REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnel et application

Par :

Zaoui Zineb
Thouamria Khadidja

Sur le thème

Notions sur la h-convexité et inégalités intégrales.

Soutenu publiquement le 13 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. Benia Kheir Eddine	MAA	Université Tiaret	président
Mr. Ouardani Abderahmane	MCB	Université Tiaret	Examinateur
Mr. Benali Halim	MCA	Université Tiaret	Encadreur

2020-2021

Remerciements

Au nom d'Allah le clément et miséricordieux

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes nous tiennent donc à remercier et adresser nos reconnaissance à toute personne qui nous ont aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail nous exprimons ici notre profonde reconnaissance à l'égard de l'encadreuer M. BENALI HALIM, il a su orienter nos travail sur l'immense champ d'actualité de recherche. Les conseil et encouragements qu'il n'a jamais cessé de prodiguer sont inestimables, se patience et se compréhension nous ont permis d'avancer et de terminer ce travail Que tous les membres du jury et tous les enseignants qui ont gratitude et en particulier ceux de département de mathématiques(Ibn Khaldoun-Tiaret).

Ainsi que notre vive gratitude envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste

♡

- *Zineb Zaoui*
- *Khadidja Thouamria*

Grace à Dieu le tout puissant, j'ai achevé la réalisation de ce modeste travail que je tien très chaleureusement à le dédier à :

- *A mon très cher père tout l'encre du monde ne pourrait suffire pour exprimer mes sentiments envers un être très cher. Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, la lumière qui illumine mon chemin.*
- *Ma mère chérie aucune dédicace très chère maman, ne pourrait exprimer la profondeur des sentiments que j'éprouve pour vous, vos sacrifices innombrables et votre dévouement firent pour moi un encouragement. qui m'ont encouragé et soutenu tout au long de mes études et pour leurs patience que Dieu les protègent et les gardes pour moi.*
- *A mes adorables frères : ce travail soit l'expression de mon estime pour vous et que Dieu vos protège, je vous souhaite plein de bonheur et succès dans votre vie.*
- *Aucune dédicace ne peut exprimer mon amour et ma gratitude de t'avoir comme soeur.*

  Je te souhaite beaucoup de succès, de prospérité et une vie pleine de joie et de bonheur.
- *Et à mes très chères amis et camarades pour tous les moments d'échange et de débat aux personnes qui m'ont toujours aidé et soutenue .*

♥ Zaoui zineb

Je dédie ce mémoire A mes Chers parents ma mère et mon père Pour Leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

♥ A mes frères.

♥ A mon marie.

♥ A mes amies et mes camardes.

Sans oublier tout les proffesseurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou De l'enseignement supérieur.

♥ Khadidja thouamria.

Table des matières

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes :

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombre réels.

$\mathbb{R}_+^*$, $x \in \mathbb{R} : x > 0$, : L'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexe.

$Re(\alpha)$: Partie réelle de α

L^p $1 \leq p \leq +\infty$:L'espace des fonctions de puissance p-intégrables.

Γ : La fonction Gamma.

β : La fonction bêta.

$I_{b^-}^{\alpha}$: L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

$I_{a^+}^{\alpha}$: L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite.

$J_{a^+,g}^{\alpha}$: l'opérateur intégrale généralisé .

$\mathbf{Q}(I)$: la classe des fonctions de Gadunova-Livin.

K_s : la classe des fonctions s-convexe.

$\mathbf{Q}_s(I)$: la classe des fonctions s-Gadunova-Livin.

$SX(h,I)$: la classe des fonctions h-convexe.

$SV(h,I)$: la classe des fonctions h-concave.

Ω un ensemble mesurable.

Introduction

En mathématique, le calcul fractionnaire joue un rôle important dans le développement de les branches, une inégalités est très intéressante qui est largement étudiée la littérature est due à Hermite et Hadamard qui l'on découverte indépendamment (découverte par Charles Hermite en 1883 et prouvée par Jaques Hadamard en 1893). [5] [7] [9]

L'objet de ce travail est d'étudier et généraliser quelques inégalés intégrales pour les fonctions h-convexes en utilisant l'approche fractionnaire a ses de Riemmann Liouville généralisé.

Dans ce mémoire, nous allons proposer une introduction, quatre chapitres

Dans le premier chapitre on introduit des notions préliminaires concernant les différents types de convexités.

Le deuxième chapitre est concerné à établir le théorème d'Hermite Hadamard sur les fonctions convexes et h-convexe.

Puis dans le troisième chapitre nous présentons les notions de bases de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L et quelques inégalités des fonctions h-convexes.

Enfin, notre dernier chapitre est concerné l'ensemble et la fontion g-convexe et on donne certains théorèmes concernant la généralisation de Riemann Liouville sur les fonctions h-convexes, et termine notre mémoire par quelques applications.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on va donner les définitions et leurs propriétés avec des exemples pour chaque type de convexité.

1.1 Ensemble convexe :

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. *Une partie I d'un espace vectoriel* **E** *est dite* ***convexe****, si elle est non vide, non réduite à un point et si pour tout couple $(x,y) \in I$ le segment [x,y] est définit par :*

$$[x,y] = \{z/z = tx + (1-t)y, \ x,y \in I, \ t \in [0,1]\}. \tag{1.1}$$

est contenu dans I.

<u>I.e :</u> I est un ensemble convexe $\Leftrightarrow \ \forall x,y \in I, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in I$.

Exemple 1.1. *Si on prend* $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$.

1. *K ensemble telle que : $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0\}$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ car : si on prend $x = (x_1, y_1)$ et $y = (x_2, y_2)$ $t \in [0,1]$, il vient que :*

$$\begin{cases} x \in K \Leftrightarrow x_1 + y_1 \geq 0 \\ y \in K \Leftrightarrow x_2 + y_2 \geq 0, \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} tx+(1-t)y =& (tx_1+ty_1)+((1-t)x_2+(1-t)y_2) \\ =& (tx_1+(1-t)x_2+ty_1+(1-t)y_2). \end{aligned}$$

Et comme :

$$tx_1+(1-t)x_2+ty_1+(1-t)y_2 = t(x_1+y_1)+(1-t)(x_2+y_2) \geq 0.$$

Donc : tx+(1-t)y $\in K$, d'où K est convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. *L'ensemble K telle que $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$ n'est pas un convexe de $\mathbb{R}^2$ car : si en prend $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$, $t=\frac{1}{2}$ il vient que :*

$$\begin{aligned} tx+(1-t)y =& (\frac{1}{2},0)+(0,\frac{1}{2}) \\ =& (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \notin K$ car $(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2 \neq 1$.

