REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Par :

Kharroubi Saadia
Kherchouche Feriyal
Kritla Siham

Sur le thème

Sur la stabilité des équations différentielles ordinaires

Soutenu publiquement le 14/ 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. OUERDANI Abderrahmane	MCB	Université Tiaret	Président
Mr. GUEDDA Lahcene	Pr	Université Tiaret	Encadreur
Mr. HALLOUZ Ahmed	MCB	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

• On remercie tout d'abord DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

• Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements à notre encadreur de mémoire, **Mr Gudda Lahcen** pour avoir accepté de nos encadrer, pour son enseignement, son support, son orienté, ses encouragements tout au long de ce travail.

• Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

• Un remerciement spécial et sincère aux mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi.

• Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2021 de mathématiques et tous nos amis.

• Finalement, j'adresserais mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que nous dédions ce présent travail :

⋆ A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.

⋆ A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

⋆ Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jours, à tous mes frère et mes sœurs , nous vous souhaitons une bonne santé , une vie pleine de plaisir et de réussite.

⋆ A mon encadreur **Gudda.L.** qui nous a donné de l'aide et des conseils et encouragements.

⋆ A notre amitié et aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes cotés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieurs, mes aimables amis, mes familles, collèges d'étude et frères de cœur **Dalila, Amina, Soulef, Sabah, Bouchra et ...**

Table des matières

INTRODUCTION

En mathématique, une équation différentielle ordinaire est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues dépendent d' une seule variable t , elle représente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. Beaucoup des résultats existent dans ce domaine : il est possible de trouver des solutions explicites à ces équations. La résolutions explicite de la plupart des équations différentielles ordinaires reste encore un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique qui permettait de trouver des résultats sur les solutions(par exemple existence et unicité) sans les connaitre explicitement . Lorsque nous prenons une équation différentielle ordinaire et une condition initiale, nous parlons du problème de Cauchy. En analyse, un problème de Cauchy est un problème consiste à trouver une solution vérifiant une condition initiale.
Ce mémoire est divisée en trois chapitre, dans le premier chapitre on va parler du définitions sur les équations différentielle ordinaires ,des théorèmes d'existence et d'unicité du solution du problème de Cauchy. le chapitre deux est consacré à l'étude des systèmes différentielles linéaires . Dans la chapitre trois,on étudie la stabilité des solutions et potins singulier d'un champ de vecteurs.

Chapitre 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Il s'agit du chapitre central de la théorie, de ce fait nécessairement assez abstrait. Sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs.

1.1 DÉFINITIONS. SOLUTIONS MAXIMALES ET GLOBALES

1.1.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRE DU PREMIER ORDRE

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et

$$f : U \to \mathbb{R}^m$$

une application continue. on considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

Définition 1.1. *Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^m$ telle que*

(i) $\quad (\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U$

(ii) $\quad (\forall t \in I) \quad y'(t) = f(t, y(t))$.

L'«inconnue» de l'équation (E) est donc en fait une fonction. le qualificatif «ordinaire» pour l'équation différentielle (E) signifie que la fonction inconnue y dépend d'une seule variable t (lorsqu'il y a plusieurs variables t_i et plusieurs dérivées $\frac{\partial y}{\partial t_i}$, on parle d'équations aux dérivées partielles).

Écriture en coordonnées - Écrivons les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ en termes de leurs fonctions composantes, c'est-à- dire

$$y = (y_1, ..., y_m), \quad f = (f_1, ..., f_m).$$

L'équation (E) apparaît comme un système différentiel du premier ordre à m fonctions inconnues $y_1, ..., y_m$:

$$(E) \quad \begin{cases} y'(t) = f_1(t, y_1(t), ..., y_m(t)) \\ ... \\ y'_m(t) = f_m(t, y_1(t), ..., y_m(t)). \end{cases}$$

Problème de Cauchy - Étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

$$(P.C) \qquad \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1.1.2 CAS DE LA DIMENSION UN (m=1)

Si on note $x = t$, l'équation (E) se récrit

$$(E) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une "courbe intégrale" de (E) passant par un point donné $(x_0, y_0) \in U$.

Champ des tangentes - A tout point $M = (x_0, y_0)$, on associe la droite D_M passant par M et de coefficient directeur $f(x_0, y_0)$:

$$D_M : y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

L'application $M \to D_M$ est appelée champ des tangentes associé à l'équation (E).

Une courbe intégrale de (E) est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite D_M du champ des tangentes.

Lignes isoclines de (E) - par définition, ce sont les courbes

$$\Gamma_p : f(x,y) = p$$

correspondant à l'ensemble des points M où la droite D_M a une pente donnée p.
La courbe Γ_0 joue un rôle intéressant. On a effet un régionnement de U :

$$U = U_+ \cup U_- \cup \Gamma_0 \qquad \text{où}$$

$$U_+ = \{M \in U; f(M) > 0\}, \quad U_- = \{M \in U; f(M) < 0\}.$$

Les courbes intégrales sont croissantes dans U_+ , décroissantes dans U_- , stationnaires (souvent extrêmales) sur Γ_0.

1.1.3 SOLUTIONS MAXIMALES

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.2. *soient $y : I \to \mathbb{R}^m, \tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ des solutions de(P.C). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}\,|_I = y$.*

Définition 1.3. *On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ avec $\tilde{I} \underset{\neq}{\supset} I$.*

Théorème 1.1. *Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

Démonstration. supposons que y soit définie sur un intervalle $I = |a,b|$ (cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes a et b , incluses ou non dans I).

Il suffira de montrer que y se prolonge en une solution $\tilde{y} : |a,\tilde{b}| \to \mathbb{R}^m$ ($\tilde{b} \geq b$) maximale à droite, c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger $\tilde{y}$

au delà de $\tilde{b}$. Le même raisonnement s'appliquera à gauche.
Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs $y_{(1)}, y_{(2)}, ...$ de y avec $y_{(k)} :]a, b_k[\to \mathbb{R}^m$. On pose $y_{(1)} = y, b_1 = b$. Supposons $y_{(k-1)}$ déjà construite pour un indice $k \geq 1$. On pose alors

$$c_k = \sup\{c\,;\, y_{(k-1)} \text{ se prolonge sur }]a, c[\}.$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Par définition de la borne supérieure, il existe b_k tel que $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ et un prolongement $y_{(k)} :]a, b_k[\to R^m$ de $y_{(k-1)}$ avec b_k arbitrairement voisin de c_k ; en particulier, on peut choisir

$$\begin{aligned} c_k - b_k < \frac{1}{k} \qquad &\text{si} \qquad c_k < +\infty, \\ b_k > k \qquad &\text{si} \qquad c_k = +\infty. \end{aligned}$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongements de $y_{(k-1)}$ contient l'ensemble des prolongements de $y_{(k)}$; au niveau des bornes supérieures on a donc $c_k \geq c_{k+1}$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_k \leq ... \leq c_k \leq c_{k-1} \leq ... \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

$$\tilde{b} = \lim_{k\to+\infty} b_k = \lim_{k\to+\infty} c_k.$$

Soit $\tilde{y} :]a, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^m$ le prolongement commun des solutions $y_{(k)}$, éventuellement prolongé au point $\tilde{b}$ si cela est possible. Soit $z :]a, c] \to \mathbb{R}^m$ un prolongement de $\tilde{y}$. Alors z prolonge $y_{(k-1)}$ et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \tilde{c}$, ce qui montre que la solution $\tilde{y}$ est maximale à droite. □

1.1.4 SOLUTIONS GLOBALES

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.4. *Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.*

Attention : toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.
Donnons un exemple explicite de cette situation.

Exemple 1.1.1. *(A) $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Cherchons les solutions $t \to y(t)$ de (A) .

- *On a d'une part la solution $y(t) = 0$.*
- *Si y ne s'annule pas, (A) s'écrit $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration*

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, \quad y(t) = -\frac{1}{t+C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $]-C, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (A).

1.1.5 RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 1.2. *Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k, toute solution de (E) $y' = f(t, y)$ est de classe C^{k+1}.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k.

- $k = 0$: f continue.
  Par hypothèse $y : I \to \mathbb{R}^m$ est dérivable, donc continue.
  Par conséquent $y'(t) = f(t, y(t))$ est continue, donc y est de classe C^1.

- Si le résulta est vrai à l'ordre $k-1$, alors y est au moins de classe C^k.
  Comme f est de classe C^k, il s'ensuit que y' est de classe C^k comme composée de fonctions de classeC^k , donc y est de classe C^{k+1}.

□

Calcul des dérivées successives d'une solution y - On suppose pour simplifie $m = 1$. En dérivant la relation $y'(x) = f(x, y(x))$ il vient

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x) \\ y'' &= f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y) \\ &= f^{[1]}(x, y) \end{aligned}$$

avec $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$. Notons de manière générale l'expression de la dérivée k-ième $y^{(k)}$ en fonction de x, y sous la forme

$$y^{(k)} = f^{[k-1]}(x, y)\,;$$

d'après ce qui précède $f^{[0]} = f,\ f^{[1]} = f'_x + f'_y f$. En dérivant une nouvelle fois, on trouve

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y)y' \\ &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y)f(x, y). \end{aligned}$$

On obtient donc les relations de récurrence

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= f^{[k]}(x, y) \\ f^{[k]} &= (f^{[k-1]})'_x + (f^{[k-1]})'_y f\,, \quad \textit{avec} \quad f^{[0]} = f. \end{aligned}$$

En particulier, le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales est contenu dans la courbe $f^{[1]}(x, y) = 0$.

1.2 THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS

Dans tout ce paragraphe, on considère une équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' = f(t, y)$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

1.2.1 ÉQUIVALENCE DU PROBLÈME DE CAUCHY AVEC LA RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE

Le lemme très simple ci-dessous montre que la résolution de $(P.C)$ est équivalente à la résolution d'une équation intégrale :

Lemme 1.1. *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si*

(i) y est continue et $(\forall t \in I)\ (t, y(t)) \in U$,

(ii) $(\forall t \in I) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du.$

En effet si y vérifie (i) et (ii) alors y est différentiable et on a $y(t_0) = y_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$. Inversement, si ces deux relations sont satisfaites, (ii) s'en déduit par intégration.

1.2.2 CYLINDRES DE SÉCURITÉ

Pour résoudre l'équation différentielle (E), on va plutôt chercher à construire des solutions de l'équation intégrale 1.2.1 (ii), et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point $(t_0, y_0) \in U$ ne peut s'éloigner «trop vite» de y_0.
On note $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^m$ et $B(x, r)$ (*resp.* $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp . fermée) de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^m$. Comme U est supposé ouvert, il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$$

de longueur $2T_0$ et de rayon r_0 assez petit, tel que $C_0 \subset U$. L'ensemble C_0 est fermé borné dans $\mathbb{R}^{m+1}$, donc compact. Ceci entraîne que f est bornée sur C_0, c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty.$$

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi- longueur $T \leq T_0$.

Définition 1.5. *On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$.*

Supposons que la solution y s'échappe de C sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. Soit τ le premier instant où cela se produit :

$$\tau = \inf\{t \in [t_0, t_0 + T] \, ; \, \|y(t) - y_0\| > r_0\}.$$

Par définition de τ on a $\|y(t) - y_0\| \leq r$ pour $t \in [t_0, \tau[$, donc par continuité de y on obtient $\|y(\tau) - y_0\| = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C \subset C_0$ pour $t \in [t_0, \tau]$, il vient $\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq M$ et

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) du \right\| \leq M(\tau - t_0)$$

donc $\tau - t_0 \geq r_0/M$. Par conséquent si $T \leq r_0/M$, aucune solution ne peut s'échapper de C sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Corollaire 1.1. *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right).$$

Le choix $T = \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ convient par exemple.

Remarque 1.1. *Si $C \subset C_0$ est un cylindre de sécurité, toute solution du problème de Cauchy $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ vérifie $\|y'(t)\| \leq M$, donc y est lipschitzienne de rapport M.*

1.2.3 SOLUTIONS APPROCHÉES. MÉTHODE D'EULER

On cherche à construire une solution approchée de (E) sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$.
On se donne pour cela une subdivision

$$t_0 < t_1 < t_2 ... < t_{N-1} < t_N = t_0 + T.$$

Les pas successifs sont notées

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

et on pose

$$h_{\max} = \max(h_0, ..., h_{N-1}).$$

La méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) consiste à construire une solution approchée y affine par morceaux comme suit. Soit $y_n = y(t_n)$. On confond la courbe intégrale sur $[t_n, t_{n+1}]$ avec sa tangente au point (t_n, y_n) :

$$y(t) = y_n + (t - t_n) f(t_n, y_n), \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Partant de la donnée initiale y_0, on calcule donc y_n par récurrence en posant

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

La solution approchée y s'obtient graphiquement en traçant pour chaque

n les segments joignant les points (t_n, y_n), (t_{n+1}, y_{n+1}).
On construit de même une solution approchée sur $[t_0 - T, t_0]$ en prenant des pas $h_n < 0$.

