REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité :[Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles]

Par :

NECIB.Kheira

NEHDI .Fatima zohra.

LARIBI .Nadia

Sur le thème

Résultats d'existence et des stabilité pour des systémes d'équations intégrales via la mesure de non -compacité

Soutenu publiquement le14/07 /2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr.BENIA Kheireddine	MAA	Université Tiaret	Président
Mr.BAGHDAD Said	MCB	Université Tiaret	Encadreur
Mr.SABIT Souhila	MCB	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Tout d'abord, nos remerciements vont aux ***ALLAH*** *qui nous a éclairé le chemin du savoir et de nous avoir donné le bon sens et la grande volonté pour réaliser ce modeste travail.*

Nous tenons à remercier notre encadreur, ***Ms.Baghdad Said****, qui a supervisé notre travail tout en nous laissant une grande marge de liberté, nous le remercions pour son encadrement, sa disponibilité et la pertinence de ses remarques tout au long de la réalisation de ce projet.*

Nous remercions également le président du jury ***Ms.Benia Kheireddine****, et l'examinateur* ***Mme.Sabit Sohila*** *d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

Nous voulons, à cette occasion avec le plus grand honneur, remercier sincèrement tous nos enseignants. Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères gratitudes aux les personnes qui ont vraiment contribué à l'élaboration de la présente de cet mémoire.

Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.

Merci à tous !

Je dédie ce travail à

Tous d'abord Je dédie ce modeste travail à :

D'abord, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur , maman que j'adore.

Je voudrais adresser toute ma gratitude à mon encadraire de ce mémoire M.Said Bghdad pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribués à alimenter ma réflexion.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et d'examiner notre travail.

Je remercie mes frères Mohamed,Houari,Ahmad et Amine mes soeurs Safia,Zahra,Fatima,Hanaa,mahjouba, Chaima et toute ma famille de loin où de près pour leur encouragements.

Mes amies Wiam,Fatima et Kheira .
Merci d'être toujours la pour moi .

Tous mes amies .
Tous mes collègues de ma promotion.
Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mes études.

Nadia...

Je dédie ce travail à

Avec un grand honneur, je tiens à dédier ce modeste travail à : Mes très chers parents pour tout dévouement et bienveillance durant mes années d'étude. Que dieu les gardes.

Mes sœurs : Khadidja, Fatima et Alia pour leurs encouragement permanents, et leur soutien moral.

Mes frères Mohamed, Ahmed , Abd elkader, Hossin , Ismail et Oussama pour leur appui et leur encouragement.

A ma grand-mère , mes oncles et mes tantes, que dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

Mes amies Rahma, Fatima, Nadia, Hayat, Hafida, Sabrina et Nassira ainsi que toute ma promotion.

Tous ceux qui m'ont porté de l'aide, conseils et de bonheur de prés ou de loin durant toutes ces longues années.

Kheira...

———— Je dédie ce travail à ————

Avec l'expression de ma reconnaissance , je dédiece modeste travail à ceux qui , quels que soient les termes embrassés , je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

A l'homme , mon précieux offre du dieu , qui doit ma vie , ma réussite et tout mon respecte : mon cher père.

A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir , qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère .

A ma soeur Meriem , et mais frère Amine, Brahim et Ahmed.

A mes grands-mère , mes oncles, que dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant :Kheira, Sabrina, Hayet, Nadia .... .

Sont oublier mon thrénome Kheira et Nadia pour soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

Fatima zohra...

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domaines des mathématiques, beaucoup des problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes des contacts et de cinètique des gaz peut être formulée comme une équation intégrale. Ainsi, la théorie des équations intégrales a été un domaine de recherche actif dans la mathématique appliquée et la physique mathématique. Dans la théorie des équations intégrales, la branche spéciale et exceptionnelle est créée par des systèmes finis ou infinis d'équations intégrales. D'une part de tels systèmes sont un sujet d'étude très intéressant pour les chercheurs spécialisés dans la théorie des équations intégrales mais d'autre part les systèmes d'équations intégrales jouent un rôle très crucial dans les applications nous référons [1, 4, 5].

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats concernant l'existence et la stabilité des solutions de certains systèmes finis d'équations intégrales non linéaires dans les espaces de fonctions continues, par utilisation de la technique associée à la mesure de non-compacité et les théorèmes du points fixes. Le concept du mesures de non-compactité [en bref MNCs] a été introduit par Kuratowski (1930), ces mesures sont des outils très utiles dans le vaste domaine de l'analyse fonctionnelle non linéaire. Le théorème de Darbo (1955) qui assure l'existence du point fixe est une application importante de ces mesures, puisqu'il généralise à la fois le point fixe classique de Schauder et le principe de contraction de Banach. Ce concept important en science mathématique a été défini par de nombreux auteurs de différentes manières. Au cours des dernières années, de nombreux articles sont parus consacrés aux applications du MNCs pour établir des résultats d'existence et du stabilité pour divers types d'équations intégrales non linéaires voir [7, 8, 9, 10].

Ce mémoire comprend quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons collecté des notions de bases de l'analyse fonctionnelle, ainsi les espaces des fonctions continues et quelque théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre est consacrè à la théorie du MNCs surtout de Kuratowski et de Hausdorff, et on a concentré sur un théorème du point fixe pour les opérateurs condensés due de Darbo.

Dans le troisième chapitre , on a présenter une étude d'existence des solutions pour les équations intégrales couplées

$$\begin{cases} x(t) = f_1\left(t, x(\xi_1(t)), y((\xi_1(t)), \int_0^{(\beta_1(t)} g_1(t, s, x(\eta_1(s)), y(\eta_1(s)))ds\right), \\ y(t) = f_2\left(t, x(\xi_2(t)), y((\xi_2(t)), \int_0^{(\beta_2(t)} g_2(t, s, x(\eta_2(s)), y(\eta_2(s)))ds\right), \end{cases} \tag{1}$$

où f_i, g_i, ξ_i, η_i et β_i satisfaire à certaines conditions. L'outil essentiel dans cette étude est la technique du MNCs et le théorème de point fixe couplé qui est une conséquence directe du théorème de Darbo.

Le quatrième chapitre contient des résultats d'existence et du stabilité des solutions pour un système fini d'équations intégrales quadratiques :

$$\begin{cases} u_1(x,y) = \varphi(x,y) + (Gu_1)(x,y)\int_0^x\int_0^y g(t,s,u_1(t,s),...,u_n(t,s)dsdt, \\ u_2(x,y) = \varphi(x,y) + (Gu_2)(x,y)\int_0^x\int_0^y g(t,s,u_2(t,s),...,u_n(t,s),u_1(t,s))dsdt, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ u_n(x,y) = \varphi(x,y) + (Gu_n)(x,y)\int_0^x\int_0^y g(t,s,u_n(t,s),...,u_{n-2}(t,s),u_{n-1})dsdt, \end{cases} \tag{2}$$

où $x, y \in J = [0,+\infty)\times[0,b]$, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, $G : BC \to BC$ est un opérateur linéaire, $g : J\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue. Le choix du MNC utilisée nous permet d'obtenir l'existence des solutions et même de caractériser ces solutions dans le terme de la stabilité.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. *[17] Soit X un ensemble.* ***Une distance*** *sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y, z \in X$:*

1. $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$.
2. $d(y,x) = d(x,y)$ *(symétrie)* .
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire)* .

Définition 1.1.2. *[17]* ***Un espace métrique*** *est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance sur X.*

Exemple 1.1.1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ un espace métrique*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_2(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{1/2}.$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

Proposition 1.1.1. *[17] On dit que deux distances d_1 et d_2 sur le même ensemble X sont équivalentes s'il existe des constantes k_1 et k_2 telles que :*

$$\forall x, y \in X, d_1(x,y) \leq k_1.d_2(x,y) \text{ et } d_2(x,y) \leq k_2.d_1(x,y).$$

Définitions 1.1.1. 1. *Soit (X,d) un éspace métrique, soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.On appelle* ***boule ouverte*** *(resp.* ***boule fermée****) de centre x et de rayon r ensemble*

$$B(x,r) = \{y \in X, d(x,y) < r\}.$$

Resp.

$$B_f(x,r) = \{y \in X, d(x,y) \leq r\}.$$

Pour $0 < r < r\prime$ les inclusions $B(x,r) \subset B_f(x,r) \subset B(x,r\prime)$ sont des conséquences directes de la définition.

2. *On appelle* ***sphère*** *de centre a et de rayon r l'ensemble noté $S(a,r)$ défini dans X par :*

$$S(a,r) = \{x \in X/d(x,a) = r\}.$$

Exemples 1.1.1. *a) $\underline{\mathbb{R}}$: La distance usuelle est donnée par $d(x,y) = |x - y|$.Les boules sont des intervlles. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $B(x,r) =]x - r, x + r[$ et $B_f(x,r) = [x - r, x + r]$.*

b) $\underline{\mathbb{C}}$: On remplace la valeur absolue par le module $d(x,y) = |x - y|$. La boule ouverte de centre $x \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, $B(x,r)$ est le disque ouvert de centre x et de rayon r et $B_f(x,r)$ est le disque fermé.

Définition 1.1.3. *[17] Soit (X,d) un espace métrique.On dit qu'une* ***partie*** *A de X* ***bornée*** *s'il existe une boule fermée $B_f(x_0,r)$ telle que $A \subset B_f(x_0,r)$.*

$$\forall x \in A, d(x_0,x) \leq r.$$

Définition 1.1.4. *[17] Soient X un ensemble et (Y,d) un espace métrique. Si X est un ensemble on dit qu'une* ***fonction*** *$f : X \longrightarrow Y$ est* ***bornée*** *si son image $f(X)$ est bornée.On note $\mathcal{F}_b(X,Y)$ le sous -ensemble de $\mathcal{F}(X,Y) = Y^X$ des fonctions bornées.*

Définition 1.1.5. *[17] Soit (X, d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X on appelle **distance entre** A **et** B la quantité*

$$d(A, B) = inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Exemple 1.1.2. *Si on prend $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \{\frac{1}{n+1}, n \in N\}$ tandis que $A \neq B$ on a*

$$d(A, B) = 0.$$

Ainsi la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{P}(X)$ en général). Il ságit donc d'un abus de notation et il faut bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infimum de la distance entre les points de A et de B.

Définition 1.1.6. *Soient E un espace métrique et A un sous ensemble de E .*

1. *Un ensemble $A_\epsilon \subset E$ est dit ϵ-réseau de A si $A \subset \bigcup_{x \in A_\epsilon} \overline{B}(x, \epsilon)$, où B la boule unitée ouverte dans E.*
2. *L'ensemble A est dit précompact si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ϵ-réseau fini de A.*
3. *L'ensemble A est dit relativement compact si $\overline{A}$ est compact.*

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Définition 1.1.7. *[17] Soient X un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle **topologie sur** X toute partie τ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1) La réunion de toute famille d'éléments de τ appartient à τ .

2) L'intersection de toute famille finie d'éléments de τ appartient à τ .

3) L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à τ .

*Le couple (X, τ) est appelé **espace topologique** de support X. Les éléments de τ sont appelés ouverts de (X, τ) où de τ .*

Proposition 1.1.2. *[17] Une boule ouverte est un ouvert.*

Corollaire 1.1.1. *Un ouvert de (X, d) est l'union quelconque des boules ouvertes.*

Définition 1.1.8. *Dans un espace topologique $(X, \mathcal{O})$. On appelle **fermé** toute partie de X dont le complémentaire est un ouvert .*

Proposition 1.1.3. *La famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés vérifie :*

(F1) Toute intersection des fermés est un fermé.

(F2) Une réunion finie des fermés est un fermé.

(F3) ϕ et X sont des fermés.

Proposition 1.1.4. *[18] Toute boule fermée est un fermé.*

Exemples 1.1.2. *a) Les espaces mértiques sont des espaces topologiques.*

b) Topologie discrète : tous les ensembles sont des ouverts et des fermés. C'est la topologie associée à la distance triviale. Pour vérifier qu'une topologie est discrète, il suffit de vérifier que tous les singletons sont des ouverts. C'est le cas pour $\mathbb{Z}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.

Définition 1.1.9. *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x \in X$. On appelle* ***voisinage*** *de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x noté $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinges de x.*

Propositions 1.1.1. *i) Si (X,d) est un espace métrique et $x \in X$, on a*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X), \exists r > 0, B(x,r) \subset V\}.$$

ii) Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

iii) L'intersection de toute famile finie de voisinage de x est un voisinage de x.

vi) Tout voisinage de x contient x.

Proposition 1.1.5. *Dans un espace topologique $(X,\mathcal{T})$. Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de X est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points*

$$(\mathcal{O} \in \mathcal{T}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{V}(x)).$$

Dans ce paragraphe on travaille avec un espace topologique $(X,\mathcal{T})$.

Définition 1.1.10. *On appelle* ***adhérence*** *où fermeture de A l'ensemble fermé de tous les points adhérents de A noté $\overline{A}$:*

$$\overline{A} = \{x \in A, \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \phi\}.$$

Proposition 1.1.6. *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de X est le plus petit fermé de X contenant A.*

Corollaire 1.1.2. *Une partie A de X est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Remarques 1.1.1. *Si A et B sont deux parties de X on a*

1) $A \subset \overline{A}$.
2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 1.1.11. *On appelle* ***intérieur*** *de A l'ensemble de tous les points intérieurs de A noté $\mathring{A}$ et :*

$$\mathring{A} = \{x \in A, \exists r > 0, B(x,r) \subset A\}.$$

Proposition 1.1.7. *L'intérieur d'une partie A de X est le plus grand ouvert contenu dans A i.e*

$$\mathring{A} = \mathcal{O} \in \mathcal{T} \bigcup_{\mathcal{O} \in A} \mathcal{O}.$$

Corollaire 1.1.3. *Une partie A de X est ouverte si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

Corollaire 1.1.4. *Pour toute partie A de X on a :*

$$\complement_x \mathring{A} = \complement_x \overline{A} \text{ et } \complement_x \overline{A} = \mathring{\complement_x} A.$$

Remarques 1.1.2. *Pour deux parties A et B de X on a :*

1) $\mathring{A} \subset A$.
2) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
3) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

Définition 1.1.12. ***L'extérieur*** *de A est l'intérieur du complémentaire de A noté $Ext(A)$.*

$$Ext(A) = \{x | \exists V \in \mathcal{V}(x) / V \cap A = \phi\}.$$

Définition 1.1.13. *On appelle* ***frontière*** *d'une partie A de X l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Remarque 1.1.1. *$(\mathring{A}, Fr(A), C_X\mathring{A})$ forme une partition de X.*

Définition 1.1.14. *Une partie A de X est* ***dense*** *dans X(ou partout dense dans X) si $\overline{A} = X$.*

Proposition 1.1.8. *A est dense dans X ssi tout ouvert non vide de X rencontre A.*

Exemple 1.1.3. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ et des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.15. *On dit que x est un* ***point d'accumulation*** *de A si*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A - \{x\} \neq \phi.$$

Définition 1.1.16. *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est* ***séparable*** *s'il admet une partie dénombrable et dense.*

Exemples 1.1.3.

