta|\varphi||u|^{p-1} + \beta c|\nabla u|^{p-1} + \beta c|\varphi|^{p} \end{aligned}$$

car $|t| \leq 1$, d'où

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |g||\varphi| + |\varphi||b| + \beta|\varphi||u|^{p-1} + \beta c|\nabla u|^{p-1} + \beta c|\phi|^{p} \\ &\leq \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p}(\Omega)} + \|b\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p}(\Omega)} \\ &\quad + \beta c\|u\|^{p-1}_{L^{p}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p}(\Omega)} + \beta c\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p}(\Omega)} \|\phi\|_{L^{p}(\Omega)} + \beta c\|\phi\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} < \infty, \end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\int_{\Omega} (g - k(x, u, \nabla u)) \cdot \varphi \geq 0,$$

donc

$$g - k(x, u, \nabla u) = 0,$$

ce qui implique que

$$g = k(x, u, \nabla u),$$

c'est à dire

$$\xi = Au.$$

D'après $(H3)$, on a

$$\int_{\Omega} (k(x, u_n, \nabla u_n) - k(x, u_n, \nabla u)) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, \mathrm{d}x > 0$$

donc

$$\int_{\Omega} k(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, \mathrm{d}x > \int_{\Omega} k(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega} k(x, u_n, \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, \mathrm{d}x \tag{3.4}$$

Comme précédent, on prouve que

$$\int_{\Omega} k(x, u_n, \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, \mathrm{d}x \to 0$$
$$\int_{\Omega} k(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, \mathrm{d}x \to \int_{\Omega} k(x, u, \nabla u) \, \mathrm{d}x \cdot \nabla u$$

Passant à la limite inférieure dans (3.4), il vient que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega k(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega k(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x = \langle Au,u\rangle,$$

puisque $\xi = Au$, alors

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega k(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,\mathrm{d}x \leq \langle \xi,u\rangle = \langle Au,u\rangle.$$

Ainsi

$$\int_\Omega k(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\,\mathrm{d}x = \langle Au_n,u_n\rangle \to \langle Au,u\rangle.$$

A est pseudo-monotone au sens (3.3).

□

3.2 Application sur le p-Laplacian

Théorème 3.2.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et soit l'opérateur

$$A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow V' = W^{-1,p'}(\Omega),$$

défini par

$$Au = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right), \quad 1<p<\infty.$$

Alors, l'opérateur A vérifie toutes les hypothèses du théorème 2.1, ainsi

$$\forall f\in W^{-1,p'}(\Omega), \quad \exists u\in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{tel que} \quad Au=f.$$

Démonstration.

D'après la formule de green, on a

$$\langle Au, \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En effet, posant $b = |\nabla u|^{p-2}\nabla u = (b_i)_{1\leq i\leq N}$.

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\varphi \,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega \operatorname{div} b\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\varphi \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 1.10 (de Green), on trouve

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\varphi \,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega \operatorname{div} b\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left[\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} b_i(x)\varphi(x)n_i(x) \,\mathrm{d}s\right] \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\left(b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega b\cdot\nabla\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Montrons que l'opérateur A est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}$, soit $r > 0$, pour $u \in$

$B_V(0,r)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\|Au\|_{V'} &= \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|\leq 1}} |\langle Au,\varphi\rangle| \\ &= \sup_{\substack{\varphi\in V\\ \|\varphi\|\leq 1}} \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\cdot|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_V^{p-1}\|\varphi\|_V \\ &\leq r^{p-1}.\end{aligned}$$

D'où $\|Au\|_{V'}\leq r^{p-1}$. Cela montre que $A\left(B_V(0,r)\right)\subset B_{V'}\left(0,r^{p-1}\right)$.