Proposition 1.1. *Si $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité tel que $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, toute solution approchée y donnée par la méthode d'Euler est continue dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.*

Démonstration. On vérifie par récurrence sur n que

$$\begin{cases} y([t_0, t_n]) \subset \overline{B}(y_0, r_0) \\ \|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_0) \quad \textit{pour} \quad t \in [t_0, t_n]. \end{cases}$$

C'est trivial pour $n = 0$. Si c'est vrai pour n, alors on a en particulier $(t_n, y_n) \in C$, donc $\|f(t_n, y_n)\| \leq M$, et par conséquent

$$\|y(t) - y_n\| = (t - t_n)\|f(t_n, y_n)\| \leq M(t - t_n)$$

pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Par hypothèse de récurrence

$$\|y_n - y_0\| = \|y(t_n) - y_0\| \leq M(t_n - t_0).$$

L'inégalité triangulaire entraîne alors $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0).$$

En particulier $\|y(t) - y_0\| \leq MT \leq r_0$, d'où

$$y([t_0, t_{n+1}]) \subset \overline{B}(y_0, r_0).$$

□

Définition 1.6. *Soit $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 par morceaux (ceci signifie qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_N = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout n la restriction $y_{[a_n, a_{n+1}]}$ soit de classe C^1 ; on suppose donc seulement la continuité et l'existence d'une dérivée à droite et à gauche de y aux points a_n).*
On dit que y est une solution ε-approchée de (E) si

(i) $(\forall t \in [a, b]) \quad (t, y(t)) \in U$;

(ii) $(\forall n), (\forall t \in]a_n, a_{n+1}[) \quad \|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon.$

Autrement dit, y est une solution ε-approché si y vérifie (E) avec une erreur $\leq \varepsilon$.

Majoration de l'erreur pour les solutions approchées d'Euler - Soit ω_f le module de continuité de f sur C, définit par

$$\omega_f(u) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| \,;\, |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u\}$$

où $u \in [0, +\infty[$ et où les points $(t_1, y_1), (t_2, y_2)$ parcourent C. Comme C est compact, la fonction f est uniformément continue sur C, par conséquent

$$\lim_{u \to 0_+} \omega_f(u) = 0.$$

On suppose dans la suite que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité tel que $T \leq \min(T_0, \dfrac{r_0}{M})$.

Proposition 1.2. *Soit $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ une solution approchée construite par la méthode d'Euler avec pas maximum $h_{\max}$. Alors l'erreur ε vérifie $\varepsilon \leq \omega_f((M+1)h_{\max})$.*

En particulier, l'erreur ε tend vers 0 quand $h_{\max}$ tend vers 0.

Démonstration. Majorons par exemple $\|y'(t) - f(t, y(t))\|$ pour $t \in [t_0, t_0 + T]$, où y est la solution approchée associée à la subdivision $t_0 < t_1 < ... < t_N = t_0 + T$. pour $t \in]t_n, t_{n+1}[$, on a $y'(t) = f(t_n, y_n)$ et

$$\begin{array}{rcl} \|y(t) - y_n\| & = & (t - t_n)\|f(t_n, y_n)\| \\ & \leq & M h_n, \\ |t - t_n| & \leq & h_n. \end{array}$$

Par définition de ω_f, il vient

$$\begin{array}{rcl} \|f(t_n, y_n) - f(t, y(t))\| & \leq & \omega_f(M h_n + h_n), \\ \|y'(t) - f(t, y(t))\| & \leq & \omega_f((M+1)h_{\max}). \end{array}$$

Montrons finalement un résultat sur la convergence des solutions approchées. □

Proposition 1.3. *Soit* $y_{(p)} : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ *une suite de solutions* ε_p*-approchées contenues dans le cylindre de sécurité* C*, telles que* $y_{(p)}(t_0) = y_0$ *et* $\lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$*. On suppose que* $y_{(p)}$ *converge uniformément sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *vers une fonction* y*. Alors* y *est une solution exacte du problème de Cauchy* $(P.C)$*.*

Démonstration. Comme $||y'_{(p)}(t) - f(t, y_{(p)}(t))|| \le \varepsilon_p$, il vient après intégration

$$||y_{(p)}(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, y_{(p)}(u))du|| \le \varepsilon_p |t - t_0|.$$

Si $\delta_p = \max_{[t_0 - T, t_0 + T]} ||y - y_{(p)}||$, on voit que

$$||f(u, y_{(p)}(u)) - f(u, y(u))|| \le \omega_f(\delta_p)$$

tend vers 0, d'où, grâce à la convergence uniforme :

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = 0, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Comme la limite uniforme y est continue, le lemme du début du **§1.2** entraîne que y est une solution exacte de $(P.C)$. □

1.2.4 THÉORÈME D'ASCOLI

Il s'agit d'un résultat préliminaire de nature topologique que nous allons formuler dans le cadre général métrique . Si (E, δ) *et* (F, δ') sont des espaces métriques, rappelons que par définition une suite d'application $\varphi_{(p)} : E \to F$ converge uniformément vers $\varphi : E \to F$ si la distance uniforme

$$d(\varphi_{(p)}, \varphi) = \sup_{x \in E} \delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi(x))$$

tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Théorème 1.3. *(Ascoli) On suppose que* E, F *sont des espaces métriques compacte. Soit* $\varphi_{(p)} : E \to F$ *une suite d'applications K-lipschitziennes, où* $k \ge 0$ *est une constante donnée. Alors on peut extraire de* $\varphi_{(p)}$ *une* *sous-suite $\varphi_{(p_n)}$ uniformément convergente, et la limite est une application K-lipschitziennes.*

Soit $Lip_k(E, F)$ l'ensemble des applications $E \to F$ lipschitziennes de rapporte K. Une autre manière d'exprimer le théorème d'Ascoli est la suivante.

Corollaire 1.2. *Si E , F sont compacte , alors $(Lip_k(E, F), d)$ est un espace métrique compacte.*

Démonstration. On construit par récurrence des parties infinies

$$S_0 = \mathbb{N} \supset S_1 \supset ... \supset S_{n-1} \supset S_n \supset ...$$

telles que la sous-suite $(\varphi_{(p)})_{p \in S_n}$ ait des oscillations de plus en plus faibles. Supposons S_{n-1} construire , $n \geq 1$. Comme E, F sont compacte, il existe des recouvrements finis de E (resp.de F) par des boules ouvertes, $(B_i)_{i \in I}$, resp. $(B'_j)_{j \in J}$, de rayon $\frac{1}{n}$. Notons $I = \{1, 2, ..., N\}$ et x_i le centre de B_i. Soit p un indice fixe.
Pour toute $i = 1, ..., N$ il existe un indice $j = j(p, i)$ tel que $\varphi_{(p)}(x_i) \in B'_{j(p,i)}$.
On considère l'application

$$S_{n-1} \longrightarrow J^N, \qquad p \longmapsto (j(p, 1), ..., j(p, N)).$$

Comme S_{n-1} est infini et que J^N est fini, l'un des éléments $(l_1, ..., l_N) \in J^N$ admet pour image réciproque une partie infinie de S_{n-1} : on note S_n cette partie.
Ceci signifie que pour toute $p \in S_n$ on a $(j(p, 1), ..., j(p, N)) = (l_1, ..., l_N)$ et donc $\varphi_{(p)}(x_i) \in B'_{l_i}$. En particulier

$$(\forall p, q \in S_n) \quad \delta'(\varphi_{(p)}(x_i), \varphi_{(q)}(x_i)) \leq diam B'_{l_i} \leq \frac{2}{n}.$$

Soit $x \in E$ un point quelconque. Il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$, d'où $\delta(x, x_i) \leq \frac{1}{n}$.
L'hypothèse que les $\varphi_{(p)}$ sont K-lipschitziennes entraîne

$$\delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi_{(p)}(x_i)) < \frac{k}{n}, \quad \delta'(\varphi_{(q)}(x), \varphi_{(q)}(x_i)) < \frac{k}{n}.$$

L'inégalité triangulaire implique alors $(\forall p, q \in S_n)$

$$\delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi_{(q)}(x)) \leq \frac{2}{n} + 2\frac{k}{n} = \frac{2k+2}{n}.$$

Désignons par p_n le n-ième élément de S_n. Pour $N \geq n$ on a $p_N \in S_N \subset S_n$, donc

$$\delta'(\varphi_{(p_n)}(x), \varphi_{(p_N)}(x)) \;\; \leq \;\; \frac{2k+2}{n}. \tag{1.1}$$

Ceci entraîne que $\varphi_{(p_n)}(x)$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $x \in E$. Comme F est compacte , F est aussi complet, donc $\varphi_{(p_n)}(x)$ converge vers une limite $\varphi(x)$. Quand $N \to +\infty$, (1.1) implique à la limite $d(\varphi_{(p_n)}, \varphi) \leq \frac{2k+2}{n}$. On voit donc que $\varphi_{(p_n)}$ converge uniformément vert φ. Il est facile de voir que $\varphi \in Lip_k(E, F)$. □

1.2.5 THÉORÈME D'EXISTENCE (CAUCHY-PEANO-ARZELA)

L'idée est d'utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer l'existence d'une sous-suite uniformément convergente de solution approchées. On obtient ainsi le

Théorème 1.4. *Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ avec $T \leq min(T_0, \frac{r_0}{M})$ un cylindre de sécurité pour l'équation (E) : $y' = f(t, y)$. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r_0)$ de (E) avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

Démonstration. Soit $y_{(p)}$ la solution approchée donnée par la méthode d'Euler en utilisant la subdivision avec pas constant $h = T/p$ des intervalles $[t_0, t_0 + T]$ et $[t_0 - T, t_0]$. Cette solution est ε_p-approchée avec erreur $\varepsilon_p \leq \omega_f((M + 1)T/p)$ tendant vers 0. Chaque application $y_{(p)}$: $[t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r_0)$ est lipschitziennes de rapport M, donc d'après le théorème d'Ascoli on peut extraire de $(y_{(p)})$ une sous-suite $(y_{(p_n)})$ convergeant uniformément vers une limite y. D'après la proposition 1.3 du §**1.2.3**, y est une solution exacte de l'équation (E).

Corollaire 1.3. *par tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe au moins une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E). De plus, l'intervalle de définition I de toute* *solution maximale est ouvert (mais en général, il n'y a pas unicité de ces solutions maximales).*

On vient de voir en effet une solution locale z définie sur intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$. D'après le théorème du §**1.1.3**, z se prolonge en une solution maximale $y = \tilde{z} : |a, b| \to \mathbb{R}^m$. Si y était définie au point b, il existerait une solution $y_{(1)} : [b-\varepsilon, b+\varepsilon] \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy avec donnée initiale $(b, y(b)) \in U$. La fonction $\tilde{y} : |a, b + \varepsilon] \to \mathbb{R}^m$ coïncidant avec y sur $|a, b]$ et avec $y_{(1)}$ sur $[b, b+\varepsilon]$ serait alors un prolongement strict de y, ce qui est absurde. □

Exemple 1.2.1. *Pour donner un exemple de non unicité, il suffit de considérer l'équation* $y' = 3|y|^{2/3}$. *Le problème Cauchy de condition initiale* $y(0) = 0$ *admet alors au moins 2 solution maximale :*

$$y_{(1)}(t) = 0, \quad y_{(2)}(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.2.6 CRITÈRE DE MAXIMALITÉ DES SOLUTIONS

Nous allons voire ici une géométrique nécessaire et suffisante permettant d'affirmer qu'une solution est maximale.

Théorème 1.5. *U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $y : I = [t_0, b[\to \mathbb{R}^m$ une solution de l'équation (E) $y' = f(t, y)$, où f est une fonction continue sur U . Alors $y(t)$ peut se prolonge au delà de b si et seulement si il existe un compacte $K \subset U$ tel que la courbe $t \mapsto (t, y(t)), t \in [t_0, b[$, reste contenue dans K.*

Autrement dit, y est non prolongeable au delà du temps b si et seulement si $(t, y(t))$ s'échappe de toute compacte K de U quand $t \to b_-$. La conséquence suivent est immédiate.

Critère de maximalité - Une solution y $:]a, b[\to \mathbb{R}^m$ de $(P.C)$ est maximale si et seulement si $t \mapsto (t, y(t))$ s'échappe de toute compact K de U quand $t \to a_+$ ou quand $t \to b_-$. Puisque les parties fermées bornées, ceci signifie encore que $(t, y(t))$ s'approche du borde de U on tend vers ∞, c'est-a-dire $|t| + \|y(t)\| + 1/d((t, y(t)), \partial U) \to +\infty$ quand $t \to a_+$ ou $t \to b_-$.

Démonstration. (du théorème) La condition de prolongement est évidement nécessaire, puisque si $y(t)$ se prolonge à $[t_0, b]$, alors l'image du compacte $[t_0, b]$ par l'application continue $t \to (t, y(t))$ est un compacte $K \subset U$.