1. *Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*
2. *L'espace métrique $\mathbb{R}$ est séparable (et on le rappelle non dénombrable).*

Définition 1.1.17. *On dit que X est* ***séparé*** *si pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe deux ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \phi$. On dit que les ouverts U_x et U_y séparent les points x et y.*

Exemple 1.1.4. *L'espace topologique discret est séparé car si $x \neq y$ alors $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_y$ sont deux voisinages de x et y disjoints.*

Corollaire 1.1.5. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Définitions 1.1.2.

1) *Soit (X, τ) un espace topologique et soit $A \subset X$. On appelle* ***topologie induite*** *par τ sur A la topologie τ_A dont la famille d'ouverts est*

$$\mathcal{O}_A = \{O \cap A, O \in \mathcal{O}\}.$$

2) *On dit que (A, τ_A) est un* ***sous espace topologique*** *de (X, τ).*

1.1.2 Complétude

Définition 1.1.18. *[18] On appelle **suite** dans un espace métrique X toute application de $\mathbb{N}$ dans X, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.19. *On dit qu'une **limite** c'est l'approximation des valeurs d'une suite lorsque l'indice tend vers l'infini où se raprroche d'un point au bord du domaine de définition .*

Remarque 1.1.2. *Si une telle limite existe dans l'ensemble d'arrivé. On dit que la suite est **convergente**, si ce n'est pas le cas, elle est **divergente**.*

Exemple 1.1.5.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Définition 1.1.20. *[18] Soit (X,d) un espace métrique. Soit $(x_n), n \in \mathbb{N}$ une suite de X. On dit que cette suite est **convergente** s'il existe $x \in X$ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N})\ ,\ n \geqslant N, \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.21. *Une partie F de (X,d) est dite fermée si la limite de toute suite convergente de F appartient à F.*

Définition 1.1.22. *Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace métrique X alors :*
*On appelle **sous suite** où **suite extraite** de la suite $(x_n)_n$ la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.23. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) est de **Cauchy** si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.9. *:*

1) *Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse .*
2) *Si une suite $(x_n)_n$ converge dans un espace métrique X sa limite est unique.*
3) *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*
4) *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est converge.*

Exemple 1.1.6. *La suite* $(x_n)_n = (\frac{1}{n})$ *est une suite de Cauchy de* $X =]0,1]$ *mais ne converge pas dans* X*, car*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X.$$

Définition 1.1.24. *[18] Soit* $(x_n)_n$ *une suite d'un espace métrique .*
Posons $A_n = \{x_k, k \geqslant n\}$ *il est évident que la suite* $(A_n)_n$ *est décroissante .*
$a \in X$ *est appelée* ***valeur d'adhérence*** *de la suite* $(x_n)_n$ *si* $\forall \varepsilon > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$
$B(a, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ *où* $B(a, \varepsilon)$ *désigne la boule de centre* a *et de rayon* ε *.*

Proposition 1.1.10. *Soit* a *une valeur d'adhérence d'une suite* $(x_n)_n$ *alors il existe une suite extraite* $(x_{\varphi(n)})_n$ *qui converge vers* a *.*

Définition 1.1.25. *Un espace métrique* (X, d) *est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy dans* (X, d) *est convergente.*

Théorème 1.1.1. *Soit* $X \times Y$ *est un espace métrique complet si et seulement si* X *et* Y *sont des espaces métriques complets.*

Proposition 1.1.11. *Soient* (X, d) *un espace métrique de* X *et* Y *un sous espace de* X*. On a les propriétés suivantes :*

1) *Si* (Y, d) *est complet alors* Y *est fermé dans* (X, d) *.*
2) *Si* (X, d) *est complet et* Y *est fermé dans* (X, d)*, alors* (Y, d) *est complet.*

Exemples 1.1.4.

i) $X = \mathbb{R}$ *est un espace métrique complet pour la distance usuelle .*

ii) $X = \mathbb{Q}$ *n'est pas un espace métrique complet pour la distance usuelle .*

Proposition 1.1.12. *[18] Soit* (X, d) *un espace métrique*

01) *Les sous-espaces complets sont des fermés.*
02) *Une intersection quelconque de sous -espaces complets est complète.*
03) *Une union finie de sous-espaces complets de* (X, d) *est complète .*
04) *Toute partie complète est fermée .*
05) *Dans un espace métrique complet, il y a identité entre les parties fermées et les parties complètes .*
06) *Tous espace métrique compact est complet.*

1.1.3 Compacité

Définitions 1.1.3. *1. Soit (X, d) un espace métrique. Une famille d'ensemble $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de X si $\bigcup_{i\in I} A_i = X$.*

*2. Si $J \subset I$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement** de X si et seulement si $\bigcup_{j\in J} A_j = X$.*

Définition 1.1.26. *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est **compact** s'il est séparé et si de tous recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini :*

$$\left(X = \bigcup_{i\in I} O_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \subset I, J fini, X = \bigcup_{i\in J} O_i\right).$$

Définition 1.1.27. *Un espace métrique(X, d) est **compact** si seulement si toute suite des points de X admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous -suite convergente).*

Définition 1.1.28. *Une partie A d'un espace métrique (X, d) sera dite **compacte** si le sous espace métrique A est compact.*

Définition 1.1.29. *L'espace métrique (X, d) est dit **pré-compact** (ou totalement borné) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ fini par des ensembles de diamètres inférieurs à ε.*

Définition 1.1.30. *Soient X un espace métrique et $A \subset X$.*
*On dit que A est une **partie pré-compacte** de X si $\forall\varepsilon > 0$, A peut être recouverte par un nombre fini d'ensemble de diamètre inférieur où égal à ε .*

Proposition 1.1.13. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace métrique X :*

1. *X est compact .*
2. *X est pré-compact et complet .*
3. *Toute suite de X admet une sous suite convergente (on dit que X est **séquentiellement compact**).*

Théorème 1.1.2. *Si X est un espace métrique compact alors de toute suite de X on peut extraire une sous suite convergente .*

Propriétés 1.1.1. *:*

01) Un compact est toujours fermé .

02) Un produit des compacts est un compact.

03) L'image d'un compact par une application continue est compact.

04) Toute réunion finie des parties compactes de X est une partie compacte .

05) Toute intersection de parties compactes des X est une partie compacte .

06) Tous espace métrique compact est séprable.

Théorème 1.1.3. *Tous intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, est compact.*

Proposition 1.1.14. *Soient X un espace métrique et $A \subset X$.Si A est compacte alors elle est bornée et complète .*

Proposition 1.1.15. *Soit X un espace topologique compact alors toute partie fermé de X est compacte .*

Définition 1.1.31. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X . A est relativement compacte dans X si $\bar{A}$ est compacte.*

Théorème 1.1.4. *Soient X un espace métrique complet et $A \subset X$.On dit que A est relativement compacte si et seulement s'elle est pré-compacte .*

Définitions 1.1.4. *Soient X et Y deux espaces métriques et soit $\Omega \subset X$ un ouvert.*

1. *Une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compacte.*

2. *Elle est dite complètement continue si l'image de toutes bornées est relativement compacte.*

Proposition 1.1.16. *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

1.1.4 Applications continues

Définition 1.1.32. *Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est* ***continue*** *au point $a \in X$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ a \text{ tel que } d_1(x, a) \leq a \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définitions 1.1.5. *Soient X, Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y.*

1. *On dit que f est continue au point $a \in X$ si et seulement si $f(a)$ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.*
2. *f est continue sur X si f est continue en tout point de X.*

Définition 1.1.33. *Soient (X, d_1),(Y, d_2) deux espaces métriques et soit l'application $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques X et Y est dite* ***uniformément continu****e pour tous x et y dans X si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Théorème 1.1.5. *Soient X, Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. On dit que toute fonction f continue sur un espace métrique compacte X et à valeurs dans un espace métrique Y est uniformément continue.*

Proposition 1.1.17. *Soient X et Y deux espaces métriques, $x_0 \in X$ et f une application de X dans Y. On dit que f continue en $x_0 \Longleftrightarrow f$ transforme toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0 en une suite $(f(x_n)_n)$ qui converge vers $f(x_0)$.*

Lemme 1.1.1. *Soient X, Y deux espaces métrique et f une application de X dans Y. On dit que f uniformément continue sur X ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall A \subset X \text{ et } \sigma(A) \leqslant \alpha \Rightarrow \sigma(f(A)) \leqslant \varepsilon.$$

où σ désigne le diamètre d'un ensemble.

Corollaire 1.1.6. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques alors les trois conditions ci-dessous sont équivalentes.*

i) *$f : X \to Y$ est continue en tout point de X.*

ii) *Pour tout ouvert v de (Y, d_Y), $F^{-1}(v)$ est un ouvert de (X, d_X).*

iii) *Pour tout fermé w de (Y, d_Y), $F^{-1}(w)$ est un fermé de (X, d_X).*

Remarque 1.1.3. *Si f est uniformément continue sur X alors f est continue sur X,la réciproque est fausse.*

Proposition 1.1.18. *Soit (X, Y) un espace topologique, soit $f, g \in (X, Y)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$. Si f et g sont continues en $a \in X$ alors $f + g$, λf, fg sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a .*

Définition 1.1.34. *Soient X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. On dit que f est* ***injective*** *sur X si :*

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Exemple 1.1.7. *Soit $f(x) = x^2$ est injective dans $\mathbb{R}_+$ car pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ si $x_1^2 = x_2^2$ alors $x_1 = x_2$ où $x_1 = -x_2$ mais comme x_1 et x_2 sont positifs, forcément $x_1 = x_2$.*

Définition 1.1.35. *Soient X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. On dit que f est* ***surjective*** *de X sur Y si :*

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x).$$

Ce qui revient à dire que :$f(X) = Y$.

Définition 1.1.36. *Soient X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y. On dit que f est* ***bijective*** *de X sur Y si f est injective sur X et surjective de X sur Y :*

$$\forall y \in Y, \exists ! x \in X, y = f(x).$$

Définition 1.1.37. *Soient X et Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y. On dit que f* ***homéomorphisme*** *si f et f^{-1} sont deux applications bijectives continues, (où $f^{-1} : Y \to X$).*

Propriété 1.1.1. *[3] S'il existe un homéomorphisme de X sur Y, on dit que X et Y sont* ***homéomorphes****.*

Définition 1.1.38. *Soient (d_1, d_2) deux distances. On dit que f est une* ***isométrie*** *si pour tout $(x, y) \in X$ on a $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$.*

Théorème 1.1.6. *Soit f une bijection continue d'un espace topologique compact X dans un espace topologique séparé Y alors f est un homéomorphisme.*

Théorème 1.1.7. *Soient X un espace topologique compact, Y un espace topologique séparé et f une application de X dans Y. On dit que si f est continue alors $f(X)$ est une partie compacte de Y.*

Définition 1.1.39. *Une application $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ est dite **lipschitzienne** s'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in X^2$.*

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant kd_1(x, y).$$

Remarque 1.1.4. *Toute application lipschitzienne est continue mais la réciproque est fausse.*

Théorème 1.1.8. *Toute application lipschitzienne est continue et en particulier, uniformément continue en ce sens que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in X$, $d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Définition 1.1.40. *On dit que $f : (X, d) \to (X, d)$ est **contractante** s'il existe $k < 1$ tel que :*

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \ .$$

Proposition 1.1.19. *L'image d'un espace métrique compact par une application continue est compact .*

1.2 Espaces vectoriels normés

1.2.1 Espaces de Banach

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble non vide . $(+)$ et $(.)$ deux lois de compositions respectivement interne et externe sur X. Le triplet $(X, +, .)$ est appelé **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ si les propriétés suivantes sont vérifiés : $\forall x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.*

1. *$(X, +)$ est un groupe abélien .*
2. *$\alpha(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$.*
3. *$(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$.*
4. *$(\alpha\beta).x = \alpha(\beta x)$.*

Définition 1.2.2. *[18] On appelle* ***norme*** *sur E, toute application p de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in A$, on ait :*

i) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. *(condition de séparation).*

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$. *(condition d'homogénéité).*

iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. *(inégalité triangulaire).*

Notation *:On note $p(x) = \|x\|$ où encore $p(x) = \|x\|_E$. $p(x)$ s'appelle norme de x.*

On dit alors le couple(E, p) est un ***espace vectoriel normé****(e.v.n).*

Exemple 1.2.1. *[18] Dans $\mathbb{K}^n$ on a trois normes usuelles.*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Proposition 1.2.1. *Soit X un espace vectoriel normé et soit H un sous espace vectoriel de X. On dit que $(H, \|.\|)$ est un sous espace vectoriel normé où $\|.\|$ est la norme définie sur X.*

Remarque 1.2.1.

1. *si $\lambda = 0$, alors $(ii) \Longrightarrow p(0) = 0$. Donc $i \cup ii$ équivaut à*

$$p(0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

2. *Si on n'impose pas (i), on dit que p est une semi-norme.*

Définition 1.2.3. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur un même espace vectoriel réel où complexe $\mathbb{K}$ sont* ***équivalentes*** *si et seulement s'il existe $K_1, K_2 > 0$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1.$$

Théorème 1.2.1. *Soit X un espace vectoriel de dimension finie,dim$X = n < \infty$:*

a) *Toutes les normes sont équivalentes .*

b) *Pour toute norme, les compacts sont les fermée bornés .*

c) *Si $(X, \|.\|_\infty)$ est un autre espace vectoriel normé de dimension quelconque, toute application linéaire de X dans Y est continue.*

Proposition 1.2.2. *Un espace vectoriel normé est un espace métrique dont la distance d définie par* $d(x,y) = \|x-y\|$ *pour tout* $x, y \in X$ *sont invariants par translation et vérifie* $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *(où* $\mathbb{C}$*) et* $\forall x, y \in X$ *.*

Théorème 1.2.2. ***(Riez)*** *: Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unitée fermée n'est jamais compacte.*

Proposition 1.2.3. *L'espace normé est complet en dimension finie.*
L'espace normé n'est pas nécessairement complet en dimension infinie .

