REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles .

Par :

Bellal Khaled
Bechayeb Rabah
Lakehal Abdelkader
Dellal khaled abderraouf

Sur le thème :

SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ORDINAIRES PAR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

Soutenu publiquement à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Bendouma Bouharkat	**MCA**	Université Tiaret	**Président**
Mr Benhabi Mohamed	**MAA**	Université Tiaret	**Rapporteur**
Mr Zenter walid	**MAA**	Université Tiaret	**Examinateur**

Année Univèrsitaire : **2020/2021**

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Les équations différentielles veilles au XVIIe siècle et au XVIIIe.Les problèmes posés ou menant à des équations différentielles sont aussi vieux que l'analyse elle-même. Avant même qu'on ait complètement élucidé la question des infiniment petits et trouvé des fondements (provisoires), l'on se préoccupe déjà de résoudre des problèmes de tangente, qui mènent invariablement à une équation différentielle. De la même manière, dès les débuts de la mécanique classique, dite newtonienne, on cherche à résoudre des problèmes de n points matériels qui tous mènent à l'intégration d'un système de 3n équations différentielles du second ordre, où les inconnues sont des fonctions du temps représentant des coordonnées des points. Les équations différentielles sont obtenues à partir de trois sources principales qui sont

1) *Physique et sciences appliquées il nous fournit un nombre considérable d'équations différentielle, car tout événement physique, technique ou naturel change en raison de l'influence des facteurs environnants et en raison du changement de temps et de lieu, et en reliant ces changements aux variables donne une équation différentielle.*

2) *Les applications d'ingénierie liées à la fonction et à sa tangente ou son rythme et sa courbure donnent une équation différentielle.*

3)*nous pouvons avoir un ensemble de fonctions qui sont données sous une forme algébrique, et pour connaître l'équation que ce groupe réalise, nous faisons le processus de recherche de l'équation différentielle et nous l'équation le processus de formation de l'équation.*

On s'habitue progressivement à ce que l'inconnue d'une équation puisse être une fonction. La fonction a encore à cette époque, et pour longtemps un statut flou. Même les fonctions élémentaires ne sont pas exemptes de problèmes. Une longue polémique occupe toute l'Europe mathématique sur la question des logarithmes des nombres négatifs. Leibniz s'oppose ainsi à Euler qui est le seul à entrevoir la bonne réponse.

Pour un mathématicien de la fin du XVIIe siècle ou du début du XVIIIe, résoudre une équation différentielle consiste à écrire la solution générale de l'équation, et de préférence en termes finis et avec des fonctions élémentaires. Il n'est ici pas question de problème de conditions initiales.

On utilise à cette époque, sans formalité, la méthode des séries entières pour résoudre les équations différentielles. On ne se préoccupe aucunement de la convergence de ces séries qui sont censées converger tout le temps. Même Euler, le plus grand mathématicien du XVIIIe siècle, ne voit pas le problème. Il va jusqu'à intégrer et dériver des séries dont le rayon de convergence est 0, sans même s'apercevoir qu'il a trouvé ainsi des contre-exemples à la croyance de l'époque que la série de Taylor converge. Quand il est confronté au calcul numérique sur de telles séries non convergentes, son flair de mathématicien lui indique qu'il convient de s'arrêter au terme le plus faible en valeur absolue.

Les séries asymptotiques ne sont pas loin mais il faudra encore du temps pour la conceptualisation de la question qui ne sera réellement abordée qu'un siècle plus tard. Stirling de son côté, avec de Moivre, interpolent la fonction factorielle dont Euler donnera une représentation intégrale. Là encore, il s'agit d'un développement asymptotique.

Dans de nombreux cas, il n'est pas possible de résoudre des équations différentielles du second ordre avec Transactions variables . La méthode de résolution est présentée sous une forme séquentielle Une alternative solide n'est peut-être pas inévitable.

L'idée de résoudre sous forme de série ne se limite pas aux équations avec des équations Il comprend également, bien sûr, des équations à coefficients fixes

La méthode pour trouver des solutions à un certain nombre d'équations différentielle sont devenues connues et courantes, et il existe encore de nombreuses équation dont les méthodes de résolution sont inconnues jusqu'à présent. Quant aux équations dont les méthodes de résolution sont devenues connue, ce sont ces équations que nous pouvons trouver une solution ***(avec une précision totale)*** *et l'écrire en termes de fonctions connues de nous est appelées les fameuses fonctions, et ces fonctions, comme nous le savons, sont des polynômes, des fonctions exponentielles et des, fonctions trigonométrique, et chaque fonction est donnée en termes de ces fonctions ou de leurs combinaisons après exécution certaines opérations arithmétiques sur celles-ci telles que l'addition, la multiplication,****...etc***

*mais il y en a un grand nombre parmi les fonctions qui ne peuvent pas être exprimées en termes de dépendance célèbres, on appelle donc des fonctions spéciales, et ces dépendances sont définies de différentes manière, dont certaines sont connues à partir d'une relation intégrateur, dont certaines sont connues d'une relation différentielle,****...etc****.*

*On peut dire que les équations différentielle dont les solutions sont exprimées par les fonctions fameuses et les spéciale sont de méthodes connues, sachant qu'il existe de nombreuses équations qui ne peuvent être résolues par les mêmes méthodes. Par conséquent, d'autres méthodes****(qui sont des méthodes générales)****ont été se révèle appliquée à aux et à toutes les équations, mais ce sont des méthodes approximatives et nous mentionnons les méthodes de résolution par les chaînes de puissance transformer, les chaînes exponentielles ou sinusoïdales, les méthodes d'approximation séquentielle, les approximations asymptotiques, ou les méthodes numériques ou graphique.*

*Dans nos recherches,nous présenterons la méthode de recherche de solution par chaînes uniquement****(solutions analytiques)****car les autres méthodes ne font pas l'objet de cette recherche.*

descriptive du travail

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques concepts de bases de l'équation différentiel, sa classification et ses solutions telles que la solution particulière, la solution générale et quelques méthodes de la solution.

Dans le deuxième chapitre nous avons ensuite abordé a la solution des équations différentielles du second ordre avec les séries entières au voisinage d'un point ordinaire chose qui n'a pas toujours vérifier, pour cela on a introduise la notion de solution avec les points réguliers

Dans le troisième chapitre on applique ce qu'on a vu dans le chapitre 2 pour résoudre deux célèbres équations différentielles de Bessel et de Legendre par développement en série

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1) Généralités sur les équations différentielles

1.1.1) Équations différentielle

Définition 1.1.1. *c' est une relation d'égalité entre une variable indépendante x et une variable dépendante y et un ou plusieurs dérivées différentielles , c'est à-dire qu'elle est sous la forme générale*

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0 \tag{1.1}$$

L' équations (1.1) *est appelée une équation différentielle normale. Mais si le nombre de variables indépendantes est plus d' une, on dit, x, y sont indépendants et $z(x, y)$ est une variable qui peut être partiellement dérivée par rapport x, y rétrospectivement, alors dans ce cas l' équations contenant les variables est appelée une fonction indépendante et la variable dépendante et ses dérivées partielle par l' équations aux dérivées partielles qui se présente sous la forme :*

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots) = 0 \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.1. *Soit les équations différentielles suivantes*

1) $(y''')^4 + xy' - 3y = x^2$

2) $(y')^2 + 2xy = e^{3x}$

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2x$

Notez que les deux équations (1) *et* (2) *sont des équations différentielles normales tandis que l' équations* (3) *est une équation différentielle partielle.*

Définition 1.1.2. *:*

1) ***Rang d'une équation*** *est le rang du coefficient différentiel le plus élevé de l' équations.*

2) ***Le degré d'une équation*** *c' est le degré force du coefficient différentiel le plus élevé de l' équations, à conditions que tous les coefficients différentiels soient naturels .*

Exemple 1.1.2. *grâce aux équations différentielles trouvées dans l'exemple 1, nous constatons que l' équations* (1) *est du troisième ordre et du quatrième degré, tendis que l' équations* (2) *est du premier ordre et du deuxième degré, tendis que l'équation* (3) *est une différentielle partielle du deuxième et du premier degré.*

Définition 1.1.3. *La fonction $y = y(x)$ est appelée solutions de l'équation différentielle* (1.1) *Si elle vérifie les conditions suivantes*

1) *Différentiable n fois*

2) *Vérifier l'équation différentielle, c' est -à- dire $F(x, y(x), y'(x), \dots) = 0$*

1.1.2) Solution générale et solution particulière

La solution générale d' une équation différentielle d'ordre n est une solution contenant n constante optionnelles et satisfaisant bien entendu l'équation différentielle quant à la solution particulière, c' est toute solution qui remplit l'équation différentielle qui n'inclut pas de constantes optionnelles, et nous pouvons parfois l'obtenir en remplaçant les constantes optionnelles dans la solution générale par des valeurs spécifiques.

1.1.3) Formation de l'équation différentielle (suppression des constantes)

Si nous donnons la solution générale à une équation différentielle d'ordre n, nous trouvons que cette solution dépend en n des constantes optionnelles et est de la forme

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \tag{1.3}$$

où $c_1, c_2, \dots c_n$ sont des constantes optionnelles, et pour obtenir l'équation différentielle pour la solution donnée, nous exécutons n à partir des dérivées de l'équation (1.3) *donc nous avons $n+1$ équations qui est l'équation* (1.3) *en plus de n équation des opérations différentielles, de sorte que les constantes optionnelles peuvent être omises à partir des quelles nous obtenons l'équation différentielle requise.*

1.1.4) Conditions élémentaires et conditions aux limites

Dans certains problèmes d'équations différentielles ordinaires, certaines conditions sont données qui doivent être remplies en résolvant l'équation différentielle ordinaire, et ces conditions nous permettent de déterminer les constantes optionnelles qui apparaissent dans la solution générale à la suite des processus d'intégration utilisés pour unifier la solution générale.
Si la solution générale de l'équation différentielle ordinaire du second ordre par exemple contient deux constantes optionnelles, par conséquent, pour définir les deux constantes, l'existence de deux conditions supplémentaires pour l'équation est requise, et ces deux conditions prennent des formes différentes compris :

1) *Donne donc ces deux conditions au même point x_0*

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0$$

Ces conditions sont appelées conditions initiale en et x_0 l'équation différentielle en plus des conditions initiales est appelée le problème des valeurs élémentaires.

2) *si aux deux points on donne les deux conditions différemment x_1, x_2*

$$y(x_1) = y_1 \qquad y(x_2) = y_2$$

Ces conditions sont connues sous le nom de conditions aux limite et l'équation différentielle en plus des conditions aux limite est appelée la question de la valeur aux limites.

1.1.5) Équations différentielles linéaire

C'est l'équation linéaire dans la variable dépendante et ses dérivées toutes ensemble, ce qui signifie que chacune d'elles est élevée à la puissance de un, et qu'il n'y a pas de multiplicateurs communes entre elle, et peu importe que leurs coefficients soient des constantes ou des fonctions dans x. La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est :

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{1.4}$$

$$\text{où } \sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^i = q(x) \tag{1.5}$$

Remarque 1.1.1. *Si l'équation différentielle n'est pas linéaire, alors c'est une équation différentielle non linéaire.*

Remarque 1.1.2. *Le non linéarité n'affecte pas l'ordre de l'équation différentielle.*

1.1.6) Équations différentielle linéaire homogène

Si la fonction $q(x)$ est absente dans l'équation différentielle linéaire (1.5) pour toutes les valeurs x, on dit qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène et s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{où } \sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^i = 0 \tag{1.6}$$

1.2) Équations différentielles du premier ordre

Les équations différentielles du premier ordre (d'ordre un) sont de la forme :

$$F(x, y, y') = 0$$

1.2.1) Les équations à variables séparables

Définition 1.2.1. *([9]; p65)*
On appelle une équation différentielle à variables séparables toute équation de la forme :

$$f(y)y' = g(x) \tag{1.7}$$

oú f et g sont deux fonctions numériques définies et continues respectivement sur I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.1. *L'équation (1.7) peut s'écrire aussi sous la forme*

$$f(y)dy = g(x)dx$$

Les solutions de l' équation (1.7) sont définies par

$$\int f(y)dy = f(x)dx + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.2.1. *Résoudre l'équation :*

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

on a : $f(y) = y$ *et* $g(x) = \dfrac{1}{x}$
alors :

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} = 0 &\Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad car: \qquad (y' = \frac{dy}{dx}) \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ &\Leftrightarrow \ln y = \ln x + \ln k \\ &\Leftrightarrow \ln y = \ln(kx) \\ &\Leftrightarrow y = kx \qquad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.2.2) Les équations homogènes

Définition 1.2.2. *(fonctions homogènes ([4]; p29))*
Une fonction $f(x, y)$ *est dite homogène de ses arguments de degré* n *si elle vérifie l' identité*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Exemple 1.2.2. *Montrons que* $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ *est une fonction homogène :*
En effet pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 xy \\ &= \lambda^2 \left(x^2 + y^2 + xy\right) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

Donc f *est une fonction homogène d'ordre* 2.

Définition 1.2.3. *([4]; p29)*
Une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$ *est dite homogène lorsque la fonction* $f(x, y)$ *est homogène de degré zéro.*

Exemple 1.2.3. *Résoudre l' équation suivante*

$$y' - \frac{xy + y^2}{x^2} = 0$$

posons : $y = vx \Rightarrow y' = xv' + v$ *alors :*

$$\begin{aligned}
y' - \frac{xy + y^2}{x^2} = 0 &\Leftrightarrow y' = \frac{xy + y^2}{x^2} \\
&\Leftrightarrow y' = \frac{x(vx) + (vx)^2}{x^2} \qquad \textit{car} \qquad (y = vx) \\
&\Leftrightarrow y' = \frac{x^2v + x^2v^2}{x^2} \\
&\Leftrightarrow y' = v + v^2 \\
&\Leftrightarrow xv' + v = v + v^2 \\
&\Leftrightarrow xv' = v + v^2 - v \\
&\Leftrightarrow xv' = v^2 \\
&\Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = v^2 \\
&\Leftrightarrow x\frac{dv}{dx} = v^2 \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x} \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{v} = \ln|x| + c \\
&\Leftrightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \qquad \textit{car} \qquad (y = vx \Rightarrow v = \frac{y}{x}) \\
&\Leftrightarrow -\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln|x| + c} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{-x}{\ln|x| + c} \qquad c \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

1.2.3) Équation se ramenant aux équations homogènes ([4]; p31)

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}) \tag{1.8}$$

où a, a', b, b', c, c', *sont des constantes réelles et* f *est une fonction continue.*

1) Si $c = c' = 0$ *l'équation (1.8) est homogène.*

2) *Lorsque l'un au moins des nombres* c, c' *est différent de zéro, il convient de distinguer deux cas :*

2.1) *Le déterminant* $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$. *En introduisant les nouvelles variables* α *et* β *définies par les formules :*

$$\begin{cases} x = \alpha + k \\ y = \beta + l \end{cases}$$

où k et l sont pour l'instant des constantes indéterminées. Alors

$$(1.8) \Longleftrightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a\alpha + b\beta + ak + bl + c}{a'\alpha + b'\beta + a'k + b'l + c'}\right)$$

En choisissant k et l comme solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ak + bl + c = 0 \\ a'k + b'l + c' = 0. \end{cases} \quad (\triangle \neq 0)$$

On obtient une équation différentielle homogène

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\left(\frac{a\alpha + b\beta}{a'\alpha + b'\beta}\right)$$

En cherchant son intégrale générale et en y remplaçant α par $(x-k)$ et β par $(y-l)$ on obtient l'intégrale générale de (1.8)

2.2) *Le déterminant $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, dans ce cas il existe un réel λ tel que*

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b$$
$$(1.8) \Longleftrightarrow \tfrac{dy}{dx} = f\left(\tfrac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c'}\right)$$

la substitution $z = ax+by$ se ramène cette équation à une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 1.2.4. *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

Considérant le système linéaire

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Alors le système admet une solution unique $(k, l) = (-1, 3)$, en effet le changement de variables

$$x = \alpha - 1, \quad y = \beta + 3.$$

On obtient

$$\begin{cases} x + y - 2 = \alpha + \beta \\ x - y + 4 = \alpha - \beta \\ dx = d\alpha \\ dy = d\beta \end{cases}$$

et l'équation (1.8) *devient*

$$(\alpha + \beta)d\alpha + (\alpha - \beta)d\beta = 0,$$

est une équation homogène. En posant $\beta = t\alpha$, on obtient

$$(\alpha + t\alpha)d\alpha + (\alpha - t\alpha)(\alpha dt + td\alpha) = 0$$

d'où (après des simplifications)

$$\left(1+2t-t^2\right)d\alpha + a(1-t)dt = 0$$

séparons les variables

$$\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{(1-t)dt}{1+2t-t^2} = 0$$

on intègre il vient

$$\ln|a| + \frac{1}{2}\ln\left|1+2t-t^2\right| = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

où

$$\alpha^2\left(1+2t-t^2\right) = k, \quad k = e^{2c}$$

revenons aux variables x, y :

$$(x+y)^2\left[1+\frac{2(y-3)}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

1.2.4) Facteur intégration ([4]; p34)

La forme standard de l'équation différentielle linéaire ordinaire du premier ordre est

$$u' + p(x)u = q(x)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions données continues sur un certain intervalle $x_0 < x < x_1$. Nous déterminons d'abord un facteur intégrant $\mu u(x)$ en utilisant la formule :

$$\mu(x) = e^{\int p(t)dt}$$

Exemple 1.2.5. *Résoudre l'équation*

$$xy' + y = 2x, \qquad x > 0$$

soit : $y' + P(x)y = Q(x)$

alors : $y' + \frac{1}{x}y = 2$

on pose : $P(x) = \frac{1}{x}$ *et* $Q(x) = 2$

Facteur d'intégration : $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

Équation de multiplication : $xy' + x\frac{1}{x}y = 2x$

C'est à dire :

$$\frac{d}{dx}[xy] = 2x$$
$$xy = \int 2x dx$$
$$xy = x^2 + c$$
$$y = \frac{x^2+c}{x}$$
$$y = x + \frac{c}{x}$$

1.2.5) Équation de Bernoulli

Ce sont des équations du premier ordre qui peuvent se ramener à une équation linéaire.