Inversement, supposons qu'il existe un compacte K de U tel que $(t, y(t)) \in K$ pour tout $t \in [t_0, b[$. Posons

$$M = \sup_{(t,y)\in k} \|f(t, y)\| < +\infty$$

que est fini par continuité de $\|f\|$ et compacité de K . Ceci entraîne que $t \to y(t)$ est lipschitzienne sur $[t_0, b[$, donc uniformément continue, et le critère de Cauchy montre que la limite $l = \lim_{t\to b_-} y(t)$ existe. Nous pouvons prolonger y par continuité en b en posant $y(b) = l$, et nous avons $(b, y(b)) \in K \subset U$ puisque K est fermé . La relation $y'(t) = f(t, y(t))$ montre alors que y est de classe C^1 sur $[t_0, b]$. Maintenant, le théorème d'existence local des solutions implique qu'il existe une solution locale z de problème de Cauchy de donnée initiale $z(b) = l = y(b)$ sur un intervalle $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$. On obtient alors un prolongement $\tilde{y}$ de y sur $[t_0, b+\varepsilon]$ en posant $\tilde{y}(t) = z(t)$ pour $t \in [b, b + \varepsilon]$. Le théorème est démontré . □

1.3 THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE CAUCHY-LIPSCHITZ

Reprenons les notations du début du §**1.2**. On suppose ici en outre que f est localement lipschitzienne en y : cela signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $K = K(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne en y sur C_0 :

$$(\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0) \qquad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

Remarque 1.2. *Pour que f soit localement lipschitzienne en y sur U, il suffit que f admette des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}, 1 \leq i, j \leq m$, continues sur U. Soit en effet*

$$A = \max_{1\leq i,j\leq m} \sup_{(t,y)\in C_0} |\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,y)|.$$

Le nombre A est fini puisque C_0 est compact. Le théorème des accroissement finis applique à f_i sur C_0 donne

$$f_i(t,y_1) - f_i(t,y_2) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,\xi)(y_1,j - y_2,j).$$

avec $\xi \in]y_1, y_2[$. On a donc

$$\max_i |f_i(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq mA.\max_j (y_1,j - y_2,j).$$

Sous ces hypothèses sur f , nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy est nécessairement unique, et que de plus toute suite de solution ε-approchées avec ε tendant vers 0 converge nécessairement vers la solution exacte. Compte tenu de l'importance de ces résultats, nous donnerons ensuite une deuxième démonstration assez différente basée sur le théorème du point fixe.

1.3.1 LEMME DE GRONWALL. CONVERGENCE ET UNICITÉ LOCALES

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$ un cylindre sur lequel f est k-lipschitzienne en y et soit $M = sup_{C_0}\|f\|$. On se donne $\varepsilon > 0$ et on considère des solutions $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ respectivement ε_1-approchée et ε_2-approchée du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, y_0) avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon$.
On a alors $\|y'_{(i)}(t)\| \leq M + \varepsilon$, et un raisonnement analogue à celui du **§1.2.1** montre que les graphes de $y_{(1)}, y_{(2)}$ restent contenus dans le cylindre

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y, r_0) \subset C_0$$

dès que $T \leq min(T_0, \frac{r_0}{M+\varepsilon})$, ce qu'on suppose désormais .

Lemme 1.2. *(de Gronwall) Sous les hypothèses précédentes , on a*

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}, \qquad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Démonstration. Quitte à changer l'origine du temps on peut supposer $t_0 = 0$, et par exemple , $t \in [0, T]$. posons alors

$$v(t) = \int_0^t \|y_{(2)}(u) - y_{(1)}(u)\| du.$$

Comme $y_{(i)}$ satisfait l'équation différentielle à ε_i près, on obtient par soustraction

$$\begin{aligned} \|y'_{(2)}(t) - y'_{(1)}(t)\| &\leq \|f(t, y_{(2)}(t)) - f(t, y_{(1)}(t))\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\leq k\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse que f est k-lipschitzienne en y. De plus

$$y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t) = \int_0^t (y'_{(2)}(u) - y'_{(1)}(u)) du$$

puisque $y_{(2)}(0) = y_{(1)}(0) = y_0$. On en déduit

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq k \int_0^t \|y_{(2)}(u) - y_{(1)}(u)\| du + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t \quad (1.2)$$

c'est-à-dire

$$v'(t) \leq kv(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Après soustraction de $kv(t)$ et multiplication par e^{-kt}, on trouve

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} = \frac{d}{dt}(v(t)e^{-kt}) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)te^{-kt}.$$

Grâce à une nouvelle intégration (noter que $v(0) = 0$), il vient

$$\begin{aligned} v(t)e^{-kt} &\leq \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ue^{-ku} du = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{1 - (1 + kt)e^{-kt}}{k^2}, \\ v(t) &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{kt} - (1 + kt)}{k^2}, \end{aligned}$$

tandis que la première intégrée (1.2) donne

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq kv(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{kt} - 1}{k}.$$

Le cas où $t \in [-T, 0]$ s'obtient par un changement de variable $t \mapsto -t$. $\square$

Théorème 1.6. *(Cauchy-Lipschitz) - Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$. De plus, toute suite $y_{(p)}$ de solution ε_p-approchées avec ε_p tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Démonstration. **Existence**. Soit $y_{(p)}$ une suite quelconque de solution $\varepsilon_{(p)}$ approchées avec $\lim \varepsilon_p = 0$, par exemple celles fournies par la méthode d'Euler. Le lemme de Gronwall montre que

$$d(y_{(p)}, y_{(q)}) \leq (\varepsilon_p + \varepsilon_q)\frac{e^{kT} - 1}{k} \quad sur \quad [t_0 - T, t_0 + T],$$

par conséquent $y_{(p)}$ est une suite de Cauchy uniforme. Comme les fonction y_p sont toutes à valeurs dans $\overline{B}(y_0, r_0)$ qui est un espace complet, $y_{(p)}$ converge vers une limite y. Cette limite y est une solution exacte de l'équation (E) d'après la proposition 1.3 du **§1.2.3**.

Unicité. Si $y_{(1)}, y_{(2)}$ sont deux solutions exactes, le lemme de Gronwall avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ montre que $y_{(1)} = y_{(2)}$. $\square$

1.3.2 AUTRE DÉMONSTRATION (PAR LE THÉORÈME DE POINT FIXE)

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ avec $T \leq min(T_0, \frac{r_0}{M})$ un cylindre de sécurité pour (E).
Notons $\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ l'ensemble des applications continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$, muni de la distance d de la convergence uniforme.

A toute fonction $y \in \mathcal{F}$, associons la fonction $\phi(y)$ définir par

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du, \qquad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

D'après le lemme du **§1.2.1**, y est une solution de $(P.C)$ si et seulement si y est un point fixe de ϕ. On va donc essayer d'applique le théorème du point fixe. Observons que

$$\|\phi(y)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du \right\| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r_0,$$

donc $\phi(y) \in \mathcal{F}$. L'opérateur ϕ envoie donc $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Soient maintenant y, $z \in F$ et $y_{(p)} = \phi^p(y)$, $z_{(p)} = \phi^p(z)$. On a

$$\begin{aligned}\|y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (f(u, y(u)) - f(u, z(u)))du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} k||y(u) - z(u)||du \right| \leq k|t - t_0|d(y, z)\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\|y_{(2)}(t) - z_{(2)}(t)\| &\leq \left| \int_{0}^{t} k\|y_1(u) - z_1(u)\|du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} k.k|u - t_0|d(y, z)du \right| = k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} d(y, z).\end{aligned}$$

Par récurrence sur p, on vérifie aussitôt que

$$\|y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z),$$

en particulier

$$d(\phi^p(y), \phi_p(z)) = d(y_{(p)}, z_{(p)}) \leq \frac{K^p T^p}{p!} d(y, z) \tag{1.3}$$

et ϕ^p est lipschitzienne de rapport $\frac{K^p T^p}{p!}$ sur $\mathcal{F}$. Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{K^p T^p}{p!} = 0$, il existe p assez grand tel que $\frac{K^p T^p}{p!} < 1$; pour une telle valeur de p , ϕ^p est une application contractante de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Par ailleurs , $\mathcal{F}$ est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe démontré au chapitre (dans sa version généralisée au cas d'application dont une itérée est contractante) montre alors que ϕ admet un point fixe unique y. Nous avons donc bien redémontré le théorème de Cauchy-Lipschitz affirmant l'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy.

Remarque 1.3. *D'après* (1.3), *on voit que pour toute fonction* $z \in \mathcal{F}$ *la suite itérée* $z_{(p)} = \phi^p(z)$ *converge uniformément vers la solution exacte* y *du problème de Cauchy .*

1.3.3 UNICITÉ GLOBALE

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale, au moyen d'un « raisonnement de connexité » .

Théorème 1.7. *Soient* $y_{(1)}, y_{(2)} : I \to \mathbb{R}^m$ *deux solutions de* $(P.C)$*, avec* f *localement lipschitzienne en* y*. Si* $y_{(1)}$ *et* $y_{(2)}$ *coïncident en un point de* I*, alors* $y_{(1)} = y_{(2)}$*sur* I*.*

Démonstration. Supposons $y_{(1)}(t_0) = y_{(2)}(t_0)$ en un point $t_0 \in I$. Montrons par exemple que $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \geq t_0$. S'il n'en est pas ainsi, considérons le premier instant $\tilde{t}_0$ où $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ bifurquent :

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \in I \,;\, t \geq t_0 \quad et \quad y_{(1)}(t) \neq y_{(2)}(t)\}$$

On a par définition $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$ pour $t \in [t_0, \tilde{t}_0[$ et par continuité il s'ensuit que $y_{(1)}(\tilde{t}_0) = y_{(2)}(\tilde{t}_0)$. Soit $\tilde{y}_0$ ce point et soit $\tilde{C} = [\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}] \times \overline{B}(\tilde{y}_0, \tilde{r}_0)$ un cylindre de sécurité de centre $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$. Le théorème d'unicité locale implique que $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur $[\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}]$, ce que contredit la définition de $\tilde{t}_0$ L'unicité est démontrée. □

Corollaire 1.4. *Si* f *est localement lipschitzienne en* y *sur* U*, pour tout point* $(t_0, y_0) \in U$ *il passe une solution maximale* $y : I \to \mathbb{R}^m$ *et une seule.*

Interprétation géométrique - Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

Exemple 1.3.1. $y' = 3|y|^{2/3}$ *sur* $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Déterminons l'ensemble des solutions maximales. On a ici $f(t, y) = 3|y|^{2/3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = signe(y) \times 2|y|^{-1/3}$ *pour* $y \neq 0$. *La dérivée* $y \neq 0$ *la dérivée* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur les demi-plans* $y > 0$ *et* $y < 0$, *mais discontinue en* $y = 0$. *La fonction* f *est localement lipschitzienne en* y *sur* $\{y > 0\}$ *et* $\{y < 0\}$, *mais il est facile de voir qu'elle ne l'est pas voisinage de tout point* $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ *(on a vu d'ailleurs qu'il n'y a pas d'unicité locale en ces point). Sur* $\{y > 0\}$*(resp sur* $\{y < 0\}$*) l'équation équivaut à*

$$\frac{1}{3}y'y^{-\frac{2}{3}} = 1 \qquad (resp \qquad -\frac{1}{3}y'(-y)^{-\frac{2}{3}} = -1)$$

d'où $y^{\frac{1}{3}} = t + C_1$ *(resp.* $(-y)^{-\frac{1}{3}} = -(t + C_2)$ *soit* $y(t) = (t + C_i)^3$. *Si* y *est une solution maximale dans* $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *alors* $y' \geq 0$, *donc* y *est croissante. Notons*

$$a = \inf\{t, y(t) = 0\} \qquad b = \sup\{t; y(t) = 0\}.$$

Si $a \neq -\infty$, *on a* $y(a) = 0$ *et* $y(t) < 0$ *pour* $t < a$, *donc* $y(t) = (t - a)^3$. *De même* $y(t) = (t - b)^3$ *pour* $t > b$ *si* $b \neq +\infty$.

On voit que pour tout point (t_0, y_0) *il passe une infinité de solution maximales : si* $y_0 > 0, b = t_0 - y_0^{1/3}$ *est imposé, mais le choix de* $a \in [-\infty, b]$ *est arbitraire. Noter que ce phénomène se produit bien qu'on ait unicité locale au point* (t_0, y_0) *!*

1.3.4 CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE SOLUTION GLOBALES

Nous donnons ici des conditions suffisantes d'existence pour les solutions globales, reposant sur des hypothèses de croissance de $f(t, y)$ lorsque $\|y\|$ tend vers $+\infty$.
On peut cependant obtenir des conditions suffisantes nettement plus faibles (voir l'exercice (b)ci-dessous, ainsi que le problème **5.9**).