Définition 1.2.4. *On appelle* ***espace de Banach*** *un espace vectoriel normé complet.*

Corollaire 1.2.1. *Tout e.v.n de dimension finie est un espace de Banach.*

Définition 1.2.5. *Soient* X *un espace métrique et* A *une partie de* X*.On appelle* ***diamètre*** *de* A *noté* ***diam(A)*** *tel que :*

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Proposition 1.2.4. *Un ensemble est borné si et seulement si son diamètre est fini.*

Proposition 1.2.5. *Soient* $A, B \subset X$ *et* $x \in X$ *alors :*

1) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
2) $A \subset B \Rightarrow diam(A) \leqslant diam(B)$.
3) $diam(\lambda A) = |\lambda| diam(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4) $diam(x_0 + A) = diam(A), \forall x_0 \in X$ *désigne la convexité dans e.v.n* A.
5) $diam(A+B) \leq diam(A) + diam(B)$.
6) $diam(conv(A)) = diam(A)$ *(*$conv(A)$ *désigne la convexité dans e.v.n* A*) .*

Dans ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

1-Espaces ℓ^p

Pour $p \geq 1$, on considère

$$\ell^p = \left\{ x = (x_i) \in \mathbb{K}^N \textit{ telle que } \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^p| < \infty \right\}.$$

pour $p = \infty$, on considère

$$\ell^\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \textit{ p.p sur } \mathbb{K}\}.$$

ℓ^1 et ℓ^2 sont les espaces les plus importants (usuels).

Proposition 1.2.6. *:*

1. *L'espace ℓ^p est un espace vectoriel de dimension infinie.*
2. *Pour tout $p \geq 1$, l'espace ℓ^p muni de l'application*

$$x \longrightarrow \|x\| = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^p| < \infty \right\}.$$

est un espace de Banach.

3-Espace $C(B, \mathbb{K})$

Soit B un espace métrique compact et $C(B, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues définies de B dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 1.2.2. *L'espace $C(B, \mathbb{K})$ des fonctions continues de B à valeurs dans $\mathbb{K}$,muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{K}} |f(x)|.$$

est un espace de Banach.

Définition 1.2.6. *Soient X_1, X_2 deux espaces vectoriels normés et $X = X_1 \times X_2$ alors X est un espace **vectoriel produit** muni de la norme :*

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}.$$

Théorème 1.2.3. ***(Ascoli-Arzèla)*** *Soient X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et soit $H \subset C(X, Y)$ un sous-espace muni de la norme $\|.\|_\infty$. On dit que H est **relativement compact** si et seulement si :*

1. *H est **uniformément borné**, i.e : il existe une constante $\delta > 0$ telle que : $\forall t \in X, \forall f \in H$ on a*
$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)| \leq \delta.$$

2. *H est **équicontinu**, i.e :*
$$\forall \epsilon > 0, \exists v \in \upsilon(t), \forall s \in X, s \in v \Longrightarrow \|f(s) - f(t)\|_Y \leq \epsilon, \forall f \in H.$$

3. *L'ensemble $\{f(t), f \in M\}$ est relativement compact pour tout $t \in X$.*

Théorème 1.2.4. ***(Cordunuanu)*** *Soit $A \subset BC$. Alors A est relativement compact dans (BC) si :*
- *(a) A est uniformément borné dans BC*
- *(b) les fonctions appartiennent à A sont équicontinues sur R_+, i.e équicontinues sur chaque compact de R.*
- *(c) les fonctions de A sont équi-convergent, i.e pour*

$$\varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) \ \text{telque} : |u(t) - u(+\infty)| \leq \varepsilon; \forall t \geq T(\varepsilon) \ \text{et} \ u \in A.$$

1.2.2 Algèbres de Banach

Définition 1.2.7. *Un espace vectoriel X s'appelle algèbre, s'il muni d'une troisème opération, nommée multiplication et satisfait aux axiomes suivants*

1. $(xy)z = x(yz)$.
2. $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$.
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.
4. *S'il existe un élément $e \in X$ tel que $ex = xe = x$, quelque soit $x \in X$, on dit que e est unité de l'algèbre X et que X est une algèbre avec unité.*
5. *Si la multiplication est commutative, c-à-d si elle satisfait à l'axiome*

$$xy = yx$$

on dit que X est algèbre commutative .

Ce sont les algèbres commutatives avec unité qui feront l'objet principe de notre étude. Toutes les algèbres considérées dans ce complètement seront des algèbres sur le corps $\mathbb{C}$ (des nombres complexes).

Définition 1.2.8. *Un espace normé X s'appelle algèbre normée, s'il est une algèbre avec unité qui vérifier en plus des deux axiomes :*

6. $\|e\| = 1$.
7. $\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$.

Si une algèbre normée X est complète (c-à-d est un espace de Banach), on l'appelle algèbre de Banach. Une application $F : X \longrightarrow Y$ s'appelle homomorphisme de l'algèbre X dans l'algèbre Y, si elle vérifie les conditions :

$$F(x+y) = Fx + Fy. \tag{1.1}$$

$$F(\alpha x) = \alpha F(x) \tag{1.2}$$

$$F(xy) = Fx.Fy \tag{1.3}$$

Deux algèbres X et Y sont dites isomorphes, s'il existe une application bijective F de X sur Y vérifiant les condition (1.1) et (1.3). Deux espaces normés X et Y sont dites isométriques, s'il existe une application bijective $F : X \longrightarrow Y$ vérifiant les conditions (1.1) et (1.2) telles que

$$\|Fx\|_Y = \|x\|_X$$

.

Définition 1.2.9. *Deux algèbres de Banach X et Y sont dites isométriquement isomorphes, s'il existe un isomorphisme d'algèbre $F : X \longrightarrow Y$ qui est en même temps une isométrie de X et Y, considérés comme espaces normés .*

Exemples :

1. L'algèbre C_T : soit T un espace topologique de Hausdorff compact. Désignons par C_T l'espace vectoriel constitué par l'ensemble des fonctions complexes continues $x(t)$ définies sur T muni des opérations habituelles donnant la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre, ainsi que la norme

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|.$$

L'espace C_T est fourni par l'espace $C^n = \{(z_1, ..., z_n)\}$ des vecteurs complexes à n dimensions, c-à-d des fonctions sur un espace de n points. L'addition, la multiplication par un nombre et la multiplication des éléments de C^n se réalisent en coordonnées, la norme sur C^n est définie par la formule

$$\|z\| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

L'espace C_T est une algèbre de Banach commutative ayant pour unité la fonction $e(t) = 1$. la vérification du fait que tous les axiomes sont évidents .
2. L'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions analytiques dans un disque : Désignons par $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions $x(z)$ d'une variable complexes z définies et continues sur le disque $K = \{z : |z| \leq 1\}$ et analytiques à l'intérieure de ce disque.
On définit la multiplication et on introduit une norme par la formole

$$\|x\| = \max_{|z| \leq 1} |x(z)|.$$

Ceci fait de $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative avec unité.
Tous les axiomes sont évidents.

1.2.3 Convexité

Définition 1.2.10. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $x, y \in X$. On appelle **segment** de X un ensemble noté et défini comme suite*

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}.$$

Définition 1.2.11. *$C \subset E$ est **convexe** si : $\forall x, y \in C, \forall t \in]0, 1[$*

$$(tx + (1-t)y) \in C.$$

Exemple 1.2.2. *Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.*

Définition 1.2.12. *Soient C un convexe non vide de X et $f : C \to \mathbb{R}$.*

1- *f est dite **convexe** sur C si $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C$*
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

2- *f est dite **strictement convexe** sur C si $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C, x \neq y$*
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

3- *f est dite **fortement convexe** sur C s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C, x \neq y$*
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t)\|x-y\|^2.$$

*On dit aussi que f est α-**convexe.***

Remarque 1.2.2. *:*

1. *α-convexe $\Rightarrow$ strictement convexe $\Rightarrow$ convexe.*
2. *f est α-convexe sur C si et seulement si $f - \frac{1}{2}\alpha\|.\|^2$ est convexe sur C.*

Définition 1.2.13. *Soit P une partie de X. On dit que l'intersection deS convexes étant convexe. On peut parler du plus petit convexe contenant P qui est donc l'intersection de tous les convexes contenant P, c'est ce que l'on appelle **l'enveloppe convexe** de P noté :*

$$convP = \cap\{C, C \text{ est un convexe contenant } P\}.$$

Définition 1.2.14. *On appelle **combinaison convexe** de X, un élément x de X de la forme*
$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$
Où $n \in \mathbb{N}^*, t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}$, et les vecteurs $x_i \in X$.

Proposition 1.2.7. *:*

1. *Un ensemble est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments .*

2. *Si $P \subset X$, alors conv$P$ est l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de P :*

$$convP = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, t \geq 0, x_i \in P, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.2.15. *Soit X un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{M} \subset P(\Omega)$* ***tribu*** *(où σ-**algèbre**) sur X si, c'est une algèbre fermée pour les réunions dénombrables :*

i) $X \in \mathcal{M}$.

ii) *Si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^{\complement} \in \mathcal{M}$ (où $A^{\complement} = X \setminus A$ est complémentaire de A dans X).*

iii) *Si $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

Lemme 1.2.1. *Soit $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque de tribu sur X, alors $\mathcal{M} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu sur X.*

Définition 1.2.16. *Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les parties mesurables de X . On dit que $(X, \mathcal{M})$ est un* ***espace mesurable*** *.*

Définition 1.2.17. *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable .*
On appelle ***mesure(mesure positive)*** *sur X une application $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*
2. *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ est une suite disjointe, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit que (X, M, μ) est un ***espace mesuré****.*

Proposition 1.2.8. *(Propriétés élémentaires d'une mesure positive).*

1. *Monotonie : Si $A, B \in M$ et $A \subset B$, alors*

$$\mu(A) \leqslant \mu(B).$$

2. *Sous-additivité : si* $A_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$ *alors*
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$
3. *Si* $A_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, *alors*
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$
4. *Si* $A_n \in M, \forall n \in \mathbb{N}$ *et si* $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, *avec* $\mu(A_0) < \infty$ *alors*
$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

Définition 1.2.18. *Soient* $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{M}')$ *deux espaces mesurables. On dit qu'une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est* ***mesurable*** *(pour les tribus* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *) si*
$$\forall B \in \mathcal{M}', f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2.19. *Soit* (X, M, μ) *un espace mesuré .*
Un ensemble $N \in M$ *est* μ***-négligeable*** *si* $\mu(N) = 0$, *i,e : s'il est de* μ*-mesure nulle.*

Définition 1.2.20. *Soit* (X, M, μ) *un espace mesuré .*
On dit qu'une propriété est vraie ***presque partout*** *par rapport à* μ, *(*μ*-p.p) si elle est vraie sur* $X\backslash N$, *où* N *est un ensemble* μ*-négligeable.*

Corollaire 1.2.3. *Soient* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables,alors* $f + g, fg, min(f, g)$ *et* $max(f, g)$ *sont mesurables.*

Théorème 1.2.5. *(* ***La convergence dominée de Lebesgue****)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite des fonctions de* L^1. *On suppose que*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω.
2. *Il existe une fonction* $g \in L^1$ *telle que pour chaque* n_1
$$|f_n(x)| \leq g(x) \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$

Définition 1.2.21. *On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable** au sens de Lebesgue si :*

$$\int_{\Omega} |f| < \infty.$$

Définition 1.2.22. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonction mesurable et intégrable sur Ω noté :*

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \|f(x)|dx.$$

On définit en suite pour tout $1 \leqslant p < \infty$, l'espace :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \|f\|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que : } |f| \leqslant c \ p.p\}.$$

Que l'on munit de l norme :

$$\|f\|_{L^\infty}(\Omega) = \inf\{c, |f(x)| \leqslant c \quad p.p\}.$$

Théorème 1.2.6. *Soient $X \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur X et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur X et*

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

Proposition 1.2.9. *1) Si $f \leqslant g$, alors $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.*

2) Si $A \subset B$ alors $\int_A f d\mu \leqslant \int_B f d\mu$.

3) Si C est une constante $0 \leqslant C \leqslant \infty$ alors $\int_X C f d\mu = C \int_X f d\mu$.

4) Si $f(x) = 0$ pour tous $x \in X$, alors $\int_X f d\mu = 0$, même si $\mu(X) = \infty$.

5) Si $\mu(X) = 0$, alors $\int_X f d\mu = 0$ même si $f = \infty$.

6) Si f est une fonction intégrable, alors $|f|$ est aussi intégrable et on a : $|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu$.

Définition 1.2.23. *Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de **carathéodory** si :*

i) $t \to f(t, y)$ *est mesurable* $\forall y \in \mathbb{R}$.

ii) $y \to f(t, y)$ *est continue* $\forall t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.24. *Soit $p \in [1, +\infty]$. On appelle **exposant conjugué** de p (noté q dans toute la suite) le nombre $q \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Proposition 1.2.10. *Soit $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $L^p(\Omega)$ muni de $\|.\|_p$ est un espace normé .*

Théorème 1.2.7. ***(Fischer-Riesz)***
L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

Proposition 1.2.11. ***(Inégalité de Hölder)****[13]* $1 \leq p < \infty$
Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. alors $f, g \in L^1$

$$\|fg\|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Corollaire 1.2.4. *Soit $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, alors $f.g \in L^r(X)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.*

Corollaire 1.2.5. ***(Inégalité de Minkowski)***
Pour f, g mesurables :

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Corollaire 1.2.6. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz)***
Soit $f, g \in L^2(X, M, \mu)$, alors $f.g \in L^1(X, M, \mu)$

$$\int_X |f.g| d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

Lemme 1.2.2. ***(Inégalité de Fatou)***
Soit $(f_n)_n, f_n : X \to \mathbb{R}_+$ une suite des fonctions mesurables, alors

$$\int (\lim_{n \to +\infty} \inf f_n) d\mu \leqslant \lim_{n \to +\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Théorème 1.2.8. ***(Fubini)***
On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors pour presque par tout $x \in \Omega_1$

$$F(x,y) \in L^1_Y(\Omega) \;\; et \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque par tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_X(\Omega_1) \;\; et \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

1.3 Espaces des fonctions continues

1.3.1 Espace des fonctions continues sur $[a,b]$

Définition 1.3.1. *Soit $[a,b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Notons l'espace $C([a,b])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues telle que :*

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; continue\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

Proposition 1.3.1. *On definit le produit $(f.g)(x) = f(x).g(x)$, soit $f, g \in C([a,b])$, alors*

$$\|f.g\|_\infty \leq \|f\|_\infty.\|g\|_\infty.$$

Et $(C([a,b]), \|.\|_\infty)$ est une algèbre de Banach.