Remarque 1.1. *Les intervalles dans $\mathbb{R}$ sont des parties convexes.*

Proposition 1.1. 1. *Une combinaison linéaire de convexe est convexe.*

2. *Si C, C_1 et C_2 sont des convexes, alors nous avons :*
   (a) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(C_1+C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$.*
   (b) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:$(\lambda+\mu)C = \lambda C + \mu C$.*
3. *Soient E_1,E_2,......,E_m des espaces de banach et C_1,C_2......C_m des convexes de E_1,E_2,......,E_m (resp), alors $C_1.C_2$....... .C_m est un convexe de E_1 E_2......E_m.*
4. *Tout intersection d'ensembles convexes est convexe .*

Démonstration. 1. Soient C_1 et C_2 deux convexes, x_1, $x_2 \in C_1$ et y_1,$y_2 \in C_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$,t$\in$ $[0,1]$, nous avons :
$t(x_1+y_1)+(1-t)(x_2+y_2) = (tx_1+(1-t)x_2)+(ty_1+(1-t)y_2) \in C_1+C_2$.

2. t$\lambda x_1+(1-t)\lambda x_2 = \lambda(tx_1+(1-t)x_2) \in \lambda C_1$, ce qui montre que (C_1+C_2) et λC_1 sont convexes.

(a) L'égalité $(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$ est évident.

(b) L'inclusion $(\lambda + \mu)C \subset \lambda C + \mu C$ est facile.

On montre que :$(\lambda + \mu)C \supset \lambda C + \mu C$.

Le cas où $\lambda = \mu = 0$ est trivial.

On peut supposer que l'un des cœfficients n'est pas nul. x_1,$x_2 \in C$ alors :
$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}x_2)$,
d'après la convexité de C, nous avons :
$(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}x_2) \in C$.

4 On note $\mathbf{G} = \bigcap_{i \in I} K$, avec K est un ensemble convexe de $\mathbf{E}$.
Pour montrer que $\mathbf{G}$ convexe, il suffit de montrer que : $\forall x, y \in \mathbf{G}, t \in [0,1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbf{G}$.

soient x,y $\in \mathbf{G}, t \in [0,1]$alors :

$$\begin{cases} x \in \mathbf{G} \\ y \in \mathbf{G} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \bigcap_{i \in I} K_i \\ y \in \bigcap_{i \in I} K_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K_i, \forall i \in I \\ y \in K_i, \forall i \in I. \end{cases}$$

Donc $tx + (1 - t)y \in K_i, \forall i \in I$

$\Rightarrow tx + (1 - t)y \in \bigcap_{i \in I} K_i$,
d'où $tx + (1 - t)y \in \mathbf{G}$. Alors $\mathbf{G}$ convexe.

□

1.2 Fonctions convexes :

Définition 1.2. *[17, p.7] Soit E un espace vectoriel et C une partie convexe dans E. On dit que la fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si :*

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0,1] : f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y). \tag{1.2}$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité stricte, pour $t \in]0,1[$ et $x \neq y$.

Remarque 1.2. *Si l'inégalité (1.2) est inversée , alors la fonction $(-f)$ est convexe.*

Exemple 1.2. *1. La fonction "exp" est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.*

2. *La fonction "log" est strictement concave sur* $\mathbb{R}_+$.

3. *La fonction puissance :*
   si $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *et la dérivée seconde* $x \mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

   Donc : $x \mapsto x^\alpha$ *est :* $\begin{cases} convexe\ sur\ \ \mathbb{R}_+^*, & si\ \ \alpha<0\ \ ou\ \ \alpha>1. \\ concave\ sur\ \ \mathbb{R}_+^*, & si\ \ 0<\alpha<1. \\ convexe\ et\ concave\ (affine) sur\ \ \mathbb{R}_+^* & si\ \ \alpha=0\ \ ou\ \ \alpha=1. \end{cases}$

Proposition 1.2. *(Opérations sur les fonctions convexe)*

1. *Soit* $\lambda > 0$, f *convexe, alors* λf *est convexe.*

2. *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions convexes, alors* $f + g$ *est aussi.*

Propriétés 1.1.

Si f et g deux fonctions convexes sur [a,b], alors $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$ *n'est pas nécessairement convexe. Une condition nécessaire est que f soit croissante.*

1.3 Quelques types de convexité

En 1985, E.K.Gadunova et Levin ont introduit le concept de fonction dite de Gadunova-Levin .

Définition 1.3. *(classe* $\mathbf{Q}(I)$ *) [13, p,410] On dit que* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Gadunova-Levin . Si f est non-négative et pour tout x,y* $\in I$ *et t*$\in (0,1)$, *nous avons :*

$$f(tx+(1-t)y) \le \frac{1}{t}f(x) + \frac{1}{1-t}f(y). \tag{1.3}$$

On note cette classe par $\mathbf{Q}(I)$.

Exemple 1.3. *Pour tout* $x \in I([a,b])$ *la fonction*

$f(x)=\begin{cases} 1, & a \le x < \frac{a+b}{2}, \\ 4, & x = \frac{a+b}{2}, \\ 1, & \frac{a+b}{2} < x \le b, \end{cases}$ *est dans la classe* $\mathbf{Q}(I)$.

- *Fonctions non négatives monotones appartiennent à la classe* $\mathbf{Q}(I)$.

Définition 1.4. *(classe $P(I)$) [7] On dit que $f : I \subset \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une p-fonction, ou que f appartient à la classe $P(I)$, si f est une fonction non négative et pour tout $x, y \in I, t \in [0,1]$, nous avons :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y). \tag{1.4}$$

Exemple 1.4. *Tout les fonctions convexes monotones sont contenus dans la classe* $\mathbf{P}(I)$.

Définition 1.5. *(classe K_s^1) [10] Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe dans le 1^{er} sens si :*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y), \qquad \forall s \in]0,1], \tag{1.5}$$

pour tout $x, y \in [0, \infty[$ avec $\alpha^s + \beta^s = 1$.
On désigne la classe des fonctions s-convexe par K_s^1.

Définition 1.6. *(classe $\mathbf{K}_s^2$) [10] Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe dans le 2^{eme} sens si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y), \qquad \forall t \in [0,1], \tag{1.6}$$

pour tout $s \in]0,1]$.
On désigne cette classe de fonctions par $\mathbf{K}_s^2$.

Remarque 1.3. *Pour $s = 1$, la s-convexité se réduit à la convexité (pour le deuxième sens) ordinaire sur $[0, +\infty[$:*

Exemple 1.5. *Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} a, & si : x = 0 \\ bx^s + c, & si : x > 0 \end{cases} \quad ; s \in]0,1],$$

est une fonction s-convexe dans$[0, \infty[$.

Remarque 1.4. *Les classes K_1^1, K_1^2 et la classe des fonctions convexes sont coïncident sur $\mathbb{R}_+$.*

Propriétés 1.2. *1. Si $f \in K_s^2$, alors f est positive sur* $[0;+\infty[$.

2. *Soit* $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$, *si* $f \in K_{s_2}^2$ *et* $f(0) = 0$ *alors* $f \in K_{s_1}^2$.
3. *Soit* $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$, *si* $f \in K_{s_2}^1$ *et* $f(0) \leq 0$ *alors* $f \in K_{s_1}^1$.
4. *Soient* $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *si* $f, g \in k_s^1$ *alors* $f + g \in k_s^1$.