Définition 1.2.4. *([9]; p72)*
On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$$

où $a, b,$ et f sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(x) \neq 0$ sur$I$.

Méthode de résolution :
En divisant par y^{α} on obtient :

$$a(x)y'y^{-\alpha} + b(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

le changement de fonction défini par $z = y^{1-\alpha}$ conduit à une équation linéaire. En effet

$$z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$$

d'où

$$\frac{z'}{1-\alpha}a(x) + b(x)z = f(x)$$

ou encore

$$a(x)z' + (1-\alpha)b(x)z = (1-\alpha)f(x)$$

Exemple 1.2.6. *Résoudre l'équation*

$$y' - \frac{1}{x}y = xy^2$$

soit : $y' + P(x)y = Q(x)y^n$
telle que : $P(x) = -\dfrac{1}{x}$ *et* $Q(x) = x$ *et* $n = 2$
Diviser par y^2 : $\dfrac{1}{y^2}y' - \dfrac{1}{x}y\dfrac{1}{y^2} = xy^2\dfrac{1}{y^2}$
alors : $y^{-2}y' - \dfrac{1}{x}y^{-1} = x$
on pose : $z = y^{-1}$ et $z' = -y^{-2}y'$
alors :

$$-z' - z = x$$
$$z' + z = -x$$

$$
\begin{aligned}
\textit{Facteur d'intégration :} \quad & \mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x \\
\textit{Équation de multiplication :} \quad & xz' + xz = -x^2 \\
\textit{alors :} \quad & \frac{d}{dx}[xz] = -x^2 \\
& xz = -\int x^2 dx \\
& xz = -\frac{x^3}{3} + c \\
& z = -\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \\
& z = \frac{-x^3+3c}{3x} \\
& \frac{1}{y} = \frac{-x^3+3c}{3x} \qquad \textit{car } (z = y^{-1} = \frac{1}{y}) \\
& y = \frac{3x}{-x^3+3c}
\end{aligned}
$$

1.2.6) Équation de Riccati

Ce sont des équations de Bernoulli avec $\alpha = 2$ et second membre.

Définition 1.2.5. *([$\boxed{9}$]; p73)*
On appelle équation de Riccati une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b, et c sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(x) \neq 0$ sur$I$.

Méthodes de résolution
Méthode 1
Transformons l'équation de Riccati à une équation de Bernoulli
Soit l'équation de Riccati

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = f(x) \tag{1.9}$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation (1.9), posons $y = y_p + z$,
donc $y' = y_p' + z'$, alors la détermination de y revient à déterminer z en effet

$$
\begin{aligned}
(1.9) &\Longleftrightarrow a\left(y_p' + z'\right) + b\left(y_p + z\right) + c\left(y_p + z\right)^2 = f(x) \\
&\Longleftrightarrow ay_p' + by_p + cy_p^2 + az' + bz + c\left(z^2 + 2y_p z\right) = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \left(ay_p' + by_p + cy_p^2\right) + az' + \left(b + 2cy_p\right)z + cz^2 = f(x) \\
&\Longleftrightarrow az' + \left(b + 2cy_p\right)z + cz^2 = 0
\end{aligned}
$$

En résolvant cette dernière équation (une équation de Bernoulli), on obtient z et par conséquent la solution y de l'équation (1.9) de Riccati.

Méthode 2
(Transformons l'équation de Riccati à une équation linéaire) Soit l'équation de Riccati (1.9)
Soit y_p *une solution particulière de l'équation* (1.9), *posons* $y = y_p + \frac{1}{z}$, *donc* $y' = y'_p - \frac{z'}{z^2}$, *alors la détermination de* y *revient à déterminer* z *en effet*

$$\begin{aligned}
(1.9) &\Longleftrightarrow a\left(y'_p - \frac{z'}{z^2}\right) + b\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + c\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 = f(x) \\
&\Longleftrightarrow ay'_p - a\frac{z'}{z^2} + by_p + \frac{b}{z} + c\left(y_p^2 + 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2}\right) = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \left(ay'_p + by_p + cy_p^2\right) - \frac{az'}{z^2} + \frac{b}{z} + 2c\frac{y_p}{z} + \frac{c}{z^2} = f(x) \\
&\Longleftrightarrow -\frac{az'}{z^2} + (b + 2cy_p)\frac{1}{z} + \frac{c}{z^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow az' - (b + 2cy_p) - c = 0
\end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation (une équation linéaire de premier ordre), on obtient z *et par conséquent la solution* y *de l'équation* (1.10) *de Riccati.*

Exemple 1.2.7. *Intégrer l'équation*

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1 \tag{1.10}$$

Il est facile de vérifier que $y_p = x$ *est une solution particulière de* (1.10).
En posant $y = x + z$ *donc* $y' = 1 + z'$,

$$(1.10) \Longleftrightarrow 1 + z' = (x + z)^2 - 2x(x + z) + x^2 + 1$$

soit après simplification : $z' = z^2$

$$\begin{aligned}
z' = z^2 &\Longleftrightarrow \frac{z'}{z^2} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = -1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{z} = -x + c \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

donc l'intégrale générale de (1.10) *est :*

$$y = x - \frac{1}{x - c} \quad c \in \mathbb{R}$$

1.2.7) Équations aux différentielles totales

Définition 1.2.6. *([4]; p39)*
L' équation différentielle

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.11}$$

est appelée équation aux différentielles totales si $M(x, y)$ *et* $N(x, y)$ *sont des fonctions continues et dérivables telles que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial M}{\partial y}$ *et* $\frac{\partial N}{\partial x}$ *sont contenues dans un certain domaine.*

Exemple 1.2.8. *Résoudre l' Équation suivant :*

$$(x - xy^2)dx + (8y - x^2y)dy = 0 \tag{1.12}$$

En posant $M(x, y) = (x - xy^2)$ *et* $N(x, y) = (8y - x^2y)$ *on obtient*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy \ et \ \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Donc l'équation est une équation aux différentielles totales. Alors

$$\begin{aligned} M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} &\Longleftrightarrow u(x, y) = \int M(x, y)dx \\ &\Longleftrightarrow u(x, y) = \int \left(x - xy^2\right) dx + \varphi(y) \\ &\Longleftrightarrow u(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y) \end{aligned}$$

En dérivant $u(x, y)$ *par rapport a* y

$$\begin{aligned} N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} &\Longleftrightarrow 8y - x^2y = \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\Longleftrightarrow 8y - x^2y = -yx^2 + \varphi'(y) \\ &\Longleftrightarrow \varphi'(y) = 8y \\ &\Longleftrightarrow \varphi(y) = 4y^2 + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et par conséquent on obtient

$$\mathrm{u}(x, y) = \frac{1}{2}\left(1 - y^2\right) + 4y^2 + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

et par suite la solution générale de I équation (1.12) est donnée par

$$\frac{1}{2}\left(1 - y^2\right) + 4y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.2.8) Facteur intégrant

Définition 1.2.7. *([4]; p42)*
Supposons que le premier membre de l'équation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.13}$$

ne soit pas une différentielle totale.
Si on multiplie (1.13) *par une certaine fonction* $\varphi(x, y)$ *avec*

$$\varphi M(x, y)dx + \varphi N(x, y)dy = 0 \tag{1.14}$$

devienne une équation aux différentielles totales, on dit que φ *est un facteur intégrant.*

Remarque 1.2.2. *Une équation* $Mdx + Ndy = 0$ *(non totale) peut admettre une infinité de facteurs intégrants*

Détermination d'un facteur intégrant .Pour que l'équation (1.13) *soit une équation aux différentielles totales il est nécessaire et suffisant que l'on ait :*

$$\frac{\partial(\varphi M)}{\partial y}=\frac{\partial(\varphi N)}{\partial x} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
(1.14)\Longleftrightarrow & M\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial N}{\partial x}\\
\Longleftrightarrow & M\frac{\partial\varphi}{\partial y}-N\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\\
\Longleftrightarrow & \frac{M\frac{\partial\varphi}{\partial y}-N\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\\
\Longleftrightarrow & M\frac{\partial\ln\varphi}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\varphi}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \qquad (*)
\end{aligned}$$

$(*)$ *est une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue* φ *dépendant de deux variables* x *et* y*, la résolution de cette équation dans le cas général n'est pas toujours facile, mais il y a des cas particuliers où l'on arrive à déterminer* φ*.Parmi ces cas particulières ,on a*
(i) φ *dépendant seulement de* y *:*
On a

$$\begin{aligned}
(*) &\Longleftrightarrow M\tfrac{d\ln\varphi}{dy}=\tfrac{\partial N}{\partial x}-\tfrac{\partial M}{\partial y}\\
&\Longleftrightarrow \tfrac{d\ln\varphi}{dy}=\tfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}
\end{aligned}$$

d'où l'on détermine $\ln\varphi$ *donc* φ

Il est évident que l'on ne peut procéder ainsi que si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ *ne dépend pas de* x*.*
(ii) φ *dépendant seulement de* x *:*
D'une manière analogue à celle du cas précédent si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ *ne dépend pas de* y*, alors*

$$\begin{aligned}
N\frac{d\ln\varphi}{dx}&=-\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\\
\frac{d\ln\varphi}{dx}&=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}
\end{aligned}$$

d'où on peut déterminer $\ln\varphi$ *et par la suite on détermine* φ*.*

Exemple 1.2.9. *Résoudre l'équation suivante en déterminant un facteur intégrant*

$$\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0 \tag{1.16}$$

Soit $M(x,y)=x+y^2$*, et* $N(x,y)=-2xy$
on a $\frac{\partial M}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-2y$*. Comme* $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$
alors l'équation (1.16) *n'est pas totale.*
Cherchons maintenant un facteur intégrant en calculant

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4y}{-2xy}=-\frac{2}{x}$$

Donc

$$\frac{d\ln\varphi}{dx}=-\frac{2}{x}\Longrightarrow\ln\varphi(x)=-2\ln|x|\Longrightarrow\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$$

L 'équation

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales son intégrale générale est

$$x = ce^{\frac{y^2}{x}}, \quad c \quad constante$$

1.3) Équations différentielles du second ordre

1.3.1) Équations différentielle linéaire

Définition 1.3.1. *On appelle équation différentielle du deuxième ordre toute relation de la forme :*

$$F(x, y, y'') = 0 \tag{1.17}$$

Ce type d'équations est souvent difficile à résoudre et complexe à étudier, nous allons donc nous concentrer dans cet article sur les équations qui peuvent être résolues par rapporte à la dérivée seconde, c'est-à–dire-qui peuvent être écrire sous la forme :

$$y'' = F(x, y, y') = 0 \tag{1.18}$$

En résolvant l'équation (1.16), il peut ne pas être possible de trouver une formule analytique appropriée pour celle-ci à moins que $F(x, y, y')$ et une fonction simple que nous distinguerons entre les équations linéaires et non linéaires.
La forme générale de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre est :

$$G(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \quad G(x) \neq 0 \tag{1.19}$$

Où les fonctions $G, P, Q,$ et R sont supposées continues dans les intervalles considérés pour la variable indépendante x. En fait, dans la plupart des cas, les fonctions p et q seront constantes.
Si $G(x) \neq 0$ on peut alors diviser l'équation (1.19) par $G(x)$
où $p(x) = \frac{P(x)}{G(x)}, q(t) = \frac{Q(x)}{G(x)}, r(x) = \frac{R(x)}{G(x)}$ on obtient l'équation suivant :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = r(x) \tag{1.20}$$

Remarque 1.3.1. *Si la fonction $r(x)$ est identique à zéro, l'équation différentielle (1.19) est dite homogène. Sinon, (1.19) est une équation différentielle non homogène.*

1.3.2) Substitutions ([5]; p51)

Dans des cas particuliers, il est parfois possible de résoudre des équations différentielles d'ordre deux non homogènes, à coefficients non constants, ou même non linéaires en effectuant une substitution qui transforme ces équations en équations d'ordre un, de sorte que nous avons réduit l'ordre de l'équation originale.
Cas I : *Considérons l'équation différentielle d'ordre deux (1.18) pour laquelle la fonction $f(x, y, y')$ ne dépend pas de y Si l'on pose $u(x) = y'(x)$,de sorte que $u'(x) = y''(x)$,alors l'équation du deuxième ordre est ramenée à une équation d'ordre n pour $u(x)$.Une fois cette équation d'ordre un résolue (si possible), il suffit d'intégrer la solution pour obtenir $y(x)$.*

Exemple 1.3.1. *Soit l'équation différentielle non homogène*
$y''(x)+y'(x)=2e^x \Leftrightarrow u''(x)+u'(x)=2e^x$ *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre un pour la fonction* $u(x)$ *. Sa solution générale est*

$$u(x)=e^x+c_0e^{-x}$$

Où c_0 *est une constante arbitraire. Il s'ensuit que*

$$c_2=-c_0$$

$$y(x)=\int(e^x+c_0e^{-x})dx+c_1=e^x+c_2e^{-x}+c_1$$

Cas II : *Supposons maintenant que la fonction* f *ne dépend pas (explicitement) de la variable indépendante* x*.*
On pose encore une fois $u=y'$ *ou, de façon plus précise,* $u[y(x)]=y'(x)$ *. On obtient que*

$$y''(x)=\frac{dy'}{dx}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}u \tag{1.21}$$

L'équation différentielle originale

$$y''(x)=f(y,y') \tag{1.22}$$

peut être réécrite comme suit :

$$u\frac{du}{dy}=f(y,u) \tag{1.23}$$

On considère alors y *comme la variable indépendante et* u *comme la variable dépendante dans l'équation transformée. Si on arrive à résoudre explicitement l'équation différentielle ainsi obtenue, il faut ensuite résoudre l'équation*

$$\frac{dy}{dt}=u$$

Où $u=u(y)=u[y(x)]$*, pour trouver la solution de l'équation originale.*

Exemple 1.3.2. *Considérons l'équation différentielle d'ordre deux non linéaire*

$$y''(x)=[y'(x)]^3=f(y,y')$$

Notons que la variable dépendante y *n'apparaît pas non plus dans la fonction* f*.*
On voit que $y(x)=c$*,une constante, est une solution de cette équation. Supposons que* $y(x)$ *n'est pas constante. Alors, avec* $u=y'\neq 0$ *, cette équation devient*

$$u\frac{du}{dy}=u^3$$

L'équation ci-dessus est à variables séparables. On a :

$$\int u^{-2}du=\int 1dy+c_1 \Rightarrow -\frac{1}{u}=y+c_1$$

Finalement, puisque $u = dy/dx$ on peut encore une fois séparer les variables :

$$-dx = (y + c_1)dy \Rightarrow -x = \frac{1}{2}y^2 + c_1 y + c_2$$

Donc, on a deux autres solutions :

$$c_0 = -c_1$$

$$y(x) = -c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 2(x + c_2)} = -c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 2(x + c_2)}$$

Où on suppose que les constantes peuvent être choisies de façon à obtenir des solutions réelles pour tout x.

1.3.3) Équations homogènes à coefficients constants ([5]; p53)

Dans cette sous-section, on suppose que $r(x) = 0$ et que les fonctions p et q sont constantes. On peut alors écrire que

$$y''(x) + p_0 y'(x) + q_0 y(x) = 0 \tag{1.24}$$

Si l'on pose une solution de la forme :

$$y(x) = e^{rx} \tag{1.25}$$

Où r est une constante, on trouve que r doit satisfaire à l'équation

$$r^2 + p_0 r + q_0 = 0 \tag{1.26}$$

Définition 1.3.2. *L'équation (1.26) est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle (1.24).*

Proposition 1.3.1. *Suivant le signe de $\Delta = p_0^2 - 4q_0$,on ales résultats suivantes :*
$\Delta > 0$ l'équation (1.26) admet 2 racines réelle distinctes $r_1 \neq r_2$ et la solution de (1.24) est

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta = 0$ l'équation (1.26) admet 1 racine double $r \in \mathbb{R}$ e et la solution de (1.24) est

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{rx} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Delta < 0$ l'équation (1.26) admet 2 racines complexes conjuguées
$r_1 = \alpha + i\beta$ $etr_2 = \alpha - i\beta$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$ et la solution de (1.24) est

$$y(x) = (c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x)e^{rx} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.3.3. *Trouvons la solution particulière de l'équation différentielle :*

$$y'' + y' + 6y = 0 \tag{1.27}$$

on pose :$y = c_1 e^{rx}$
r *doit être une racine de l'équation caractéristique*

$$r^2 + r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0$$

Ainsi, les valeurs possibles pour r *sont* $r_1 = -2$ *et* $r_2 = -3$ *La solution générale à l'équation (1.31) est*

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

1.3.4) Ensemble fondamental de solutions ([5]; p56)

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre deux (1.20)

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = r(x)$$

On peut montrer le théorème d'existence et d'unicité très important qui suit.