Théorème 1.8. *Soit* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *une application continue sur un ouvert produit* $U = J \times \mathbb{R}^m$, *où* $J \subset \mathbb{R}$ *est un intervalle ouvert. On fait l'une ou* *l'autre des deux hypothèses suivantes :*

(1) Il existe une fonction continue $k : J \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t,y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^m$.

(2) Il existe des fonctions $c,\ k : J \to \mathbb{R}_+$ continues telles que l'application $y \mapsto f(t,y)$ satisfasse une croissante linéaire à l'infini du type

$$\|f(t,y)\| \le c(t) + k(t)\|y\|.$$

Alors toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$ est globale (c'est-à-dire définie sur J tout entier).

Démonstration. Il est évident que l'hypothèse (1) entraine l'hypothèse (2) (avec $c(t) = \|f(t,0)\|$), il suffirait donc de donner la preuve pour (2). Cependant, il y a une démonstration sensiblement plus simple sous l'hypothèse (1).
Démonstration sous l'hypothèse (1). Soit $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^m$, et $[t_0 - T, t_0 + T']$ un intervalle compact quelconque contenu dans J. Reprenons la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.
Comme $U = J \times \mathbb{R}^m$, on peut choisir un cylindre de sécurité de rayon $r_0 = +\infty$.
L'application ϕ définie au § **1.3.2** opère donc sur l'espace complet

$$\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T'], \mathbb{R}^m).$$

Soit

$$K = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T']} k(t).$$

L'application f est par hypothèse K-lipschitzienne en y sur $[t_0 - T, t_0 + T'] \times \mathbb{R}^m$.
D'après le raisonnement du § **1.3.2**, l'application ϕ^p est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{p!}K^p(max(T,T'))^p$ sur $\mathcal{F}$, donc contractante pour p assez grand. Ceci implique que la solution (unique) du problème de Cauchy est définie sur tout intervalle $[t_0 - T, t_0 + T'] \subset J$.

Démonstration sous l'hypothèse (2). L'idée est d'utiliser le critère de maximalité des solution démontré au **1.2.6**. Supposons qu'on ait une solution $y : [t_0, b[\to \mathbb{R}^m$ avec $t_0, b \in J$ (autrement dit, telle que b ne soit pas la borne supérieure de J). Posons $C = \sup_{t\in[t_0,b]} c(t)$ et $K = \sup_{t\in[t_0,b]} k(t)$. Nous obtenons

$$\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq C + K\|y(t)\|.$$

On utilise alors un raisonnement de type lemme de Gronwall pour majorer la norme $\|y(t)\|$. Nous avons $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y'(u)du$, donc

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq v(t) = \|y(t_0)\| + \textstyle\int_{t_0}^{t} \|y'(u)\|du \qquad &\text{avec} \\ v'(t) = \|y'(t)\| \leq C + K\|y(t)\| \leq C + Kv(t).& \end{aligned}$$

Ceci donne la majoration

$$\frac{d}{dt}(v(t)e^{-K(t-t_0)}) = (v'(t) - Kv(t))e^{-K(t-t_0)} \leq Ce^{-K(t-t_0)}.$$

Par intégration sur $[t_0, t]$,on obtient

$$v(t)e^{-K(t-t_0)} - v(t_0) \leq \frac{C}{K}(1 - e^{-K(t-t_0)}),$$

et comme $v(t_0) = \|y(t_0)\|$, il vient

$$\sup_{t\in[t_0,b[} \|y(t)\| \leq \sup_{t\in[t_0,b[} v(t) \leq R = \frac{C}{K}(e^{K(b-t_0)} - 1) + \|y(t_0)\|e^{K(b-t_0)}.$$

Par conséquent $(t, y(t))$ décrit une partie compacte $K = [t_0, b] \times \bar{B}(0, R)$ dans $U = J \times \mathbb{R}^m$, et y ne peut être une solution maximale. Toute solution maximale est donc globale . □

1.4 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR À UN

1.4.1 DÉFINITIONS

Un système différentiel d'ordre p dans $\mathbb{R}^m$ est une équation de la forme

$$(E) \qquad y^{(p)} = f(t, y, y', ..., y^{(p-1)})$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$.

Définition 1.7. *Une solution de* (E) *sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est une application* $y : I \to \mathbb{R}^m$*p-fois dérivable, telle que*
(i) $(\forall t \in I) \qquad (t, y(t), y'(t), ..., y^{(p-1)}(t)) \in U,$
(ii) $(\forall t \in I) \qquad y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(p-1)}(t)).$

Le résultat suivant se démontre par récurrence d'une manière entièrement analogue à celle utilisé pour les équation différentielle d'ordre 1.

Régularité des solution - Si f est de classe C^k , les solutions y sont de classe C^{k+p}.

1.4.2 SYSTÈME DIFFÉRENTIEL D'ORDRE UN ASSOCIÉ

Il est clair que le système (E) est équivalent au système différentiel d'ordre 1

$$(E_1) \quad \begin{cases} \frac{dY_0}{dt} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \quad ... \\ \frac{dY_{p-2}}{dt} = Y_{p-1} \\ \frac{dY_{p-1}}{dt} = f(t, Y_0, Y_1, ..., Y_{p-1}) \end{cases}$$

si l'on pose $Y_0 = y, Y_1 = y'$, ... Le système (E_1) peut encore s'écrire

$$(E) \qquad Y' = F(T, Y)$$

avec

$$\begin{aligned} Y &= (Y_0, Y_1, ..., Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^m)^p \\ F &= (F_0, F_1, ..., F_{p-1}) : U \to (\mathbb{R}^m)^p \end{aligned}$$

$$F_0(t, Y) = Y_1, ..., F_{p-2}(t, Y) = Y_{P-1}, \\ F_{p-1}(t, Y) = f(t, Y).$$

Tout système différentiel (E) d'ordre p dans $\mathbb{R}^m$ est donc équivalent à un système différentiel (E_1) d'ordre 1 dans $(\mathbb{R}^m)^p$. Il en résulte que les

théorèmes d'existences et d'unicités démontrés pour les système d'ordre 1 sont encore vrais pour les systèmes d'ordre p , avec des preuves qui sont des transpositions directes du cas d'ordre 1.
En voici les principaux énoncés :

1.4.3 THÉ0RÈME D'EXISTENCE

Pour tout point $(t_0, y_0, y_1, ..., y_{p-1}) \in U$ le problème de Cauchy de conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, ..., y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$$

admet au moins une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$, définie sur un intervalle ouvert.

Remarque 1.4. *(très importante) On voit ainsi que pour un système d'ordre p , la condition initiale requiert non seulement la donnée de la valeur y_0 de y au temps t_0, mais également la donnée de ses $(p-1)$ premières dérivées.*

1.4.4 THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Si de plus f est localement lipschitzienne en $(y_0, ..., y_{p-1})$ sur U , c'est-à-dire si $\forall (t_0, y_0, ..., y_{p-1}) \in U$ il existe un voisinage $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0) \times ... \times \bar{B}(y_{p-1}, r_{p-1})$ contenu dans U sur lequel

$$\|f(t, z_0, ..., z_{p-1}) - f(t, w_0, ..., w_{p-1})\| \leq k(\|z_0 - w_0\| + ... + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors le problème de Cauchy **4.3** admet une solution maximale et une seule.

1.4.5 SOLUTIONS GLOBALES

Si $U = J \times (\mathbb{R}^m)^p$ et s'il existe une fonction $k : J \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $(\forall t \in J)$

$$\|f(t, z_0, ..., z_{p-1}) - f(t, w_0, ..., w_{p-1})\| \leq k(t)(\|z_0 - w_0\| + ... + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors les solutions maximales sont définies sur J tout entier.

Chapitre 2

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Les systèmes différentiels linéaires ont une grande importance pratique, car de nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser par de tels systèmes, au moins en première approximation. On sait d'autre part résoudre complètement les systèmes à coefficients constants, le calcul des solutions se ramenant à des calculs d'algèbre linéaire (diagonalisation ou triangulation de matrices). Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 GÉNÉRALITÉS

2.1.1 DÉFINITION

Un système différentiel linéaire du premier ordre dans $\mathbb{K}^m$ est une équation

$$(M) \qquad \frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t)$$

où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ est la fonction inconnue et où

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq m} \in M_m(\mathbb{K}), \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

sont des fonctions continues données :

$$\begin{aligned} A &: I \to M_m(\mathbb{K}) = \{matrices\, carre\, m \times m\, sur\, \mathbb{K}\}, \\ B &: I \to \mathbb{K}^m, \end{aligned}$$

définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On observe que la fonction $f(t,Y) = A(t)Y + B(t)$ est continue sur $I \times \mathbb{K}^m$ et lipschitzienne en Y de rapport

$$k(t) = |||A(t)|||.$$

D'après le critère 1.3.4 sur l'existence de solutions globales, on peut énoncer :

Théorème 2.1. *Par tout point $(t_0, V_0) \in I \times \mathbb{K}^m$ il passe une solution maximale unique, définie sur I tout entier.*

2.1.2 CAS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE SANS SECOND MEMBRE

On entend par là un système linéaire avec $B = 0$ identiquement :

$$(M_0) \qquad \frac{dY}{dt} = A(t)Y.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales. Alors pour tous $Y_{(1)}, Y_{(2)} \in \mathcal{S}$ et tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ on a $\lambda_1 Y_{(1)} + \lambda_2 Y_{(2)} \in \mathcal{S}$, donc $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Considérons l'application d'évaluation au temps t_0 :

$$\begin{aligned} \phi_{t_0} &: \mathcal{S} \to \mathbb{K}^m \\ & \quad Y \mapsto Y(t_0). \end{aligned}$$

ϕ_{t_0} est un isomorphisme linéaire, la surjectivité provenant du théorème d'existence, et l'injectivité du théorème d'unicité relatif au problème de Cauchy.

Conséquence - L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions maximales est un espace vectoriel de dimension m sur $\mathbb{K}$.

2.1.3 CAS GÉNÉRAL

Revenons au système linéaire le plus général :

$$(M) \qquad \frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t).$$

On sait qu'il existe au moins une solution globale $Y_{(1)}$. Si Y est une solution quelconque, il est clair que $Z = Y - Y_{(1)}$ satisfait l'équation sans second membre (M_0) : $dZ/dt = A(t)Z$, et réciproquement. Par conséquent, l'ensemble des solutions maximales est donné par

$$Y_{(1)} + \mathcal{S} = \{Y_{(1)} + Z;\ Z \in \mathcal{S}\},$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions maximales de l'équation sans second membre (M_0) associée. l'ensemble $Y_{(1)} + \mathcal{S}$ des solutions est un translaté de $\mathcal{S}$, c'est donc un espace affine de dimension m sur $\mathbb{K}$, admettant $\mathcal{S}$ comme direction vectorielle.

2.2 SYSTÈME DIFFÉRENTIELS LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Ce sont les systèmes de la forme

$$(M) \qquad \frac{dY}{dt} = AY + B(t)$$

où la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est indépendante de t.

2.2.1 SOLUTIONS EXPONENTIELLES ÉLÉMENTAIREES DE $\frac{dY}{dt} = AY$

On cherche une solution de la forme $Y(t) = e^{\lambda t}V$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, $V \in \mathbb{K}^m$ sont des constantes. Cette fonction est solution si et seulement si $\lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}AV$, soit

$$AV = \lambda V.$$

On est donc amené à chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Cas simple : A est diagonalisable.

Il existe alors une base $(V_1, ..., V_m)$ de $\mathbb{K}^m$ constituée de vecteurs propres de A , de valeurs propres respectives $\lambda_1, ..., \lambda_m$. On obtient donc m solutions linéairement indépendantes

$$t \mapsto e^{\lambda_j t} V_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

La solution générale est donnée par

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + ... + \alpha_m e^{\lambda_m t} V_m, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Lorsque A est n'est pas diagonalisable, on a besoin en général de la notion d'exponentielle d'une matrice. Toutefois le cas des systèmes 2×2 à coefficients constantes est suffisamment simple pour qu'on puisse faire les calculs «à la main».

2.2.2 EXPONENTIELLE D' UNE MATRICE

La définition est calquée sur celle de la fonction exponentielle complexe usuelle, calculée au moyen du développement en série entière .

Définition 2.1. *Si $A \in M(\mathbb{K})$, on pose* $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n.$

Munissons $M_n(\mathbb{K})$ de la norme $|||\ \ |||$ des opérateurs linéaires sur $\mathbb{K}^m$ associée à la norme euclidien (resp. hermitienne) de $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{C}^m$). On a alors

$$|||\frac{1}{n!} A^n||| \leq \frac{1}{n!} |||A|||^n,$$

de sorte que la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente. On voit de plus que

$$|||e^A||| \leq e^{|||A|||}.$$

Propriété 2.1. *Si $A, B \in M_m(\mathbb{K})$ commutent $(AB = BA)$, alors*

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

Vérification. On considère la série produit $\sum \frac{1}{p!}A^p \cdot \sum \frac{1}{q!}B^q$, dont le terme général est

$$C_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!}A^pB^q = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}A^pB^{n-p} = \frac{1}{n!}(A+B)^n$$

d'après la formule du binôme (noter que cette formule n'est vraie que si A et B commutent). Comme les séries de e^A et e^B sont absolument convergentes , on en déduit

$$e^A \cdot e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = e^{A+B}.$$

On voit en particulier que e^A est une matrice inversible, d'inverse e^{-A}.