1.3.2 Espace des fonctions continues bornées sur $[a,+\infty[$

Définition 1.3.2. *soit $[a,+\infty[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}_+$. Notons l'espace $C([a,+\infty[)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues bornée telle que :*

$$C([a,+\infty[) = \{f : [a,+\infty[\to \mathbb{R};\ continue\ bornée\}.$$

muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,+\infty[} |f(x)|.$$

Théorème 1.3.1. *L'espace $C([a,+\infty[)$ est un espace de Banach.*

1.4 Quelque théorèmes du point fixe

1.4.1 Théorème de Banach

Théorème 1.4.1. *Soit E un espace de Banach et soit $A : E \longrightarrow E$ une application contraction i.e $\forall x, \overline{x} \in E, \exists k, 0 \leq k < 1$ telle que*

$$\|Ax - A\overline{x}\| \leq k\|x - \overline{x}\|.$$

Alors $\exists x^*$ tel que $Ax^* = x^*$ où x^* est un unique point fixe de A.

1.4.2 Théorème de Schauder

Théorème 1.4.2. *[25] Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ une application compacte, alors T admet au moins un point fixe.*

Corollaire 1.4.1. *Soit C un sous-ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue, alors f admet au moins un point fixe.*

Corollaire 1.4.2. *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, C non nécessairement borné d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ inclus dans un compact de C, alors f admet au moins un point fixe.*

1.4.3 Théorème de Krasnoselskii

Théorème 1.4.3. *[25] Soit M une partie fermée, convexe, non vide d'un espace de Banach E, et*
$A : M \to E$, $B : E \to E$ deux opérateurs tels que :
(i) B est condensé avec constant $k < 1$.
(ii) A est continu, et $A(M)$ inclus dans un compact de E.
(iii) $[x = Bx + Ay, y \in M] \Rightarrow x \in M$.
Alors $\exists y \in M / \quad Ay + By = y$.

Théorème 1.4.4. *Soit S une partie fermée, bornée, convexe, non vide de l'algèbre de Banach E et soit $A, B : S \to E$ deux opérateurs tels que :*

(a) A est lipschitzien avec constant k.
(b) B est complètement continu.
(c) $kM < 1$ où $M = \|B(S)\| = \sup\{\|Bu\|, u \in S\}$.

Alors l'équation $AuBu = u$ admet au moins une solution et l'ensemble de toutes les solutions est compact dans S.

CHAPITRE 2

MESURES DE NON COMPACITÉ

Dans ce chapitre on présente quelque définitions et notions préliminaire sur la mesure de non compacité comme la mesure de Kuratowski et Hausdorff sur les ensembles bornés et les opérateurs condensés, nous présenterons également quelques propriétés fondamentales ainsi que quelque théoremes associés à la mesure de non compacité.

2.1 Mesures de non compacité

2.1.1 Notion générale du mesure de non compacité

Définition 2.1.1. *[22] Soit l'application $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty[$, on dit que μ est mesure de non compacité (MNC) dans l'espace de Banach E si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. *L'ensemble ker $(\mu) = \{X \in \mathcal{M} : \mu(X) = 0\}$ est un ensemble borné, non vide et ker $(\mu) \subset \mathcal{M}$ et comme $\mu(X) = 0$ alors X est relativement compact .*
2. *Si $X \subset Y \Longrightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.*
3. *$\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.*
4. *$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.*
5. *$\mu(conv(X)) = \mu(X)$.*

6. *Si* $(X_n)_{n\in N}$ *est un ensemble des suites de* $\mathcal{M}$ *telle que* $X_{n+1} \subset X_n$*, pour n=1,2,... , et* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$*, alors* $X_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \varnothing$ *et* $X_\infty \in ker(\mu)$.

Exemple 2.1.1. *[22] Soit E un espace de Banach, les fonctions :*

$$\psi_1(\Omega) = \begin{cases} 0 & si\ \ \Omega\ \ est\ totalement\ born\acute{e} \\ 1, & autrement \end{cases}$$

et

$$\psi_2 = diam\Omega.$$

Sont des MNC_s *au sens de la définition générale.*

Exemple 2.1.2. *Soient* $\psi_1, ..., \psi_n$ *des* MNC_s *dans E à valeurs dans* $Q_1, ..., Q_n$ *respectivement et soit l'application* $F : Q_1 \times ... \times Q_n \to Q$ *la fonction* $\psi : E \to Q$ *définie par* $(\psi(\Omega) = F(\psi_1(\Omega), ..., \psi_n(\Omega))$*, appelée* ***produit de MNC*** *est une MNC. Ses propriétés sont déterminées par les propriétés de* $\psi_1, ..., \psi_n$ *et de la fonction F.*

2.1.2 Mesure de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff

Définition 2.1.2. *[22] La mesure de non compacité(MNC) de* ***Kuratowski*** $\alpha(\Omega)$ *d'un ensemble borné* Ω *est la borne inférieur des nombres* $d > 0$ *tel que* Ω *soit recouvert par un nombre fini d'ensemble de diamétre inférieur ou égala à d.*

$$\alpha(\Omega) = inf\{d > 0, \Omega \subset \cup_{i=1}^{n} \Omega_i, diam(\Omega_i) \leq d\}.$$

.

Définition 2.1.3. *[22] La mesure de non compacité de* ***Hausdorff*** $\chi(\Omega)$ *d'un ensemble borné* Ω *est la borne inférieur des nombres* $\epsilon > 0$ *tel que l'ensemble* Ω *ait un* ϵ*-réseau fini dans E.*

$$\chi(\Omega) = inf\{\epsilon > 0, \exists (x_i)_{i=1}^{n} \Omega \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon), n \in N\}.$$

Propositions 2.1.1. *[22] Soient E un espace de Banach et Ω, Ω_1, $\Omega_2 \subset E$ des ensembles bornés . On note ψ la MNC de Kuratowski ou de Hausdorff, alors ψ vérifie les propriétés suivantes :*

a) ***Régularité*** *: $\psi(\Omega) = 0$ si et seulement si Ω est relativement compact.*

b) ***Non-singularité*** *: $\psi(\Omega) = 0$ si Ω est un singleton.*

c) ***Monotonie*** *: si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ alors $\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$.*

d) ***Semi-additivité*** *: $\psi\{\Omega_1 \cup \Omega_2\} = max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$.*

e) ***Propriété Lipschitzienne*** *: $|\psi(\Omega_1) - \psi(\Omega_2)| \leq L_\psi \rho(\Omega_1 - \Omega_2)$, où $L_\alpha = 2, L_\chi = 1$ et ρ désigne la distance de Hausdorff :*

$$\rho(\Omega_1, \Omega_2) = inf\{\epsilon > 0 : \Omega_2 \subset \Omega_1 + \epsilon\overline{B}, \Omega_1 \subset \Omega_2 + \epsilon\overline{B}\}.$$

f) ***Continuté*** *: pour tout $\Omega \subset E$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tels que $|\psi(\Omega) - \psi(\Omega_1)| < \epsilon$ pour tout Ω_1 satisfaisant $\rho(\Omega, \Omega_1) < \delta$.*

g) ***Semi-homogénéité*** *: $\psi(t\Omega) = |t|\psi(\Omega)$ pour tout réel t.*

h) ***Semi-additivité algébrique*** *: $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$.*

i) ***Invariance par translation*** *:$\psi(\Omega + x_0) = \psi(\Omega)$ pour tout $x_0 \in E$.*

Preuve : On démontre cette proposition seulement pour la MNC α, la preuve est similaire pour χ :

a) Supposons que Ω est relativement compact, alors d'après le théorème (1.1.1), $\forall\epsilon > 0$, il existe une famille finie $\{x_1, ..., x_{N_\epsilon}\}$ d'élément de E telle que $\Omega \subset \cup_{j=1}^{N_\epsilon} B(x_j, \epsilon)$ alors $\alpha(\Omega) = 0$. Réciproqument , si $\alpha(\Omega) = 0$ d'après le même théorème, on conclut que Ω est relativement compact.

b) Tout singleton est relativement compact.

c) Soit $\{\Omega_1^2, ..., \Omega_n^2\}$ un recouvrement de Ω_2 tel que $diam(\Omega_i^2) \leq d, i = 1, ..., n$ alors il est claire que c'est un recouvrement de Ω_1 et par suite $\alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.

d) Posons $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $a = max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$, comme $\Omega_i \subset \Omega, i = 1, ..., n$, d'après la monotonie de α on aura $\alpha(\Omega_i) \leq \alpha(\Omega)$, donc $a \leq \alpha(\Omega)$. Réciproquement, montrons que $\alpha(\Omega) \leq a$. Pour tout Ω_1, Ω_2 il existe un recouvrement $\{\Omega_1^i, ..., \Omega_n^i\}$ de Ω_i tel que $diam(\Omega_j^i) \leq \alpha(\Omega_i) + \epsilon \leq a + \epsilon$, pour $i = 1, 2$, et $j = 1, ..., n_i$, on remarque que ces ensembles Ω_j^i forment un recouvrement de Ω, alors $\alpha(\Omega) \leq a + \epsilon$, et par suite $\alpha(\Omega) \leq a$ puisque ϵ est arbitraire .

e) Posons $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = \epsilon$. Comme $\Omega_1 \subset \Omega_2 + \epsilon\overline{B}$ alors $diam(\Omega_1) \leq diam(\Omega_2 + 2\epsilon)$, d'où $diam(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2) + 2\epsilon$, et par suite $\alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2) + 2\epsilon$. De la même manière, nous obtenons $\alpha(\Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + 2\epsilon$. Et par suite obtient $|\alpha(\Omega_1) - \alpha(\Omega_2)| \leq 2\epsilon$.

f) On sait que toute fonction Lipschitzienne est continue.

g) Est trivial pour $t = 0$.
Si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\alpha(t\Omega) &= inf\{d > 0 : t\Omega \subset \cup_{i=1}^{m}\Omega_i, diam(\Omega_i) \leq d\} \\
&= inf\{d > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^{m}\frac{1}{t}\Omega_i, |t|diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq d\} \\
&= inf\{d > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^{m}\frac{1}{t}\Omega_i, diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq \frac{1}{|t|}d\} \\
&= inf\{|t|d' > 0 : \Omega \subset \cup_{i=1}^{m}\frac{1}{t}\Omega_i, diam(\frac{1}{t}\Omega_i) \leq d'\}, d' = \frac{1}{|t|}d. \\
&= |t|\alpha(\Omega).
\end{aligned}$$

h) Soit $\{\Omega_1^1, ..., \Omega_m^1\}$ un recouvrement de Ω_1 et $\{\Omega_1^2, ..., \Omega_n^2\}$ un recouvrement de Ω_2 alors les ensembles $\Omega_i^1 + \Omega_j^2$ forment un recouvrement de $\Omega_1 + \Omega_2$ de plus $diam(\Omega_1 + \Omega_2) \leq diam(\Omega_1) + diam(\Omega_2)$ et par suite $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.

i) La propriété se déduite du fait que $diam(\Omega + x_0) = diam(\Omega)$.

Théorème 2.1.1. *[22] Soient E un espace de Banach et B sa boule unité.*
- Si E est de dimension finie, alors $\alpha(B) = \chi(B) = 0$.
- Si $dimE = \infty$, $\alpha(B) = 2$ et $\chi(B) = 1$.

Preuve : - Si $dimE < \infty$, $B(0,1)$ est relativement compacte $\Rightarrow$ elle est totalement bornée $\Rightarrow \chi(B(0,1)) = 0$
-Soit $dimE = \infty$:
On doit montrer que $\chi(B(0,1)) = 1$? ?
On a $\chi(B(0,1)) < 1$
Car $B(0,1) \subset B(0,1)$
Supposons que $\chi(B(0,1)) = q < 1$
Et soit $\epsilon > 0$ tel que $q + \epsilon < 1$
$\exists (x_i)_{i=1}^{n}, B(0,1) \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, q + \epsilon)$

Il résulte :

$$\begin{array}{rcl} q=\chi(B(0,1)) & \leq & \chi(\cup_{i=1}^{n}B(x_i,q+\epsilon)) \\ & \leq & max_{(1\leq i\leq n)}\chi(B(x_i,q+\epsilon)) \\ & \leq & max_{(1\leq i\leq n)}\chi(x_i+B(0,q+\epsilon)) \\ & \leq & \chi B(0,q+\epsilon) \\ & \leq & (q+\epsilon)\chi(B(0,1)) \\ & \leq & (q+\epsilon)q \end{array}$$

Il résulte $q \leq q(q+\epsilon) \Rightarrow q=0$ contraction car $dimE=\infty$
Ainsi : $\chi(B(0,1))=1$.

Théorème 2.1.2. *[22] Les MNC_s α et χ sont invariantes par passage à l'adhérence et à l'enveloppe convexe i.e :*

$$\psi(\Omega)=\psi(\overline{\Omega})=\psi(co\Omega).$$

Preuve
$\psi(\Omega)=\psi(\overline{\Omega})$ est évident .
Si S est un ϵ-réseau totalement borné de $co(\Omega)$ donc :

$$\chi(\Omega)=\chi(co\Omega).$$

Pour prouver que $\alpha(\Omega)=\alpha(co\Omega)$, on suppose que $\Omega=\cup_{k=1}^{m}$ et $diam\Omega_k<d,\forall k$ il est claire que $co(\Omega)=\cup\sum_{k=1}^{m}\lambda_k co(\Omega_k)$ où $\lambda_k\leq 0$ et $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=1$, avec une précision arbitraire $\delta(\epsilon)$ au sens de la métrique de Hausdorff

$$(\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\delta(\epsilon)=0)$$

l'union de toutes les sommes peut-être approchée par union finie des sommes de même forme, dans les quelle λ parcourt un ϵ-réseau fini $\delta(\epsilon)$.
D'aprés les propriétés de MNC α on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha(co\Omega)=\alpha(\cup_{\lambda\in\delta_\epsilon}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k co\Omega_k) &\leq \alpha(\cup_{\lambda\in\delta_\epsilon}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k co\Omega_k)+2\delta(\epsilon) \\ = max\ \alpha(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k co\Omega_k)+2\delta(\epsilon) &\leq max\sum_{k=1}^{m}\lambda_k co\Omega_k)+2\delta(\epsilon). \end{aligned}$$

Puisque $diam(co\Omega_k) = diam\Omega_k < d$, on conclus que :

$$\alpha(co\Omega) \leq d + 2\delta(\epsilon).$$

Donc :

$$\alpha(co\Omega) \leq \alpha(\Omega).$$

Théorème 2.1.3. *[22] Les MNC de Hausdorff et Kuratowski sont liées par la formule*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega)$$

Dans la classe de tous les espaces de dimension infinie, ces inégalités sont nettes.