Théorème 1.3.1. *([5]; p56)*
Si les fonctions p, q *et* r *sont continues pour tout* x *dans l'intervalle* (a, b)*, qui peut être toute la droite réelle* $(-\infty, \infty)$*, alors il existe une et une seule solution* $y(x)$ *de l'équation (1.19) pour laquelle*

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y'_0 \qquad a < x_0 < b$$

Remarque 1.3.2. *Le théorème implique que la fonction* $y(x)$ *est bien définie pour tout* $x \in (a, b)$*. De plus, puisqu'elle satisfait à l'équation différentielle, elle est nécessairement au moins deux fois dérivable dans l'intervalle* (a, b)*.*
Le théorème est valable pour des équations différentielles non homogènes. Cependant, comme nous le verrons plus loin, le plus important est de trouver la solution générale de l'équation homogène correspondante. Nous allons donc supposer que $r(x) = 0$ *dans cette section, de sorte que :*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = 0 \tag{1.28}$$

Définition 1.3.3. *([5]; p56)*
Un opérateur O *est une règle qui associe une fonction* $O[y]$ *à chaque fonction* y*. On écrit :*

$$O : y \longmapsto O[y]$$

Exemple 1.3.4. *L'opérateur de dérivation* D *associe 'a une fonction donnée* $f(x)$ *sa dérivée : Si cet effet affecte une fonction* $f(x)$*, alors le résultat de l'effet est le coefficient différentiel de cette fonction, c'est -à-dire sa dérivée* $f'(x)$*.*

$$Df(x) = f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$$

Ce qui signifie qu'il est :

$$D = \frac{\partial}{\partial x}$$

Et le : $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *L'opérateur L est souvent écrit sous la forme :*

$$L = D^2 + pD + q$$

Remarque 1.3.3. *l'équation différentielle linéaire du second ordre peut être écrite sur le formulaire*

$$L[y] = r(x)$$

Notation 1.3.1. *Nous allons notée par L l'opérateur différentiel défini par*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y \Leftrightarrow L[y] = D^2[y] + p(x)D[y] + qy$$

En utilisant cette notation, on peut réécrire l'équation (1.21) comme suit :

$$L[y] = 0$$

.

Remarque 1.3.4. *Pour être précis,*

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$$

et

$$L[y](x) = 0$$

Théorème 1.3.2. *([5]; p56)*
Si y_1, y_2 *sont deux solutions à l'équation différentielle (1.32)*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

Alors, la combinaison linéaire $\alpha y_1 + \beta y_2$ *en est également une solution, quelles que soient les constantes* c_1 *et* c_2.

Proposition 1.3.2. *On a Pour prouver le théorème , il suffit de substituer $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ On obtient :*

$$\begin{aligned} \textit{On a} \qquad L[y] =& y'' + p(x)y' + q(x)y \\ \textit{Sa signification} : L[\alpha y_1 + \beta y_2] =& [\alpha y_1 + \beta y_2]'' + p[\alpha y_1 + \beta y_2]' + [\alpha y_1 + \beta y_2] \\ =& \alpha y_1'' + \beta y_2'' + \alpha p y_1' + \beta p y_2' + \alpha q y_1 + \beta y_2 \\ =& \alpha y_1'' + \alpha p y_1' + \alpha q y_1 + \beta y_2'' + \beta p y_2' + \beta y_2 \\ =& \alpha(y_1'' + p y_1' + q y_1) + \beta(y_2'' + p y_2' + y_2) \\ =& \alpha L[y_1] + \beta L[y_2] \end{aligned}$$

comme : $L[y_1] = 0$ et $L[y_2] = 0$ on a $L[\alpha y_1 + \beta y_2] = 0$
cela prouve la théorie.

Définition 1.3.4. *([3]; p479)*
Le Wronskien de deux fonctions dérivables y_1 et y_2 est donné par :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1(x)$$

Théorème 1.3.3. *([3]; p479) Propriétés du Wronskien*
***1)** Si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $I \subset \mathbb{R}$ alors $W(x)$ est non nul sur I.*
***2)** Si $W(x) = 0$ sur I alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.*
***3)**si $W(x) = 0 \Rightarrow W(x) = 0$ sur I.*

Exemple 1.3.5. *montrer que $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$ et $y_1(x) = x^{-1}$, constituent un ensemble fondamental de solutions à*

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0 \qquad x > 0 \tag{1.29}$$

On décrira comment résoudre l'équation (1.33). On peut vérifier ici par substitution directe que y_1, y_2 satisfont à l'équation différentielle. Comme

$$y_1'(x) = \tfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \text{ et } y_1''(x) = \tfrac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}$$

on a :

$$2x^2(-\tfrac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}}) + 3x(\tfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}) - x^{\frac{1}{2}} = (\tfrac{-1}{2} + \tfrac{3}{2} - 1)x^{\frac{1}{2}} = 0$$

de même : $y_2'(x) = -x^2$ et $\qquad y_2''(x) = 2x^{-3}$
d'où : $2x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^2) - x^{-1} = (4 - 3 - 1)x^{-1} = 0$
Ensuite, on calcule le wronskien W de y_1 et de y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} & -x^{-2} \end{vmatrix} = \frac{-3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

Puisque $W \neq 0$ quel que soit $x > 0$, on conclut que y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions.

Théorème 1.3.4. *(Le théorème d'Abel)([2]; p114)*
Si y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation différentielle

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

où les fonctions p et q sont continues dans l'intervalle ouvert I, alors le wronskien $W(y_1, y_2)(x)$ est

$$W(y_1, y_2)(x) = C \exp[-\int p(x)dx]$$

*où c est une constante qui peut dépendre de y_1 et de y_2, mais non de x. De plus, $W(y_1, y_2)(x)$ est soit nul, quel que soit x dans I **(si $c = 0$)**, soit non nul, quel que soit x dans I*

Définition 1.3.5. *([9]; p86) On appelle équation différentielle linéaire du 2^e ordre une équation de la forme :*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

dans laquelle a, b, c et f sont des fonctions continues sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ $(a, b, c$ sont appelés coefficients de l'équation).
On associe à cette équation l'équation dite sans second membre

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

En introduisant l'application linéaire

$$y \xrightarrow{L} ay'' + by' + cy$$

de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur I on est conduit aux notations

$$L(y) = f(x) \tag{1.30}$$
$$L(y) = 0 \tag{1.31}$$

1.3.5) Théorème fondamental ([9]; p86)

Comme dans le cas de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre :
La solution générale de l'équation :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

s'obtient en ajoutant à une intégrale particulière de l'équation complète l'intégrale générale de l'équation sans second membre.
Soit en effet y la solution générale de (1.31) et y_0 une solution particulière :
et

$$L(y) = f(x)$$
$$L(y_0) = f(x)$$

d'où

$$L(y - y_0) = 0$$

si donc Y *est la solution générale de l'équation sans second membre :*

$$y = y_0 + Y$$

Intégration de l'équation sans second membre
Soit l'équation sans second membre

$$L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

a) Cas où l'on connaît deux solutions particulières.
Si y_1 *et* y_2 *sont solutions de cette équation il en est évidemment de même de* $y_1 + y_2$ *et de* $\lambda y_1 (\lambda \in \mathbb{R})$. *L'ensemble des solutions de (1.35) est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I.*
(Cet ensemble représente d'ailleurs le noyau de l'application linéaire L.)
Deux fonctions y_1 *et* y_2 *de cet espace vectoriel seront dites linéairement indépendantes s'il n'existe pas deux constantes* λ_1 *et* λ_2 *non nulles telles que :*

$$\forall x \in \mathbf{I}, \quad \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$$

ceci entraîne

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) = 0$$

C'est donc que le système linéaire et homogène en λ_1 *et* λ_2

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \\ \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution banale $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *et donc que le déterminant*

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

(appelé wronskien de y_1 *et* y_2 *) n'est pas nul sur* $\underline{I}$.
Au contraire si $w(x) = 0$ *sur I les fonctions sont linéairement dépendantes.* ***Remarque*** *On démontre que* $w(x_0) = 0 \Longrightarrow w(x) = 0$ *sur* I.
On admettra sans démonstration le résultat suivant :
La dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

est égale a 2 .
Conséquence *Si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation sans second membre, la solution générale s'écrit :*

$$\mathrm{Y} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

λ_1 *et* λ_2 *étant deux constantes arbitraires.*

Exemple 1.3.6. *I)*

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

$y_1 = \cos \omega x$ *et* $y_2 = \sin \omega x$ *sont deux solutions indépendantes car*

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \neq 0$$

La solution générale s'écrit donc : $\mathrm{Y} = \lambda_1 \cos \omega x + \lambda_2 \sin \omega x$

II)

$$y' - \omega^2 y = 0$$

$y_1 = \operatorname{ch} \omega x$ *et* $y_2 = \operatorname{sh} \omega x$ *sont de même deux solutions indépendantes*

$$Y = \lambda_1 \operatorname{ch} \omega x + \lambda_2 \operatorname{sh} \omega x$$

b) Cas où l'on ne connait qu'une solution particulière.
Soit y_1 *une solution de l'équation (1.35) :*

$$a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0$$

En posant $y = y_1 z$ *où* z *représente une fonction inconnue de* x *on obtient successivement :*

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$
$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

soit, en reportant dans l'équation :

$$a(x)\left[y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z\right] + b(x)\left[y_1' z + y_1 z'\right] + cy_1 z = 0$$

ou encore, en tenant compte de $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$

$$ay_1 z'' + \left(2ay_1' + by_1\right) z' = 0$$

équation incomplète que l'on intègre par les méthodes

Remarques

1) *La réponse précédente montre que* $y = \frac{1}{x}$ *était une seconde intégrale particulière de l'équation.*
Cas général. Dans le cas où l'on ne connaît aucune intégrale particulière, l'équation sans second membre : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ *n'est pas en général intégrable par les méthodes élémentaires. Le cas particulier où* a, b *et* c *sont constants .*

2) *Certaines équations différentielles linéaires du second ordre jouent un rôle fondamental en physique (l'équation de Bessel par exemple).*
Elles sont intégrées par des méthodes différentes dont le lecteur trouvera un aperçu dans la suite de ce cours.

Intégration de l'équation complète.

a) *Dans le cas où l'on connaît une solution particulière* y_0 *il suffit d'appliquer le théorème fondamental du 2 et 3*

$$y = y_0 + \mathrm{Y}$$

Y étant la solution générale de l'équation sans second membre :

Exemple 1.3.7. *Intégrer l'équation*

$$x^2 y'' + xy' - y = x^3$$

On a trouvé pour intégrale générale de l'équation sans second membre :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}_1 \frac{1}{x} + \mathrm{C}_2 x$$

On peut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'un polynôme du 3^e degré. Soit par exemple :

$$y_0 = ax^3$$
$$y_0' = 3ax^2$$
$$y_0' = 6ax$$

en identifiant on obtient $a = \frac{1}{8}$. La solution générale s'écrit donc

$$y = \frac{x^3}{8} + \mathrm{C}_1\frac{1}{x} + \mathrm{C}_2 x$$

b) *Si l'on ne connaît pas de solution particulière on applique la méthode de variation des constantes.*

Soit $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ la solution générale de l'équation sans second membre. On se propose de chercher s'il existe une solution de l'équation complète de la forme

$$y = \lambda_1(x)y_1 + \lambda_2(x)y_2$$

λ_1 et λ_2 désignant cette fois des fonctions de x. L'équation différentielle fournit une première relation pour déterminer ces deux fonctions inconnues : il est donc possible d'imposer en cours de calcul une relation supplémentaire. On a :

$$y' = \lambda_1'(x)y_1 + \lambda_2'(x)y_2 + \lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x)$$

en imposant la condition :

$$\lambda_1'(x)y_1 + \lambda_2'(x)y_2 = 0$$

on obtient

$$y'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''$$

soit en reportant dans l'équation (1.34)

$$a\left(\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''\right) + b\left(\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'\right) + c\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) = f(x)$$

y_1 et y_2 étant des intégrales particulières de l'équation sans second membre :

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$$
$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)y_1 + \lambda_2'(x)y_2 = 0 \\ \lambda_1'(x)y_1' + \lambda_2'(x)y_2' = \frac{1}{a(x)}f(x) \end{cases}$$

y_1 et y_2 étant linéairement indépendantes

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Le système précédent est donc un système de Cramer et détermine λ_1' et $\lambda_{\underline{2}}'$ D'où les fonctions $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ dépendant chacune d'une constante arbitraire.

Exemple 1.3.8. *Intégrer l'équation*

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre s'écrit :

$$y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x$$

d'où $y' = -\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x$ *si* $\lambda_1' \cos x + \lambda_2' \sin x = 0$
et $y'' = -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x - \lambda_1 \cos x - \lambda_2 \sin x$
en reportant dans l'équation :

$$y'' + y = -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = \operatorname{tg} x$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} \lambda_1' \cos x + \lambda_2' \sin x = 0 \\ -\lambda_1' \sin x + \lambda_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x} \\ \lambda_2' = \sin x \end{cases}$$

soit en intégrant

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sin x - \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \mathrm{C}_1 \\ \lambda_2 = \cos x + \mathrm{C}_2 \end{cases}$$

la solution générale s'écrit alors :

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Chapitre 2

Solutions des équations différentielles aux voisinages des points ordinaires

Pour trouver la solution générale à une équation différentielle linéaire, il faut déterminer un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène. Jusqu'à maintenant, nous avons élaboré une démarche systématique permettant d'obtenir ces solutions fonction fondamentales seulement lorsque l'équation est à coefficients constants. Pour traiter les équations à coefficients variables, nous devons étendre notre recherche de solutions au-delà des fonctions élémentaires usuelles. Le principal outil dont nous avons besoin est la représentation d'une fonction en série de puissances. L'idée de base est semblable à celle de la méthode des coefficients indéterminés : on suppose que les solutions à une équation différentielle admettent des développements en série de puissances; ensuite, on tente de déterminer les coefficients de ces solutions afin que l'équation différentielle soit satisfaite.

2.1) Rappel sur les séries de puissances([2] ; $p349$)

Dans cet section, nous verrons comment utiliser des séries de puissances pour construire des ensembles fondamentaux de solutions aux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dont les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante x. D'abord, nous résumerons les résultats pertinents sur les séries de puissances requises. Les lecteurs qui sont familiers avec celles-ci peuvent passer à la section . Par ailleurs, ceux qui ont besoin de plus d'information que celles qui sont contenues dans la présente section peuvent consulter un manuel de calcul différentiel et intégral.

1) *On dit qu'une série de puissances*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.1}$$

converge en un point x si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$$

existe en ce point. La série converge évidemment pour $x = x_0$. Elle peut converger pour tout x ou elle peut ne converger que pour certaines valeurs spécifiques de x.

2) *On dit que la série (2.1) converge absolument en un point x si la série*

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||(x-x_0)^n|$$

converge. On peut montrer que si la série converge absolument, alors la série converge. Cependant, le contraire n'est pas nécessairement vrai.

3) *Un des tests les plus utiles pour établir la convergence absolue d'une série de puissances est le test du rapport si $a_n \neq 0$ et si, pour une valeur fixe de x,*

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L|x-x_0|$$

alors la série de puissances converge absolument en x si
$|x-x_0| < \frac{1}{L}$ et elle diverge si $|x-x_0| > \frac{1}{L}$ si $|x-x_0| = \frac{1}{L}$ le test n'est pas concluant.

Exemple 2.1.1. *Pour quelles valeurs de x la série de puissances*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

converge-t-elle ? Afin d'établir l'intervalle de convergence, on utilise le test du rapport. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}| &= |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= |x-2|\end{aligned}$$

Selon l'énoncé 3, la série converge absolument pour $|x-2| < 1$, c'est-à-dire si $1 < x < 3$, et la série diverge pour $|x-2| > 1$, Les valeurs de x telles que $|x-2| = 1$ sont $x = 1$ et $x = 3$. La série diverge pour chacune de ces valeurs puisque le terme général de la série ne tend alors pas vers zéro lorsque $n \to \infty$.

4) *Si la série de puissances (2.1) converge en $x = x_1$,elle converge absolument lorsque $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ et si la série de puissances diverge en $x = x_1$, elle diverge lorsque $|x-x_0| > |x_1-x_0|$*

5) *Pour une série de puissances typique, il existe un nombre positif ρ, appelé le rayon de convergence, tel que (2.1) converge absolument lorsque $|x-x_0| < \rho$ et diverge lorsque $|x-x_0| > \rho$ L'intervalle $|x-x_0| < \rho$ est appelé l'intervalle de convergence ; il est illustré par la partie hachurée de la figure 2.1 La série peut soit converger, soit diverger lorsque $|x-x_0| = \rho$ De nombreuses séries de puissances importantes convergent pour toute valeur de x. Dans ce cas, on dit habituellement que ρ est infini, et l'intervalle de convergence correspond à la droite des nombres réels au complet. il est aussi possible qu'une série de puissances converge uniquement en x_0. Pour une telle série, on dit que ρ et la série n'a pas d'intervalle de convergence. Quand on tient compte de ces cas particuliers, on constate que toute série de puissances admet un rayon de convergence non négatif ρ et que si $\rho > 0$, alors il y a un intervalle de convergence (fini ou infini) centré en x_0.*

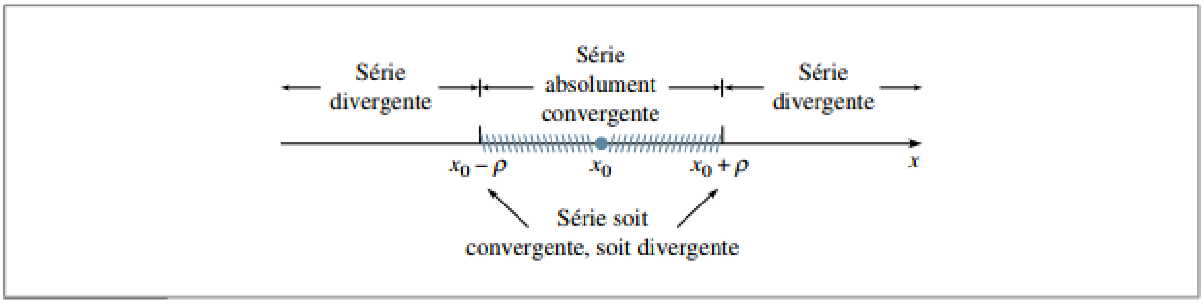

FIGURE 2.1 – Intervalle de convergence d'une série de puissances

Exemple 2.1.2. *Déterminez le rayon de convergence de la série de puissances*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

On applique le test du rapport :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{(n+1)^n}\right| &= \left|\frac{x+1}{2}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \left|\frac{x+1}{2}\right|\end{aligned}$$

Par conséquent, la série converge absolument lorsque $|x+1| < 2$, c'est-à-dire lorsque $-3 < x < 1$, et elle diverge lorsque $|x+1| > 2$. Le rayon de convergence de cette série de puissances est $\rho = 2$. Finalement, on vérifie les extrémités de l'intervalle de convergence. En $x = 1$, la série devient la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

qui diverge. En $x = -3$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

qui converge mais ne converge pas absolument. On dit que la série converge conditionnellement en $x = -3$. Pour résumer, on peut dire que la série de puissances donnée converge lorsque $-3 \leqslant x < 1$ et qu'elle diverge dans les autres cas. Elle converge absolument lorsque $-3 < x < 1$, et son rayon de convergence est égal à 2.