Montrons que l'opérateur A est hémicontinu de V dans V', i.e. l'application

$$t\mapsto\langle A(u+tv),w\rangle,$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u,v,w\in V$, et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers l, et montrons que

$$\langle A\left(u+t_nv\right),w\rangle\to\langle A(u+lv),w\rangle\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle A(u+t_nv), w\rangle &= \int_\Omega |\nabla (u+t_nv)|^{p-2}\nabla(u+t_nv)\nabla w\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |(\nabla u+t_n\nabla v)|^{p-2}(\nabla u+t_n\nabla v)\nabla w\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

et

$$|(\nabla u+t_n\nabla v)|^{p-2}(\nabla u+t_n\nabla v)\nabla w \longrightarrow |(\nabla u+l\nabla v)|^{p-2}(\nabla u+l\nabla v)\nabla w, \quad \text{p.p.}$$

Il existe $M>0$ tel que $|t_n|\leq M$, alors

$$\begin{aligned}||(\nabla u+t_n\nabla v)|^{p-2}(\nabla u+t_n\nabla v)\nabla w| &= |(\nabla u+t_n\nabla v)|^{p-1}|\nabla w|\\ &\leq (|\nabla u|+|t_n||\nabla v|)^{p-1}|\nabla w|\\ &\leq (|\nabla u|+M|\nabla v|)^{p-1}|\nabla w|\\ &\leq C_1(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}|\nabla w|,\end{aligned}$$

où $C_1=\max(1,M)$.

On rappelle que

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i\right)^\alpha \leq \max\left\{1, N^{\alpha-1}\right\}\sum_{i=1}^N a_i^\alpha, \quad \forall a_i\geq 0, \alpha>0. \tag{3.5}$$

En utilisant (3.5), et l'inégalité de Young on trouve

$$\begin{aligned}\Big||(\nabla u+t_n\nabla v)|^{p-2}(\nabla u+t_n\nabla v)\nabla w\Big| C_1 &\left(\leq \frac{|\nabla w|^p}{p}+\frac{(|\nabla u|+|\nabla v|)^p}{p'}\right)\\ &\leq \frac{C_1}{p}|\nabla w|^p+\frac{C_1\max(1,2^{p-1})}{p'}(|\nabla u|^p+|\nabla v|^p).\end{aligned}$$

Le fait que $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, implique que

$$\frac{1}{p}|\nabla w|^p + \frac{\max\left(1, 2^{p-1}\right)}{p'}\left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right) \in L^1(\Omega)$$

D'après théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A\left(u + t_n v\right), w\rangle = \langle A\left(u + tv\right), w\rangle$$

d'où l'hémicontinuité de A.

L'opérateur A est coercitif puisque

$$\begin{aligned}
\lim_{\|v\|_V\to+\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} &= \lim_{\|v\|_V\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x}{\|v\|_V} \\
&= \lim_{\|v\|_V\to+\infty} \frac{\|v\|_V^p}{\|v\|_V} \\
&= \lim_{\|v\|_V\to+\infty} \|v\|_V^{p-1} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

car $1 < p < +\infty$.

Montrons que l'opérateur A est monotone.

On rappelle que

$$\left(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right)(x-y) \geq \alpha|x-y|^p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0.$$

Alors $\forall u, v \in V$

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \nabla(u - v)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{\Omega} \alpha|\nabla u - \nabla v|^{p}\,\mathrm{d}x \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Alors, l'opérateur A vérifie toutes les hypothèses du théorème 2.1 donc

$$\forall f \in W^{-1,p'}(\Omega), \quad \exists u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{tel} \quad \text{que} \quad Au = f.$$

$\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams : *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[2] R. A.Adams, J. Fournier : *Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics*. Academic press Inc, 2nd edition, 2003.

[3] H. Brezis : *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, (2011).

[4] E. Zeidler : *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York (1990).

[5] E. Zeidler : *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/B, Nonlinear monotone operators*, Springer-Verlag, New York, (1990).

[6] M-T.Lacroix-Sonrier : *Distributions Espaces de Sobolev Applications*. ellipses, (1998).

[7] J.-L Lions : *Quelques méthodes de résolution des problèmes au limites non linéaire*. Dunod, Paris, (1969).

[8] R. E. Schowalter : *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, vol.49, (1991).