Démonstration. 1. Soit $f \in K_s^2$, $s \in (0,1)$. Alors, nous avons :

$$f(x) = f(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) \leq \tfrac{f(x)}{2^s} + \tfrac{f(x)}{2^s} = 2^{1-s} f(x),$$

donc

$$2^{1-s} f(x) - f(x) \geq 0.$$

Ce qui implique que

$$f(x)(2^{1-s} - 1) \geq 0,$$

et comme $2^{1-s} - 1 \geq 0$, Alors $f(x) \geq 0$.

2. On suppose que $f \in K_{s_2}^2$, pour tout $x, y \in [0, +\infty[$ et $t \in [0,1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha^{s_2} f(x) + \beta^{s_2} f(y) \\ &\leq \alpha^{s_1} f(x) + \beta^{s_1} f(y). \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $f \in K_{s_1}^2$.

3. On suppose que $f \in K_{s_2}^1$, pour tous $x, y \in [0;+\infty[$ et $\alpha, \beta \geq 0$, nous avons :

$$\alpha^{s_2} + \beta^{s_2} \leq \alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1.$$

Alors, nous avons :

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^{s_2} f(x) + \beta^{s_2} f(y) \leq \alpha^{s_1} f(x) + \beta^{s_1} f(y).$$

4. Supposons que $f, g \in K_s^1$ alors pour tous $x, y \in [0, +\infty[, \alpha, \beta \geq 0$, nous avons

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$
$$g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s g(x) + \beta^s g(y),$$

ce qui entraine

$$f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s (f(x) + g(x)) + \beta^s (f(y) + g(y)).$$

Donc

$$(f+g)(\alpha x+\beta y) \leq \alpha^s(f+g)(x)+\beta^s(f+g)(y).$$

□

Définition 1.7. *(classe $\mathbf{Q}_s(I)$) [6] On dit que $f : I \to \mathbb{R}_+$ est s-Gadunova-Levin, avec $s \in [0,1]$ si :*

$$f(tx+(1-t)y) \leq \frac{1}{t^s}f(x)+\frac{1}{(1-t)^s}f(y), \qquad \forall t \in]0,1[.$$

On désigne cette classe de fonctions par $\mathbf{Q}_s(I)$.

1.3.1 Le Concept de la h-convexité

Définition 1.8. *[22] Soit $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, on dit que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est h-convexe(h-concave) si f est positive et pour tous $x,y \in I, t \in [0,1]$, nous avons :*

$$f(tx+(1-t)y) \leq (\geq) h(t)f(x)+h(1-t)f(y). \tag{1.7}$$

On note par $SX(h,I)$ cette classe de fonctions h-convexes.

Remarque 1.5. *Si l'inégalité (1.7) est inversée, alors f est dite h -concave. La classe des fonctions h-concave est noté par $SV(h,I)$.*

Remarque 1.6. *Soit h une fonction positive telle que : $h(\alpha) \geq \alpha$ pour tout $\alpha \in (0,1)$. La fonction $h_k(x) = x^k$ où $k \leq 1$ et $x > 0$ a cette propriété : si f est une fonction convexe non négative sur I , alors pour $x,y \in I, \alpha \in (0,1)$, nous avons :*

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y).$$

Donc, $f \in SX(h,I)$. De même, si la fonction h a la propriété : $h(\alpha) \leq \alpha$ pour tout $\alpha \in (0,1)$, alors toute fonction concave positive f appartienne à la classe SV(h,I) .

Exemple 1.6. *Soit $h_k, k < 0$, une fonction définie comme dans la remarque (1.5) et soit f définie comme suit :*

$$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x)=\begin{cases} 1, & x \neq \frac{a+b}{2}, \\ 2^{1-k}, & x = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

Alors f est une fonction non-convexe, mais elle est h_k-convexe.

Proposition 1.3. *[22]*

1. *Soient h_1, h_2 des fonctions non négatives définies sur un intervalle J, avec la propriété*

$$h_2(t) \leq h_1(t), t \in J.$$

   (a) *Si $f \in SX(h_2, I)$, alors $f \in SX(h_1, I)$.*

   (b) *Si $f \in SV(h_1, I)$, alors $f \in SV(h_2, I)$.*

2. *Si $f, g \in SX(h, I)$ et $\lambda > 0$, alors $f + g$, $\lambda f \in SX(h, I)$. Si $f, g \in SV(h, I)$ et $\lambda > 0$, alors $f + g$, $\lambda f \in SV(h, I)$.*

3. *Soit f et g des fonctions d'ordre asynchrone sur I, i.e*

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0. \tag{1.8}$$

Pour tout $x, y \in I$.

   i) *Si $f \in SX(h_1, I), g \in SX(h_2, I)$ et $h(\alpha) + h(1-\alpha) \leq c$ pour tout $\alpha \in (0,1)$, où $h(t) = max(h_1(t), h_2(t))$ et c est un nombre positif fixé, alors le produit fg appartient à SX(ch,I).*

   ii) *Si f et g sont asynchrones, $f \in SV(h_1, I), g \in SV(h_2, I)$ et $h(\alpha) + h(1-\alpha) \geq c$ pour tout $\alpha \in (0,1)$, où $h(t) = min(h_1(t), h_2(t))$ et c> 0 , alors le produit fg appartient à SV(ch,I).*

Démonstration. 1) Si $f \in SX(h_2, I)$, alors pour tout $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &\leq h_2(\alpha) f(x) + h_2(1-\alpha) f(y) \\ &\leq h_1(\alpha) f(x) + h_1(1-\alpha) f(y). \end{aligned}$$

Donc $f \in SX(h_1, I)$.De même pour le cas concave.

2) si $f, g \in SX(h, I)$, alors nous avons :

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha) f(x) + h(a-\alpha) f(y)$$

et

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha) g(x) + h(a-\alpha) g(y),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha x+(1-\alpha)y) &\leq h(\alpha)(f(x)+g(x))+h(1-\alpha)(f(y)+g(y))\\ &\leq h(\alpha)(f+g)(x)+h(1-\alpha)(f+g)(y).\end{aligned}$$

D'où $(f+g)\in SX(h,I)$. Si $f\in SX(h,I)$, alors pour tout $\lambda>0$, nous avons :

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\alpha x+(1-\alpha)y) &\leq h(\alpha)(\lambda f)(x)+h(1-\alpha)(\lambda f)(y)\\ &\leq h(\alpha)(\lambda f)(x)+h(1-\alpha)(\lambda f)(y).\end{aligned}$$

De même pour le cas concave.

3) Dans (1.8), nous avons :

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geq f(x)g(y)+f(y)g(x).$$

Soient α et β des nombres positifs tels que $\alpha+\beta=1$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}&fg(\alpha x+\beta y)\\ &\leq (h_1(\alpha)f(x)+h_1(\beta)f(y)).(h_2(\alpha)g(x)+h_2(\beta)g(y))\\ &\leq h(\alpha)^2(fg)(x)+h(\alpha)h(\beta)f(x)g(y)+h(\alpha)h(\beta)f(y)g(x)+h(\beta)^2(fg)(y)\\ &\leq h(\alpha)^2(fg)(x)+h(\alpha)h(\beta)f(x)g(x)+h(\alpha)h(\beta)f(y)g(y)+h(\beta)^2(fg)(y)\\ &= (h(\alpha)+h(\beta))h(\alpha)(fg)(x)+h(\beta)(fg)(y)\\ &\leq ch(\alpha)(fg)(x)+ch(\beta)(fg)(y).\end{aligned}$$

ii) Même démonstration que i).