6) *On suppose que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

On suppose que : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *convergent respectivement vers* $f(x)$ *et* $g(x)$ *lorsque* $|x-x_0| < \rho$ *avec* $\rho > 0$

$6-1)$ *On peut additionner ou soustraire les deux séries terme à terme et on obtient*

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$

Les séries résultantes convergent lorsque $|x-x_0| < \rho$ *avec* $\rho > 0$

$6-2)$ *On peut multiplier les deux séries et alors,*

$$f(x)g(x) = [\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n][\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

où $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$*, La série résultante converge au moins pour* $|x-x_0| < \rho$ *De plus, si* $g(x) \neq 0$ *on peut diviser les deux séries et alors*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n$$

Dans la plupart des cas, il est plus facile d'obtenir les coefficients d_n *en identifiant les coefficients correspondants dans la relation*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = [\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n][\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n] = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} d_nb_{n-k}(x-x_0)^n)^n$$

De plus, pour ce qui est de la division, le rayon de convergence de la série de puissances résultante peut être inférieur à ρ

$7)$ *La fonction* f *est continue et infiniment dérivable lorsque* $|x-x_0| < \rho$ *De plus, on peut obtenir* $f', f'', \cdots$ *,en dérivant la série terme à terme. Autrement dit,*

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite, et chacune des séries précédentes converge absolument pour $|x-x_0| < \rho$ *La valeur de* a_n *est donnée par*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Cette série est appelée la série de Taylor de la fonction f *autour de* $x = x_0$

8) *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ *pour tout* x *au voisinage du point* x_0*, alors* $a_n = b_n$ *pour* $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

En particulier, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0$ *pour tout* x *au voisinage de* x_0 *alors* $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 0$

Une fonction f *dont le développement en série de Taylor autour de* $x = x_0$ *est*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

avec un rayon de convergence $\rho > 0$*, est une fonction analytique en* $x = x_0$*. Toutes les fonctions familières du calcul différentiel et intégral sont analytiques, sauf peut-être en certains points facilement reconnaissables. Par exemple,*$\sin x$ *et* e^x *sont analytiques en tout point,*$\frac{1}{x}$ *est analytique sauf en* $x = 0$ *et* $\tan x$ *est analytique sauf en des points qui sont des multiples impairs de* $\frac{\pi}{2}$ *si* f *et* g *sont analytiques en* x_0 *alors* $f \pm g, f.g, \frac{f}{g}$ *[pourvu que* $g(x) \neq 0$*] sont aussi analytiques en* $x = x_0$*. À bien des égards, le contexte naturel d'utilisation des séries de puissances est le plan complexe. Les méthodes et les résultats présentés dans ce chapitre peuvent presque toujours être étendus directement aux équations différentielles dans lesquelles les variables indépendantes et dépendantes ont des valeurs complexes.*

Translation de l'indice de sommation *L'indice de sommation dans une série infinie est un paramètre muet, tout comme la variable d'intégration dans une intégrale définie est une variable muette. Par conséquent, le choix de la lettre qui sert d'indice est arbitraire. Par exemple,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}$$

De façon similaire aux changements de variables dans les intégrales définies, il peut être utile d'effectuer des transformations sur les indices de sommation en calculant les solutions en série d'équations différentielles. À l'aide de divers exemples, on illustre comment effectuer une translation de l'indice de sommation.

Exemple 2.1.3. *Écrivez* $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ *sous la forme d'une série dont le premier terme correspond à* $n = 0$ *plutôt qu'à* $n = 2$ *Soit* $m = n - 2$ *alors* $n = m + 1$ *et* $n = 2$ *correspond à* $m = 0$ *Ainsi,*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} \tag{2.2}$$

En écrivant les premiers termes de chacune de ces séries, on peut vérifier que ces séries admettent exactement les mêmes termes. Enfin, dans la série du second membre de l'équation (2.2), on peut remplacer l'indice m *par* n*. On obtient alors*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

Ainsi, on a translaté l'indice de 2 unités vers le haut et on a régularisé l'écriture de la série en commençant le calcul 2 unités plus bas

Exemple 2.1.4. *Écrivez la série*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2} \tag{2.3}$$

sous la forme d'une série dont le terme général est en $(x-x_0)^n$ *plutôt qu'en* $(x-x_0)^{n-2}$ *Une fois de plus, on translate l'indice de* 2 *unités de sorte que* n *soit remplacé par* $n+2$, *et on commence le calcul* 2 *unités plus bas. On obtient*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^{n} \tag{2.4}$$

On peut facilement vérifier que les termes dans les séries (2.3) et (2.4) sont identiques.

Exemple 2.1.5. *Écrivez l'expression*

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n-1} \tag{2.5}$$

sous la forme d'une série dont le terme général est en x^{r+n}

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n+1} \tag{2.6}$$

Premièrement, on translate l'indice de 1 unité vers le bas, et on commence le calcul 1 unité plus haut. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}x^{r+n} \tag{2.7}$$

Encore une fois, on peut facilement vérifier que les deux séries dans l'équation (2.7) sont identiques et qu'elles sont exactement les mêmes que celles de l'expression (2.5)

Exemple 2.1.6. *Supposez que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2.8}$$

pour tout x, *et déterminez-en les conséquences sur les coefficients* a_n.*on peut égaliser les coefficients correspondants dans les deux séries. Pour ce faire, on doit d'abord réécrire l'équation (2.8) afin que les séries admettent la même puissance de* x *dans leurs termes généraux. Par exemple, dans les séries du premier membre de l'équation (2.8), on peut remplacer* n *par* $n+1$ *et commencer le calcul à* 1 *unité plus bas. Ainsi, l'équation (2.8) devient*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

on conclut que

$$(n+1)a_{n+1}=a_n, \qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{2.9}$$

Par conséquent, selon les valeurs de n dans l'équation (2.9), on a

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ a_2 &= \tfrac{a_1}{2} = \tfrac{a_0}{2} \\ a_2 &= \tfrac{a_2}{3} = \tfrac{a_0}{3!} \end{aligned}$$

et ainsi de suite. En général

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{2.10}$$

Ainsi, la relation (2.8) permet d'obtenir les coefficients de la série en fonction de a_0 Finalement, en utilisant les coefficients donnés par l'équation (2.10), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x$$

car $0! = 1$

2.2) Les solutions en série près d'un point ordinaire([2] ; $p355$)

Nous avons décrit des méthodes permettant de résoudre les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants. Nous allons maintenant considérer des méthodes permettant de résoudre des équations linéaires du deuxième ordre dont les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante. Dans cet section, la variable indépendante sera notée x. Il suffit de considérer l'équation homogène

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{2.11}$$

Puisque la démarche pour l'équation non homogène correspondante est similaire. Beaucoup de problèmes en physique mathématique mènent à des équations de la forme (2.11) à coefficients polynomiaux. Par exemple, l'équation de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

où v est constant, et l'équation de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

où α ce constante. Pour cette raison et pour simplifier les calculs algébriques, on considère d'abord le cas où les fonctions P, Q et R sont des polynômes. Cependant, comme nous le verrons, la méthode de résolution s'applique aussi lorsque P, Q et R sont des fonctions analytiques d'autres types.Pour le moment, on suppose que P,Q et R sont des polynômes et qu'ils n'admettent aucun facteur commun S'il y a un facteur commun, il faut le simplifier. On suppose aussi qu'on veut résoudre l'équation (2.11) au voisinage d'un point x_0 La solution de l'équation (2.11) dans un intervalle contenant x_0 est étroitement associée au comportement de P dans cet intervalle. Un point tel que $P(x_0) \neq 0$ est un point ordinaire.

Puisque P est continu, il s'ensuit qu'il existe un intervalle autour de x_0 dans lequel $P(x)$ n'est jamais nul. À l'intérieur de cet intervalle, on peut diviser l'équation (2.11) par $P(x)$ pour obtenir

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.12}$$

où $A(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ et $B(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ sont des fonctions continues. cette théorie est applicable seulement si le coefficient de y'' est égale à 1.on besoin de la définition suivant

Définition 2.2.1. *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est analytique au point $x_0 \in I$ s'il existe $r > 0$ tel que*

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$ le point x_0 est appelé point ordinaire .

Exemple 2.2.1. *il est facile de voir que tout polynôme en x est analytique en $x = 0$. les fonctions élémentaires e^x , $\sin x$, $\cos x$ sont analytique en tout point de la droite réelle.*
il existe dans cet intervalle une solution unique à l'équation (2.11) qui satisfait aussi aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ où y_0 et y'_0 sont des constantes données. pour cela on à besoin de la définitions suivante un point $a \in I$ est dit point ordinaire pour l'équation (2.11) *si $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques en $x = 1$*
dans le cas ou $P(x_0) = 0$ alors x_0 est un point singulier de l'équation (2.11). Dans ce cas, au moins une des valeurs $Q(x_0)$ ou $R(x_0)$ est non nulle. Par conséquent, au moins un des coefficients p et q dans l'équation (2.12) est non borné lorsque $x \to x_0$ nous verrons comment trouver des solutions à l'équation (2.11) au voisinage d'un point singulier. Nous allons maintenant étudier la façon de résoudre l'équation (2.11) au voisinage d'un point ordinaire x_0 On recherche des solutions de la forme

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \end{aligned} \tag{2.13}$$

et on suppose que la série converge dans l'intervalle $|x - x_0| < \rho$ pour une certaine valeur $\rho > 0$ Même si, à première vue, cette recherche de solution sous la forme d'une série de puissances peut sembler peu attrayante, cette méthode est néanmoins fort utile. À l'intérieur de leurs intervalles de convergence, les séries de puissances se comportent de manière très semblable aux polynômes. De plus, elles sont faciles à manipuler du point de vue analytique et numérique. En effet, même si on peut obtenir une solution en termes de fonctions élémentaires, comme des fonctions exponentielles ou trigonométriques, on a besoin d'une série de puissances ou d'une expression équivalente si on veut les évaluer numériquement ou tracer leurs graphiques. La méthode la plus pratique pour déterminer les coefficients an consiste à substituer la série (2.13) et ses dérivées y, y', y'' dans l'équation (2.11)Les exemples suivants illustrent cette démarche. Les dérivées qui sont impliquées dans la démarche sont applicables quand on reste à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

Exemple 2.2.2. *L'équation d' Hermite*

$$x'' - 2tx' + 2x = 0 \tag{2.14}$$

a un point ordinaire en $t = 0$ car $-2t$ et 2 sont des fonctions analytiques en $t = 0$.

Proposition 2.2.1. *([1]; p4)*
considérons l'équation d' Hermite (2.14)*, et supposons que*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

est une solution de (2.14)*. Donc le principe est de déterminer les constantes* a_k*.*
Remarquons que

$$z''(t) - 2tz'(t) + 2z(t) = 0 \tag{2.15}$$

$$z'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k$$

Ici la dérivation terme à terme de série est valable dans l'intérieur de l'intervalle de convergence. Dérivons $z'(t)$*, il vient*

$$z''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}t^k$$

Si on substitue z'' *,* z' *et* z *par leurs valeurs dans* (2.15)*, on obtient :*

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)a_{k+2} - 2a_k(k-1)\right]t^k + 2a_0 \tag{2.16}$$

Comme (2.16) *est vraie pour tout* t*, les coefficients des puissances de* t *s' annulent individuellement.*
Ainsi

$$\begin{aligned} 2a_2 + 2a_0 &= 0 & (2.17)\\ (k+1)(k+2)a_{k+2} - 2a_k(k+1) &= 0, k \geqslant 1 & (2.18)\end{aligned}$$

D' après (2.17)*, on obtient* $a_2 = -a_0$*.Il est facile de voir que* $a_3 = 0$ *d' après* (2.18) *et on peut donc déduire successivement que* $a_{2k+1} = 0$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *D' après* (2.18) *nous obtenons*

$$a_{2k+2} = \frac{2(2k-1)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k}$$

On substitue a_{2k} *de* (2.18) *et en répétant le processus, nous trouvons*

$$a_{2k+2} = \frac{2(2k-1)2(2k-3)\ldots(2.3)(2.1)}{(2k+2)(2k+1)\ldots 4.3}a_2 \tag{2.19}$$

Mais on sait que $a_2 = -a_0$ *d' après* (2.17)*, ainsi*

$$a_{2k+2} = \frac{2^{k+1}(-1)(-1+2)(-1+4)\ldots(-1+2k)}{(2k+2)!}a_0$$

Donc la solution série $z(t)$ *est*

$$z(t) = a_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(-1)(-1+2)(-1+4)\ldots(-1+2k)}{(2k)!}t^{2k}\right] + a_1 t \tag{2.20}$$

où a_0 *et* a_1 *sont des constantes arbitraires. Soit*

$$z(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(-1)(-1+2)\ldots(-1+2k-2)}{(2k)!}t^{2k} \text{ et } z_2(t) = t$$

comme (2.20) et une solution de (2.14) quelque soient a_0 et a_1 , en particulier on voit que $z_1$et z_2 sont deux solutions de (2.14). Elle sont aussi linéairement indépendantes sur tout intervalle de la droit réelle. Ainsi nous avons instauré l' existence de deux solutions linéairement indépendantes de (2.14). Ceci est un fruit de la méthode du développement en série. La relation (2.20) a plusieurs conséquences notamment, elle peut être utilisée pour obtenir des solutions approchées de (2.14)dans un intervalle voisinage de zéro. proposition illustre qu'il est possible d' obtenir des solutions des équations différentielles linéaires du second degré par la méthode du développement en série. Pour cet objectif, on assume que les coefficients qui apparaissent dans l' équation différentielle sont analytiques en t_0. Mais la question est la suivante :
peut-on supposer que toute équation différentielle linéaire du second ordre admet une solution sous forme de série au voisinage d'un point ordinaire ?
la réponse à cette question est oui comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1. *([1]; p6)*
on considère l' équations différentielle linéaire du second ordre (2.12) où $a_1(t)$ et $a_2(t)$sont analytiques en un point t_0. Alors il existe une fonction unique $z(t)$ analytique en t_0, qui est une solution de (2.12) dans un certain voisinage de t_0 et de plus $z(t_0) = a_1$ et $z'(t_0) = a_2$ où a_1 et a_2 sont des constantes données. En outre, si le développement en série de $a_1(t)$ et $a_2(t)$ converge sur l'intervalle $|t-t_0| < r$, alors le développement en série de $z(t)$ converge aussi sur l'intervalle $|t-t_0| < r$

2.3) Séries de Taylor :([8]; $p4$)

Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivables au point a d'un intervalle $[x_0, x_1]$ La série de Taylor de $f(x)$ centré en $x = a$ est :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

òu de manière équivalente
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{2.21}$$

La série de Taylor de $f(x)$ en $a = 0$ est appelée la série de Maclaurin donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{2.22}$$

cela équivaut à :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \tag{2.23}$$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples pour la détermination de la série de Maclaurin en $a = 0$

Exemple 2.3.1. *Trouvez la solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Pour trouver une solution à l'équation différentielle en question, il est nécessaire de calculer les valeurs des dérivées de la fonction, nous allons donc réécrire l'équation différentielle sous la forme

$y'' = -4y \qquad y(0) = 1; y'(0) = 0$ *D'eux nous obtenons :*

$$\begin{aligned} y'' &= -\,4y \Rightarrow y''(0) = -4y(0) = -4(1) = -4 \\ y''' &= -\,4y' \Rightarrow y'''(0) = -4y'(0) = -4(0) = 0 \\ y^{(4)} &= -\,4y'' \Rightarrow y^{(4)}(0) = -4y''(0) = -4(-4) = 16 \\ y^{(5)} &= -\,4y''' \Rightarrow y^{(5)}(0) = -4y'''(0) = -4(0) = 0 \\ y^{(6)} &= -\,4y^{(4)} \Rightarrow y^{(6)}(0) = -4y^{(4)}(0) = -4(16) = -64 \end{aligned}$$

En substituant les valeurs de $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$ *dans le développement de (2.3) on obtient la solution de l'équation différentielle*

$$y(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \cdots$$

On remarque qu'en résolvant cette équation différentielle et en considérant qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, on obtient la solution et on se présente sous la forme $y(x) = \cos(2x)$ *Cette solution a une image dévissée*

$$y(x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots$$

ce qui est valable pour toute valeur de t telle que : $x \in R$

Exemple 2.3.2. *Trouvez la solution de l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'' + xy + y = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

Pour trouver une solution à l'équation différentielle en question, il est nécessaire de calculer les valeurs des dérivées de la fonction, nous allons donc réécrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\begin{aligned} y'' &= -\,xy - y \Rightarrow y''(0) = \alpha \\ y''' &= -\,xy'' - 2y' \Rightarrow y'''(0) = -2y'(0) = -2\beta \\ y^{(4)} &= -\,xy''' - 3y'' \Rightarrow y^{(4)} = -3y''(0) = 3\alpha \\ y^{(5)} &= -\,xy^{(4)} - 4y''' \Rightarrow y^{(5)} = -4y'''(0) = 8\beta \end{aligned}$$

En substituant dans l'extension Maclaurin (2.5), on obtient la solution suivante :
$y(x) = \alpha + x\beta - \frac{x^2}{2!}\alpha - \frac{x^3}{3!}(2\beta) + \frac{x^4}{4!}(3\alpha) + \frac{x^5}{5!}(8\beta) - \cdots$
$y(x) = \alpha(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \cdots) + \beta(x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \cdots)$