Preuve :
Soit $\{\Omega_{i=1}^n\}$ un recouvrement de Ω avec $diam(\Omega_i) \leq d$ et si $x_i \in \Omega_i$, alors $\{x_1, ..., x_n\}$ est un d-réseau de Ω.
La deuxième inégalité se déduit du fait que si $\{x_1, ..., x_n\}$ est un ϵ-réseau fini de Ω alors $\{\Omega \cap (x_i + \epsilon B)\}_{i=1}^n$ est un recouvrement de Ω par des ensembles de diamètre 2ϵ, alors $\alpha(\Omega) \leq 2\epsilon$.

2.2 MNC_S dans les espace des fonctions continues

2.2.1 MNC_s dans $C[a, b]$

Théorème 2.2.1. *[22] Soit Q ensemble borné dans $C[a, b]$ alors :*

$$\chi(Q) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \to 0} \left\{ \sup_{x \in Q} \left[\max_{0 \leq r \leq \delta} \|x - x_r\| \right] \right\}.$$

Où

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t+r), a \leq t \leq b - r \\ x(b) \quad , b - r \leq t \leq b \end{cases}.$$

Preuve :
Soit $\epsilon > 0$, on construire un fini de $[\chi(Q) + \epsilon]-$ net E de l'ensemble Q, soit $x \in Q$ et $y \in E$ tel que $\|x - y\| \leq \chi(Q) + \epsilon$, on pose $\delta > 0$ tel que $r \in [0, \delta]$ alors

$$\|x - x_r\| \leq \|x - y\| + \|y - y_r\| + \|y - x_r\|$$

$$\leq 2\|x-y\| + \|y-y_r\|$$
$$\leq 2\chi(Q) + 2\epsilon + \max_{y\in E}\left[\max_{0\leq r\leq\delta}\|y-y_r\|\right]$$

Par conséquent :

$$\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta}\|x-x_r\|\right] \leq 2\chi(Q) + 2\epsilon + \max_{y\in E}\left[\max_{0\leq r\leq\delta}\|y-y_r\|\right]$$

Lorsque $\delta\to 0$ et comme E famille finie et équicontinue, on obtient :

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta}\|x-x_r\|\right]\right\} \leq 2\chi(Q) + 2\epsilon$$

Donc

$$\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta}\|x-x_r\|\right]\right\} \leq \chi(Q) + \epsilon$$

ϵ étant arbitraire on a l'inégalité

$$\frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq\delta}\|x-x_r\|\right]\right\} \leq \chi(Q).$$

Pour l'inégalité inverse, nous assurrons que les fonctions $x \in Q$ sont prolongées *du* segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ par

$$x_r(t) = \begin{cases} x(a), t\leq a \\ x(b), b\leq t \end{cases}$$

Définissons les opérateurs R_h et $P_h(h>0)$ par les formules respectives

$$\left(R_h x\right)(t) = \frac{1}{2}(\max\{x(s) : s\in[t-h,t+h]\} + \min\{x(s) : s\in[t-h,t+h]\}).$$

Et

$$\left(P_h x\right)(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)ds.$$

Alors l'ensemble $P_hR_h(Q)$ est relativement compact en $C([a,b])$, nous prétendons que il constitue un $(q_{2h}/2)-$ net de l'ensemble Q où

$$q_{2h} = \sup_{\substack{x\in Q\\ 0\leq r\leq\delta}}(\max\|x-x_r\| \;.$$

En fait

$$\|P_hR_h(Q)\| = \max_{a\leq x\leq b}\left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}(R_hx)(s)ds - \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x(t)ds\right|$$

Si $|t-s|\leq h$, alors on a :

$$\leq \tfrac{1}{2h}\max_{a\leq x\leq b}\int_{t-h}^{t+h}|(R_hx)(s)-x(t)|\,ds$$

$$\min\{x(r): r\in[t-s,t+s]\}\leq x(t)\leq \max\{x(r): r\in[t-s,t+s]\}$$

Par conséquent

$$|(R_hx)(s)-x(t)|\leq \frac{1}{2h}\max_{0\leq r\leq 2h}\|x-x_r\|\leq q_{2h}.$$

De ceci (2.2.1), il s'ensuit que $\chi(Q)\leq \frac{q_{2h}}{2}$ lorsque $h\to 0$

$$\chi(Q)\leq \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\leq r\leq \delta}\|x-x_r\|\right]\right\}.$$

Cela la preuve est complète.

2.3 Opérateurs condensés

Définition 2.3.1. *[22] Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, et soient ψ_1 et ψ_2 deux MNC_s dans E_1 et E_2 respectivement,à valeurs dans un ensemble partiellement ordonné $(Q,\leq)$.*

1. *Un opérateur continu $f: D(f)\subset E_1\to E_2$ est dit (ψ_1,ψ_2)- **condensé** si $\Omega\subset D(f),\psi(\Omega)\leq\psi_2(f(\Omega))$ implique Ω est relativement compact.*
2. *Supposons que sur Q est définit une opération de multiplication par un scalaire non négatif. Un opérateur continu f est dit (q,ψ_1,ψ_2)-**borné** si pour tout $\Omega\subset D(f)$:*

$$\psi_2(f(\Omega))\leq q\psi_1(\Omega).$$

Quand $E_1=E_2$ et $\psi_1=\psi_2$ nous dirons ψ_1-condensé et (q,ψ_1)-borné.

Exemples 2.3.1. *[22]*

1. *Tout opérateur complètement continu défini sur un ensemble borné de Banach E est ψ_1-condensé, où ψ_1 est définie par :*

$$\psi(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \Omega \text{ est relativement compact} \\ 1, & \text{autrement} \end{cases}$$

2. *Une contraction définit sur des ensembles bornés est ψ_2-condensé où ψ_2 est définie du même exemple par : $\psi_2(\Omega) = diam(\Omega)$. En effet, soit Ω tel que $diam(\Omega) > 0$, puisque f est contractante alors $\exists k \in [0, 1[$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in \Omega$, par suite*

$$diam[f(\Omega)] \leq kdiam(\Omega) < diam(\Omega).$$

L'opérateur f est ainsi ψ_2-condonsé.

3. *Les opérateurs complètement continus et les contractions sont α-condensés. De plus un opérateur complètement continu est χ-condensé.*
4. *Plus généralement, si ψ est une MNC régulière, tout opérateur complètement continu est ψ-condensé.*
5. *Soient deux opérateurs $f, g : E_1 \to E_2$ tel que f est compètement continu et g est contractante, alors la somme $h = f + g$ est un opérateur α-condensé. En effet, soit Ω un ensemble borné dans E_1. On a d'un part, $\alpha(g(\Omega)) < \alpha(\Omega)$, d'autre part, comme f est complètement continu, $\alpha(f(\Omega)) = 0$, par conséquent :*

$$\alpha(h(\Omega)) \leq \alpha[f(\Omega) + g(\Omega)] \leq \alpha[f(\Omega)] + \alpha[g(\Omega)] \leq \alpha(\Omega).$$

Définition 2.3.2. *[22]*

a) *Soit $T : D(T) \subseteq X \to X$ un opérateur continu et $\alpha(.)$ la mesure de non compacité de kuratowski dans X, pour tout $k \geq 0$.*

   1) *On dit que T est un $k-$ ensemble $-$ contraction (opérateur contractive), si pour tout ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné de X*

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A).$$

   2) *On dit que T est non expansive, si pour tout sous-ensemble borné A de $D(T)$, tel que $\alpha(A) > 0, T(A)$ est un sous ensemble borné de X et*

$$\alpha(T(A)) \leq \alpha(A).$$

b) Soit $T : D(T) \subseteq X \to X$ un opérateur continu et soit $\chi(.)$ la mesure de non compacité de Hausdorff dans X. Pour tout $k \geq 0$, on dit que T est $k-$ boule -contraction si pour tout sous ensemble borné A de $D(T)$, $T(A)$ est un sous-ensemble borné dans X, et

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A).$$

Propositions 2.3.1. *[22]*

(a) Si la MNC ψ est régulière, alors tout opérateur (q, ψ_1, ψ_2)-borné avec $q < 1$ est (ψ_1, ψ_2)-condonsé.

(b) Soient f_1 un opérateur (q_1, ψ_1, ψ_2)-borné et f_2 un opérateur (q_2, ψ_2, ψ_3)-borné alors l'opérateur $f_2 \circ f_1$ est (q_1q_2, ψ_1, ψ_3)-borné.

(c) Soient f_1 un opérateur $(q_1\psi_1, \psi_2)$-borné et f_2 est un opérateur $(q_2\psi_1, \psi_2)$-borné, de plus la MNC ψ_2 est algébriquement semi -additive et monotone, alors la somme $f_1 + f_2$ est un opérateur (q_1q_2, ψ_1, ψ_2)-borné.

(d) Si f_1 est un opérateur (ψ_1, ψ_2)-condonsé, f_2 est un opérateur (ψ_2, ψ_3)-condensé qui transforme les ensembles relativement compacts en des ensembles compacts, ψ_1 et ψ_2 sont des MNC régulières et l'ensemble $Q = [0, \infty)$ alors l'opérateur composé $f_2 \circ f_1$ est (ψ_1, ψ_3)-condensé.

(e) Si $Q = [0, \infty)$ et ψ_2 est semi-additive alors l'ensemble des opérateurs (ψ_1, ψ_2)-condensées est convexe.

Preuve :

(a) Les inégalités $\psi_1(\Omega) \leq \psi_2(\Omega) \leq q\psi_1(\Omega), q < 1$, impliquent $\psi_1(\Omega) = 0$. Par régularité de ψ_1, Ω est relativement compact .

(b) Il claire que $\psi_3[(f_2 \circ f_1)(\Omega)] \leq q_2\upsilon_2[f_1(\Omega)] \leq q_1q_2\psi_1(\Omega)$.

(c) Comme $(f_1(\Omega) + f_2(\Omega)) \subset f_1(\Omega) + f_2(\Omega)$, de la monotonie et de la semi-additivité algébrique de ψ_2 nous obtenons :

$$\psi_2[(f_1+f_2)(\Omega)] \leq \psi_2[f_1(\Omega)+f_2(\Omega)] \leq \psi_2[f_1(\Omega)]+\psi_2[f_2(\Omega)] \leq (q_1+q_2)\psi_1(\Omega).$$

(d) Pour montrer que $f_2 \circ f_1$ est (ψ_1, ψ_3)-condonsé, nous utilisons la contraposée de la définition des opérateurs condonsés. Supposons Ω n'est pas relativement compact alors $\psi_2[f_1(\Omega)] < \psi_1(\Omega)$.

- Si $f_1(\Omega)$ n'est pas relativement compacte alors $\psi_3[(f_2 \circ f_1)(\Omega)] < \psi_2[f_1(\Omega)] < \psi_1(\Omega)$.
- Si $f_1(\Omega)$ est relativement compacte, par hypothèses, $f_2[f_1(\Omega)]$ est aussi relativement compacte, et par régularité de $\psi_3, \psi_2\{f_2[f_1(\Omega)]\} = 0$. D'autre part $\psi_1(\Omega) > 0$, car Ω n'est pas relativement compacte et ψ_1 est régulière, dans ce cas aussi
$$\psi_3[(f_2 \circ f_1)(\Omega)] < \psi_1(\Omega).$$

(e) Soient f_1 et f_2 deux opérateurs (ψ_1, ψ_2)-condensés et soit $\lambda \in [0, 1]$. Considérons l'opérateur $f_\lambda = \lambda f_1 + (1 - \lambda)f_2$, nous devons montrer que f_λ est (ψ_1, ψ_2)-condensé, pour cel, considérons un ensemble Ω tel que
$$\psi_2[f(\Omega)] \geqslant \psi_1(\Omega). \tag{2.1}$$
Par définition de f_λ, nous obtenons l'inclusion $f_\lambda(\Omega) \subset co\{f_1(\Omega) \cup f_2(\Omega)\}$, alors $\psi_2[f_\lambda(\Omega)] \leq \psi_2[co\{f_1(\Omega) \cup f_2(\Omega)\}] = \psi_2[f_1(\Omega) \cup f_2(\Omega)]$. Et puisque ψ_2 est semi-additive, on aura
$$\psi_2[f(\Omega)] \leq max\{\psi_2[f_1(\Omega)], \psi_2[f_2(\Omega)]\}. \tag{2.2}$$
Comme $[0, \infty)$ est totalement ordonné, la côté droite de $(2, 2)$ est soit $\psi_2[f_1(\Omega)]$ ou soit $\psi_2[f_2(\Omega)]$. Supposons que c'est $\psi_2[f_2(\Omega)]$ donc $(2, 1)$ et $(2, 2)$ impliquent
$$\psi_2[f_2(\Omega)] \geq \psi_1(\Omega).$$
Le fait que f_2 est (ψ_1, ψ_2)-condensé nous entraine que Ω est relativement compact.

2.3.1 Théorème du Darbo

Théorème 2.3.1. *[22] Soit Q un sous-ensemble borné non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach E, et $T : Q \to Q$ un opérateur continu tel que*
$$\psi(TX) \leq k\psi(X).$$
Pour toute partie non vide de Q où $k \in [0, 1[$. alors T admet au moins un point fixe dans Q. [ψ désigne la MNC définie sur E]

Remarque 2.3.1. *[22] Notons par $FixT$ l'ensemble de tous les points fixes de l'opérateur T qui appartiennent à Q. L'ensemble $FixT$ appartient à la famille $ker\psi$.*

2.3.2 Théorème du point fixe couplé

Définition 2.3.3. *[1] Un élément $(x, y) \in X \times X$ est appelé un point fixe couplé d'une application $F : X \times X \to X$ si $F(x, y) = x$ and $F(y, x) = y$.*

Théorème 2.3.2. *[1] Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des espaces de Banach et $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ des mesures de non-compacité dans $X_1, X_2, ..., X_n$ respectivement. Supposons que la fonction $\xi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ est convexe avec $\xi(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ si et seulement si $a_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3, ..., n$ alors*

$$\mu(D) = \xi(\mu_1(D_1), \mu_2(D_2), ..., \mu_n(D_n)).$$

Définit a une mesure de non-compacité dans l'espace produit $X_1 \times X_2 \times ... \times Xn$ avec D_i la projection naturelle de D dans X, pour $i = 1, 2, ..., n$.