□

Remarque 1.7. *1. Si h(t)=t, alors toute fonction convexe positive appartienne à $SX(h,I)$ et toute fonction concave negative appartienne à $SV(h,I)$.*

2. Si $h(t)=\frac{1}{t}$, alors $SX(h,I)=\mathbf{Q}(I)$.

3. Si h(t)=1, alors $SX(h,I)\supset P(I)$.

4. Si $h(t)=t^s$, ou $s\in(0,1)$, alors $SX(h,I)\supset K_s^2$.

Il suffit d'utiliser la définition pour établir ces résultat.

1.3.1.1 Fonction super additive

Définition 1.9. *[23] Une fonction $h : J \to \mathbb{R}$ est dite une fonction super-additive si :*

$$h(x+y) \geqslant h(x)+h(y), \tag{1.9}$$

pour tout $x, y \in J$.

1.3.1.2 Fonction super (sous) multiplicative h :

Définition 1.10. *[22, p,306] Une fonction $h : J \to \mathbb{R}$ est dite fonction super-multiplicative si :*

$$h(xy) \geq h(x)h(y), \tag{1.10}$$

pour tout $x, y \in J$. Si l'inégalité (1.10) est inversée, on dit alors que h est une fonction sous-multiplicative. Si l'égalité tient dans (1.10), alors h est dit une fonction multiplicative.

Exemple 1.7. *Soit h une fonction définie par $h(x) = (c+x)^{p-1}$, $x \geq 0$. Si c=0, alors la fonction h est multiplicative. Si $c \geq 1$, alors pour $p \in (0,1)$ la fonction h est super-multiplicative et pour p>1 la fonction h est sous-multiplicative.*

Théorème 1.1. *[22] Soit I un intervalle tel que $0 \in I$.*

a) Soit $f \in SX(h,I)$ et $f(0) = 0$. Si la fonction h est super-multiplicative, alors l'inégalité

$$f(\alpha x+\beta y) \leq h(\alpha)f(x)+h(\beta)f(y), \tag{1.11}$$

vérifie pour tout $x, y \in I$ et tout $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha+\beta \leq 1$.

b) Soit h une fonction non négative avec $h(\alpha) < \dfrac{1}{2}$, pour certain $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Si f est une fonction positive telle que l'inégalité (1.11) est vraie pour tout $x, y \in I$ et tout $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha+\beta \leq 1$, alors $f(0) = 0$.

c) Soit $f \in SV(h,I)$ et $f(0) = 0$. Si la fonction h est sous-multiplicative, alors l'inégalité

$$f(\alpha x+\beta y) \geq h(\alpha)f(x)+h(\beta)f(y), \tag{1.12}$$

valable pour tout $x, y \in I$ et tout $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha+\beta \leq 1$.

d) *Soit h une fonction non négative avec $h(\alpha) > \frac{1}{2}$ pour certain $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Si f est non négative-fonction telle que l'inégalité (1.12) est valable pour tout $x, y \in I$et tout $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta \leq 1$, alors $f(0) = 0$.*

Démonstration. a) Soit α et β des nombres positifs tels que $\alpha + \beta = \gamma < 1$. Définissons les nombres a et b comme suit : $a = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $b = \frac{\alpha}{\gamma}$. Alors $a + b = 1$ et on a ce qui suit :

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(a\gamma x + \beta\gamma y) \leq h(a)f(\gamma x) + h(b)f(\gamma y) \\ &= h(a)f(\gamma x + (1-\gamma)y) + h(b)f(\gamma y(1-\gamma)y) \\ &\leq h(a)(h(\gamma)f(x) + h(\gamma)f(y)) + h(b)(h(\gamma)f(y) + h(1-\gamma)f(y)) \\ &= h(a)h(\gamma)f(x) + h(b)h(\gamma)f(y) \leq h(a\gamma)f(x) + h(b\gamma)f(y) \\ &= h(\alpha)f(x) + h(\beta)f(y). \end{aligned}$$

Où nous utilisons que $f \in SX(h, I)$, $f(0) = 0$ et h est super multiplicative, respectivement.

b) Supposons que $f(0) \neq 0$, c'est-à-dire $f(0) > 0$. En mettant $x = y = 0$ dans (1.11), on obtient

$$f(0) \leq h(\alpha)f(0) + h(\beta)f(0) \ pour\ \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta \leq 1.$$

Mettre $\alpha = \beta$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ et en divisant par f(0) on obtient $1 \leq 2h(\alpha)$ pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ ce qu'est en contradiction avec l'hypothèse du théorème. Donc, il s'en-suit que$f(0) = 0$.

Les preuves pour les cas (c) et (d) sont similaires aux précédentes.

□

Corollaire 1.1. *Soit $h_s(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$. Si $f \in SX(h_s, I)$ avec s> 0,0 $\in I$, alors l'inégalité (1.11) est valable pour tout $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ si et seulement si f(0)=0. Si $f \in SV(h_s, I)$ avec $s < 0$, $0 \in I$, alors l'inégalité (1.12) est vraie pour tout $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ si et seulement si f(0)=0 .*

Proposition 1.4. *[22, p.308] Soit $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction super-multiplicative positive et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in SX(h, I)$. Alors pour $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ tel que $x_3 - x_1, x_3 - x_2, x_2 - x_1 \in J$ l'inégalité suivante est vraie :*

$$h(x_3 - x_2)f(x_1) - h(x_3 - x_1)f(x_2) + h(x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0. \tag{1.13}$$

Si la fonction h est super-multiplicative et $f \in SV(h,I)$, alors l'inégalité (1.13) est inversée.