Exemple 2.3.3. *Trouvez la solution de l'équation différentielle prés de $x = 2$*

$$y'' - (x-2)y' + 2y = 0$$

En supposant que $y(2) = c_1$, $y'(2) = c_2$ Et c'est comme ça

$$y''(2) = -2y(2) = -2c_1$$

et plus généralement,an dérivant n fois les deux membres de l'équation par application de la formule de Leibniz,

$$y^{(n+2)} - (x-2)y^{(n+1)} - ny^{(n)} + 2y^{(n)} = 0$$

Compenser pour $x = 2$ que nous obtenions
$y^{(n+2)} = (n-2)y^{(n)}$
$\Rightarrow y^{(3)} = -y' = -c_2$
$y^{(4)} = 0$
$y^{(5)} = y''' = -c_2$
$y^{(6)} = 0$
En substituant dans l'expansion de Taylor(2.14), nous obtenons la solution comme suit
$y(x) = c_1 + (x-2)c_2 - \frac{(x-2)^2}{2!}2c_1 - \frac{(x-2)^3}{3!}c_2 - \frac{(x-2)^5}{5!}c_2 + \cdots$
$y(x) = c_1(1 - (x-2)^2) + c_2((x-2) - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{(x-2)^5}{5!} - \cdots$
lorsque l'équation est linéaire,il est commode de chercher les coefficients du développement d'une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminées pour cela on substitue directement la série

$$y = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_nx^n$$

dans l'équation différentielle et on identifie les coefficients des mêmes puissances de x de part et d'autre de l'équation

Exemple 2.3.4. *Trouvez une solution en série à l'équation*
Méthode 1 :

$$y'' + y = 0$$

La substitution de la série pour $y(x)$ et $y''(x)$ donne

$$\begin{aligned}
&y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots \\
&y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \cdots \\
&y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \cdots \\
&2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \cdots \\
&+a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots = 0
\end{aligned}$$

Cela peut s'écrire sous la forme

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + (a_2 + 12a_4)x^2 + (a_3 + 20a_5)x^3 + (a_4 + 30a_6)x^4 + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned}
&a_0 + 2a_2 = 0, \qquad a_1 + 6a_3 = 0, \qquad a_2 + 12a_4 = 0, \\
&a_3 + 20a_5 = 0, \qquad a_4 + 30a_6 = 0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En résolvant ces équations, nous obtenons
$a_0 + 2a_2 = 0$; $2a_2 = -a_0$; $a_2 = -\frac{1}{2}a_0 \;\; = -\frac{1}{2!}a_0$
$a_1 + 6a_3 = 0$; $6a_3 = -a_1$; $a_3 = -\frac{1}{6}a_1 \;\; = -\frac{1}{3!}a_1$
$a_2 + 12a_4 = 0$; $12a_4 = -a_2$; $a_4 = -\frac{1}{12}a_2$; $a_4 = -\frac{1}{12}(-\frac{1}{2}a_0) = \frac{1}{24}a_0 = \frac{1}{4!}a_0$
$a_3 + 20a_5 = 0$; $20a_5 = -a_3$; $a_5 = -\frac{1}{20}a_3$; $a_5 = -\frac{1}{20}(-\frac{1}{6}a_1) = \frac{1}{120}a_1 = \frac{1}{5!}a_1$
$a_4 + 30a_6 = 0$; $30a_6 = -a_4$; $a_6 = -\frac{1}{30}a_4$; $a_6 = -\frac{1}{30}(\frac{1}{24}a_0) = -\frac{1}{720}a_0 \;\; = -\frac{1}{6!}a_0$
La solution sous forme de série est donnée par
$y(x) = a_0(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots) + a_1(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots)$
Ou sous la forme

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

où a_0 et a_1 sont des constantes qui seront déterminées pour une solution particulière si les conditions initiales sont données.
Méthode 2 : *Trouvez une solution en série à l'équation*

$$y'' + y = 0 \qquad -\infty < x < +\infty \tag{2.24}$$

On recherche une solution sous la forme d'une série de puissances autour de $x_0 = 0$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.25}$$

et on suppose que la série converge dans l'intervalle $|x| < \rho$ En dérivant terme à terme, on obtient

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{2.26}$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \tag{2.27}$$

En substituant les séries (2.18) et (2.20) à y et y'' dans l'équation (2.17), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Afin de combiner les deux séries, on doit réécrire au moins l'une de celles-ci pour qu'elles admettent un terme général de même puissance. Ainsi, dans la première série, on translate l'indice de sommation en remplaçant n par $n+2$ et en commençant la sommation à 0 plutôt qu'à 2. On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

Afin que l'équation soit satisfaite pour tout x, le coefficient de chaque puissance de x doit être nul. Ainsi, on conclut que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \tag{2.28}$$

L'équation (2.21) est une relation de récurrence. On peut évaluer successivement les coefficients de la série en évaluant cette relation de récurrence d'abord pour $n = 0$*, puis pour* $n = 1$*, et ainsi de suite. Dans cet exemple, l'équation (2.21) relie chaque coefficient au deuxième coefficient précédent. Ainsi, les coefficients dont l'indice est pair* $(a_0, a_2, a_4, \cdots)$ *et ceux dont l'indice est impair* $(a_1, a_3, a_5, \cdots)$ *sont déterminés séparément. Pour les coefficients d'indices pairs, on a*

$n = 0$: $a_2 = -\frac{a_0}{2.1} = -\frac{a_0}{2!}$

$n = 1$: $a_3 = -\frac{a_1}{3.2} = -\frac{a_1}{3!}$

$n = 2$: $a_4 = -\frac{a_2}{3.4} = \frac{a_0}{4.3.2} = \frac{a_0}{4!}$

$n = 3$: $a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = \frac{a_0}{5.4.3.2} = \frac{a_1}{5!}$

$n = 4$: $a_6 = -\frac{a_4}{6.5} = -\frac{a_0}{6.5.4.3.2} = -\frac{a_0}{6!}$

$n = 6$: $a_7 = -\frac{a_5}{7.6} = \frac{a_0}{7.6.5.4.3.2} = -\frac{a_1}{7!}$

Grâce à ce qui précède, nous constatons qu'il existe des coefficients pairs et individuels qui peuvent être écrits sous la forme générale suivante :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!}$$
$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}$$

En substituant ces coefficients dans l'équation (2.18)*, on a*

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$
$$y = a_0[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \cdots] + a_1[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots]$$
$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (R)$$
$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

[redacted]

Les figures (2.2) *et* (2.3) *à la page suivante montrent comment les sommes partielles des séries de l'équation* (R) *permettent d'approximer successivement* $\cos x$ *et* $\sin x$

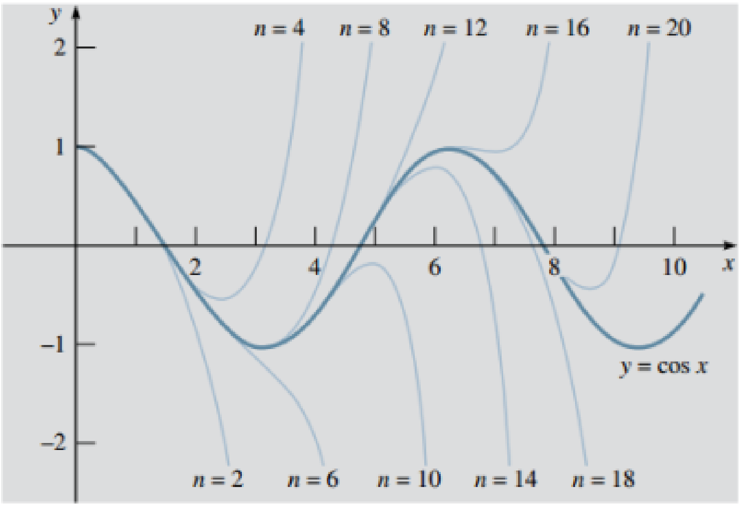

FIGURE 2.2 – Approximations polynomiales de $\cos x$. La valeur de n est degré du polynôme qui approxime la fonction.

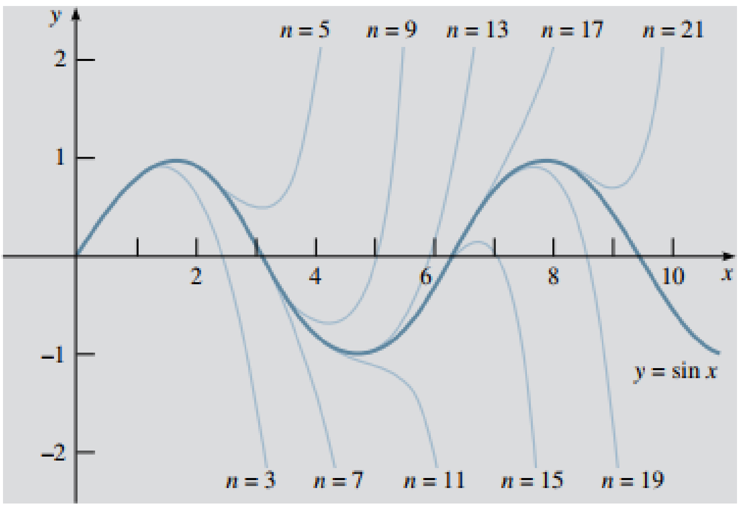

FIGURE 2.3 – Approximations polynomiales de $\sin x$. La valeur de n est degré du polynôme qui approxime la fonction.

Exemple 2.3.5. *Trouvez une solution en série à l'équation*

$$u'' + xu' + u = 0$$

Puisque $x = 0$ est un point ordinaire, la solution en série de cette équation différentielle sera de la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Pour déterminer les coefficients, an, nous devrons brancher le formulaire dans l' ODE. Avant que nous puissions faire donc, cependant, nous devons écrire des expressions pour

u' et u''

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad u''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ *Maintenant, nous substituons ces séries dans l' ODE*

$$u'' + xu' + u = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

La première série à gauche est zéro pour $n = 0$ et $n = 1$, nous pouvons donc commencer la somme à partir de $n = 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Puisque nous voulons combiner les séries, nous voulons que la première série commence à partir de $n = 0$ tout comme le deux autres. On peut le démarrer à $n = 0$ tant qu'on remplace n par $n + 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Le but de faire cela est que nous ayons x^n dans chaque série. Maintenant, nous pouvons combiner la série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n} + n a_n x^{n} + a_n x^n] = 0$$

Factoriser le côté gauche :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n] x^n = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} &= -(n+1)a_n \\ (n+2)a_{n+2} &= -a_n \\ a_{n+2} &= -\frac{1}{n+2}a_n \end{aligned}$$

Maintenant que nous connaissons la relation de récurrence, nous pouvons déterminer les coefficients

$$n = 0 : \qquad a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$n = 1 : \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$n = 2 : \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{8}$$

$$n = 3 : \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{15}$$

$$n = 4 : \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{48}$$

$$n = 5 : \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{105}$$

Par conséquent

$$u(x) = a_0(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + \cdots) + a_1(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{105}x^7 + \cdots)$$

où a_0 et a_1 sont des constantes arbitraires.

Chapitre 3

L'Équation de Legendre et L'équation de Bessel

3.1) Équations de Bessel

Dans la présente chapitre, nous allons considérer trois cas particuliers de l'équation de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \tag{3.1}$$

où v est constant Il est facile de montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier. On a :

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2 - v^2}{x^2} = -v^2$$

Ainsi, l'équation indicielle est donnée par

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = r(r-1) + r - v^2 = r^2 - v^2 = 0$$

dont les racines sont $r = \pm v$. Nous allons considérer les trois cas $v = 0, v = \frac{1}{2}$ et $v = 1$ dans l'intervalle $x > 0$.

Équation de Bessel d'ordre zéro *([5]; p119)*

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0 \tag{3.2}$$

Le point $x = 0$ est un point singulier régulier pour cette équation. Nous allons chercher une solution en série entière centrée en 0., on obtient que

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots\right) \\
&= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n
\end{aligned}$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

En substituant ces expressions dans l'équation différentielle (3.2), on trouve que les coefficients $a_n, n = 0, 1, \ldots,$ doivent être choisis de façon que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} + a_1x + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} + a_1x + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+2} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
0 &= a_1x + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_{n+2} + a_n\right]x^{n+2} \\
&= a_1x + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)^2a_{n+2} + a_n\right]x^{n+2}.
\end{aligned}$$

Puisque les coefficients de toutes les puissances de x doivent être nuls, on peut conclure que $a_1 = 0$, et on obtient la relation de récurrence suivante entre les coefficients de la série entière :

$$(n+2)^2a_{n+2} = -a_n \quad \textit{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Cette relation implique que les coefficients a_{2m+1} sont nuls pour tout $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. On peut donc supposer que $n = 2m$, de sorte que

$$(2m+2)^2a_{2m+2} = -a_{2m} \quad \textit{pour } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

On a :

$$\begin{array}{lll}
m = 0 & \Rightarrow & a_2 = -\frac{1}{2^2}a_0 \\
m = 1 & \Rightarrow & a_4 = -\frac{1}{4^2}a_2 = \frac{1}{4^2\times 2^2}a_0 \\
m = 2 & \Rightarrow & a_6 = -\frac{1}{6^2}a_4 = -\frac{1}{6^2\times 4^2\times 2^2}a_0
\end{array}$$

etc. En général, on peut écrire que

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= (-1)^m\frac{1}{(2m)^2\times(2m-2)^2\times\cdots\times 2^2}a_0 \\
&= (-1)^m\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(2k)^2}a_0 \\
&= (-1)^m\frac{1}{2^{2m}(m!)^2}a_0
\end{aligned}$$

Notons que la formule ci-dessus est aussi valable pour $m = 0$. Donc, la solution cherchée est

$$y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

Remarque 3.1.1. *([5]; p121)*
i) La série entière ci-dessus est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro, dénotée par $J_0(x)$. A l'aide du test du rapport, on peut montrer que la série converge pour toute valeur de x. Son graphique est présenté dans la figure 3.1 On voit qu'elle ressemble à une fonction cosinus, mais dont l'amplitude décroit lorsque x augmente.

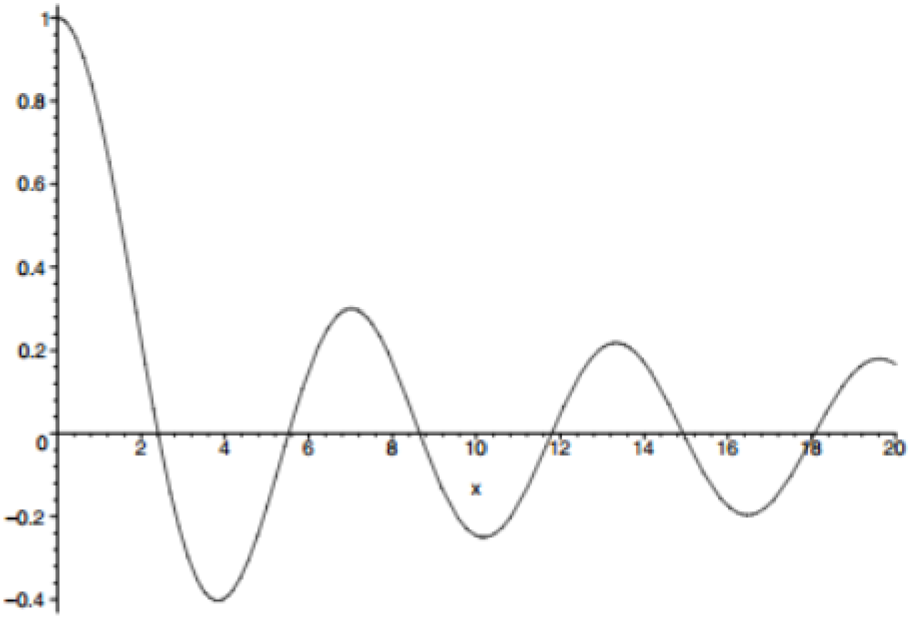

FIGURE 3.1 – Fonction $J_0(x)$

ii) Nous avons obtenu une solution de l'équation de Bessel d'ordre zéro. mais non pas sa solution générale. On peut montrer que cette solution générale est donnée par

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

où $Y_0(x)$ est la fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro. Cette fonction se comporte comme $\ln x$ près de zéro (voir la figure 3.2).