Remarque 2.3.2. *[1] Il est clair que l'espace produit $\underbrace{BC \times ... \times BC}_{n}$ devient un espace de Banach s'il muni de la norme*

$$\|(u_1, ..., u_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{BC}.$$

Théorème 2.3.3. *[1] Soit C un sous-ensemble non vide, borné et fermé d'un espace de Banach E et μ une mesure de la non-compacité arbitraire sur E. Si $F_i : C \times C \to C$ pour $i = 1, 2$ sont des opérateurs continus et il existe une constante $k \in [0; 1)$ tel que*

$$\mu(F_i(X_1 \times X_2)) \leq k \;\; max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} \tag{2.3}$$

Alors pour tout sous-ensemble X_1, X_2 de C, il existe $x^*, y^* \in X$ telle que

$$\begin{cases} F_1(x^*, y^*) = x^*, \\ F_2(x^*, y^*) = y^*, \end{cases} \tag{2.4}$$

preuve[1]
On considérons l'opérateur continu $F : C \times C \longrightarrow C$ définit par $F_1(x, y) = F(x, y)$ et $F_2(x, y) = F(y, x)$ et un opérateur $\widetilde{F} : C \times C \longrightarrow C \times C$ définit par

$$\widetilde{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Montre que $\widetilde{\mu} = max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$ est une mesure de la non-compacité dans l'espace $C \times C$, où on note $X_i, i = 1, 2$ les projections naturelles de X. Soit X sous-ensemble non vide de $C \times C$ alors on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}(\widetilde{F}(X)) &\leq \widetilde{\mu}(F_1(X_1 \times X_2) \times F_2(X_1 \times X_2)) \\
&= max\{\mu(F_1(X_1 \times X_2)), \mu(F_2(X_1 \times X_2))\} \\
&\leq max\{k\, max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}, k\, max\{\mu(X_2), \mu(X_1)\}\} \\
&\leq k\widetilde{\mu}(X).
\end{aligned}$$

Puisque $\widetilde{\mu}$ est aussi une mesure de non-compacité, donc toutes les conditions de théorème (2.3.2) sont satisfaits. D'où $\widetilde{F}$ admet un point fixe, i.e, il existe $x^*, y^* \in X$ tels que

$$(x^*, y^*) = \widetilde{F}(x^*, y^*) = (F_1(x^*, y^*), F_2(x^*, y^*)),$$

Donc (x^*, y^*) est la solution de (2.4).

Corollaire 2.3.1. *[1] Soit C un sous-ensemble non vide, borné et fermé d'un espace de Banach sur E, μ une mesure de non-compacité arbitraire sur E et $F : C \times C \to C$ un opérateur continu. Supposons que :*

(I) Il existe des constantes positives k_1, k_2 avec $k_1 + k_2 < 1$ telle que

$$\mu(F(X_1 \times X_2)) \leq k_1\mu(X_1) + k_2\mu(X_2)$$

où

(II) Il existe une constante $k \in [0, 1)$ telle que

$$\mu(F(X_1 \times X_2)) \leq k\, max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$$

Alors pour tout sous-ensemble X_1, X_2 de C, F admet un point fixe couplé.

Théorème 2.3.4. *[4] Soit C un sous-ensemble non vide, borné et fermé d'un espace de Banach E et u une mesure arbitraire de non-compacité sur E. Si $F : C^n \to C$ est un opérateur continu et qu'il existe une constante $k \in [0, 1)$ telle que*

$$\mu(F(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n)) \leq k\, max(\mu(X_1), \mu(X_2), ..., \mu(X_n))$$

Pour tout $X_1, X_2, ..., X_n$ de C, alors l'opérateur F admet un multiple point fixe dans C, c'est-à-dire qu'il existe $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in C$ tels que

$$\begin{cases}
F(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = x_1^*, \\
F(x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*, x_1^*) = x_2^*, \\
\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
F(x_n^*, x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-2}^*, x_{n-1}^*) = x_n^*.
\end{cases}$$

CHAPITRE 3

EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALE COUPLÉES

Dans cette section, nous énonçons et prouvons certains résultats d'existence des solutions des systèmes d'équations intégrale couplé (1).Appliquons des opérateurs de condensation dans les espaces de Banach.

Définition de la MNC

Soit $X \subset BC(\mathbb{R}^+)$ et $T > 0$, pour $x \in X$ et $\varepsilon \geq 0$, on désigne par $\omega^T(x, \varepsilon)$ le module de continuité de la fonction X sur l'intervalle $[0, T]$ i.e

$$\omega^T(x, \varepsilon) = \sup[|x(t) - x(s)|, \;\; t, s \in [0, T], \;\; |t - s| \leq \varepsilon]$$

En suite, nous mettons :

$$\begin{aligned} \omega^T(X, \varepsilon) &= \sup\left[\omega^T(x, \varepsilon); x \in X\right] \\ \omega_0^T(X) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^T(X, \varepsilon) \\ \omega_0(X) &= \lim_{T \to \infty} \omega_0^T(X) \end{aligned}$$

En plus, on pose :

$$\beta(X) = \lim_{T \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \{\sup[|x(t)|; t \geq T]\} \right\}$$

Finalement, on définis la fonction μ sur la famille $M_{(BC)}$ par la formule :

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \beta(X)$$

3.1 Résultats d'existence

Théorème 3.1.1. *[1] Supposons que les conditions suivantes sont remplies :*

(i) $\xi_i, \eta_i, \beta_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ (i = 1, 2)$ *sont continus et* $\xi_i \to \infty$ *quand* $t \to \infty$ *pour* $i = 1, 2$.

(ii) $f_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$ *sont continus. De plus, il existe une constante* $k \in [0, 1)$ *et des fonctions continues croissantes* $\Phi_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *avec* $\Phi_i(0) = 0, i = 1, 2, ..., n$, *telle que*

$$|f_i(t, x, y, z) - f_i(t, u, v, w)| \leq k\ max\{|x - u|, |y - v|\} + \Phi_i(m_i(t)|z - w|) \tag{3.1}$$

Où $m_i(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *sont des fonctions continues.*

(iii) Les fonctions $|f_i(t, 0, 0, 0)|$ *pour* $i = 1, 2$ *sont bornées sur* $\mathbb{R}_+$ *c'est à dire*

$$M_i = sup\{f_i(t, 0, 0, 0) : t \in \mathbb{R}_+\} < \infty. \tag{3.2}$$

(iv) $g_i = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *pour* $i = 1, 2$ *sont continus et il existe une constante positive D telle que*

$$sup\{m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \right| : t \in \mathbb{R}_+,\ x, y \in BC(\mathbb{R}_+), 1 \leq i \leq 2\} < D. \tag{3.3}$$

De plus

$$\lim_{t \to \infty} m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} [g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))]ds \right| = 0, \tag{3.4}$$

Uniformément par rapport à $x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ *pour* $i = 1, 2$.
Alors le système d'équations (1) admet au moins une seule solution dans l'espace $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$.

Preuve

[1] La preuve se fait en deux étapes.

étape 1 : $G_i : BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ définit par

$$G_i(x, y)(t) = m_i(t) \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \tag{3.5}$$

Pour $i = 1, 2$ des opérateurs continus et compacts .
On fixe $1 \leq i \leq 2$.
Notez que la continuité de $G_i(x, y)(t)$ pour tout $x \in BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ est évident.
De plus, par (3.3), G_i est un opérateur sur $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ en $BC(\mathbb{R}_+)$.
Maintenant, nous montrons que G_i est continue, pour cela nous prennons $x, y \in BC(\mathbb{R}_+)$ et $\epsilon > 0$ arbitraire, nous considérons $u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ avec $\|x - u\| < \epsilon$ et $\|v - y\| < \epsilon$, alors on obtient

$$\begin{aligned} |G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| \leq & \bigg| m_i(t) \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \\ & - m_i(t) \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))ds \bigg| \\ \leq & m_i(t) \bigg| \int_0^{\beta_i(t)} [g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) \\ & - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))]ds \bigg|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De plus, on considérant la condition (iv), il existe $T > 0$ tel que pour $t > T$ on a

$$|G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| \leq \epsilon$$

Donc si $t \in [0, T]$, alors de (3.6) il s'ensuit que

$$|G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| \leq m_T \beta_T \vartheta(\epsilon)$$

Où

$$\beta_T = sup\{\beta_i(t) : t \in [0, T], 1 \leq i \leq 2\},$$

$$m_T = sup\{m_i(t) : t \in [0, T], 1 \leq i \leq 2\},$$

$$b = max\{\|x\|, \|y\|\} + \epsilon,$$

$$\vartheta(\epsilon) = sup\{|g_i(t, s, x, y) - g_i(t, s, u, v)| : t \in [0, T], s \in [0, \beta_T],$$

$$x, y, u, v \in [-b, b], |x - u| \leq \epsilon, |y - v| \leq \epsilon\}.$$

En utilisant la continuité de g_i sur l'ensemble compact$[0, T] \times [0, \beta_T] \times [-b, b] \times [-b, b]$, on obtient $\vartheta(\epsilon) \to 0$,quand $\epsilon \to 0$. Ainsi, G_i est une fonction continue de $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ sur $BC(\mathbb{R}_+)$.

Soit X_1, X_2 deux sous-ensembles non vides et bornés de $BC(\mathbb{R}_+)$ et supposons que $T > 0$ et $\epsilon > 0$ sont choisissent arbitrairement.
Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, avec $|t_2 - t_1| \leq \epsilon$ et $x, y \in X$, on obtient

$$\begin{aligned}
|G_i(x,y)(t_2) - G_i(x,y)(t_1)| \leq & \Big| m_i(t_1) \int_0^{\beta_i(t_2)} g_i(t_2, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \\
& - m_i(t_2) \int_0^{\beta_i(t_1)} g_i(t_1, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \Big| \\
\leq & m_T \Big| \int_0^{\beta_i(t_2)} [g_i(t_2, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) \\
& - g_i(t_1, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))]ds \Big| \\
& + m_T \Big| \int_{\beta_i(t_1)}^{\beta_i(t_2)} g_i(t_1, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \Big| \\
\leq & m_T \beta_T \omega_r^T(g_i, \epsilon) + m_T U_r^T \omega^T(\beta_i, \epsilon),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Où

$$r = max\{sup\{\|x\| : x \in X_1\}, sup\{\|x\| : x \in X_2\}\}$$

$$\omega^T(\beta_i, \epsilon) = \{|\beta_i(t_1) - \beta_i(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \epsilon\},$$

$$\omega_r^T(g_i, \epsilon) = sup\{|g_i(t_2, s, x, y) - g_i(t_1, s, x, y)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_2 - t_1| \leq \epsilon,$$

$$x, y \in [-r, r], s \in [0, \beta_T]\},$$

$$U_r^T = sup\{|g_i(t, s, x, y)| : t \in [0, T], s \in [0, \beta_T], x, y \in [-r, r]\}.$$

Comme (x, y) est un élément arbitraire de $X_1 \times X_2$ dans (3.7) donc on obtient

$$\omega^T(G_i(X_1 \times X_2), \epsilon) \leq m_T \beta_t \omega_r^T(g_i, \epsilon) + m_T U_r^T \omega^T(\beta, \epsilon). \tag{3.8}$$

D'autre part par la continuité uniforme de g_i sur $[0, T] \times [0, \beta_T] \times [-r, r] \times [-r, r]$, on obtient $\omega_r^T(g_i, \epsilon) \to 0$ quand $\epsilon \to 0$ et à cause de la continuité uniforme de β sur $[0, T]$, on déduit que $\omega^T(\beta, \epsilon) \to 0$ quand $\epsilon \to 0$.
Donc on obtient

$$m_T \beta_T \omega_r^T(g_i, \epsilon) + m_T U_r^T \omega^T(\beta, \epsilon) \to 0,$$

Quand $\epsilon \to 0$ et
$$\omega_0^T(G_i(X_1 \times X_2)) = 0,$$
On obtient
$$\omega_0(G_i(X_1 \times X_2)) = 0 \tag{3.9}$$
Enfin, pour $(x, y), (u, v) \in X_1 \times X_2$ arbitraire et $t \in \mathbb{R}_+$ on a
$$\begin{aligned}\Big|G_i(x,y)(t) - G_i(u,v)(t)\Big| \leq & m_i(t)\Big|\int_0^{\beta_i(t)}[g_i(t,s,x(\eta_i(s))),y(\eta_i(s)) \\ & -g_i(t,s,u(\eta_i(s)),v(\eta_i(s)))]ds\Big| \\ \leq & m_i(t)\theta_i(t),\end{aligned} \tag{3.10}$$
Où
$\theta_i(t) = sup\{\Big|\int_0^{\beta_i(t)}[g_i(t,s,x(\eta_i(s)),y(\eta_i(s))) - g_i(t,s,u(\eta_i(s)),v(\eta_i(s)))]ds\Big| :$
$x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)\}$
Comme (x, y), (u, v) et t sont choisissent arbitrairement dans (3.10).
On conclut que
$$diam G_i(X_1 \times X_2)(t) \leq m(t)\theta(t). \tag{3.11}$$
On prenant $t \to \infty$ dans l'inégalité (3.11), en utilisant (iv).
On en déduit que
$$\lim_{t\to\infty} \sup diam G_i(X_1 \times X_2)(t) = 0. \tag{3.12}$$
De plus, on combinant (3.9) et (3.12).
Nous obtenons
$$\lim_{t,s\to\infty} \sup diam G_i(X_1 \times X_2)(t) + \omega_0(G_i(X_1 \times X_2)) = 0$$
Où équivalent
$$\mu(G_i(X_1 \times X_2)) = 0$$
Ainsi, G_i est un opérateur continu et compact .

étape 2 : Il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que les opérateurs $T_i : \overline{B}_{r_0} \times \overline{B}_{r_0} \to \overline{B}_{r_0} (i = 1, 2)$ définiS par
$$T_i(x,y)(t) = f_i\left(t, x(\xi(t)), y(\xi(t)), \int_0^{\beta(t)} g_i(t,s,x(\eta(s)),y(\eta(s))ds)\right) \tag{3.13}$$

sont bien définit où G_i sont donnés par (3.5) et

$$F_i(x,y)(t) = k\ max\{x(t), y(t)\},$$

Pour i=1,2.
On utilisant les conditions (i) - (iv), on fixe $t \in \mathbb{R}_+$ arbitraire et $i = 1, 2$.
On obtient

$$\begin{aligned}
&|T_i(x,y)(t)| \\
&\qquad \leq \left| f_i(t, x(\xi_i(t)), y(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))ds) - f_i(t,0,0,0) \right| \\
&\qquad +|f_i(t,0,0,0)| \\
&\qquad \leq k\ max\{|x(\xi_i(t))|, |y(\xi_i(t))|\} + |f_i(t,0,0,0)| \\
&\qquad +\Phi_i\left(m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))ds \right| \right) \\
&\qquad \leq k\ max\{\|x\|, \|y\|\} + M_i + \Phi_i(D).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Donc

$$\|T_i(x,y)\| \leq k\ max\{\|x\|, \|y\|\} + M_i + \Phi_i(D). \tag{3.15}$$

D'aprés (3.15), on a $T_i(\overline{B}_{r_0} \times \overline{B}_{r_0}) \subseteq \overline{B}_{r_0}$ pour

$$r_0 = max\{\frac{M_1 + \Phi_1(D)}{1-k}, \frac{M_2 + \Phi_2(D)}{1-k}\}.$$

Ensuite, d'aprés la condition (ii) du théorème 3.2.1, il est évident que F_i et $F_i(x)$ pour $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ sont des fonctions continues sur $BC(\mathbb{R}_+)$ et $(\mathbb{R}_+)$, respectivement, et pour $i = 1, 2, x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ et $t \in (\mathbb{R}_+)$.