Démonstration. Soit $f \in SX(h,I)$ et $x_1, x_2, x_3 \in I$ des nombres qui satisfont aux hypothèses de la proposition. En suite

$$\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} \in (0,1) \subseteq J,\ \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} \in (0,1) \subseteq J \ \text{et}\ \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} = 1.$$

Également

$$h(x_3-x_2) = h(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}.(x_3-x_1)) \geq h(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}).h(x_3-x_1)$$

et

$$h(x_2-x_1) \geq h(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}).h(x_3-x_1).$$

Soit $h(x_3-x_1) > 0$.Si on prend : $\alpha = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}, x = x_1, y = x_3$ dans (1.11) $x_2 = \alpha x + (1-\alpha)y$

$$\begin{aligned} f(x_2) &\leq h(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1})f(x_1) + h(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1})f(x_3) \\ &\leq \frac{h(x_3-x_2)}{h(x_3-x_1)}f(x_1) + \frac{h(x_2-x_1)}{h(x_3-x_1)}f(x_3). \end{aligned}$$

En multipliant l'inégalité par $h(x_3-x_1)$, nous obtenons l'inégalité (1.13). □

Théorème 1.2. *[22, p.307] Soit $f : I_1 \to [0,\infty)$, $g : I_2 \to [0,\infty)$ des fonctions avec $g(I_2) \subseteq I_1$. Si la fonction g est convexe (concave) et la fonction f est croissante (décroissante) $f \in SX(h,I_1)$, alors la composition $f \circ g$ appartient à $SX(h,I_2)$. Si la fonction g est convexe (concave) et la fonction f est décroissante (croissante) , $f \in SV(h,I_1)$ alors la composition $f \circ g$ appartient à $SV(h,I_2)$.*

Démonstration. Supposons que g est une fonction convexe, f est croissante, $f \in SX(h,I_1)$. Puis pour $x, y \in I_2$ et $\alpha \in (0,1)$, nous avons :

$$\begin{cases} (f\circ g)((\alpha x + (1-\alpha)y)) & \leq f(\alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)) \\ & \leq h(\alpha)(f\circ g)(x) + h(1-\alpha)(f\circ g)(y). \end{cases}$$

□

Chapitre 2

Inégalites fractionnaires

Inégalité classique usuelles

1) **Inégalité de Hôlder**

Théorème 2.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $0 < p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

– *Si $1 \leq p < \infty$*

$$\int_\Omega |fg|\,dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

– *Si $0 < p < 1$, $|\Omega| > 0$ et $\forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$.*

$$\int_\Omega |fg|\,dx \geqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

2) **Inégalité de Minkowsky**

Théorème 2.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, et $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_q(\Omega)$. Alors :*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

3) **Inégalité de Dirichlet**

Théorème 2.3. *Soient $h(x,y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet :*

$$\int_0^1 (t-x)^{\alpha-1}\,dx \int_0^x (t-x)^{\alpha-1} h(x,y)\,dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(t-x)^{\alpha-1} h(x,y)\,dx.$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.Par exemple, si on prend :

$$h(x, y) = g(x)f(y),$$

et

$$g(x) = 1.$$

Alors

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} \, dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) \, dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) \, dy.$$

ou B est la fonction Bêta.

2.1 Inégalité d'Hermite-Hadamard

Au cours des dernières année il ya eu de nombreuses extensions, des généralisations et des résultats similaires à l'inégalité d'Hermite Hadamard pour différents types de convexités. Dans ce chapitre nous allons citer quelque résultat avec prouves concernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour la classe des fonctions convexes et h-convexes.

2.1.1 Cas convexe

Théorème 2.4. *[18] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors l'inégalité d'Hermite-Hadamard est donnée comme suit :*

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.1}$$

Démonstration. On suppose que f est convexe sur $[a, b]$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} f(\frac{a+b}{2}) &= f(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) \\ &= f(\frac{1}{2}f(a+b-x) + \frac{1}{2}f(x)) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a+b-x) + \frac{1}{2}f(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

On pose :$x = ta + (1-t)b$,avec $t \in [0, 1]$, on obtient :

$$f(a+b-x) + f(x) = f(a+b-ta-(1-t)b) + f(ta+(1-t)b)$$

$$= f((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b)$$
$$\leq f(a)+f(b). \tag{2.3}$$

D'après (2.2) et (2.3) :

$$2f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a+b-x)+f(x)$$
$$\leq f(a)+f(b),$$

on intégré les deux membres de l'inégalité sur $[a,b]$, on trouve

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

□

Théorème 2.5. *[18] Soient $f,g:[a,b]\subset \mathbb{R} \to [0;+\infty[$ deux fonctions convexes sur $[a,b]$, $a<b$, nous avons :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x) \leq \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b), \tag{2.4}$$

et

$$2f(\frac{a+b}{2})g(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-1}\int_a^b f(x)g(x) \leq \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b).$$

Ou : $M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$ et $N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$.

Démonstration. D'une part, supposons que f,g sont convexes sur $[a,b]$ alors pour tout $t\in[0,1]$, nous avons :

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b), \tag{2.5}$$

$$g(ta+(1-t)b) \leq tg(a)+(1-t)g(b). \tag{2.6}$$

Alors

$$(fg)(ta+(1-t)b) \leq t^2(fg)(a)+(1-t)^2(fg)(b)+t(1-t)[f(a)g(b)+f(b)g(a)].$$

De même, nous avons :

$$(fg)((1-t)a+tb) \leq (1-t)^2(fg)(a)+t^2(fg)(b)+t(1-t)[f(a)g(b)+f(b)g(a)],$$

ce qui implique que

$$(fg)(ta+(1-t)b)+(fg)((1-t)a+tb) \tag{2.7}$$

$$\leq (2t^2 - 2t + 1)[(fg)(a) + (fg)(b)] + 2t(1-t)[f(a)g(b) + f(b)g(a)].$$

On intègre inégalité (2.7) sur $[0,1]$, on aura

$$\int_0^1 [(fg)(ta + (1-t)b) + (fg)((1-t)a + tb)]\,dt$$
$$\leq [(fg)(a) + (fg)(b)] \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1)dt + 2[f(a)g(b) + f(b)g(a)] \int_0^1 t(1-t)\,dt$$
$$= \frac{2}{3}[(fg)(a) + (fg)(b)] + \frac{1}{3}[f(a)g(b) + f(b)g(a)].$$

D'où

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{1}{3}[f(a)g(a) + f(b)g(b)] + \frac{1}{6}[f(a)g(b) + f(b)g(a)].$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{a+b}{2} = \frac{ta + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}.$$

Alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{ta + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\right)g\left(\frac{ta + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{4}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)][g(ta + (1-t)b) + g((1-t)a + tb)]$$
$$\leq \frac{1}{4}[(fg)(ta + (1-t)b) + (fg)((1-t)a + tb)]$$
$$+ \frac{1}{4}[tf(a) + (1-t)f(b)][(1-t)g(a) + tg(b)]$$
$$+ \frac{1}{4}[(1-t)f(a) + tf(b)][tg(a) + (1-t)g(b)]$$
$$\leq \frac{1}{4}[(fg)(ta + (1-t)b) + (fg)((1-t)a + tb)]$$
$$+ \frac{1}{4}\left\{2t(1-t)[(fg)(a) + (fg)(b)] + \left[t^2 + (1-t)^2\right][f(a)g(b) + f(b)g(a)]\right\}.$$

On intègre les deux membre de l'inégalité sur $[0, 1]$, on obtient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{4}\int_0^1 \{(fg)(ta + (1-t)b) + (fg)((1-t)a + tb)\}\,dt$$
$$+ \frac{1}{12}[f(a)g(a) + f(b)g(b)] + \frac{1}{6}[f(a)g(b) + f(b)g(a)].$$

Ce qui donne

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (fg)(x)\,dx + \frac{1}{6}[(fg)(a) + (fg)(b)] + [f(a)g(b) + f(b)g(a)].$$

□

2.1.2 Cas h-convexe

Dans [18],Sarikaya et al, on l'inégalité d'une fonction d'Hermite-Hadamard pour une fonction h-convexe comme suit :

Théorème 2.6. *[18] Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction h-convexe sur I et $a, b \in I$, avec $a < b$ et $f \in L_1([a,b])$. Alors, nous avons :*

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq [f(a)+f(b)] \int_0^1 h(\alpha)d\alpha. \tag{2.8}$$

Démonstration. On suppose que $f \in SX(h,I)$, c'est á dire

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y) \qquad ,\forall \alpha > 0. \tag{2.9}$$

On suppose $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} f(\frac{a+b}{2}) &\leq h(\frac{1}{2})(f(ta+(1-t)b) + h(\frac{1}{2})f((1-t)a+tb) \\ &\leq h(\frac{1}{2})[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)]. \end{aligned}$$

Puis, on intègre par rapport á t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} f(\frac{a+b}{2}) &\leq h(\frac{1}{2})\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt\right] \\ &\leq h(\frac{1}{2})\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

D'où la première inégalité est prouvée.