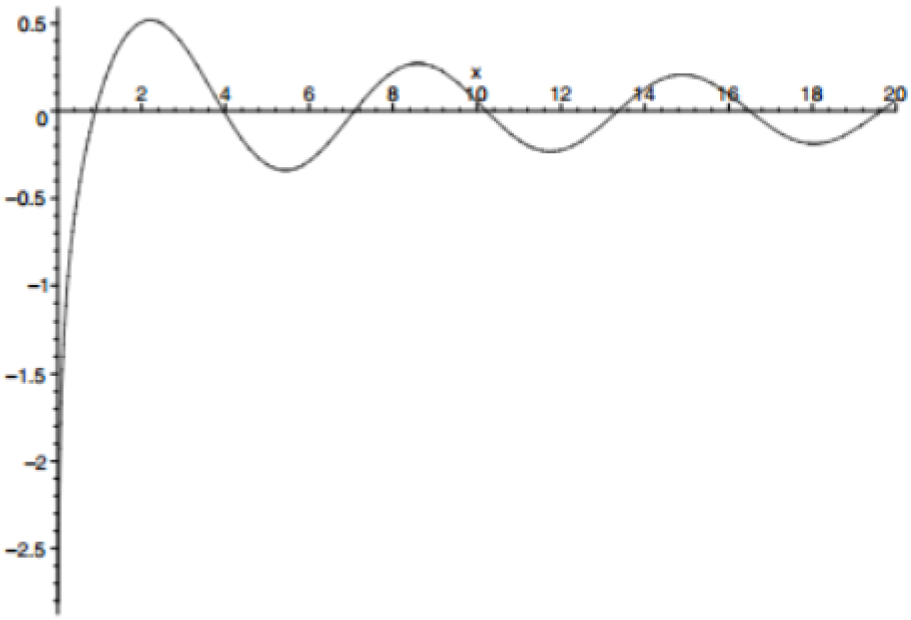

FIGURE 3.2 – Fonction $Y_0(x)$

L'équation de Bessel d'ordre un demi *([2]; p395)*
Cet exemple illustre le cas où les racines de l'équation indicielle diffèrent par un entier positif, mais où il n'y a pas de terme logarithmique dans la deuxième solution. En posant $v = \frac{1}{2}$ *dans l'équation* (3.1)*, on obtient*

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \tag{3.4}$$

Si on substitue la série à $y = \phi(r, x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4}\right] a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ = \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1} \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les racines de l'équation indicielle sont $r_1 = 1/2, r_2 = -1/2$. *Ainsi, les racines diffèrent par un entier. La relation de récurrence est*

$$\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{3.6}$$

Si on considère la plus grande racine $r_1 = 1/2$ *correspondante, à partir du coefficient de* x^{r+1} *de l'équation* (3.5)*, on trouve que* $a_1 = 0$. *Ainsi, à partir de l'équation* (3.6)*,* $a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = \cdots = 0$. *De plus, pour* $r = 1/2$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \quad n = 2, 4, 6, \ldots$$

ou, en posant $n = 2m$*, on obtient*

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

En résolvant cette relation de récurrence, on trouve

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{5!}, \ldots$$

et, en général,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Alors, en prenant $a_0 = 1$*, on obtient*

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \; x > 0 \tag{3.7}$$

La seconde série de puissances dans l'équation (3.7) *est précisément la série de Taylor pour* $\sin x$*. Ainsi, une solution à l'équation de Bessel d'ordre un demi est* $x^{-1/2} \sin x$*. La fonction de Bessel de premier type et d'ordre un demi,* $J_{1/2}$*, est définie par* $(2/\pi)^{1/2} y_1$*. Donc,*

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x, \; x > 0 \tag{3.8}$$

Si on considère la racine $r_2 = -1$ *correspondante, il peut être difficile de calculer* a_1 *puisque* $N = r_1 - r_2 = 1$*. Toutefois, à partir de l'équation* (3.5) *pour* $r = -1/2$*, les coefficients de* x^r *et de* x^{r+1} *sont nuls, peu importe le choix de* a_0 *et de* a_1*. Ainsi, on peut choisir arbitrairement* a_0 *et* a_1*. D'après la relation de récurrence* (3.6)*, on obtient un ensemble de coefficients d'indices pairs correspondant à* a_0 *et un ensemble de coefficients d'indices impairs correspondant à* a_1*. Donc, on n'a besoin ici d'aucun terme logarithmique pour obtenir une deuxième solution. En exercice, on vous demande de montrer que pour* $r = -1/2$*,*

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{1/2}}, \quad x > 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La constante a_1 *introduit simplement un multiple de* $y_1(x)$*. La deuxième solution linéairement indépendante à l'équation de Bessel d'ordre un demi est généralement considérée comme la solution pour laquelle* $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ *et* $a_1 = 0$*. Elle est notée* $J_{-1/2}$*. Alors,*

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \quad x > 0.$$

La solution générale à l'équation (*L*) *est* $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$*. En comparant les équations* (3.8) *et* (3.9) *, on voit qu'à l'exception d'un déphasage de* $\pi/4$*, les fonctions* $J_{-1/2}$ *et* $J_{1/2}$ *ressemblent respectivement à* J_0 *et à* Y_0 *lorsque* x *est grand. Les graphes de* $J_{1/2}$ *et de* $J_{-1/2}$ *sont illustrés dans la figure* 3.3.

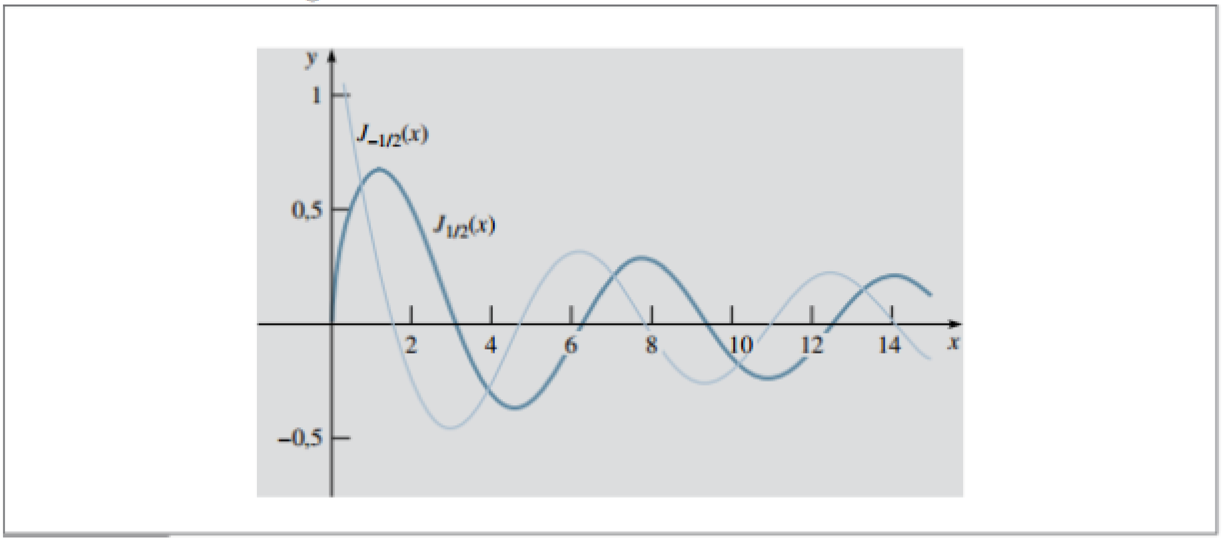

FIGURE 3.3 – Fonctions de Bessel $J_{1/2}$ et $J_{-1/2}$

L'équation de Bessel d'ordre un *([2]; p397)*
Cet exemple illustre le cas où les racines de l'équation indicielle diffèrent d'un entier positif et où la deuxième solution inclut un terme logarithmique. En posant $v = 1$ dans l'équation (2.22), on a

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0. \tag{3.10}$$

Si on substitue la série à

$$y = \phi(r, x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{r+n}$$

et si on regroupe les termes comme dans les cas précédents, on obtient

$$L[\phi](r, x) = a_0 \left(r^2 - 1\right) x^r + a_1 \left[(r + 1)^2 - 1\right] x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[(r + n)^2 - 1\right] a_n + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0 \tag{3.11}$$

Les racines de l'équation indicielle sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La relation de récurrence est

$$\left[(r + n)^2 - 1\right] a_n(r) = -a_{n-2}(r), \quad n \geq 2.$$

Si on considère la plus grande racine $r = 1$, la relation de récurrence devient

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n + 2)n}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

On trouve aussi, à partir du coefficient de x^{r+1} dans l'équation (3.11), que $a_1 = 0$. Ainsi, à partir de la relation de récurrence, $a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Pour les valeurs paires de n, on pose $n = 2m$. Alors,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m + 2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m + 1)m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

En résolvant cette relation de récurrence, on obtient

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m + 1)!m!}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

La fonction de Bessel de premier type et d'ordre un, notée J_1, est obtenue en choisissant $a_0 = 1/2$. Ainsi,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \tag{3.12}$$

La série converge absolument pour tout x, et la fonction J_1 est analytique partout. En déterminant une deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre un, on illustre la méthode de substitution directe. Le calcul du terme général dans l'équation (3.13) ci-dessous est plutôt complexe, mais on peut trouver les premiers coefficients assez facilement, on suppose que

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \quad x > 0 \tag{3.13}$$

On calcule $y_2'(x), y_2''(x)$. Ensuite, en faisant la substitution dans l'équation (3.10) et en considérant le fait que J_1 est une solution à l'équation (3.10), on a

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n\right] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

où $c_0 = 1$. À partir de l'équation (3.12), on fait la substitution de l'expression de $J_1(x)$ en translatant les indices de sommation dans les deux séries, puis on effectue quelques manipulations algébriques pour obtenir

$$\begin{aligned} -c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]\, x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(n^2 - 1\right) c_{n+1} + c_{n-1}\right] x^n \\ = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1) x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!}\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

À partir de l'équation (3.14), on note d'abord que $c_1 = 0$ et que $a = -c_0 = -1$. De plus, puisqu'il n'y a que des puissances impaires de x dans le second membre de l'équation, le coefficient de chaque puissance paire de x dans le premier membre doit être nul. Ainsi, puisque $c_1 = 0$, on a $c_3 = c_5 = \cdots = 0$. Si on considère les puissances impaires de x correspondantes, on obtient la relation de récurrence [on pose $n = 2m+1$ dans la série du premier membre de l'équation (3.14)]

$$\left[(2m+1)^2 - 1\right] c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m (2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.15}$$

Quand on pose $m = 1$ dans l'équation (2.25), on obtient

$$\left(3^2 - 1\right) c_4 + c_2 = (-1)3/\left(2^2 \cdot 2!\right)$$

Il faut noter que si on choisit arbitrairement c_2, alors cette équation détermine c_4. De plus, il convient de préciser que dans l'équation du coefficient de x [voir l'équation (3.14)], c_2 est multiplié par zéro et on a utilisé cette équation pour déterminer a. Il n'est pas surprenant que c_2 soit arbitraire, puisqu'il s'agit du coefficient de x dans l'expression $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$. Par conséquent, c_2 ne fait qu'engendrer un multiple de J_1, et y_2 est déterminé jusqu'à un multiple additif de J_1 seulement. Selon la pratique habituelle, on choisit $c_2 = 1/2^2$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right] \\ &= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}\left(H_2 + H_1\right) \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que la solution à la relation de récurrence (3.15) *est*

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}\left(H_m + H_{m-1}\right)}{2^{2m} m!(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

en considérant que $H_0 = 0$. *Ainsi,*

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(H_m + H_{m-1}\right)}{2^{2m} m!(m-1)!} x^{2m}\right], \quad x > 0$$

Le calcul de $y_2(x)$ *avec la méthode alternative (voir les équations* (3.7) *et* (3.8) *) dans laquelle on détermine le* $c_n(r_2)$ *est un peu plus facile. En particulier, la dernière démarche donne la formule générale pour* c_{2m} *sans qu'on ait à résoudre une relation de récurrence de la forme* (3.15). *À cet égard, les lecteurs peuvent aussi comparer les calculs de la deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre zéro de la deuxième solution à l'équation* (3.10)*, la fonction de Bessel de premier type et d'ordre un,* Y_1*, est généralement considérée comme une combinaison linéaire de* J_1 *et de* y_2. *Selon Copson ,* Y_1 *est définie par*

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_1(x)\right]$$

La solution générale à l'équation (T) *pour* $x > 0$ *est*

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$$

Il faut noter que bien que J_1 *soit analytique en* $x = 0$*, la deuxième solution* Y_1 *devient non bornée de la même manière que* $1/x$ *lorsque* $x \to 0$. *La figure* 3.4 *illustre les graphes de* J_1 *et de* Y_1.

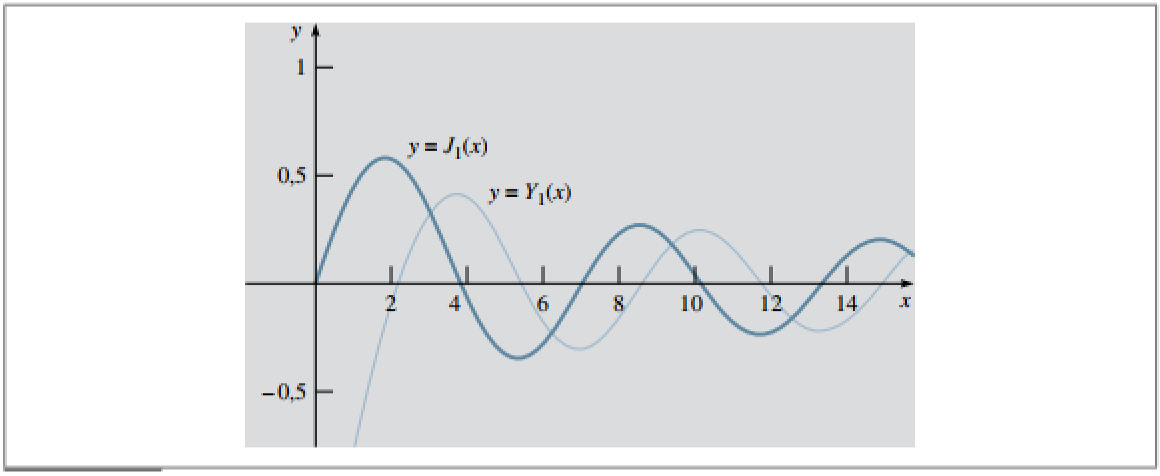

FIGURE 3.4 – Fonctions de Bessel J_1 et Y_1

3.2) Équation du second ordre avec point singulier régulière

on considère l'équation différentielle du second ordre

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{3.16}$$

on suppose que $\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$ *et* $\dfrac{a_2(t)}{a_0(t)}$ *sont des fonctions analytiques en un point* t_0 *sur un intervalle* I.
Le point t_0 *est alors appelé* ***point ordinaire*** *de l'équation différentielle donnée.*
on dit qu'un point $t_0 \in I$ *est un* ***point singulier*** *pour l'équation différentielle donnée s'il n'est pas un point ordinaire. Donc, en un point singulier ou bien* $\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$ *ou bien* $\dfrac{a_2(t)}{a_0(t)}$ *n'est pas analytique en* $t = t_0$*.cependant, si la singularité n'est pas d'une nature prédominante dans la forme irrégulière, alors l'extension de la méthode du développement en série est possible pour une classe de telles équations différentielles. On classifie les points singuliers de la manière suivante :*

Définition 3.2.1. *([1]; p12)*
un point $t_0 \in I$ *est appelé* ***point singulier régulier*** *pour l'équation différentielle* (3.16) *si* t_0 *est un point singulier et les fonctions* $(t-t_0)\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$ *et* $(t-t_0)^2\dfrac{a_2(t)}{a_0(t)}$ *sont analytiques en* $t = t_0$.
Si un point singulier t_0 *n'est pas régulier, il est appelé* ***point singulier irrégulier.***

Exemple 3.2.1. *L'équation de Bessel d'ordre p*

$$L(x)(t) = t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0, \;\; Re\ p \geqslant 0 \tag{3.17}$$

possède un point singulier régulier en $t = 0$*. Observer que les fonctions*

$$t\left(\frac{t}{t^2}\right) = 1 \text{ et } t^2\left(\frac{t^2-p^2}{t^2}\right) = \; t^2 - p^2$$

sont analytiques en $t = 0$

Exemple 3.2.2. *Dans le cas de l'équation différentielle*

$$t(t-1)^2(t+3)x'' + t^2x' - (t^2 + t - 1)x = 0$$

on remarque que les point $t = 0$ *,* $t = 1$ *et* $t = -3$ *sont des points singulier. Il est facile de vérifier que les points* 0 *et* -3 *sont des points singuliers régulier tandisque*

$$\frac{(t-1)t^2}{t(t-1)^2(t+3)} = \frac{t^2}{t(t-1)(t+3)}$$

n'est pas analytique en $t = 1$*, on déduit que* 1 *n'est pas un point singulier régulier de l'équation différentielle donnée.*
L'objectif de cette section est d'étendre la méthode de la solution sous forme de série à l'équation différentielle (3.16) *avec des points singuliers réguliers. Pour commencer, Supposons de plus que le point singulier* t_0 *est en zéro. Il n'y a pas perte de généralité dans cette assumption.Nous cherchons une solution* $\Phi(t)$ *pour* (3.16) *sous la forme :*

$$\Phi(t) = t^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \tag{3.18}$$

où les coefficients c_k *sont des constantes à déterminer et* m *est un nombre à choisir tel que la série* $\Phi(t)$ *satisfait l'équation* (3.16)*. En développant en série les fonctions* $\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$ *et* $\dfrac{a_2(t)}{a_0(t)}$ *au point* $t = 0$ *et en identifiant les coefficients du premier terme à zéro, on obtient que ce coefficient est de la forme* $g(m)$*, un polynôme du second degré en* m*. L'équation* $g(m) = 0$ *est appelée* ***" l'équation caractéristique ou l'équation indiciale ".*** *Supposons que* $c_0 \neq 0$*. L'équation caractéristique possède deux racines* $m = m_1$ *et* $m = m_2$*. Nous obtenons deux* *ensembles de constantes* c_k *qui conduisent à deux solutions sous forme de série* $\Phi_1(t)$ *et* $\Phi_2(t)$ *respectivement. Il y a plusieurs cas à étudier avec détail suivant la nature des racines* m_1 *et* m_2. *Pour illustrer la méthode du développement en série dans le cas de l'équation différentielle du second ordre avec un point singulier régulier on se propose d'étudier l'équation de Bessel* (3.17) *dans cette section. Nous avons besoin de quelques propriétés de la* ***fonction Gamma*** *définie par :*

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^t t^{\gamma-1} dt, \ \ Re\ \gamma > 0.$$

Elle sont citées ci-dessous

$$(i) \ \ \Gamma(\gamma+1) = \gamma\Gamma(\gamma)$$

$$(ii) \ \ \Gamma(1) = 1$$

$$(iii) \ \ \Gamma(n+1) = n!, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$(iv) \ \ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

La fonction Gamma n'est pas définie en $0, -1, -2, \ldots$ *Les valeurs limitées de la fonction Gamma en ces arguments sont* $\pm\infty$