Remarque 2.1. *La propriété fondamentale tombe en défaut lorsque A et B ne commutent pas. Le lecteur pourra par exemple calculer $e^A \cdot e^B$ et e^{A+B} avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. Que remarque -t-on ?

Méthode générale de calcul dans $M_n(\mathbb{C})$ - Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ peut être mise sous forme de blocs triangulaires correspondant aux différents sous-espaces caractéristique de A. Il existe donc une matrice de passage P , dont les colonnes sont constituées par des vecteurs formant des bases des sous-espaces caractéristiques , telle que

$$T = P^{-1}AP$$

soit une matrice triangulaire de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_s \end{pmatrix}, \qquad T_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de A . On a alors de façon évidente

$$T^n = \begin{pmatrix} T_1^n & & & 0 \\ & T_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_s^n \end{pmatrix}, \qquad e^T = \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & 0 \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{T_s} \end{pmatrix}$$

Comme $A = PTP^{-1}$, il vient $A^n = PT^nP^{-1}$, d'où

$$e^A = Pe^TP^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & 0 \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{T_s} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On est donc ramené à calculer l'exponentielle e^B lorsque B est un bloc triangulaire de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \in M_p(\mathbb{K}),$$

où I est la matrice unité et N une matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. La puissance N^n comporte n diagonales nulles à partir de la diagonale principale (celle-ci incluse), en particulier $N^n = 0$ pour $n \geq p$. On obtient donc

$$e^N = I + \frac{1}{1!}N + ... + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme I et N commutent, il vient finalement

$$e^B = e^{\lambda I}e^N = e^{\lambda}e^N \quad (car\ e^{\lambda I} = e^{\lambda}I).$$

Formule - $det(e^A) = \exp(tr(A))$.

Vérification. Dans le cas d'un bloc triangulaire $B \in M_p(\mathbb{K})$, on trouve

$$det(e^B) = (e^\lambda)^p det(e^N) = e^{p\lambda} = \exp(tr(B)).$$

On en déduit donc

$$det(e^T) = det(e^{T_1})...det(e^{T_s}) = \exp(tr(T_1) + ... + tr(T_s)) = \exp(tr(T))$$

Comme $A = PTP^{-1}$ et $e^A = Pe^T P^{-1}$, on a finalement

$$det(e^A) = det(e^T), \quad tr(A) = tr(T) = \sum valeurs\, propres.$$

2.2.3 SOLUTION GÉNÉRALE DU SYSTÈME SANS SECOND MEMBRE $\frac{dY}{dt} = AY$

L'une des propriétés fondamentales de exponentiation des matrices réside dans le fait qu'elle est intimement liée à la résolution des équations linéaires à coefficients constants $\frac{dY}{dt} = AY$.

Théorème 2.2. *La solution Y telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot V_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a $Y(t_0) = e^0 \cdot V_0 = IV_0 = V_0$.

D'autre part, la série entière

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$$

est de rayon de convergence $+\infty$. On peut donc dériver terme à terme pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} A^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p A^{p+1},$$

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A.$$

Par conséquent, on a bien

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A} \cdot V_0\right) = Ae^{(t-t_0)A} \cdot V_0 = AY(t).$$

En prenant $t_0 = 0$, on voit que la solution générale est donnée par $Y(t) = e^{tA} \cdot V$ avec $V \in \mathbb{K}^m$.
Le calcul de e^{tA} se ramène au cas d'un bloc triangulaire $B = \lambda I + N \in M_p(\mathbb{C})$. Dans ce cas on a $e^{tB} = e^{\lambda t I}e^{tN} = e^{\lambda t}e^{tN}$, avec

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{t^n}{n!} N^n = \begin{pmatrix} 1 & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) & \cdots & Q_{1p}(t) \\ & 1 & Q_{23}(t) & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & Q_{p-1p}(t) \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $Q_{ij}(t)$ est un polynôme de degré $\leq j - i$, avec $Q_{ij}(0) = 0$. Les composantes de $Y(t)$ sont donc toujours des fonctions exponentielles-polynômes $\sum_{1\leq j\leq s} P_j(t)e^{\lambda_j t}$ où $\lambda_1, ..., \lambda_s$sont les valeurs propres complexes de A (même si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). □

2.2.4 SOLUTION GÉNÉRALE $\frac{dY}{dt} = AY + B(t)$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation des constantes, c'est à dire qu'on cherche une solution particulière sous la forme

$$Y(t) = e^{tA} \cdot V(t)$$

où V est supposée différentiable . Il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= Ae^{tA} \cdot V(t) + e^{tA} \cdot V'(t) \\ &= AY(t) + e^{tA} \cdot V'(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir V telle que $e^{tA} \cdot V'(t) = B(t)$, soit par exemple

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)du, \quad t_0 \in I.$$

On obtient ainsi la solution particulière

$$Y(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-uA} B(u) du = \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u) du,$$

qui est la solution telle que $Y(t_0) = 0$. La solution générale du problème de Cauchy telle que $Y(t_0) = V_0$ est donc

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u) du.$$

2.3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE p À COEFFICIENTS CONSTANTS

On considère ici une équation différentielle sans second membre

$$(M_1) \qquad a_p y^{(p)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, $t \mapsto y(t)$ est la fonction inconnue , et où les $a_j \in \mathbb{K}$ sont des constantes, $a_p \neq 0$.
D'après le paragraphe **1.4.2**, on sait que l'équation (M_1) est équivalente à un système différentiel (S) d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^p$, qui est le système linéaire sans second membre $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{p-1} \end{pmatrix}, \quad c_j = -\frac{a_j}{a_p}.$$

Grâce au **§2.1.1**, on peut donc énoncer :

Théorème 2.3. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions globales de (M_1) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.*

Plaçons-nous maintenant sur le corps $\mathbb{C}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les solutions réelles s'obtiennent simplement en prenant la partie réelle et la partie imaginaire des solutions complexes). Cherchons les solutions exponentielles de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme $y^{(j)}(t) = \lambda^j e^{\lambda t}$, on voit que y est solution de (M_1) si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique

$$P_\lambda = a_p \lambda^p + ... + a_1 \lambda + a_0.$$

2.3.1 CAS OÙ P A TOUTES SES RACINES SIMPLES

Si P possède p racines distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$, on obtient p solution distinctes

$$t \mapsto e^{\lambda_j t}, \quad 1 \leq j \leq p.$$

On verra plus lois ces solutions sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des solutions est donc l'espace vectoriel de dimension p des fonctions

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \alpha_p e^{\lambda_p t}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

2.3.2 CAS OÙ P A DES RACINES MULTIPLES

On peut alors écrire

$$P(\lambda) = a_p \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

où m_j est la multiplicité de la racine λ_j, avec

$$m_1 + ... + m_s = p.$$

Considérons l'opérateur différentiel

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i}{dt^i}.$$

On voit que l'équation différentielle étudiée peut se récrire

$$(M_1) \qquad P\left(\tfrac{d}{dt}\right) y = 0$$

et on a d'autre part la formule

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme les dérivées partielles $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d}{d\lambda}$ commutent d'après le théorème de Schwarz, on obtient

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda t}) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d^q}{d\lambda^q} e^{\lambda t}\right) = \frac{d^q}{d\lambda^q}\left(P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t}\right) = \frac{d^q}{d\lambda^q}\left(P(\lambda) e^{\lambda t}\right),$$

d'où, grâce à la formule de Leibnitz :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^{q} C_q^i P^{(i)}(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Comme λ_j est racine de multiplicité m_j, on a $P^{(i)}(\lambda_j) = 0$ pour $0 \leq i \leq m_j - 1$, et $P^{(m_j)}(\lambda_j) \neq 0$. On en déduit

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\left(t^q e^{\lambda_j t}\right) = 0, \qquad 0 \leq q \leq m_j - 1.$$

L'équation (M_1) admet donc les solution

$$y(t) = t^q e^{\lambda_j t}, \qquad 0 \leq q \leq m_{j-1}, \qquad 1 \leq j \leq s$$

soit au total $m_1 + ... + m_s = p$ solution .

Lemme 2.1. *Si $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, alors les fonctions*

$$y_{j,q}(t) = t^q e^{\lambda_j t}, \qquad 1 \leq j \leq s, \qquad q \in \mathbb{N}$$

sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Considérons une combinaison linéaire finie

$$\sum \alpha_{j,q} y_{j,q} = 0, \qquad \alpha_{j,q} \in \mathbb{C}.$$

Si les coefficients sont non tous nuls , soit N le maximum des entiers q tels qu'il existe j avec $\alpha_{j,q} \neq 0$. Supposons par exemple $\alpha_{1,N} \neq 0$. On pose alors

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^N (\lambda - \lambda_2)^{N+1} ... (\lambda - \lambda_s)^{N+1}$$

Il vient $Q^{(i)}(\lambda_j) = 0$ pour $j \geq 2$ et $0 \leq i \leq N$, tandis que $Q^i(\lambda_1) = 0$ pour $0 \leq i < N$ et $Q^{(N)}(\lambda_1) \neq 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d}{dt}\right)(t^q e^{\lambda_j t}) &= \sum_{i=0}^{q} C_q^i Q^{(i)}(\lambda_j) t^{q-i} e^{\lambda_j t} \\ &= 0 \quad pour \quad 0 \leq q \leq N, \quad 1 \leq j \leq s, \end{aligned}$$

sauf si $q = N,\ j = 1$, auquel cas

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right)(t^N e^{\lambda_1 t}) = Q^{(N)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t}.$$

En appliquant l'opérateur $Q\left(\frac{d}{dt}\right)$ à la relation $\sum \alpha_{j,q} t^q e^{\lambda_j t} = 0$ on obtient alors $\alpha_{1,N} Q^{(N)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} = 0$, ce que est absurde puisque $\alpha_{1,N} \neq 0$ et $Q^{(N)}(\lambda_1) \neq 0$. Le lemme est démontré. □

On peut donc énoncer :

Théorème 2.4. *Lorsque le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ a des racines complexes $\lambda_1, ..., \lambda_s$ de multiplicités respectives $m_1, ..., m_s$, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension p ayant pour base les fonctions*

$$t \mapsto t^q e^{\lambda_j t}, \qquad 1 \leq j \leq s, \qquad 0 \leq q \leq m_j - 1.$$

2.3.3 ÉQUATION LINÉAIRES D'ORDRE p AVEC SECOND MEMBRE

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$(M_2) \qquad a_p y^{(p)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(t),$$

où $b : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue donnée. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(M_1) \qquad a_p y^{(p)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Soit $(v_1, ..., v_p)$ une base des solutions de (M_1). On cherche alors une solution particulière de (M_2).

dans un certain nombre de cas, une solution simple peut être trouvée rapidement. Par exemple, si b est un polynôme de degré d et si $a_0 \neq 0$, l'équation (M_2) admet une solution polynomiale y de degré d, que l'on peut rechercher par identification des coefficients. Si $b(t) = \alpha e^{\lambda t}$ et si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique, l'équation admet pour solution $(\alpha/P(\lambda))e^{\lambda t}$. Si b est fonction exponentielle-polynôme, (M_2) admet une solution du même type (noter que les fonctions trigonométriques se ramènent à ce cas).
En général, le principe consiste à appliquer la méthode de variation des constantes au système différentiel (S) d'ordre 1 associé à (M_2).