D'autre part, en utilisant (2.8), avec $x = a$,$y = b$, puis on intègre l'inégalité par rapport á α sur $[0,1]$, on obtient

$$\frac{1}{b-1} \int_a^b f(x)dx \leq (f(a)+f(b)) \int_0^1 h(\alpha)d\alpha.$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.7. *[14] Soient $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$, $a, b \in I$, avec $a < b$, telle que $f, g \in L_1[a,b]$ et $h_1 h_2 \in L_1[a,b]$. Alors, nous avons*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt + N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt, \tag{2.10}$$

oú

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b),$$

et

$$N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Démonstration. Comme $f \in SX(h_1, I)$ et $g \in SX(h_2, I)$, nous avons

$$f(ta + (1-t)b) \leq h_1(t)f(a) + h_1(1-t)f(b),$$

et

$$g(ta + (1-t)b) \leq h_2(t)g(a) + h_2(1-t)g(b),$$

pour tout $t \in [0,1]$. Comme f et g sont positives, donc

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) \leq{}& h_1(t)h_2(t)f(a)g(a) + h_1(t)h_2(1-t)f(a)g(b) \\ &+ h_2(t)h_1(1-t)f(b)g(a) + h_1(1-t)h_2(1-t)f(b)g(b). \end{aligned}$$

Puis on intègre par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^1 [f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)]\,dt \\ &\leq f(a)g(a)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt + f(a)g(b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt \\ &+ f(b)g(a)\int_0^1 h_2(t)h_1(1-t)\,dt + f(b)g(b)\int_0^1 h_1(1-t)h_2(1-t)\,dt \\ &= [f(a)g(a) + f(b)g(b)]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt \\ &+ [f(a)g(b) + f(b)g(a)]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt. \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt + N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt.$$

□

Remarque 2.1. *Dans le théorème (2.4) si on prend $h_1(t) = h_2(t) = t$, alors l'inégalité(2.10) réduire à (2.4).*

Théorème 2.8. *[22] Soient $f \in SX(h_1, I)$, $g \in SX(h_2, I)$, $a, b \in I$, $a < b$, telle que $fg \in L_1[a,b]$ et $h_1 h_2 \in L_1[a,b]$. Alors nous avons :*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \\
&\leq M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt,
\end{aligned}$$

où

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$$

et

$$N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a).$$

Démonstration. Nous avons

$$\frac{a+b}{2} = \frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+bt}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+bt}{2}\right) g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+bt}{2}\right) \\
&\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)] \\
&\times h_2\left(\frac{1}{2}\right)[g(ta+(1-t)b) + g((1-t)a+tb)] \\
&= h_1\left(\frac{1}{2}\right) h_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\times [f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)] \\
&+ [f(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb) + f((1-t)a+tb)g(ta+(1-t)b)] \\
&\leq h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2}) \\
&\times \{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\} \\
&+ h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\{[h_1(t)f(a) + h_1(1-t)f(b)][h_2(1-t)g(a) + h_2(t)g(b)]\} \\
&+ \{[h_1(1-t)f(a) + h_1(t)f(b)][h_2(t)g(a) + h_2(1-t)g(b)]\}.
\end{aligned}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&\leq h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\{f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)\}\\
&+h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})f(h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t))M(a,b)\\
&+(h_1(t)h_2(t)+h_1(1-t)h_2(1-t))N(a,b).
\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\\
&\leq 2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\left\{M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\,dt+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\,dt\right\}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.1. – *Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction s-convexe dans le premier sens où $s\in]0,1]$ et $a,b\in[0,+\infty[$, avec $a<b$, si $f\in L_1([a,b])$, nous avons*

$$f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+sf(b))}{s+1}. \tag{2.11}$$

– *Soit $f:[0,\infty[\to[0,\infty[$ une fonction s-convexe dans le second sens ou $s\in]0,1]$ et $a,b\in[0,\infty[$ avec $a<b$, Si $f\in L_1([a,b])$, nous avons :*

$$2^{s-1}f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{2.12}$$

– *Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$, des fonctions telles que g et fg sont dans $L_1([a,b])$. Si f est convexe et non négatif sur $[a,b]$, et si g est s-convexe sur $[a,b]$ pour un certain $s\in(0,1)$ fixé, alors*

$$\begin{aligned}
&2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx\\
&\qquad\leq\frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b)+\frac{1}{(s+2)}N(a,b).
\end{aligned}$$

Corollaire 2.2. *Soit $f\in Q(I)$, $a,b\in I$, avec $a<b$ et $f\in L_1([a,b])$. Puis*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Corollaire 2.3. *Soit $f \in P(I)$, $a, b \in I$, avec $a < b$ et $f \in L_1([a,b])$. Puis*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq 2[f(a)+f(b)]. \tag{2.13}$$

Remarque 2.2. *dans le théorème(2.3), si on prend :*

1. *$h(\alpha) = \alpha$, alors (2.7) se réduite à (2.4).*
2. *$h(\alpha) = \alpha^s$, alors (2.7) se réduite à (2.11).*
3. *$h(\alpha) = 1$, alors (2.7) se réduite à (2.12).*

.

Chapitre 3

Fonctions convexes et h-convexes dans le cas fractionnaire

Avec la naissance de l'intégrale fractionnaire, d'autres variantes de l'inégalité d'Hermite-hadamard ont été obtenues pour différentes classes de fonctions,voir [12, 13, 17, 19]. Dans ce chapitre, il sera question de l'inégalté d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes et h-convexes.

3.1 Rappel sur le calcul fractionnaire

3.2 Fonction spéciales :

Dans cette section on introduit deux fonctions spéciales dites aussi fonctions d'Euler.