On obtient

$$\begin{aligned}|T_i(x,y)(t)-T_i(u,v)(t)| &= \Bigg| f_i\left(t, x(\xi_i(t)), y(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,x(\eta_i(s)),y(\eta_i(s))ds)\right) \\ &\quad - f_i\left(t, u(\xi_i(t)), v(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,u(\eta_i(s)),v(\eta_i(s))ds)\right)\Bigg| \\ &\leq k\ max\{|x(t)-u(t)|, |y(t)-v(t)|\} \\ &\quad + \Phi_i(m_i(t))\Bigg|\int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,x(\eta_i(s)),y(\eta_i(s)))ds \\ &\quad - \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,u(\eta_i(s)),v(\eta_i(s)))ds\Bigg| \\ &\leq |F_i(x,y)(t)-F_i(u,v)(t)| + \Phi(|G_i(x,y)(t)-G_i(u,v)(t)|) \\ &\leq \|F_i(x,y)-F_i(u,v)\| + \Phi(\|G_i(x,y)-G_i(u,v)\|),\end{aligned}$$

Donc,

$$\|T_i(x,y)-T_i(u,v)\| \leq \|F_i(x,y)-F_i(u,v)\| + \Phi(\|G_i(x,y)-G_i(u,v)\|).$$

évidament, F_i satisfait à le corollaire (3.1.1), il existe $x_0, y_0 \in BC(\mathbb{R}_+)$ sont des solutions du système d'équations intégrales (1), et la preuve est complète.
De la même manière on pouvant d'aprés le théorème 3.2.1.
Pour définit le système d'équation intégrale non linéaire

$$x_i(t) = f_i\left(t, x_1(\xi_i(t)), ..., x_n(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t,s,x_1(\eta_i(s)),...,x_n(\eta_i(s)))ds\right).$$

Où f_i, g_i, ξ_i, η_i et β satisfait certaines conditions. D'aprés le théorème 3.2.1, on obtient les résultats.

Corollaire 3.1.1. *[1] Supposons que*

(i) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et la fonction* $t \to f(t,0,0)$ *est membre de l'espace* $BC(\mathbb{R}_+)$.

(ii) Il existe $k \in [0,1)$ *telle que*

$$|f(t,x,y)-f(t,u,v)| \leq \frac{k}{2}(|x-u|+|y-v|). \tag{3.16}$$

Pour toute $t \geq 0$ *et pour toutes* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

(iii) *Les fonctions* $\xi, \eta, q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *sont continues et* $\xi(t) \to \infty$ *quand* $t \to \infty$.

(iv) $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est une fonction continue et il existe* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *et une constante positive* d *telle que*

$$\int_0^{q(t)} |h(t, s, x_0, y_0)| ds \leq d. \tag{3.17}$$

Pour toute $t \in \mathbb{R}$, *de plus*

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^{q(t)} |h(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) - h(t, s, u(\eta(s)), v(\eta(s))| ds = 0. \tag{3.18}$$

$$\int_0^{q(t)} |h(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) - h(t, s, u(\eta(s)), v(\eta(s))| ds \leq \infty. \tag{3.19}$$

Pour toute $t \in \mathbb{R}_+$ *est uniformément par rapport à* $x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ *donc le système d'équations*

$$\begin{cases} x(t) = f(t, x(\xi(t)), y(\xi(t))) + \int_0^{q(t)} h(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) ds. \\ y(t) = f(t, y(\xi(t)), x(\xi(t))) + \int_0^{q(t)} h(t, s, y(\eta(s)), x(\eta(s))) ds. \end{cases} \tag{3.20}$$

Admet au moins une seule solution dans espace $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$

Preuve On prenant

$$\begin{aligned} f_1(t, x, y, z) &= f(t, x, y) + z, \\ f_2(t, x, y, z) &= f(t, y, x) + z, \\ g_1(t, s, x, y) &= h(t, s, x, y), \\ g_1(t, s, x, y) &= h(t, s, y, x) \end{aligned}$$

dans le théorème (3.2.1)

3.2 Exemple

[1] On considére le système d'équations intégrales

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2(x(t)+y(t))}{2(1+t^4)} + \int_0^{t^2} \frac{s^3 cos(sx(\sqrt{s})) + e^s(2+sin(x^4(\sqrt{s})+y^4(\sqrt{s})))}{e^{t^2}(2+sin(x^4(\sqrt{s})+y^4(\sqrt{s})))} ds, \\ y(t) = \frac{sin(t^2(x(t)+y(t)))}{2(1+t^4))} + arctan \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\sqrt[4]{1+sy(s)+ts^{11}(1+x^4(s)+y^4(s))}}{(1+t^7)(1+x^4(t)+y^4(t))} ds, \end{cases} \tag{3.21}$$

Où $t \in [0, \infty)$.
Équation (3.21) est un cas particulier de l'équation (1).
Où

$$
\begin{aligned}
&\xi_1(t) = \xi_2(t) = \eta_2(t) = t, \beta_1(t) = t^2, \beta_2(t) = \eta_1(t) = \sqrt{t} \\
&f_1(t,x,y,z) = \frac{t^2(x+y)}{2(1+t^4)} + z, \\
&f_2(t,x,y,z) = \frac{sin(t^2(x+y))}{2(1+t^4)} + arctanz, \\
&g_1(t,s,x,y) = \frac{s^3cos(sx) + e^s(2+sin(x^4+y^4))}{e^{t^2}(2+sin(x^4+y^4))}, \\
&g_1(t,s,x,y) = \frac{\sqrt[4]{1+sy} + ts^{11}(1+x^4+y^4)}{(1+t^7)+(1+x^4+y^4)}.
\end{aligned}
$$

Maintenant on vérifiant toutes les conditions du théorème (3.2.1). Il est clair que la condition (i) est satisfait.
Supposons que $t \in \mathbb{R}_+$ et $x, y, z, v, w \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
|f_1(t,x,y,z) - f_1(t,u,v,w)| &\leq \frac{t^2}{1+t^4}\frac{|x-u|+|y-v|}{2} + |z-w| \\
&\leq \frac{1}{2}max\{|x-u|,|y-v|\} + |z-w|.
\end{aligned}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
|f_2(t,x,y,z) - f_2(t,u,v,w)| &\leq \frac{|sin(t^2(x-u+y-v))|}{2(1+t^4)} \\
&+ |arctan(z) - arctan(w)| \\
&\leq \frac{1}{2}max\{|x-u|,|y-v|\} + |z-w|.
\end{aligned}
$$

Donc f_1 et f_2 satisfait la condition (ii) du théorème (3.2.1) avec $k = \frac{1}{2}$. Donc il est clair que f_i et g_i sont continues alors on obtient

$$M_1 = sup\{\frac{t^2(0+0)}{2(1+t^4)} + 0 : t \in \mathbb{R}_+\} = 0,$$

$$M_2 = sup\{\frac{sin(t^2(0+0))}{2(1+t^4)} + 0 : t \in \mathbb{R}_+\} = 0,$$

$$\left|\frac{s^3cos(sx(\sqrt{s})) + e^s(2 + sin(x^4(\sqrt{s}) + y^4(\sqrt{s})))}{e^{t^2}(2 + sin(x^4(\sqrt{s}) + y^4(\sqrt{s})))}\right| \leq \left|\frac{s^3 + 2e^s}{e^{t^2}}\right|,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int_0^{\sqrt{s}} \frac{\sqrt[4]{1 + sx(s)} + ts^{11}(1 + x^4(s) + y^4(s))}{(1+t^7) + (1 + x^4(s) + y^4(s))} ds\right| = \frac{1}{12},$$

$$|g_1(t, s, x(\eta_1(s)), y(\eta_1(s))) - g_1(t, s, u(\eta_1(s)), v(\eta_1(s)))| \leq \frac{2s^3}{e^{t^2}},$$

$$g_2(t, s, x(\eta_2(s)), y(\eta_2(s))) - g_2(t, s, u(\eta_2(s)), v(\eta_2(s)))| \leq \frac{2(1+s)}{1+t^7}.$$

Donc, $D \leq \infty$ on obtient

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))ds\right| = 0$$

Par conséquent, d'après le théorème (3.2.1), le système d'équations intégrales (3.21) admet au moins une solution dans l'espace $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$.

CHAPITRE 4

EXISTENCE ET STABILITÉ DES SOLUTIONS POUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALES QUADRATIQUES

Considérons le système suivante d'équations intégrales fractionnaires quadratiques (2). Soit $x, y \in J = [0, \infty[\times[0, b], r_1, r_2 > 1, \varphi : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée, $G : BC \to BC$ est un opérateur linéaire, $g : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

4.1 MNC_s dans $C([0, +\infty[\times[0, b])$ [4]

Supposons que $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach de dimension infinie avec zéro élément θ. Notez que $B(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r et B_r la boule $B(o, r)$. Si U est un sous-ensemble de X alors $\overline{U}, convU$ représentent respectivement la fermeture et l'enveloppe convexe fermée de U. Notez $diamU$ le diamètre d'un ensemble U et $\|U\|$ la norme de U définit par $\|U\| = sup\{\|u\| : u \in U\}$. De plus, on note $M_X$la famille de tous les sous-ensembles non vides et bornés de X et N_X sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.
Nous définissons quelques notions de base concernant les mesures de non-compacité de manière axiomatique en fonction de certaines conditions naturelles. Pour définit une mesure de non-compacité dans l'espace BC, fixons un sous-ensemble borné non

vide Y de BC et $T > 1$. Pour $u \in Y$ et $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ notons $\omega^T(u, \epsilon_1, \epsilon_2)$ le module de la fonction continue u sur le rectangle $[0, T] \times [0, b]$.
C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\omega^T(u, \epsilon_1, \epsilon_2) &= sup\{|u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)| : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, T] \times [0, b], \\
&| \quad x_2 - x_1| \leq \epsilon_1, |y_2 - y_1 \leq \epsilon_2\}; \\
\omega^T(Y, \epsilon_1, \epsilon_2) &= sup\{\omega^T(u, \epsilon_1, \epsilon_2) : u \in Y\}; \\
\omega_0^T(Y) &= \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0} \omega^T(Y, \epsilon_1, \epsilon_2); \\
\omega_0(Y) &= \lim_{T \to \infty} \omega_0^T(Y).
\end{aligned}$$

Si (t, s) est un élément fixe de J, on note $Y(t, s) = \{u(t, s), u \in Y\}$ et

$$diamY(t, s) = sup\{\|u(t, s) - v(t, s)\| : u, v \in Y\}.$$

Enfin, on définie la fonction ψ sur la famille M_X par la formule

$$\psi(Y) = \omega_0(Y) + \lim_{s \to \infty} sup \ diamY(t, s).$$

On peut montrer que la fonction ψ est une mesure de non-compacité dans l'espace BC. Le noyau $ker \ \psi$ est constitué d'ensemble Y non vides et bornés tels que les fonctions de Y sont localement équi-continues sur J .

Remarque 4.1.1. *Observons que l'ensemble d'intersection A_∞ de $(A6)$ est membre de la famille $ker\psi$ alors pour tout n on obtient $\psi(A_\infty) \leq \psi(A_n)$, on déduit que $\psi(A_\infty) = 0$.*
Dans la suite nous supposons que l'espace X a la structure d'une algèbre de Banach, dans un tel cas nous notons $u \times v$ le produit des éléments $u, v \in X$ de même, nous notons $U \times V$ le produit de sous -ensemble U, V de X défini par $U \times V = \{uv : u \in U, v \in V\}$.

Définition 4.1.1. *[4] On dit que la mesure de non -compacité μ définie sur une algèbre de Banach X satisfait la condition (m) si pour des ensembles arbitraires $U, V \in M_X$ l'inégalité suivante est satisfait :*

$$\mu(UV) \leq \|U\|\mu(V) + \|V\|\mu(U). \qquad (m)$$

Remarque 4.1.2. *[4] La condition (m) définie ci-dessus est très pratique en considération liée à l'utilisation de la technique des mesures de non-compacité dans les algèbres de Banach. De plus la majorité des mesures de non-compacité satisfont à cette condition.*

4.2 Notion du stabilité

Supposons que Ω est un sous-ensemble non vide de l'espace BC et F est un opérateur sur Ω^n avec des valeurs dans BC^n. considérez l'équation suivante

$$(u_1, ..., u_n)(x, y) = F(u_1, ..., u_n)(x, y), \qquad (x, y) \in J. \qquad (*)$$

Définition 4.2.1. *[4] La solution $u^* = (u_1(x, y), ..., u_n(x, y))$ de l'équation (*) est globalement attractif si pour chaque solution $v^* = (v_1(x, y), ..., v_n(x, y))$ de (*) on a*

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{1\leq i\leq n} (u_i(x, y) - v_i(x, y)) = 0.$$

Si la limite est uniforme, c'est-à-dire pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $T > 0$ tel que

$$\sup_{1\leq i\leq n} |(u_i(x, y) - v_i(x, y))| < \epsilon. \qquad x \geq T.$$

On dit que les solutions de (*) sont globalement uniformément attractives.

4.3 Résultats principaux

On va donnent le résultat d'existence et de stabilité de système 2 appliquant le Théorème 2.3.4 sous les hypothèses suivantes :

(H_1) La fonction g est continue et il existe des fonctions $p_i : J \to \mathbb{R}_+, i = 1, ..., n$ continues et bornées telle que

$$|g(x, y, u_1, ..., u_n) - g(x, y, v_1, ..., v_n)| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(x, y)|u_i - v_i|}{\max\limits_{1\leq i\leq n}|u_i + v_i| + 1}$$

Pour tous $u_i, v_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n.$

(H_2) $G : BC \to BC$ est un opérateur linéaire borné avec le rayon spectral $r_\sigma(G) < 1$.