$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^t t^{\gamma-1} dt, \ \ Re\ \gamma > 0.$
$\Gamma(\gamma) = \dfrac{\Gamma(\gamma+N)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+N-1)}, \ \ Re\ \gamma < 0, \ \ -N < Re\ \gamma \leqslant -N+1, \ \ \gamma \neq -N+1,$
N *étant un entier positif.*
Nous allons citer un théorème concernant l'existence et la nature des solutions de l'équation de Bessel (3.17)

Théorème 2. *([1]; p1) Soient* m_1 *et* m_2 *deux racines de l'équation caractéristique* $g(m) = 0$ *de l'équation de Bessel* (3.17)*.Alors*

(*i*) *il existe une solution* Φ *telle que*

$$\Phi_1(t) = t^{m_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \ \ c_0 = 1, \ \ t > 0$$

Si $m_1 - m_2 \neq 0$ *ou un entier positif, il existe une seconde solution* Π_2 *pour* $t > 0$ *de la forme*

$$\Phi_2(t) = t^{m_1} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k t^k, \ \ \tilde{c}_0 = 1$$

(*ii*) *Lorsque* $m_1 = m_2$, *il existe deux solutions* Φ_1 *et* Φ_2 *linéairement indépendantes définies pour* $t > 0$ *de la forme*

$$\Phi_1(t) = t^{m_1}\sigma_1(t)$$
$$\Phi_2(t) = t^{m_1+1}\sigma_2(t) + (\log t)\Phi_1(t)$$

où σ_1 *et* σ_2 *sont développables en série et sont convergentes pour toutes les valeurs finies de* $t > 0$, $\sigma_1(0) \neq 0$

(*iii*) *Lorsque $m_1 - m_2$ est un entier positif il existe deux solutions Φ_1 et Φ_2 linéairement indépendantes définies pour $t > 0$ de la forme*

$$\Phi_1(t) = t^{m_1}\sigma_1(t)$$
$$\Phi_2(t) = t^{m_1+1}\sigma_2(t) + c(\log t)\Phi_1(t)$$

où σ_1 et σ_2 sont développables en série et sont convergentes pour toutes $t > 0$, $\sigma_1(0) \neq 0$, $\sigma_2(0) \neq 0$ et c est une constante.
Avant de procéder à l'étude de l'équation de Bessel (3.17)*, nous allons donner un exemple qui illustre la nécessite(le besoin) d'assumer une solution de la forme* (3.18) *lorsqu'une équation différentielle du second ordre possède un point singulier régulier.*

Exemple 3.2.3. *Considérons l'équation $t^2x'' - (1-t)x = 0$ ayant un point singulier régulier en $t = 0$*
Soit

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k$$

Alors

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kt^{k-1}$$
$$x''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_kt^{k-2}$$

Nous avons alors

$$t^2x'' - (1+t)x = -a_0 - (a_1 + a_0)t + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)a_k - (a_k + a_{k-1}]\, t^k$$
$$= 0$$

Donc,$a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $a_n = 2, 3, \ldots$ Ce qui montre que $x(t) = 0$ est une solution de l'équation proposée. Mais, la situation est différente. En fait, soit solution écrite sous forme d'une série de la forme

$$x(t) = t^m \sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k,\ m \neq 0,\ a_0 \neq 0.$$

$$t^2x'' - (1+t)x = [m(m-1) - 1]\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+m)(k+m-1)a_k - (a_k + a_{k-1}]\, t^k$$
$$= 0$$

$$x(t) = t^m \sum_{k=0}^{\infty} a_kt^k,\ m \neq 0,\ a_0 \neq 0$$

$$t^2x'' - (1+t)x = [m(m-1) - 1]\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+m)(k+m-1)a_k - (a_k + a_{k-1}]\, t^k$$
$$= 0$$

On conclut que $g(m) = m(m-1) - 1 = m^2 - m - 1 = 0$ *est l'équation caractéristique ayant les racines* $m_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ *et* $m_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$. *De plus,*

$$(k+m)(k+m-1)a_k - (a_k + a_{k-1}) = 0, \; k = 1, 2, \ldots$$

Choisissons $a_0 = 1$. *On obtient une relation de récurrence*

$$a_k = \frac{a_{k-1}}{(k+m)(k+m-1)-1}, \; k = 1, 2, \ldots$$

donnant une solution $x(t)$ *donnée par*

$$x(t) = t^m \left[1 + \frac{t}{(m+1)m-1} + \frac{t^2}{\left[(m+2)(m+1)-1\right]\left[(m+1)m-1\right]} \cdots\right]$$

où $m = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ou* $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. *Remarquons que cette solution est différente de* $x(t) = 0$.

fonctions de Bessel *([1]; p15)*
Nous sommes maintenant dans une position d'étudier l'équation de Bessel (3.17) *supposons qu'une solution est de la forme*

$$\Phi(t) = t^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \; c_0 \neq 0, \; t > 0.$$

Clairement

$$t^2\Phi''(t) + t\Phi'(t) + (t^2 - p^2)\Phi(t) = 0. \tag{3.19}$$

Nous avons

$$\Phi'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(m+k)c_k t^{m+k-1}$$

et

$$\Phi''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(m+k)(m+k-1)c_k t^{m+k-2}$$

D'après (3.19), *nous avons, pour* $t > 0$

$$c_0(m^2 - p^2)t^m + c_1\left[(m+1)^2 - p^2\right]t^{m+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\left\{(m+k)^2 - p^2\right\}c_k + c_{k-2}\right]t^{m+k} = 0$$

Ainsi, l'équation caractéristique $g(m) = m^2 - p^2 = 0$ *a our racines* $m_= p$ *et* $m_2 = -p$ *Assumons que* $m_1 - m_2$ *n'est pas un entier. De plus, notons que* $c_k = 0$ *et*

$$\left\{(m+k)^2 - p^2\right\}c_k + c_{k-2} = 0, \; k = 2, 3, \ldots$$

Cas (*i*) ***:*** *Nous déterminons une solution associée à la racine* $m_1 = p$.
Donc,

$$\left\{(p+k)^2 - p^2\right\}c_k + c_{k-2} = 0, \; k = 2, 3, \ldots$$

qui donne

$$c_k = -\frac{-c_{k-2}}{k(2p+k)}, \; k = 2, 3, 4$$

Puisque $c_1 = 0$, il s'ensuit que les coefficients

$$c_{2k+1} = 0,\ k = 1, 2, 3, \dots$$

De plus

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-c_0}{4(p+1)} \\ c_4 &= \frac{-c_2}{4(2p+4)} \\ &= \frac{-c_0}{2.4^2(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

En générale

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{k!4^k(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)}$$

Ainsi, une solution $\Phi_1(t)$ de l'équation de Bessel (3.17)*est donnée par*

$$\Phi_1(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{p+2k}}{k!4^k(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)}$$

Utilisant la fonction Gamma, nous aurons

$$\Phi_1(t) = c_0 2^p \Gamma(p+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{p+2k}$$

Notons que $c_0 \neq 0$ est une constante arbitraire. Pour la commodité. on choisit

$$c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

Alors

$$\Phi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{p+2k},\ t > 0$$

La solution $\Phi_1(t)$ est appelée la ***fonction de Bessel d'ordre****p et notée par $J_p(t)$*
Donc

$$J_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{p+2k},\ t > 0$$

***Cas** (ii) **:** Nous considérons la deuxième racine de l'équation caractéristique $m_2 = -p$. On peut observer qu'il y a un mineur changement dans les discussions ci-dessus. On a besoin de remplacer p par $-p$ partout. Donc, on obtient une autre solution $J_{-p}(t)$ donnée par*

$$J_{-p}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-p+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-p+2k},\ t > 0$$

Pour arriver à cette solution nous avons assumé que

$$c_0 = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}$$

On suppose que les solutions $J_p(t)$ et $J_{-p}(t)$ existent. On peut prouver que les séries qui les représentent sont convergentes pour $t > 0$ et que ces deux solutions sont linéairement indépendantes lorsque p n'est pas un entier positif ou zéro. Ainsi , la solution générale de l'équation de Bessel (3.17) d'ordre qui est ni un entier positif ni zéro et Re $p \neq 0$ est donnée par

$$x(t) = AJ_p(t) + BJ_{-p}(t), \ t > 0$$

où A et B sont des constantes arbitraires. La solution $J_p(t)$ de l'équation de Bessel (3.17) est appelée ***fonction de Bessel d'ordre p du première espèce.***
Dans le cas où $p = 0$, l'équation de Bessel prend la forme

$$t^2x'' + tx' + t^2x = 0 \tag{3.20}$$

Supposons que la solution de cette équation a la forme

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

Nous pouvons maintenant procéder comme dans le cas précédent et arrivons à la solution $J_0(t)$ donnée par

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right), \ t > 0 \tag{3.21}$$

Il est facile de montrer que la solution sous forme de série $J_0(t)$ converge pour toutes les valeurs finies de $t > 0$. La solution $J_0(t)$ est appelée la ***fonction de Bessel d'ordre Zéro du première espèce***
En fait, on peut obtenir $J_0(t)$ et $J_p(t)$ en substituant $p = 0$ et remarquant que $\Gamma(k + 1) = k!$
L'équation de Bessel est du second ordre et donc elle possède deux solutions linéairement indépendantes. Il a été possible de déterminer deux telles solutions lorsque la constante p dans l'équation (3.17)est telles que $p \neq 0$, Re $p \neq 0$ et p n'est pas un entier positif. Il reste à déterminer les solutions lorsque les deux racines m_1 et m_2 de l'équation caractéristique sont telle que $m_1 \neq m_2$ et $m_1 - m_2$ est un entier.
Supposons que les deux racines différent par un entier. Soit $m_1-m_2 = 2n$. Utilisons le Théorème nous trouvons que l'équation (3.17)possède deux solutions

$$\Phi_1(t) = J_n(t)$$

et

$$\Phi_1(t) = t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + c(\log t)J_n(t) \tag{3.22}$$

On a déjà la fonction J_n satisfaisant

$$L(J_n)(t) = 0$$

Pour déterminer la solution $\Phi_2(t)$ de l'équation (3.17) nous avons besoin de déterminer les coefficient c_k pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ Pour cet objectif , substituons Φ_2 dans (3.17).
Premièrement , trouvons $\Phi_2'(t)$ et $\Phi_2''(t)$. Il est vu que

$$\Phi_2'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k-n)t^{k-n-1} + c(\log t)J_n'(t) + \frac{c}{t}J_n(t)$$

et

$$\Phi_2''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k-n)(k-n-1)t^{k-n-2} + c(\log t)J_n''(t) + \frac{c}{t}J_n'(t) - \frac{c}{t^2}J_n(t) + \frac{c}{t}J_n'(t)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} L(\Phi_2(t)) = 0.c_0t^{-n} + c_1\left[(1-n^2)-n^2\right]t^{1-n} \\ + t^{-n}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\left\{(k-n^2)-n^2\right\}c_k + c_{k-2}\right]t^k \\ + 2ctJ_n'(t) + c(\log t)L(J_n)(t) = 0 \quad (3.23) \end{aligned}$$

Le dernier terme du second membre est nul. De plus

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}.\frac{t^{n+2k}}{2^{n+2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}t^{n+2k} \end{aligned}$$

où

$$b_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k}}k!(n+k)!$$

En vertu (3.23)*, il s'ensuit que*

$$(1-2n)c_1t + \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-2n)c_k + c_{k-2}\right]t^k = -2c\sum_{k=0}^{\infty}(2k+n)b_{2k}t^{2k}$$

Le premier terme du membre de gauche est un multiplication de t^{2n}*. Donc ,* $c_1 = 0$*. pour* $n > 1$

$$k(k-2n)c_k + c_{k-2} = 0, \; k = 2, 3, \dots, 2n-1$$

rendant

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = c_{2n-1} = 0.$$

Aussi

$$c_{2k} = \frac{c_0}{2^{2k}k!(n-1)\dots(n-k)}, k = 1, 2, \dots, n-1$$

Comparant les coefficients de t^{2n} *dans les deux membres de* (3.23) *Nous obtenons*

$$c = \frac{-c_0}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Aussi

$$c_{2n+1} = c_{2n+3} = \cdots = 0$$

Donc, les coefficients c_{2i+1}*,* $i = 0, 1, 2, \dots$ *sont nuls. Les coefficients* c_{2k} *pour* $k = 1, 2, \dots, n-1$ *sont connus. D'après* (3.23) *nous avons*

$$2k(2n+2k)c_{2n+2k} + c_{2n+2k-2} = -2c(n+2k)b_{2k} \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

pour $k = 1$*, on obtient :*

$$c_{2n+2} = -\frac{cb_2}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{c_{2n}}{4(n+1)}$$

Remarquons que c_{2n} *n'est pas encore déterminé. On choisit*

$$c_{2n} = -\frac{cb_0}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Ce choix est fait pour convenance. On a alors

$$c_{2n+2} = -\frac{cb_2}{2}\left(1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) \text{ (Noter que } 4(n+1)b_2 = -b_0)$$

et par récurrence

$$c_{2n+2k} = -\frac{cb_{2k}}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+k}\right)\right];\ k=1,2,\ldots$$

observer qu'on a déterminé tous les coefficients. D'après la relation (3.22) *on a*
$\Phi_2(t) = \frac{c_0}{t^n} + \frac{c_0}{t^n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t^{2k}}{2^{2k}.k!(n-1)\ldots(n-k)} - \frac{cb_0}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{t^n}\right)$

$$-\frac{c}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+k}\right)\right]t^{n+2k} + c(\log t)J_n(t)$$

choisissons $c=1$ *, et donc* $c_0 = -2^{n-1}(n-1)!$*. pour ce choix de* c *et* c_0 *nous obtenons la solution de* (3.17)*, notée par* K_n *, connue comme la fonction de Bessel d'ordre* n *du second espèce. Elle est donnée par*
$K_n(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} - \frac{1}{2}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^n$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+k}\right)\right].\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} + (\log t)J_n(t)$$

La fonction de Bessel d'ordre zéro du second espèce notée K_0 *est donnée par :*

$$K_0(t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} + (\log t)J_0(t)$$

L série correspondante K_n *converge. (Appliquer le test rapport.)*

3.3) Propriétés des fonctions de Bessel

Propriétés *([**1**]; p21)*
plusieurs propriétés intéressantes des fonctions de Bessel sont connues.
Nous démontrons quelques une ci-dessous.

(i) Montrons que :

$$\frac{d}{dt}\left[t^p J_p(t)\right] = t^p J_{p-1}(t) \tag{3.24}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t^p}J_p(t)\right] = -\frac{1}{t^p}J_{p+1}(t) \tag{3.25}$$

Preuve
On a :

$$\frac{d}{dt}\left[t^p J_p(t)\right] = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+2p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(k+p+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+2p-2}}{2^{2k+p-1} k!\Gamma(k+p)}$$

$$= t^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p-1}$$

$$= t^p J_{p-1}$$

L'autre relations se déduit de la même façon que précédemment.
En développant les relations (3.24) *et* (3.25), *nous obtenons*

$$J_p' + \frac{p}{t} J_p = J_{p-1}$$

$$J_p' - \frac{p}{t} J_p = -J_{p+1}$$

Si on additionne et on soustrait, on trouve

$$J_p' = \frac{1}{2} \left[J_{p-1} - J_{p+1}\right]$$

$$tJ_p = \frac{t}{2} \left[J_{p-1} - J_{p+1}\right]$$

(ii) Soit $a_1,\ a_2, \dots$ *des racines positives de la fonction de Bessel* $J_p(t)$
Alors

$$\int_0^1 tJ_p(a_m t)J_p(a_n t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} J_{p+1}^2(a_n) & m = n \end{cases}$$

Preuve
On sait que $J_p(t)$ *est une solution de l'équation de Bessel*

$$x'' + \frac{1}{t} x' + (1 - \frac{p^2}{t^2}) x = 0,\ t \neq 0$$

Soient c_1 *et* c_2 *deux constantes positives distinctes et* $y_1(t) = J_p(c_1 t),\ y_2(t) = J_p(c_2 t)$.
Alors

$$\begin{cases} y_1'' + \frac{1}{t} y_1' + \left(c_1^2 - \frac{p^2}{t^2}\right) y_1 = 0 \\ et\ y_2'' + \frac{1}{t} y_2' + \left(c_2^2 - \frac{p^2}{t^2}\right) y_2 = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Multiplications la première équation par y_2 *et la deuxième par* y_1, *et faisons la soustraction nous obtenons*

$$\frac{d}{dt} \left(y_1' y_2 - y_2' y_1\right) + \frac{1}{t} \left(y_1' y_2 - y_1 y_2'\right) = \left(c_2^2 - c_1^2\right) y_1 y_2$$

Multiplications les deux membres par t *et intégrons de* 0 *à* 1 , *ainsi*

$$\left(c_2^2 - c_1^2\right) \int_0^1 t y_1(t) y_2(t) dt = \left[t(y_1'(t) y_2(t) - y_1(t) y_2'(t)\right]_0^1$$

$$= c_1 J_p'(c_1) J_p(c_2) - c_2 J_p(c_1) J_p'(c_2)$$

Dans le cas où c_1 *et* c_2 *sont racines de* $J_p(t)$, *i.e.* $J_p(c_1) = J_p(c_2) = 0$
Alors il s'ensuit que :

$$\int_0^1 tJ_p(a_m t)J_p(a_n t)dt = 0, \ m \neq n$$

Nous avons choisi ici $c_1 = a_m$ *et* $c_2 = a_n$ *qui sont des racines positive distinctes de* $J_p(t)$.
Pour établir la deuxième partie, on va procéder de la manière suivante.
Prenons $u_n(t) = J_p(a_n t)$ *; D'après* (3.26) *on obtient*

$$u_n''(t) + \frac{1}{t}u_n'(t) + \left(a_n^2 - \frac{p^2}{t^2}\right) u_n = 0$$

Multiplications par $2t^2u_n'$, *pour obtenir*

$$\frac{d}{dt}\left(t^2u_n'^2\right) + \frac{d}{dt}\left(a_n^2t^2u_n^2\right) - 2a_n^2tu_n^2 - \frac{d}{dt}\left(p^2u_n^2\right) = 0$$