Si on pose $y = y_0$, $y' = y_1, ..., y^{(p-1)} = y_{p-1}$, l'équation (M_2) équivaut au système

$$(S) \quad \begin{cases} y_0' = y_1 \\ \vdots \\ y_{p-2}' = y_{p-1} \\ y_{p-1}' = -\frac{1}{a_p}(a_0 y_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_{p-1} y_{p-1}) + \frac{1}{a_p} b(t). \end{cases}$$

Ce système linéaire peut se récrire $(S) : Y' = AY + B(t)$ avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{p-1} \end{pmatrix} \quad et \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_p} b(t). \end{pmatrix}$$

Le système homogène (S_0) $Y' = AY$ admet pour base de solution les fonctions

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1' \\ \vdots \\ v_1^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2' \\ \vdots \\ v_2^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad V_p = \begin{pmatrix} v_p \\ v_p' \\ \vdots \\ v_p^{(p-1)} \end{pmatrix}$$

On cherche alors une solution particulière de (S) sous la forme

$$Y(t) = \alpha_1(t)V_1(t) + ... + \alpha_p(t)V_p(t).$$

Comme $V_j' = AV_j$, il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \sum \alpha_j(t)V_j'(t) + \sum \alpha_j'(t)V_j(t) \\ &= AY(t) + \sum \alpha_j'(t)V_j(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir les α_j tels que $\sum \alpha_j'(t)V_j(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)v_1(t) + \cdots + \alpha_p'(t)v_p(t) = 0 \\ \cdots \\ \alpha_1'(t)v_1^{(p-2)}(t) + \cdots + \alpha_p'(t)v_p^{(p-2)}(t) = 0 \\ \alpha_1'(t)v_1^{(p-1)}(t) + \cdots + \alpha_p'(t)v_p^{p-1}(t) = \frac{1}{a_p}b(t). \end{cases}$$

On obtient ainsi un système linéaire de p équation par rapport aux p inconnues $\alpha_1'(t), ..., \alpha_p'(t)$. Le déterminant de ce système est non nul pour tout $t \in \mathbb{R}$ (les vecteurs $V_1(t), ..., V_p(t)$ sont linéairement indépendants, car si une combinaison linéaire $Y = \beta_1 V_1 + ... + \beta_p V_p$ est telle que $Y(t) = 0$ alors $Y \equiv 0$ d'après le théorème d'unicité, donc $\beta_1 = ... = \beta_p = 0$).
La résolution de ce système permet de calculer $\alpha_1', ..., \alpha_p'$, puis $\alpha_1, ..., \alpha_p$ par intégration, d'où la solution particulière cherchée :

$$y(t) = \alpha_1(t)v_1(t) + ... + \alpha_p(t)v_p(t).$$

Exemple 2.3.1. $(E")$ $y'' + 4y = \tan t$, *avec* $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- *On commence par résoudre l'équation sans second membre*

$(E"_0)$ $$y'' + 4y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, *et possède deux racines simples* $2i$ *et* $-2i$. *L'équation* $(E"_0)$ *admet pour base de solution les fonctions* $t \mapsto e^{2it}$, $t \mapsto e^{-2it}$, *on encore :*

$$t \mapsto \cos 2t, \quad t \mapsto \sin 2t.$$

- *On cherche ensuite une solution particulière de* $(E")$ *en posant*

$$y(t) = \alpha_1(t) \cos 2t + \alpha_2(t) \sin 2t.$$

Ceci conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) \cos 2t + \alpha_2'(t) \sin 2t = 0 \\ \alpha_2'(t) \cdot (-2 \sin 2t) + \alpha_2'(t) \cdot (2 \cos 2t) = \tan t. \end{cases}$$

Le déterminant du système étant égal à 2, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = -\frac{1}{2} \tan t \sin 2t = -\sin^2 t = -\dfrac{1}{2}(1 - \cos 2t) \\ \alpha_2'(t) = \frac{1}{2} \tan t \cos 2t = \frac{1}{2} \tan t(2\cos^2 t - 1) = \sin 2t - \frac{1}{2} \tan t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \\ \alpha_2(t) = -\frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2} \ln(\cos t), \end{cases}$$

d'où la solution particulière

$$y(t) = -\frac{t}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \, \ln(\cos t).$$

La solution générale est donc

$$y(t) = -\frac{t}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \, \ln(\cos t) + \alpha_1 \cos 2t + \alpha_2 \sin 2t.$$

2.4 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À COEFFICIENTS VARIABLES

L'objet de ce paragraphe (avant tout théorème) est de généraliser les résultats du **§2. 2.2** au cas des systèmes linéaires à coefficients variables.

2.4.1 RÉSOLVANTE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Considérons une équation linéaire sans second membre

$$(M_0) \qquad Y' = A(t)Y$$

où $A : \mathbb{R} \supset I \to M_m(\mathbb{K})$ est une matrice $m \times m$ sur $\mathbb{K}$ à coefficients continus.
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de (M_0). Pour tout $t_0 \in I$, on sait que

$$\Phi_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^m, \qquad Y \mapsto Y(t_0)$$

est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire. Pour tout couple $(t, t_0) \in I^2$, on définit

$$\begin{array}{rcccl} R(t,t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1} : \mathbb{K}^m & \xrightarrow{\Phi_{t_0}^{-1}} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi_t} & \mathbb{K}^m \\ V & \longmapsto & Y & \longmapsto & Y(t). \end{array}$$

on a donc $R(t,t_0) \cdot V = Y(t)$, où Y est la solution telle que $Y(t_0) = V$. Comme $R(t,t_0)$ est un isomorphisme $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ il sera identifié à la matrice inversible qui lui correspond canoniquement dans $M_m(\mathbb{K})$.

Définition 2.2. *$R(t,t_0)$ s'appelle la résolvante du système linéaire (M_0).*

Pour tout vecteur $V \in \mathbb{K}^m$, on a avec les notations ci-dessus

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right) \cdot V &= \frac{d}{dt}\left(R(t,t_0) \cdot V\right) \\ &= \frac{dY}{dt} = A(t)Y(t) = A(t)R(t,t_0) \cdot V. \end{aligned}$$

On en déduit donc $\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$.

Propriétés 2.1. *(de la résolvante)*

(i) $\forall t \in I, \qquad R(t,t) = I_m$ (matrice unité $m \times m$).
(ii) $\forall (t_0,t_1,t_2) \in I^3, \qquad R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$.
(iii) $R(t,t_0)$ est la solution dans $M_m(\mathbb{K})$ du système différentiel

$$\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$$

où $M(t) \in M_m(\mathbb{K})$ vérifie la condition initiale $M(t_0) = I_m$.

(i) et (ii) sont immédiats à partir de la définition de $R(t,t_0)$ et (iii) résulte de ce qui précède. Retenons enfin que la solution du problème de Cauchy

$$Y' = A(t)Y \quad avec \quad Y(t_0) = V_0$$

est donnée par

$$Y(t) = R(t,t_0)\cdot V_0.$$

Remarque 2.2. *Le système $dM/dt = A(t)M(t)$ peut paraître plus compliqué que le système initial puisqu'on a m^2 équations scalaires au lieu de m (on passe de $\mathbb{K}^m$) à $M_m(\mathbb{K})$. Il est néanmoins parfois utile de considérer ce système plutôt que l'équation initiale, parce que tous les objets sont dans $M_m(\mathbb{K})$ et qu'on peut exploiter la structure d'algèbre de $M_m(\mathbb{K})$.*

Exemple 2.4.1. *Supposons que*

$$A(t)A(u) = A(u)A(t) \quad pour\ tous\ t,u\in I \tag{2.1}$$

Alors

$$R(t,t_0) = exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du\right).$$

Pour le voir, il suffit de montrer que $M(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du\right)$ satisfait la condition (iii) ci-dessus. Il est clair que $M(t_0) = I_m$. Par ailleurs l'hypothèse de commutation (2.1) entraine que $\int_a^b A(u)du$ et $\int_c^d A(u)du$ commutent pour tous $a,b,c,d\in I$, le produit étant égal dans les deux cas à

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} A(u)A(v)dudv$$

par le théorème de Fubini. On a donc

$$\begin{aligned} M(t+h) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du + \int_{t}^{t+h} A(u)du\right) \\ &= \exp\left(\int_{t}^{t+h} A(u)du\right) M(t). \end{aligned}$$

Or $\int_t^{t+h} A(u)du = hA(t) + o(h)$, donc utilisant le développement en série de l'exponentielle on trouve

$$\begin{aligned} M(t+h) &= (I_m + hA(t) + o(h))M(t) \\ &= M(t) + hA(t)M(t) + o(h), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $dM/dt = A(t)M(t)$.
En particulier, si U *et* V *sont des matrices constantes qui commutent et si* $A(t) = f(t)U + g(t)V$ *pour des fonctions scalaires* f, g, *alors l'hypothèse* (2.1) *est satisfaite. On a donc*

$$\begin{aligned} R(t, t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(u)du \cdot U + \int_{t_0}^{t} g(u)du \cdot V\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(u)du \cdot U\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(u)du \cdot V\right). \end{aligned}$$

2.4.2 WRONSKIEN D'UN SYSTÈME DE SOLUTIONS

On va voir ici qu'on sait toujours calculer le déterminant d'un système de solutions, ou ce qui revient au même, le déterminant de la résolvante, même lorsque la résolvante n'est pas connue.

Définition 2.3. *Le Wronskien d'un système de* m *solutions* $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ *de* (M_0) *est*

$$W(t) = \det(Y_1(t), ..., Y_m(t))$$

Posons $V_j = Y_j(t_0)$. *Alors* $Y_j(t) = R(t, t_0) \cdot V_j$, *d'où*

$$W(t) = det(R(t, t_0)) \cdot det(V_1, ..., V_m).$$

On est donc ramené à calculer la quantité

$$\Delta(t) = \det(R(t, t_0)),$$

et pour cela on va montrer que $\Delta(t)$ *vérifie une équation différentielle simple. On a*

$$\begin{aligned} \Delta(t+h) &= \det(R(t+h, t_0)) = \det(R(t+h, t)R(t, t_0)) \\ &= \det(R(t+h, t))\Delta(t). \end{aligned}$$

Comme $R(t, t) = I_m$ *et* $\frac{d}{du}R(u, t) \mid_{u=t} = A(t)R(t, t) = A(t)$, *la formule de Taylor donne*

$$\begin{aligned} R(t+h, t) &= I_m + hA(t) + o(h), \\ \det(R(t+h, t)) &= \det(I_m + hA(t)) + o(h). \end{aligned}$$

Lemme 2.2. *Si* $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{K})$, *alors*

$$\det(I_m + hA) = 1 + \alpha_1 h + ... + \alpha_m h^m$$

avec $\alpha_1 = tr\ A = \sum_{1 \leq i \leq m} a_{ii}$.

En effet dans $\det(I_m + hA)$*le terme diagonal est*

$$(1 + ha_{11})...(1 + ha_{mm}) = 1 + h \sum a_{ii} + h^2...$$

et les termes non diagonaux sont multiples de h^2.
Le lemme entraine alors

$$\det(R(t + h, t)) = 1 + h\, tr(A(t)) + o(h),$$

$$\Delta(t + h) = \Delta(t) + h\, tr(A(t))\Delta(t) + o(h).$$

On en déduit

$$\Delta' = tr(A(t)) \det(t),$$

et comme $\Delta(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det I_m = 1$, *il vient :*

$$\det R(t, t_0) = \Delta(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\ A(u)du\right),$$

$$W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\ A(u)du\right) \det(V_1, ..., V_m).$$

2.4.3 MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES

Soit à résoudre le système différentiel linéaire

$$(M) \qquad Y' = A(t)Y + B(t),$$

et soit $R(t, t_0)$ la résolvante du système linéaire sans second membre

$$(M_0) \qquad Y' = A(t)Y.$$

On cherche alors une solution particulière de (M) sous la forme

$$Y(t) = R(t, t_0) \cdot V(t)$$

où V est supposée différentiable. Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\right)\cdot V(t) + R(t,t_0)\cdot V'(t) \\
&= A(t)R(t,t_0)\cdot V(t) + R(t,t_0)\cdot V'(t) \\
&= A(t)Y(t) + R(t,t_0)\cdot V'(t).
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $R(t,t_0)\cdot V'(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
V'(t) &= R(t_0,t)\cdot B(t), \\
V(t) &= \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\cdot B(u)du, \\
Y(t) &= R(t,t_0)\cdot V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,u)\cdot B(u)du, \\
Y(t) &= \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)du.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la solution particulière telle que $Y(t_0) = 0$. La solution telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par

$$Y(t) = R(t,t_0)\cdot V_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)du.$$

Dans le cas où $A(t) = A$ est à coefficients constants on retrouve la formule du § **2.2.4**, dans laquelle $R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$, et la formule du Wronskien équivaut à l'identité déjà connue

$$\det(e^{(t-t_0)A}) = \exp((t-t_0)tr\ A).$$

Chapitre 3

STABILITÉ DES SOLUTIONS ET POINTS SINGULIERS D'UN CHAMP DES VECTEURS

On se propose ici d'étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle et des lignes intégrales d'un champ de vecteurs lorsque le temps t tend vers l'infini. On s'intéresse essentiellement au cas des équations linéaires ou «voisines» de telles équations. Dans ce cas, le comportement des solutions est gouverné par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice associée à la partie linéaire de l'équation : une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la donnée initiale restent proches de la solution considérée jusqu'à l'infini . Cette notion de stabilité (dite aussi stabilité au sens de lyapunov) ne devra pas être confondue avec la notion de stabilité d'une méthode numérique, qui concerne la stabilité de l'algorithme sur un intervalle de temps fixé. On étudie finalement les différences configurations possibles des lignes intégrales au voisinage des points singuliers non dégénérés d'un champ de vecteurs plan.

3.1 STABILITÉ DES SOLUTIONS

3.1.1 DÉFINITIONS

On considère le problème de Cauchy associé à une équation différentielle

$$(E) \qquad\qquad y' = f(t,y)$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$. On suppose que la solution de ce problème existe sur $[t_0, +\infty[$.