(H_3) Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sup_{x\geq 0;\, 0\leq y\leq b} \left| \int_0^x \int_0^y p^* + g(t, s, 0, ..., 0)dsdt \right| = \eta \leq 1.$$

avec

$$\frac{1+\eta}{1-\eta}\|\varphi\| < 1.$$

où $p^* = \sup |p_i|;\ 1 \leq i \leq n.$

Théorème 4.3.1. *[4] Sous l'hypothèse $(H_1)-(H_3)$ le système (1) a admet au moins une seule solution $u^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$. De plus, les solutions du système 2 sont globalement attractifs.*

Preuve[4] Considérons l'opérateur $F : \underbrace{BC \times ... \times BC}_{n}$ défini par

$$(F(u_1, ..., u_n))(x, y) = \varphi(x, y) + (Gu_1)(x, y) \int_0^x \int_0^y g(t, s, u_1(t, s), ..., u_n(t, s))dsdt. \tag{4.1}$$

Remarquons d'après nos hypothèses, pour toute fonction $u = (u_1, ..., u_n)$ de l'espace $BC \times ... \times BC$ la fonction $F(u_1, ..., u_n)$ est continue sur $J \times ... \times J$.
Ensuite, supposons qu'une fonction arbitraire $u = (u_1, ..., u_n) \in BC \times ... \times BC$ et en utilisant nos hypothèses, on fixe $(x, y) \in J$, on obtient

$$\begin{aligned}
&|(F(u_1, ..., u_n))(x, y)| \\
&\qquad \leq |\varphi(x, y)| + |(Gu_1)(x, y)| \int_0^x \int_0^y |g(t, s, u_1(t, s), ..., u_n(t, s))|dsdt \\
&\qquad \leq |\varphi(x, y)| + |u_1(x, y)| \int_0^x \int_0^y \Bigg[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i |u_i(t, s)|}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} |u_i(t, s)| + 1} \\
&\qquad + |g(t, s, 0, ..., 0)|\Bigg] dsdt \\
&\qquad \leq \|\varphi\| + \eta \|u\|,
\end{aligned}$$

On obtient

$$\|F(u_1, ..., u_n)\| \leq \|\varphi\| + \eta \|u\|.$$

Donc la fonction $F(u_1, ..., u_n)$ est bornée sur $J \times ... \times J$ et $Fu \in BC$.
On pose

$$r = \frac{\|\varphi\|}{1 - \eta}.$$

On en déduit que l'opérateur F transforme l'ensemble $B_r \times ... \times B_r$ à la boule B_r.
De plus, soit $(u_m) = (u_1, ..., u_n)_m \subset B_r \times ... \times B_r$, telle que

$$\lim_{m \to \infty} u_{i_m} = u_i$$

Pour $i=1,...,n$, on obtient
$|(F(u_{1_m},...,u_{n_m}))(x,y)-(F(u_1,...,u_n))(x,y)|$

$$\begin{aligned}
&= \Big|\varphi(x,y)+(Gu_{1_m})(x,y)\int_0^x\int_0^y |g(t,s,u_{1_m}(t,s),...,u_{n_m}(t,s))|dsdt\\
&- \varphi(x,y)+(Gu_1)(x,y)\int_0^x\int_0^y |g(t,s,u_1(t,s),...,u_n(t,s))|dsdt\Big|\\
&\leq \Big|(Gu_{1_m})(x,y)\int_0^x\int_0^y |g(t,s,u_{1_m}(t,s),...,u_{n_m}(t,s))|dsdt\\
&- (Gu_1)(x,y)\int_0^x\int_0^y |g(t,s,u_1(t,s),...,u_n(t,s))|dsdt\\
&+ (Gu_1)(x,y)\int_0^x\int_0^y |g(t,s,u_{1_m}(t,s),...,u_{n_m}(t,s))|dsdt\\
&- (Gu_1)(x,y)\int_0^x\int_0^y |g(t,s,u_{1_m}(t,s),...,u_{n_m}(t,s))|dsdt\Big|\\
&\leq \eta\|Gu_{1_m}-Gu_1|+\eta\|Gu_1\|\sup_{1\leq i\leq n}\|u_{i_m}-u_i\|\int_0^x\int_0^y dsdt.\\
&\leq \eta\sup_{1\leq i\leq n}\|u_{i_m}-u_i\|+\eta\|Gu_1\|\sup_{1\leq i\leq n}\|u_{i_m}-u_i\|\int_0^x\int_0^y dsdt.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{1\leq i\leq n}\|u_{i_m}-u_i\|=0$,, on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\|F(u_{1_m},...,u_{n_m})-F(u_1,...,u_n)\|=0$$

alors l'opérateur T est continu sur $B_r\times...\times B_r$. Maintenant, on considère l'opérateur T défini sur $BC\times...\times BC$ par

$$T(u_1,...,u_n)=\int_0^x\int_0^y g(t,s,u_1(t,s),...,u_n(t,s))dsdt.$$

Pour la fonction arbitraire $u=(u_1,...,u_n)$ de l'espace $BC\times...\times BC$ et on fixe (x,y) dans$J$, on utilisant nos hypothèses, On obtient

$|T(u_1,...,u_n)(x,y)|$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_0^x \int_0^y g(t,s,u_1(t,s),...,u_n(t,s))dsdt \right| \\ &\leq \int_0^x \int_0^y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i|u_i|(t,s)}{\max\limits_{1\leq i\leq n}|u_i(t,s)|+1} dsdt \\ &\leq \eta \sup_{1\leq i\leq n}|u_i(t,s)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|T(u_1,...,u_n)\| \leq \eta \sup_{1\leq i\leq n}\|u_i\|.$$

Clairement que l'opérateur T transforme l'ensemble $B_r \times ... \times B_r$ à la boule B_r et

$$F(B_r \times ... \times B_r) \subseteq \varphi + G(B_r).T(B_r \times ... \times B_r).$$

Ensuite, nous prenons un $Y \subset B_r$ non vide, on utilisant la définition (4.1.2).
On obtient

$$\begin{aligned} \psi(F(Y \times ... \times Y)) &\leq \psi(G(Y).T(Y \times ... \times Y)) \\ &\leq \|G(Y)\|\psi(T(Y \times ... \times Y)) + \|T(Y \times ... \times Y)\|\psi(G(Y)) \\ &\leq \frac{\|\varphi\|}{1-\eta}\psi(Y) + \eta\frac{\|\varphi\|}{1-\eta}\psi(Y), \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\psi(F(Y \times ... \times Y)) \leq \frac{1+\eta}{1-\eta}\|\varphi\|\psi(Y).$$

Enfin, d'après le théorème (2.2.2) on en déduit que F a admet au moins un point fixe multiple dans B_r qui est la solution du système (1). De plus, avec que l'ensemble $Fix\ F \in ker\ \psi$ et la caractérisation des ensembles appartenant à $ker\ \psi$ on conclut que toutes les solutions du système (1) sont globalement attractifs au sens de la définition (4.1.3).

4.4 Exemples

Nous considérons le système d'équations intégrales suivantes [4]

$$\left\{\begin{array}{l} u_1(x,y) = \frac{1}{5s+t} + e^{-2y-x}u_1(x,y)\int_0^x\int_0^y \frac{n^{-1}e^{-3st}}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i(t,s)|+1}dsdt, \\ u_2(x,y) = \frac{1}{5s+t} + e^{-2y-x}u_2(x,y)\int_0^x\int_0^y \frac{n^{-1}e^{-3st}}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i(t,s)|+1}dsdt, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ u_n(x,y) = \frac{1}{5s+t} + e^{-2y-x}u_n(x,y)\int_0^x\int_0^y \frac{n^{-1}e^{-3st}}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i(t,s)|+1}dsdt. \end{array}\right. \tag{3}$$

Où $(x,y) \in J = [0,+\infty) \times [0,\pi]$, et $\varphi(x,y) = \frac{1}{5s+t}$, $\|\varphi\| = \dfrac{1}{6}$,$(Gu_i)(x,y) = e^{-2y-x}u_i(x,y)$
et

$$g(t,s,u_1(t,s),...,u_n(t,s)) = \frac{n^{-1}e^{-3st}u_1(t,s)}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i(t,s)|+1}, \ \ (t,s)\in J$$

Il est clair que le système (3) peut être écrit comme le système (1).
Montrons que les conditions (H1) - (H3) sont vérifiées, nous avons aussi

$$\begin{aligned} |(g(t,s,u_{1_m},...,u_n))(x,y) - (g(t,s,v_1,...,v_n))(x,y)| &= \left|\frac{n^{-1}e^{-3st}}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i|+1} - \frac{n^{-1}e^{-3st}}{\max\limits_{1\le i\le n}|v_i|+1}\right| \\ &= \left|\frac{n^{-1}e^{-3st}(\max\limits_{1\le i\le n}|u_i| - \max\limits_{1\le i\le n}|v_i|)}{(\max\limits_{1\le i\le n}|u_i|+1)(\max\limits_{1\le i\le n}|v_i|+1)}\right| \\ &\le \frac{n^{-1}e^{-3st}\max\limits_{1\le i\le n}|u_i - v_i|}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i+v_i|+1} \\ &\le \frac{n^{-1}e^{-3st}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i - v_i|}{\max\limits_{1\le i\le n}|u_i+v_i|+1} \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-3st}|u_i-v_i|}{\max_{1\le i\le n}|u_i+v_i|+1} \end{aligned}$$

Donc pour tout $i = 1, ..., n$, nous avons $p_i(t,s) = e^{-3st}$, $g(t,s,0,\cdots,0) = n^{-1}e^{-3st}$ et $\sup\limits_{1\leq i\leq n} \|p_i\| = e^{-3st}$.
Évidemment, l'opérateur G est linéaire et pour chaque u de BC.
On obtient

$$\sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \leq e^{-3}$$

Ensuite, fixe (x,y) dans J, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x \int_0^y p^* + g(t,s,0,...,0)dsdt\right| &= \left|\int_0^x \int_0^y (1+n^{-1})e^{-3st}dsdt\right| \\
&\leq \left|\int_0^x (1+n^{-1})\left(\frac{-1}{3t}e^{-3ty} + \frac{1}{3t}\right)dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^x (1+n^{-1})\left(e^{-3t}+1\right)dt\right| \\
&\leq \left|(1+n^{-1})(\int_0^x e^{-3t}dt + \int_0^x 1dt)\right| \\
&= \left|(1+n^{-1})(\frac{1}{3} - \frac{e^{-3x}}{3} + \frac{1}{2}x^2)\right| \\
&\leq 2\left|\frac{1}{3} - \frac{e^{-3x}}{3} + \frac{1}{2}x^2\right|
\end{aligned}$$

Par conséquence d'aprées le théorème précédent le système (3) admet au moins une seule solution dans BC et ces solutions sont globalment attractives.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à une étude qui a porté sur l'existence et la stabilité des solutions de certaines systèmes d'équations intégrales non linéaires par utilisation de la technique du MNCs combinées avec les théorèmes du point fixe. Au début, on a donné la notion générale du MNCs et ses propriétés, et on a présenté des MNCs sur les espaces de fonctions continues, ces MNCs nous permet de caractériser les solutions sur le terme du stabilité dans certain sens. D'autre part, ce travail est une application du théorème du point fixe couplé pour les opérateurs condensés qui est un résultat intéressant de théorème de Darbo. Après, on a ajouté des résultats d'existence et du stabilité des solutions pour des systèmes finis d'équations intégrales sous des hypothèses suffisantes, et nous avons également donné des exemples illustratifs.

Nous mentionnons qu'on peut généraliser cette études sur des espaces vectoriels topologiques quelconques, ou bien considérer des systèmes infinis d'équations différentielles ou intégrales.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Aghajani, A.S. Haghighi, Existence of solutions for a system of integral equations via measure of noncompactness. *Novi Sad J. Math.* **44** (2014), no. 1, 59–73.

[2] André Giroux *Mesure et intégration ,Notes de cours , Département de Mathématique et statistique* . Décembre 2004.

[3] A.Mostefaï *Cours de topologie* O.D.P.U Ben Aknoun -Alger- 1994.

[4] S.Baghdad, Existence and stability of solutions for a system of quadratic integral equations in Banach algebras. *Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math.* 19 (2020), 203–218.

[5] S.Banaei, An extension of Darbo's theorem and its application to existence of solution for a system of integral equations. *Cogent Math. Stat.* **6** (2019), no. 1, Art. ID 1614319, 12 pp.

[6] J. Banas - Bapurao C. Dhage *Global asymptotic stability of solutions of functional integral equation* Nonlinear Analysis (2007).

[7] J. Banas - J.Caballero - J.Rocha and K.Sadarangani Monotonic solutions of a class of quadratic integral equations of Volterra type *Computers and Mathematic with Applications* 49 (2005) 943-952.

[8] J. Banas and B.C.Dhage Global asymptotic stability of solutions of a functional integral equation. *Nonlinear Anal.*69 (7) (2008) 1945 - 1952.

[9] J. Banas - J.R. Martin - K.Sadarangani *On solutions of a quadratic integral equation of Hammerstein type Math. Comput. Modelling* **43** (2006) 97-104.

[10] J. Banas-D. O'Regan *On existence and local attractivity of solutions of a quadratic Volterra integral equation **********of fractional order* J.Math.Anal.Appl.345 573-582 (2008).

[11] Franck Boyer *Analyse fonctionnelle , Master mathématique et applications première année* Université Aix Marseille , 13 décembre 2015.

[12] Francis Nier Dragos Iftimie *Introduction à la topologie licence de mathématiques* Université de Rennes 01 .

[13] Haïm Brézis *Analyse fonctionnelle théorie et application* Masson Paris New Barcelone Milan Mexico Sao pawlo ,1987 .

[14] Jean Yves *Base d'analyse fonctionnelle* Université Pierre et Marie Curie . Paris , France. 27 Novembre 2017.

[15] M.Nadir. *Cours sur les équations intégrales*, université de M'sila, 2016 .

[16] O'Regan. Donal, Je Cho. Yeol, Chen. *Yu-Qing, Topological degree theory and appli- cations*, Chapman Hall/CRC, 2006.

[17] Patrick Bernard *Topologie générale, partie 01 sur 03 du cours de topologie et calcul différentiel.* Octobre 2013.

[18] Patrick Bernard *Topologie générale, partie 02 sur 03 du cours de topologie et calcul différentiel.* Novembre 21.2013.

[19] Rozenn texier- Picard *Convexité et applications* Ens cachan bretagne /université/Rennes 01.

[20] R.Kress. *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989 .

[21] R.P.Kanwal. *Linear Integral Equations, Theory and Technique. Academic Press*, New York 1971 .

[22] R.R.Akhmerov-M.I.Kamenskii-A.S.Potapov-A.E.Rodkina-B.N. Sadovskii *Measures oesure de non compaciti noncompactness and condensing operators* Birkhäuser Verlag Basel.Boston.Berlin 1992.

[23] S. Abbas - M. Benchohra and Johnny Henderson *Global asymptotic stability of solutions of nonlinear quadratic Volterra integral equations of fractional order* -

[24] S. Abbas - M. Benchohra and Johnny Henderson *Asymptotic attractive nonlinear fractional order Riemann-Liouville integral equations in Banach algebras*

[25] S. Djebali *Le degré topologique théorie et applications* B.P 92 Kouba -Alger-2007.