Intégrations entre 0 *et* 1 *pour obtenir*

$$2a_n^2\int_0^1 tu_n^2(t)dt = \left[t^2(u_n')^2 + (a_n^2t^2 - p^2)u_n^2\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \left[u_n'(1)\right]^2 + (a_n^2 - p^2)u_n^2(1)$$

Remarquons que $u_n(1) = J_p(a_n) = 0$ *et* $\left[u_n'(1)\right]^2 = \left[J_p'(a_n)\right]^2 a_n^2$
Alors d'après (3.14), *il est clair que* $J_p'(a_n) = -J_{p+1}(a_n)$.
Aussi $p^2u_n^2(0) = p^2J_n^2(0) = 0$
car si $p \neq 0$
alors $J_p(0) = 0$.
Ces relations entrainent

$$\int_0^1 t\left[J_p(a_nt)\right]^2 dt = \frac{1}{2}J_{p+1}^2(a_n)$$

Nous allons montrer que les fonctions de Bessel interviennent comme coefficients dans l'expression de la fonction $\exp\left[\frac{t}{2}(x - \frac{1}{x})\right]$. *En effet*

$$\exp\left[\frac{tx}{2} - \frac{t}{2x}\right] = \exp\left(\frac{tx}{2}\right)\exp\left(-\frac{t}{2x}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{tx}{2}\right)^k \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2x}\right)^k$$

On rassemble tous les termes du second membre contenant x^n, $x \geqslant 0$
Le coefficient de x^n *dans le produit est*

$$\frac{t^n}{2^nn!} - \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)!2!}\left(\frac{t}{2}\right) - \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}$$
$$= J_n(t)$$

Rassemblons maintenant les termes coefficients de $\frac{1}{x^n}$, $x > 0$ *dans le produit.Il vient que*

$$\frac{(-1)^n t^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{t^2}{2.(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}\cdots\right]$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n J_n(t) \\ &= J_{-n} \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. *La relation* $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ *peut être établie à partir de*

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}$$

en utilisant la propriété de fonction Gamma tendant vers $\pm\infty$ *en* $k = 0, -1, -2, \ldots$
Donc il s'ensuit que

$$\exp\left[\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)x^n$$

L'expression $\exp\left[\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$ *est appelée la fonction génératrice de* $J_n(t)$*. la propriété suivante que nous allons prouver ci-dessous est la représentation intégrale des fonctions de Bessel. Nous prouvons que*

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - t\sin\theta)d\theta$$

Pour montrer cette affirmation, soit $x = e^{i\theta}$
Ainsi

$$\exp\left[\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \exp\left[ti\sin\theta\right]$$

$$\cos(t\sin\theta) + i\sin(t\sin\theta)$$

De plus

$$x^n + (-1)^n\frac{1}{x^n} = \begin{cases} 2\cos n\theta & n \text{ pair} \\ 2i\sin n\theta & n \text{ impair} \end{cases}$$

Nous avons déjà prouvé

$$\exp\left[\frac{t}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)x^n$$

Substituons $x = e^{i\theta}$ *dans l'un ou l'autre membre et identifions les parties réelles et les parties imaginaires. Nous obtenons alors*

$$\cos(t\sin\theta) = J_0(t) + 2\left[J_2(t)\cos 2\theta + J_4(t)\cos 4\theta + \cdots\right]$$

et

$$\sin(t\sin\theta) = 2\left[J_1(t)\sin\theta + J_3(t)\sin 3\theta + \cdots\right]$$

Multiplications $\cos(t\sin\theta)$ *par* $\cos n\theta$ *et* $\sin(t\sin\theta)$ *par* $\sin n\theta$ *et intégrons entre* 0 *et* π*. Il est vu que*

$$\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\cos n\theta \; d\theta = \begin{cases} \pi J_n(t) & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(t\sin\theta)\sin n\theta \; d\theta = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ \pi J_n(t) & n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc , il s'ensuit que

$$\int_0^{\pi} [\cos(t\sin\theta)\cos n\theta + \sin(t\sin\theta)\sin n\theta] \; d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(n\theta - t\sin\theta) \; d\theta$$
$$= \pi J_n(t)$$

3.4) Équation de Legendre et polynômes de Legendre ([1] ; $p7$)

L'équation

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + p(p+1)x = 0 \tag{3.27}$$

où p *est un nombre réel, est appelée* ***l'équation de Legendre d'ordre*** p*. Utilisons la méthode du développement en série pour résoudre* (3.27)*. La forme standard de* (3.27) *est donnée par :*

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{p(p+1)}{1-t^2}x = 0, \;\; t \neq \pm 1 \tag{3.28}$$

La comparaison de (3.16) *avec* (2.12) *donne :*

$$a_1(t) = -\frac{2t}{1-t^2} \;\; et \;\; a_2(t) = \frac{p(p+1)}{1-t^2}$$

On sait que le développement binômial de $a_1(t)$ *et* $a_2(t)$ *converge pour* $|t| < 1$*. Donc d'après le Théorème 1 , L'équation* (3.27) *admet une solution sous forme de série pour* $|t| < 1$ *.*
Supposons que :

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \tag{3.29}$$

est une solution de (3.27)*.*
Alors nous avons

$$(1-t^2)z'' - 2tz' + p(p+1)z = 0 \tag{3.30}$$

Nous obtenons les relations suivantes de (3.29)

$$\begin{cases} -2tz'(t) = & \sum_{k=0}^{\infty} -2ka_k t^k \\ -t^2 z''(t) = & \sum_{k=0}^{\infty} -2k(k-1)a_k t^k \end{cases} \tag{3.31}$$

En substituant (3.29) *et* (3.31) *dans* (3.30) *nous obtenons, après simplification,*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}+(p+k+1)(p-k)a_k\right]t^k=0$$

Puisque l'équation ci-dessus est vraie pour $|t|<1$*, les coefficients de* t^k*, pour tout* k *s'annulent. On aboutit donc à une formule de récurrence :*

$$a_{k+2}=-\frac{-(p+k+1)(p-k)}{(k+2)(k+1)}a_k,\ \ k=0,1,2,\ldots \tag{3.32}$$

La formule (3.32) *montre que pour* k *pair,* a_k *est un multiple de* a_0 *tandisque que pour* k *impaire,* a_k *est un multiple de* a_1*. Nous allons donner quelques valeurs de* a_k*. D'après* (3.32),
nous avons :

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{(p+1)p}{2.1}a_0\\
a_3 &= -\frac{-(p+2)(p-1)}{3.2}a_1\\
a_4 &= -\frac{(p+3)(p-2)}{4.3}a_2\\
&= \frac{(p+3)(p+1)p(p-2)}{4!}a_0\\
a_5 &= -\frac{(p+4)(p-3)}{5.4}a_3\\
&= \frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}a_1
\end{aligned}$$

En général,

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{(-1)^m(p+2m-1)(p+2m-3)\ldots(p+1)p(p-2)\ldots(p-2m+2)}{(2m)!}a_0\\
a_{2m+1} &= \frac{(-1)^m(p+2m)(p+2m-2)\ldots(p+2)(p-1)(p-3)\ldots(p-2m+1)}{(2m+1)!}a_1
\end{aligned}$$

où $m=1,2,\ldots$ *On a donc évalué les coefficients a2m et* a_{2m+1} *en fonction de* a_0 *et* a_1 *respectivement. En reportant ces valeurs dans* (3.29) *, nous obtenons la solution sous forme de série de* (3.27) *comme suit :*

$$\begin{aligned}
z(t)=a_0&\left[1-\frac{(p+1)}{2!}t^2+\frac{(p+3)(p+1)p(p-2)}{2!}t^4-\ldots\right]\\
&+a_1\left[t-\frac{(p+1)(p-1)}{3!}t^3+\frac{(p+4)(p+2)(p-1)(p-3)}{5!}t^5-\ldots\right]
\end{aligned}\tag{3.33}$$

Écrivons

$$z(t)=a_0z_1(t)+a_1z_2(t),\ \ |t|<1 \tag{3.34}$$

où $z_1(t)$ *et* $z_2(t)$ *représentent les séries*

$$z_1(t)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(p+2m-1)(p+2m-3)\ldots(p+1)p(p-2)\cdots(p-2m+2)}{(2m)!}t^m \tag{3.35}$$

$$z_2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (p+2m)(p+2m-2)\cdots(p+2)(p-1)(p-3)\ldots(p-2m+1)}{(2m+1)!} t^{2m+1} \tag{3.36}$$

Les constantes a_0 et a_1 sont arbitraires. Si on choisit $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, alors $z(t) = z_1(t)$ et semblablement si $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$,alors $z(t) = z_2(t)$. En effet, $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de sur (3.27) $|t| < 1$. La solution générale de (3.27) est alors donnée par (3.34)
En dérivant $z_1(t)$ et $z_2(t)$ nous avons assumé que p est un nombre réel. Si p est un entier non négatif alors $z_1(t)$ ou $z_2(t)$ se réduit à un polynôme en t de degré p si p est pair, ou degré $p-1$ si p est impair respectivement. Par exemple

$$z_1(t) = 1 \ (p = 0)$$
$$z_1(t) = 1 - 3t^2 \ (p = 2)$$
$$z_1(t) = 1 - 10t^2 + \frac{35}{3}t^4 \ (p = 4)$$

Pour ces valeurs de p , $z_2(t)$ reste une série (infinie). Dans le cas où p est impair alors $z_1(t)$ est une série (infinie) et $z_2(t)$ se réduit à un polynôme. Par exemple,

$$z_2(t) = t \ (p = 1)$$
$$z_2(t) = t - \frac{5}{3}t^3 \ (p = 3)$$
$$z_2(t) = t - \frac{14}{3}t^3 + \frac{21}{5}t^5 \ (p = 5)$$

polynôme de Legendre ([1]; p9)

Considérons maintenant l'équation de Legendre lorsque $p \geqslant 0$ est un entier n, soit

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0 \tag{3.37}$$

*On a déjà vu que (3.37) possède une solution sous forme de polynôme. On note cette solution par $P_n(t)$. On que $P_n(t)$ est un **polynôme de Legendre** lorsque $P_n(1) = 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ Ces polynômes jouent un rôle important en physique mathématique.*
Nous obtenons ci-dessous certaines propriétés importantes de ces polynôme.
On note par V le polynôme $(t^2-1)^n$. Alors, montrons que la dérivée $n^{ième}$ de V notée par D^nV, vérifie l'équation (3.37). Par définition, nous avons

$$V = (t^2-1)^n \tag{3.38}$$

et donc $\dfrac{dv}{dt} = n(t^2-1)^{n-1}.2t$ qui peut s'écrire pour $t \neq \pm 1$ sous la forme

$$(t^2-1)\frac{dV}{dt} - 2nV = 0 \tag{3.39}$$

Dérivons (3.39), $(n+1)^{ième}$ fois en utilisant la théorème de Leibnitz, nous obtenons

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}(D^nV) - 2t\frac{d}{dt}(D^nV) + n(n+1)D^nV = 0$$

qui constante multiple de D^nV et une solution de (3.37). Donc le polynôme de Legendre $P_n(t)$ est une constante multiple de D^nV et donc $P_n(t) = AD^nV$. Pour déterminer A, on remarque que le polynôme de Legendre vérifie $P_n(1) = 1$. Maintenant,

$$\begin{aligned} P_n(t) &= AD^n\left[(t-1)^n(t+1)^n\right] \\ &= A(t+1)^nD^n(t-1)^n + \textbf{\textit{terme ayant}}\ (t-1)\textit{comme facteur} \\ &= n!A(t+1)^n + \textbf{\textit{terme ayant}}\ (t-1)\textit{comme facteur} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P_n(1) &= An!2^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

qui détermine la valeur de A , soit $A = \dfrac{1}{n!2^n}$
Nous venons donc de montrer le résultat suivant.

Théorème 3. *([1]; p10)*
Le polynôme de Legendre $P_n(t)$ est donné par

$$P_n(t) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^2 \tag{3.40}$$

Comme conséquence du Théorème 3, nous obtenons le résultat qui donne les propriétés importantes de $P_n(t)$.

Théorème 4. *([1]; p10)*
Si $P_n(t)$ est le polynôme de Legendre, alors

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t)\ dt = \frac{2}{2n+1} \tag{3.41}$$

Preuve

Comme précédemment,on note $(t^2-1)^2$ par V .
Alors

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t)\ dt = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{n!2^n}\right]^2 \frac{d^n}{dt^n}V(t)\frac{d^n}{dt^n}V(t)\ dt$$

Évaluons l'intégrale donnée ci-dessous

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n}V(t)\frac{d^n}{dt^n}V(t)\ dt$$

Observons que

$$\begin{aligned} V^n(-1) &= V^n(1) \\ &= 0,\ \textbf{\textit{si}}\ 0 \leqslant m \leqslant n \end{aligned} \tag{3.42}$$

Nous intégrons successivement par parties l'intégrale I et nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\right](-1)^nV(t)\ dt \\ &= (2n)!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\ dt \end{aligned}$$

A l'aide de la transformation $t = \cos\theta$ et utilisons la formule pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^n \, d\theta$, nous arrivons à

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t) \, dt = \frac{2}{2n+1}$$

CQFD.

Théorème 5. *([1]; p11)*
Si $P_n(t)$ et $P_m(t)$ sont des polynômes de Legendre, alors

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t) \, dt = 0 \ \textbf{\textit{si}} \ m \neq n \tag{3.43}$$

Preuve

L'équation (3.37) peut s'écrire aussi comme

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_n'\right] = -n(n+1)P_n$$
$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_m'\right] = -m(m+1)P_n$$

Multiplications la première relation par P_m et la deuxième relation par P_n et faisons la soustraction des deux expressions ainsi trouvées. Nous obtenons alors

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)(P_n'P_m - P_nP_m')\right] = \left[m(m+1) - n(n+1)\right] P_mP_n$$

intégrons les deux parties entre -1 et 1. La conclusion(1.43) s'en déduit.
CQFD.
Le Théorème 5 dit essentiellement que les polynômes de Legendre constituent un ensemble orthogonal des fonctions avec fonction poids unité sur $[-1,1]$. cette propreté de $P_n(t)$ est utilisée crucialement dans le développement d'une fonction donnée $g(t)$ définie et continue sur $[-1,1]$ en termes de $P_n(t)$.

Théorème 6. *([1]; p11)*
Si $g(t)$ est une fonction continue arbitraire de t définie sur $[-1,1]$, alors g admet un développement de la forme :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_nP_n(t), \ t \in [-1,1]$$

où C_n sont des constantes données par

$$g(t) = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)P_n(t) \, dt, \ n = 0,1,2,\ldots$$

La preuve de ce théorème est une conséquence des Théorème (4) et (5)

Table des figures

Bibliographie

[1] Mekki Terbeche, Équations différentielles, Universite d'Oran-Es-Sénia Faculté des Sciences Département de Mathématique. 2004-2005.

[2] Boyce,William E. et DiPrima,Richard C, Équations différentielles, Adaptation française de Richard Labonté, Chenelière McGraW-Hill, Montréal,2002.

[3] Jean-Marie Monier, Analyse MP, 2013.

[4] N.Piskounov, Calcul différentiel et intégrale.

[5] Mario Lefebvre. Équations différentielles . Presses de l'Université de Montréal, 2008. Manuel de premier cycle.

[6] SHEPLEY.ROSS, Introduction To Ordinary Diffirential Equations .

[7] Dennis G.Zill, Michael R. Cullen, Differential Equations , With Boundary-Value Problems, Loyola Marymount University.

[8] Abdul-Majid Wazwaz, Linear and Nonlinear Integrale Equations Methode and Applications .

[9] P. Thuillier , J.C. Belloc, Mathématiques 2 Analyse, Masson 1981.

[10] www.stemjock.com

[11] g.s.mcdonald@salford.ac.uk

Appendices

Annexe A

Représentations en série

$C.1$ **Série de fonctions exponentielles**

1. $e^{ax} = 1 + (ax) + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^2}{3!} + \frac{(ax)^2}{4!} + \cdots$
2. $e^{-ax} = 1 - (ax) + \frac{(ax)^2}{2!} - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^4}{4!} + \cdots$
3. $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$
4. $a^x = 1 + x\ln a + \frac{1}{2!}(x\ln a)^2 + \frac{1}{3!}(x\ln a)^3 + \cdots, a > 0$
5. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \cdots$
6. $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right)$
7. $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{57x^5}{5!} + \cdots$
8. 8. $e^{\sin^{-1} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \cdots$

$C.2$ **Fonctions trigonométriques**

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
3. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$
4. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \frac{1385x^8}{8!} + \cdots$

$C.3$ **Fonctions trigonométriques inverses**

1. $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, x^2 < 1$
2. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

$C.4$ Fonctions hyperboliques

1. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$
2. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$
3. $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots$

$C.5$ Fonctions hyperboliques inverses

1. $\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

1. $\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$

$C.6$ Fonctions logarithmiques

1. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots, -1 < x \leqslant 1$
2. $\ln(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots), -1 \leqslant x < 1$
3. $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Résumé

Dans ce mémoire nous présentons une méthode analytique pour résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre avec des coefficients variables qui sont difficiles à résoudre par des méthodes classiques, pour faciliter la tache , en utilise les séries entières et ceci est basé sur plusieurs théories et résultats et on enrichie avec des exemples pour faciliter la compréhension aux lecteur

Mots-clefs

point ordinaire, développement en série entière, séries de Taylor, polynôme de Legendre et Bessel, points singulières, équations différentielles du deuxième ordre

English title

SOLUTIONS OF ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS BY SERIES DEVELOPMENT

Abstract

In this dissertation we present an analytical method to solve the second order linear differential equation with variable coefficients which are difficult to solve by classical methods, to facilitate the task, use the whole series and this is based on several theories and results and enriched with examples to facilitate understanding for readers