Définition 3.1. *(Fonction Gamma) La fonction Gamma (ou fonction d'Euler de deuxième espèce) est une fonction qui prolonge la fonction factorielle aux valeurs réelles. définie par l'intégrale suivante :*
Pour $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$
Si $Re(\alpha) > 0$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \tag{3.1}$$

Si $Re(\alpha) \leq 0, \alpha \neq \{0, -1, -2, -3, ...\}$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}.$$

3.2.0.1 Propriétés de fonction $\Gamma(\alpha)$:

1. $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ item Pour $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

3. Pour$\alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$

$$\Gamma(1-\alpha) = -\alpha\Gamma(-\alpha).$$

Définition 3.2. *(Fonction Bêta) La fonction Bêta est définie par :*

$$B : (p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt,$$

tel que $p, q > 1$.

Théorème 3.1. ***Propriétes de la fonction Béta***

1. *Pour* $Re(p), Re(q) > 0$*, nous avons*

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+p)^{p+q}} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sint)^{2p-1}(cost)^{2q-1}. \end{aligned}$$

2.

$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt.$$

3. *La fonction Béta possède l'identité suivante :*

$$B(p,q) = B(q,p).$$

3.3 Intégrale fractionnaire de R-L.

Définition 3.3. *Soit f une fonction Lebesgue intégrable, soit $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$. pour tout $t \in [a,b]$, on définit l'intégrale á gauche (respectivement á droite) d'ordre α de Riemann - Liouville de la fonction f par :*

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \qquad x > a,$$

et

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \qquad x < b.$$

- *Pour $\alpha = 0$: $J_{a_+}^0 f(x) = J_{b_-}^0 f(x) = f(x)$.*

Propriétés 3.1. *(Semi-groupe) Pour $f \in C[a,b]$,l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes :*

1. $I_{a^+}^{\alpha}[I_{a^+}^{\beta} f(x)] = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x)$.
2. $I_{b^-}^{\alpha}[I_{b^-}^{\beta} f(x)] = I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x)$.

Démonstration. 1) Soit $f \in C[a,b]$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors :

$$\begin{aligned} I_{a_+}^{\alpha}(I_{a_+}^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-r)^{\alpha-1} (I_{a_+}^{\beta} f)(r)\, dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-r)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^r (r-s)^{\beta-1} f(s) ds \right] dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-r)^{\alpha-1} \left[\int_a^r (r-s)^{\beta-1} f(s) ds \right] dr. \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a_+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f)(t) &= \frac{\beta(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\, ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\, ds \\ &= I_{a_+}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

2) De mémé manière on montre que $I_{b^-}^{\alpha}[I_{b^-}^{\beta} f(x)] = I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x)$.

□

Proposition 3.1. *: Soient $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in L^q([a,b],\mathbb{R})$ de plus $\alpha > 0$ et, $p,q > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\int_a^b f(x)(J^\alpha_{a+}g)(x)\,dx = \int_a^b g(x)(J^\alpha_{b-}f)(x)dx.$$

Démonstration. D'après la théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)(J^\alpha_{a+}g)(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)\,dt\right)dx\\ &= \int_a^b g(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}f(x)\,dx\right)dt\\ &= \int_a^b g(x)(I^\alpha_{b\_}f)(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

3.3.1 Via la convexité

Théorème 3.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive avec $0 \leq a < b$ et $f \in L_1[a,b]$. Si f est une fonction convexe sur $[a,b]$, $\alpha > 0$, alors :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Puisque f est une fonction convexe sur $[a,b]$, nous avons pour $x,y \in [a,b]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{3.3}$$

En possant

$$x = ta+(1-t)b, y = (1-t)a+tb,$$

on obtient

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb). \tag{3.4}$$

En multipliant les deux membres de (3.4) par $t^{\alpha-1}$, puis en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)\,dt\\ &= \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\,\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\,\frac{dv}{a-b}\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right],\end{aligned}$$

c'est à dire

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right].$$

D'où la première inégalité est prouvée.
D'autre part, si f est une fonction convexe, alors pour $t \in [0,1]$, nous avons :

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

et

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

En additionnant ces inégalités, on obtient

$$f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb) \leq tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b). \tag{3.5}$$

En multipliant ensuite les deux membre de (3.5) par $t^{\alpha-1}$ et en intégrant l'inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)\,dt \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt.$$

C'est à dire.

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b) + J^\alpha_{b^-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha}.$$

La preuve est terminée.

3.4 Inégalité pour fonction dont la dérivée en valeur est convexe

Lemme 3.1. *[20] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $f' \in L_1[a,b]$. Alors nous avons légalité suivante pour les intégrales fractionnaires :*

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J^\alpha_{a_+} f(b) + J^\alpha_{b_-} f(a)]\\&= \frac{b-a}{2}\int_0^1 [(1-t)^\alpha - t^\alpha] f'[ta+(1-t)b]\,dt. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned}I =& \int_0^1 [(1-t)^\alpha - t^\alpha] f'[ta+(1-t)b]\,dt\\=&\left[\int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right] + \left[-\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right]\\=&I_1 + I_2. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}I_1 =& \left[\int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right]\\=& (1-t)^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{b-a}\Big|_0^1 + \alpha\int_0^1 (1-t)^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{b-a}\,dt\\=&\frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_a^b \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b}dx\\=&\frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J^\alpha_{b-} f(a), \qquad (3.8)\end{aligned}$$

de même, nous avons

$$\begin{aligned}I_2 =& \left[-\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right]\\=& -\frac{t^\alpha f(ta+(1-t)b)}{b-a}\Big|_0^1 + \alpha\int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{b-a}\,dt\\=&\frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_a^b \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b}dx\\=&\frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J^\alpha_{a^+} f(b). \qquad (3.9)\end{aligned}$$

En utilisant (3.7) et (3.8) dans (3.9), il s'ensuit que

$$I = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)]. \tag{3.10}$$

Ainsi, en multipliant les deux côtés de (3.10) par $\frac{a-b}{2}$, on obtient (3.6).

Lemme 3.2. *Soit $f : I \subset \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$, avec $a<b$. Si $f' \in L[(a,b)]$, alors*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{(\frac{a+b}{2})}^{\alpha} - f(a) + J_{(\frac{a+b}{2})}^{\alpha} + f(b)\right]$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left[t^{\alpha} f'\left((1-t)a + t\frac{a+b}{2}\right) - (1-t)^{\alpha} f'\left((1-t)\frac{a+b}{2} + tb\right)\right] dt,$$

et

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(\frac{a+b}{2}) + J_{b^-}^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left[t^{\alpha} f'\left((1-t)\frac{a+b}{2} + tb\right) - (1-t)^{\alpha} f'\left((1-t)a + t\frac{a+b}{2}\right)\right] dt.$$

Démonstration. voir [20]. □

Théorème 3.3. *[19] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha}}\right)[f'(a) + f'(b)]. \tag{3.11}$$

Démonstration. En utilisant le lemme (3.1) et la convexité de $|f'|$, nous trouvons