Définition 3.1. *Soit $y(t, z_0)$ la solution maximale de $(P.C)$ tel que $y(t, z_0) = z_0$. On dira que la solution $y(t, z_0)$ est stable s'il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une constante $C \geq 0$ telles que*

(i) *pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$, $t \mapsto y(t, z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$;*

(ii) *pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on a*

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq C\|z - z_0\|.$$

La solution $y(t, z_0)$ est dite asymptotiquement stable si elle stable et si la condition (ii') plus forte que (ii) est satisfaite :
(ii') Il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue avec

$\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ telles que pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on ait

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|.$$

3.1.2 CAS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Nous étudiants d'abord le cas le plus simple, à savoir le cas d'un système linéaire sans second membre

$$(L) \qquad Y' = AY, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

avec $y_j, a_{ij} \in \mathbb{C}$; le cas réel peut bien entendu être vu comme un cas particulier du cas complexe. La solution du problème de Cauchy de condition initiale $Y(t_0) = Z$ est donnée par $Y(t, Z) = e^{(t-t_0)A} \cdot Z$. On a donc

$$Y(t, Z) - Y(t, Z_0) = e^{(t-t_0)A} \cdot (Z - Z_0)$$

et la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ quand t tend vers $+\infty$, dont la norme $|||e^{(t-t_0)A}|||$ doit rester bornée. Distinguons quelques cas .

• $m = 1$, $A = (a)$. On a alors

$$|e^{(t-t_0)a}| = e^{(t-t_0)Re(a)}.$$

Les solutions sont stables si et seulement si cette quantité reste bornée quand t tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si $Re(a) \leq 0$. De même , les solutions sont asymptotiquement stables si et seulement si $Re(a) < 0$, et on peut alors prendre

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)Re(a)} \longrightarrow_{t\to\to+\infty} 0.$$

• m quelconque. Si A est diagonalisable, on se ramène après un changement linéaire de coordonnées à

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_m$ désignent les valeurs propres de A. Le système se ramène aux équations indépendantes $y'_j = \lambda_j y_j$ et admet pour solution

$$y_j(t, Z) = z_j e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Les solutions sont donc stables si et seulement si $Re(\lambda_j) \leq 0$ pour tout j et asymptotiquement stable si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout j.
Si A n'est pas diagonalisable, il suffit de regarder ce qui se passe pour chaque bloc d'une triangulation de A. Supposons donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

où N est une matrice nilpotente (triangulaire supérieure) non nulle. Il vient alors

$$\begin{aligned} e^{(t-t_0)A} &= e^{(t-t_0)\lambda I} \cdot e^{(t-t_0)N} \\ &= e^{\lambda(t-t_0)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} N^K, \end{aligned}$$

donc les coefficients de $e^{(t-t_0)A}$ sont des produits de $e^{(t-t_0)}$ par des polynômes de degrés $\leq m-1$ non tous constants (car$N \neq 0$, donc le degré est

au moins 1).
Si $Re(\lambda) < 0$, les coefficients tendent vers 0, et si $Re(\lambda) > 0$ leur module tend vers $+\infty$ car la croissance de l'exponentielle l'emporte sur celle des polynômes. Si $Re(\lambda) = 0$, on a $|e^{\lambda(t-t_0)}| = 1$ et par suite $e^{(t-t_0)A}$ est non bornée . On voit donc que les solutions sont asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et sinon elle sont instables . En résumé , on peut énoncer :

Théorème 3.1. *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont*
• *asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j = 1, ..., m$.*
• *stables si et seulement si pour tout j, ou bien $Re(\lambda_j) < 0$, ou bien $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.*

3.1.3 PETITE PERTURBATION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

On considère dans $\mathbb{K}^m = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$ un système de la forme

$$(S.L) \qquad Y' = AY + g(t, Y)$$

où $g : [t_0, +\infty[\times\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ est une fonction continue . On se propose de montrer que si la partie linéaire est asymptotiquement stable et si la «perturbation» g est suffisamment petite, en un sens à préciser , alors les solutions de $(S.L)$ sont encore asymptotiquement stables.

Théorème 3.2. *On suppose que les valeurs propres λ_j de A sont de partie réelle $Re(\lambda_j) < 0$.*

(a) *S'il existe une fonction $k : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} k(t) = 0$ et*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^m, \quad \|g(t, Y_1)-g(t, Y_2)\| \leq k(t)\|Y_1-Y_2\|,$$

alors toute solution de $(S.L)$ est asymptotiquement stable .

(b) *Si $g(t, 0) = 0$ et s'il existe $r_0 > 0$ et une fonction continue $k : [0, r_0] \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{r\to 0} k(r) = 0$ et*

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \overline{B}(0, r), \quad \|g(t, Y_1)-g(t, Y_2)\| \leq k(r)\|Y_1-Y_2\|$$

pour $r \leq r_0$, alors il existe une boule $\overline{B}(0, r_1) \subset \overline{B}(0, r_0)$ telle que toute solution $Y(t, Z_0)$ de valeur initiale $Z_0 \in \overline{B}(0, r_1)$ soit asymptotiquement stable .

Démonstration. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut toujours étendre le système à $\mathbb{C}^m$ en posant par exemple $\tilde{g}(t, Y) = g(t, Re(Y))$ pour $Y \in \mathbb{C}^m$. On se placera donc dans $\mathbb{C}^m$. Il existe alors une base $(e_1, ..., e_m)$ dans laquelle A se met sous forme triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & a_{m-1m} \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Posons $\tilde{e}_j = \varepsilon^j e_j$ avec $\varepsilon > 0$ petit. Il vient

$$\begin{aligned} A\tilde{e}_j &= \varepsilon^j (a_{1j} e_1 + ... + a_{j-1j} e_{j-1} + \lambda_j e_j) \\ &= \varepsilon^{j-1} a_{1j} \tilde{e}_1 + ... + \varepsilon a_{j-1j} \tilde{e}_{j-1} + \lambda_j \tilde{e}_j \end{aligned}$$

de sorte que dans la base $(\tilde{e}_j)$ les coefficients non diagonaux peuvent être rendus arbitrairement petits . On supposera donc qu'on a $|a_{ij}| \leq \varepsilon$, et on pourra choisir$\varepsilon$ aussi petit qu'on veut . Considérons deux solutions $Y(t, Z)$ et $Y(t, Z_0)$:

$$\begin{aligned} Y'(t, Z) &= AY(t, Z) + g(t, Y(t, Z)), \\ Y'(t, Z_0) &= AY(t, Z_0) + g(t, Y(t, Z_0)) \end{aligned}$$

et cherchons à évaluer la différence $\Delta(t) = Y(t, Z) - Y(t, Z_0)$ en distinguant les deux cas(a) et (b).

(a) Observons dans ce cas que $f(t, Y) = AY + g(t, Y)$ est lipschitzienne en Y avec constante da Lipschitz $|||A|||+k(t)$. Le critère**1.3.4** montre donc déjà que toutes les solutions sont globalement définies sur $[t_0, +\infty[$. Nous avons

$$\Delta'(t) = A\Delta(t) + g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0)),$$
$$\|g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0))\| \leq k(t)\|\Delta(t)\|$$

Notons $(\delta_j(t))_{1 \leq j \leq m}$ les composantes de $\Delta(t)$ et

$$\rho(t) = \|\Delta(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \delta_j(t)\overline{\delta_j(t)}.$$

Par différentiation on obtient

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &= \sum_{j=1}^{m} \delta_j'(t)\overline{\delta_j'(t)} + \delta_j(t)\overline{\delta_j'(t)} = 2Re\sum_{i=1}^{m} \delta_j'(t)\overline{\delta_j(t)},\\
&= 2Re({}^t\overline{\Delta(t)}\Delta'(t))\\
&= 2Re({}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t)) + 2Re({}^t\overline{\Delta(t)}(g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0)))).
\end{aligned}$$

La deuxième partie réelle est majorée par

$$2\|\Delta(t)\| \cdot \|g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0))\| \le 2k(t)\|\Delta(t)\|^2 = 2k(t)\rho(t).$$

On a par ailleurs

$${}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j|\delta_j(t)|^2 + \sum_{i<j} a_{ij}\overline{\delta_i(t)}\delta_j(t),$$

de sorte que

$$Re({}^t\overline{\Delta(t)}\Delta(t)) \le \sum_{j=1}^{m}(Re(\lambda_j))|\delta_j(t)|^2 + \left(\sum_{i<j}|a_{ij}|\right)\|\Delta(t)\|^2.$$

Comme $Re(\lambda_j) < 0$ par hypothèse et $|a_{ij}| \le \varepsilon$, il y a un choix de ε tel que

$$Re({}^t\overline{\Delta(t)}A\Delta(t)) \le -\alpha\sum_{j=1}^{m}|\delta_j(t)|^2 = -\alpha\rho(t)$$

avec $\alpha > 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &\le -2\alpha\rho(t) + 2k(t)\rho(t),\\
\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} &\le -2\alpha + 2k(t),\\
\ln\frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} &\le -2\int_{t_0}^{t}(\alpha - k(u))du,\\
\rho(t) &\le \|Z - Z_0\|^2 \exp\left(-2\int_{t_0}^{t}(\alpha - k(u))du\right)
\end{aligned}$$

car $\rho(t_0) = \|Z - Z_0\|^2$. On notera que $\rho(t) = \|\Delta(t)\|^2$ ne peut s'annuler que si les deux solution coïncident identiquement. En prenant la racine carrée, on obtient

$$\|Y(t, Z) - Y(t, Z_0)\| \le \gamma(t)\|Z - Z_0\|$$

avec

$$\gamma(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t}(\alpha - k(u))du\right).$$

Comme $\lim\limits_{u\to+\infty}(\alpha - k(u)) = \alpha > 0$, l'intégrale diverge vers $+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = 0$. Les solution sont donc bien asymptotiquement stables.

(b) Ce cas est un peu plus délicat car on ne sait pas *a* priori si toutes les solution sont global ; elles ne le seront d'ailleurs pas en général si $Z_0 \notin \overline{B}(0, r_0)$, vu que les hypothèses ne concernent que ce qui se passe pour $Y \in \overline{B}(0, r_0)$. Comme $g(t, 0) = 0$, on a toutefois la solution globale $Y(t) = 0$, c'est-à-dire que $Y(t, 0) = 0$ pour $t \in [t_0, +\infty[$. De plus on a

$$\|g(t, Y(t, Z)) - g(t, Y(t, Z_0))\| \leq k(r)\|\Delta(t)\|,$$

à condition de supposer que $t \mapsto Y(t, Z)$ $t \mapsto Y(t, Z_0)$ prennent toutes leurs valeurs dans $\overline{B}(0, r) \subset \overline{B}(0, r_0)$. Sous cette hypothèse, les mêmes calculs que précédemment donnent

$$\rho(t) \leq \|Z - Z_0\|^2 \exp\left(-2\int_{t_0}^{t}(\alpha - k(r))du\right)$$

$$\|Y(t, Z) - Y(t, Z_0)\| \leq \exp\left(-(t - t_0)(\alpha - k(r))\right)\|Z - Z_0\|, \quad (3.1)$$

et en particulier pour $Z_0 = 0$:

$$\|Y(t, Z)\| \leq \exp\left(-(t - t_0)(\alpha - kr)\right)\|Z\|.$$

Comme $\lim\limits_{r\mapsto 0} k(r) = 0$, on peut choisir $r_1 < r_0$ tel que $k(r_1) < \alpha$, c'est-à-dire $\alpha - k(r_1) > 0$. L'inégalité précédente montre alors que pour $Z \in B(0, r_1)$ la solution maximale $Y(t, Z)$ contenue dans la boule ouverte $B(0, r_1)$ vérifie les inégalités $\|Y(t, Z)\| \leq \|Z\| < r_1$. Cette solution maximale est nécessairement définie globalement sur $[t_0, +\infty[$. Sinon l'intervalle maximal serait un intervalle borné $[t_0, t_1[$, nécessairement ouvert à droite d'après les résultats de **1 2.4**. Comme la dérivée de $t \mapsto Y(t, Z)$ est majorée par

$$\|AY + g(t, Y)\| \leq (|||A||| + k(r_1))\|Y\| \leq M$$

avec $M = (|||A||| + k(r_1))r_1$, la fonction $Y(t, Z)$ vérifierait le critère de Cauchy

$$\lim_{t,t' \to t_1 - 0} \|Y(t, Z) - Y(t', Z)\| = 0.$$

Elle aurait donc une limite $Y_1 = \lim_{t \to t_1 - 0} Y(t, Z)$ avec $\|Y_1\| \leq \|Z\| < r_1$ et se prolongerait sur un voisinage à droite de t_1 en une solution entièrement contenue dans $B(0, r_1)$, contradiction. Quitte à diminuer encore une peu r_1, on voit que toute solution $Y(t, Z)$ avec $Z \in \overline{B}(0, r_1)$ est globale et entièrement contenue dans $\overline{B}(0, r_1)$. Par conséquent (3.1) est satisfaite pour tous $t \in [t_0, +\infty[$ et $Z, Z_0 \in \overline{B}(0, r_1)$ avec la constante $\alpha - k(r_1) > 0$, ce qui démontre le théorème.

□

3.2 POINTS SINGULIERS D'UN CHAMP DE VECTEURS

3.2.1 POSITION DU PROBLÈME

On suppose donné un champ de vecteurs classe C^1 dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application

$$\Omega \to \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \overrightarrow{V}(M) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

où f, g sont de classe C^1 sur Ω . On considère le système différentiel associé

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \overrightarrow{V}(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que par tout point il passe une courbe intégrale unique. Un problème géométrique intéressant est de décrire l'allure de la famille des courbes intégrales passant au voisinage d'un point M_0 donné.

Premier cas : $\overrightarrow{V}(M_0) \neq \overrightarrow{0}$. Dans ce cas, l'angle entre $\overrightarrow{V}(M)$ et $\overrightarrow{V}(M_0)$ tend vers 0 quand M tend vers 0. Par conséquent, les tangentes aux lignes intégrables sont sensiblement parallèles les unes aux autres dans un petit

voisinage de M_0. Un tel point M_0 est dit régulier :
Deuxième cas : $\overrightarrow{V}(M_0) = \overrightarrow{0}$. On voit alors facilement sur des exemples qu'il y a plusieurs configuration possibles pour le champ des tangentes.

Si $\overrightarrow{V}(M_0) = \overrightarrow{0}$, on dit que M_0 est un point singulier (ou point critique) du champ de vecteurs. Un tel point donne évidemment une solution constant $M(t) = M_0$ de $(S.L)$. Pour étudier les solution voisines, on supposera après translation éventuelle de l'origine des coordonnées que $M_0 = 0$. On a alors $f(0,0) = g(0,0) = 0$, de sorte que le système différentiel peut s'écrire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) = ax + by + o(|x| + |y|) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) = cx + dy + o(|x| + |y|) \end{cases}$$

Introduisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x(0,0) & f'_y(0,0) \\ g'_x(0,0) & g'_y(0,0) \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel considéré s'écrit maintenant

$$\frac{dM}{dt} = AM + G(M)$$

avec $G(0,0) = G'_x(0,0) = G'_y(0,0) = 0$. La fonction continue

$$k(r) = \sup_{M \in \overline{B}(0,r)} |||G'(M)|||$$

tend vers 0 quand r tend vers 0 et le théorème des accroissements finis donne

$$\|G(M_1) - G(M_2)\| \le k(r) \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$$

pour tous $M_1, M_2 \in \overline{B}(0,r)$. L'hypothèse (b) du théorème du §1.3 est donc satisfaite. Dire que le point M_0 est asymptotiquement stable signifie que les lignes intégrales issues d'un point M_1 voisin de M_0 convergent toutes vers M_0 (à peu près uniformément à la même vitesse) quand le temps tend vers $+\infty$. On peut donc énoncer :

Proposition 3.1. *Pour qu'un point singulier $M_0 = (x_0, y_0)$ soit asymptotiquement stable, il suffit que les valeurs propres de la matrice jacobienne*

$$A = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

soient de partie réelle < 0.

Remarque 3.1. *Contrairement au cas d'un système linéaire, on ne peut pas décider de la nature du point critique si la matrice jacobienne a une valeur propre de partie réelle nulle.*

Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x^3 \\ \frac{dy}{dt} = \beta y^3 \end{cases} \qquad t \in [t_0, +\infty[= [0, +\infty[,$$

que admet l'origine comme point critique avec matrice jacobienne $A = 0$. On voit facilement que la solution du problème de Cauchy est

$$x(t) = x_0(1 - 2\alpha x_0^2 t)^{-1/2}, \quad y(t) = y_0(1 - 2\beta y_0^2 t)^{-1/2}.$$

Par conséquent l'origine est un point asymptotiquement stable si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, instable dès que $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$. Dans ce dernier cas, les solutions ne sont en fait même pas globalement définies : lorsque $\alpha > 0, \beta \leq 0$ et $x_0 \neq 0$, la solution maximale n'est définie que pour $t \in [0, 1/(2\alpha x_0^2)[$.

Si la matrice jacobienne est inversible (valeurs propres $\neq 0$), le théorème d'inversion locale montre que la fonction $M \mapsto \overrightarrow{V}(M)$ définit une bijection d'un voisinage de M_0 sur un voisinage de 0 ; en particulier pour M assez et distinct de M_0 on aura $\overrightarrow{V}(M) \neq \overrightarrow{0}$ de sorte que M_0 est un point singulier isolé. Ce n'est pas toujours le cas si la matrice est dégénérée : le champ $\overrightarrow{V}(x, y) = (x, 0)$ admet par exemple toute une droite $x = 0$ de points singuliers. On exclura en général ces situations qui peuvent être extrêmement compliquées.

Définition 3.2. *On dira qu'un point singulier M_0 est non dégénéré si*

$$det \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Nous proposons maintenant d'étudier les différentes configuration possibles pour un point singulier non dégénéré. les courbes intégrales ont tendance à ressembler à celles du système linéaire $dM/dt = AM$ lorsqu'on se rapproche du point critique, tout au moins sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ fixé ; ceci n'est pas nécessairement vrai sur tout l'intervalle $[t_0, +\infty[$. On se restreindra dans un premier temps au cas linéaire.

3.2.2 CAS D'UN CHAMP LINÉAIRE DE VECTEURS

Considérons le système

$$\frac{dM}{dt} = AM, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On supposera $detA \neq 0$, de sorte que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(M) = AM$ admet l'origine pour seul point critique. Comme le champ des tangentes est invariant par les homothéties de centre O les courbes intégrale se déduisent les unes des autres par homothéties. Distinguons maintenant plusieurs cas en fonction des valeurs propres de A.

(a) **Les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont réelles.**

• Supposons de plus $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Après changement de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système se réduit à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y. \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy avec $M(0) = (x_0, y_0)$ est donc

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

de sorte que les courbes intégrales sont les courbes

$$y = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

et la droite d'équation $x = 0$. Distinguons deux sous-cas :
$*$ λ_1, λ_2 de même signe et, disons, $\mid \lambda_1 \mid < \mid \lambda_2 \mid$. On a alors $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.
On dit qu'on a affaire à un nœud impropre :
si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ nœud impropre instable.
si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ nœud impropre stable.

$*$ λ_1, λ_2 de signes opposés, par exemple $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Il s'agit d'un col (toujours instable) :

• Les valeurs propres sont confondues : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Deux cas sont possibles :

$*$ A est diagonalisable. Alors A est en fait diagonale et les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases}$$

ce sont les droites $y = \alpha x$ et $x = 0$. On dit qu'on a affaire à un nœud propre :

si $\lambda > 0$ nœud propre instable .

si $\lambda < 0$ nœud propre stable .

$*$ A est non diagonalisable. Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \lambda y. \end{cases}$$

Les courbes intégrales sont données par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Comme toute courbe intégrale avec $x_0 \neq 0$ passe par un point tel que $|x(t)| = 1$, on obtient toutes les courbes intégrales autres que $x = 0$ en prenant $x_0 = \pm 1$, d'où

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{\lambda} \ln |x| \\ y = y_0 |x| + \dfrac{x}{\lambda} \ln |x| \end{cases}$$

On dit qu'il s'agit d'un nœud exceptionnel. Pour construire les courbes, on tracera par exemple d'abord la courbe $y = \dfrac{x}{y} \ln |x|$ passant par $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$. Toutes les autres s'en déduisent par homothéties.

si $\lambda > 0$ nœud exceptionnel instable.
si $\lambda < 0$ nœud exceptionnel stable.

(b) **Les valeur propres de A sont non réelles.**

On a des valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ avec disons $\beta > 0$, et il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y. \end{array} \right.$$

La manière la plus rapide de résoudre un tel système est de poser $z = x + iy$. On trouve alors

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha + i\beta)x + (-\beta + \alpha i)y = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha + i\beta)z,$$

de sorte que la solution générale est

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha + i\beta)t} = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}.$$

En coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, l'équation devient

$$\left\{ \begin{array}{l} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{array} \right. , \qquad \text{soit} \qquad r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}.$$

Il s'agit d'une spirale logarithmique si $\alpha \neq 0$ et d'un cercle si $\alpha = 0$ (noter que ce cercle donne en général graphiquement une ellipse car la base utilisée ci-dessus n'est pas nécessairement orthonormée). On dit alors que le point singulier est un foyer, respectivement un centre :
si $\alpha > 0$ foyer instable.
si $\alpha < 0$ foyer stable.
si $\alpha = 0$ centre.
Si $\alpha \neq 0$, le rapport d'homothétie de deux spires consécutives de la spirale est $e^{2\pi\alpha/\beta}$.

3.2.3 SINGULARITÉS DE CHAMPS DE VECTEURS NON LINÉAIRES

L'objet de ce paragraphe est essentiellement de mettre en garde le lecteur contre un certain nombre d'idées fausses fréquemment rencontrées, en particulier l'idée que les courbes intégrales d'un champ de vecteurs quelconque au voisinage d'un point singulier ressemblent toujours à celles du système linéaire associé. En fait, ce n'est en général pas le cas lorsque le système linéarisé présente un centre, et cela peut de même ne pas être le cas lorsque celui-ci présente un nœud. Les deux exemples ci-dessous illustrent le phénomène.

Exemple 3.2.1. *On considère le système différentiel*

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x(x^2+y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y(x^2+y^2). \end{cases}$$

L'origine est un point critique non dégénéré, et le système linéaire associé $dx/dt = -y, dy/dt = x$ *présente un centre d'après le §**3.2.2**. Si l'on passe en coordonnées polaires* (r,θ) *le système* (S) *devient*

$$\begin{cases} r\dfrac{dr}{dt} = x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} = -(x^2+y^2)^2 \\ \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2+y^2} = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{r^3} = -dt \\ \\ d\theta = dt \end{cases}$$

car $rdr = xdx + ydy$ *et* $xdy - ydx = r^2 d\theta$. *Les courbes itégrales de l'équation* $-dr/r^3 = d\theta$ *sont données par* $1/2r^2 = \theta - \theta_0$, *soit* $r = (2(\theta-\theta_0))^{-1/2}$ *pour* $\theta > \theta_0$. *On a ici* $\theta = t + C$, $\lim_{\theta \to +\infty} r(\theta) = 0$. *On voit que les courbes intégrales sont des spirales convergeant vers 0 quand* $t \to +\infty$, *l'origine est donc un foyer stable.*

Exemple 3.2.2. *On considère maintenant le système différentiel*

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - \dfrac{2y}{\ln(x^2+y^2)} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + \dfrac{2x}{\ln(x^2+y^2)} \end{cases}$$

sur le disque unité ouvert $x^2 + y^2 < 1$. *Observons que* $2y/\ln(x^2 + y^2)$ *se prolonge en une fonction de classe* C^1 *au voisinage de (0,0) : elle admet en effet une limite égale à 0 l'origine, ainsi que ses dérivées partielles*

$$\frac{-4xy}{(x^2+y^2)(\ln(x^2+y^2))^2}, \quad \frac{2}{\ln(x^2+y^2)} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)(\ln(x^2+y^2))^2}.$$

Il en est de même pour le terme $2x/\ln(x^2 + y^2)$. *L'origine est donc un point singulier, et le système linéaire associe* $dx/dt = -x, dy/dt = -y$ *présente un nœud propre. Pour résoudre* (S), *on utilise de nouveau les coordonnées polaires* (r, θ). *Il vient*

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{x^2+y^2}{r} = -r \\ \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{x^2+y^2}\dfrac{2x^2+2y^2}{\ln(x^2+y^2)} = \dfrac{1}{\ln r} \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donnée par

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{-t} \qquad \textit{avec} \qquad r_0 < 1, \\ d\theta &= \frac{dt}{\ln r_0 - t}, \qquad \theta = \theta_0 - \ln(1 - t/\ln r_0) \end{aligned}$$

pour une donnée initiale (r_0, θ_0) *en* $t = 0$. *La solution est définie sur* $[\ln r_0, +\infty[$ *et on a* $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \theta(t) = -\infty$. *On a ici encore une spirale convergent vers 0 (c'est peu visible sur le schéma ci-dessous car* θ *tend vers* $-\infty$ *très lentement). L'origine est donc un foyer stable. Comme* $\lim\limits_{t\to\ln r_0+0} r(t) = 1_-$ *et* $\lim\limits_{t\to\ln r_0+0} \theta(t) = +\infty$, *la courbe s'enroule en spiralant à l'intérieur du cercle* $r = 1$ *quand* $t \to \ln r_0 + 0$.

Bibliographie

[1] Jean-Pierre DEMAILLY, (2006).Analyse numérique et équations différentielles. EDP sciences.