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}|\left|f'(ta + (1-t)b)\right| dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}|\left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}]\left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}]\left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt\right\}$$

$$= \frac{b-a}{2}(K_1 + K_2). \tag{3.12}$$

En calculant K_1 et K_2, nous avons

$$\begin{aligned} K_1 &= |f'(a)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^\alpha\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+1}\,dt\right] + |f'(b)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+1}\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)t^\alpha\,dt\right] \\ &= |f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)+(\alpha+2)} - \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + |f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_2 &= |f'(a)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\alpha+1}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t)^\alpha\,dt\right] + |f'(b)|\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)t^\alpha\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha+1}\,dt\right] \\ &= |f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] + |f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)+(\alpha+2)} - \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ainsi, si on utilise (**??**) et (3.13) dans (3.12), on obtient l'inégalité de (3.11). Ceci termine la preuve. □

3.4.1 Via la h-convexité

Théorème 3.4. *[9] Soit $f \in SX(h,I)$, $a,b \in I$ avec $a < b$ et $f \in L_1[a,b]$. Alors, nous avons l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right] &\leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha+1}\,[h(t)+h(1-t)]\,dt \\ &\leq \frac{2\,[f(a)+f(b)]}{(\alpha p - p + 1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (h(t))^q\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Démonstration. Comme $f \in SX(h,I)$, nous avons

$$f(tx+(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{3.15}$$

et

$$f((t-1)x+ty) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y). \tag{3.16}$$

En ajoutant (3.15) et (3.16), nous avons

$$f(tx+(1-t)y) + f((1-t)x+ty) \leq [h(t)+h(1-t)]\,[f(x)+f(y)]. \tag{3.17}$$

En utilisant (3.17) avec $x = a$ et $y = b$, on obtient

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \leq [h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]. \tag{3.18}$$

En multipliant les deux membres de (3.18) par $t^{\alpha-1}$, puis en intégrant inégalité résultante par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 t^{\alpha-}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]\,dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1}[h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)]\,dt,$$

et

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha(b)+J_{b^-}^\alpha(a)\right] \leq [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha+1}\,[h(t)+h(1-t)]\,dt, \tag{3.19}$$

d'où la première inégalité de (3.2) est prouvée .

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder et de Minkowski respectivement pour le côté droit de(3.19), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\alpha-1}[h(t)+h(1-t)]\,dt &\leq \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (h(t)+h(1-t))^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\frac{t^{\alpha p-p+1}}{\alpha p-p+1}|_0^1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (h(t)+h(1-t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\frac{1}{\alpha p-p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 (h(t)+h(1-t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\frac{1}{\alpha p-p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 (h(t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^1 (h(1-t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&= \frac{2}{(\alpha p-p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^1 (h(t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 3.5. *[9] Soit $f \in SX(h,I)$,$a,b \in I$ avec $a < b$, h superadditive sur I et $f \in L_1[a,b]$ $h \in L_1[0,1]$. Alors, nous avons*

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha(b)+J_{b^-}^\alpha(a)\right] \leq \frac{h(1)}{\alpha}[f(a)+f(b)]. \tag{3.20}$$

Démonstration. Comme $f \in SX(h,I)$, nous avons

$$f(tx+(1-t)y) \leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y), \tag{3.21}$$

et

$$f((1-t)x+ty) \leq h(1-t)f(x)+h(t)f(y). \tag{3.22}$$

En ajoutant (3.21) et (3.22), on obtient

$$f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty) \leq [h(t)+h(1-t)][f(x)+f(y)]. \tag{3.23}$$

On pose $x=a$ et $y=b$ dans (3.23) sachant que h est super-additive, ce qui donne

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \leq h(1)[f(a)+f(b)]. \tag{3.24}$$

En multipliant les deux membres de (3.24)par $t^{\alpha-1}$, puis en intégrant l'inégalité par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{\alpha-1}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]\,dt \\ &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1}h(1)[f(a)+f(b)]\,dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}(b)+J^\alpha_{b^-}(a)\right] &\leq h(1)[f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt \\ &= \frac{h(1)}{\alpha}[f(a)+f(b)]. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Lemme 3.3. *Soit $f:\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable surI°, et $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$, et $f' \in (L[a,b])$. Si $|f'|$ est h-convexe sur $[a,b]$, alors*

$$\begin{aligned} &\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\right|\left[I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^-}f(a)+I^\alpha_{(\frac{a+b}{2})^+}f(b)\right] \\ &\leq \frac{b-a}{4}\left[2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^\alpha h(t)\,dt+\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\int_0^1 t^\alpha h(1-t)\,dt\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\right|\left[I^\alpha_{a^+}f(\frac{a+b}{2})+I^\alpha_{b^-}f(\frac{a+b}{2})\right] \\ &\leq \frac{b-a}{4}\left[2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1 t^\alpha h(1-t)\,dt+\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]\int_0^1 t^\alpha h(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Démonstration. Voir [19]. □

Remarque 3.1. *si on prend $\alpha = 1$ dans le théorème (3.5), alors (3.20) réduire a la version spécial du coté droit de (3.14).*

3.5 Inégalité pour fonction dont la dérivée est h-convexe

Théorème 3.6. *[21] Soit $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement positive avec $0 \leq a < b$ et $h^q \in L_1[a,b]$, $f \in L_1[a,b]$. Si $|f'|$*

est une fonction h-convexe sur $[a,b]$. Alors nous avons l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)]\right| \\
&\leq \frac{(b-a)\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]}{2}\left[\left(\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(h(t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1(h(t))^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right],
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\alpha > 0$,$p > 1$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Démonstration. D'après le Lemme (3.1) et en utilisant les propriétés du module, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^\alpha - t^\alpha||f'(ta+(1-t)b)|\,dt
\end{aligned}$$

Comme $|f'|$ est une fonction h-convexe sur $[a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)]\right|\\
&\leq \frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}][h(t)|f'(a)|+h(1-t)|f'(b)|]dt\right.\\
&+\int_{\frac{1}{2}}^{1}[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}][h(t)|f'(a)|+h(1-t)|f'(b)|]dt\\
&=\frac{b-a}{2}|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}h(t)\,dt-|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}h(t)\,dt\\
&+|f'(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}h(1-t)\,dt-|f'(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}h(1-t)\,dt\\
&+|f'(a)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha}h(t)\,dt-|f'(a)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}h(t)\,dt\\
&+|f'(b)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha}h(1-t)\,dt-|f'(b)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}h(1-t)\,dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour le côté droit avec $p^{-1}+q^{-1}=1$ et $p>1$, nous avons

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}h(t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha}h(1-t)\,dt\leq\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}h(1-t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha}h(t)\,dt\leq\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}h(t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}h(1-t)\,dt\leq\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}h(1-t)\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}h(t)\,dt\leq\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ensuite employons les inégalités précédentes dans le coté droit, nous avons

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left\{|f'(a)|\left\{\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\right.$$

$$+\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+|f'(b)|\left\{\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{b-a}{2}\left\{|f'(a)|\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right.$$

$$+|f'(b)|\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{(b-a)[|f'(a)|+|f'(b)|]}{2}\left(\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}-\left[\frac{1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h(t)]^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

D'où résultat. □

Chapitre 4

Intégrales fractionnaires généralisées

La motivation principale de ce chapitre est d'introduire la notion de fonction g-convexe par rapport à une fonction "g" continue strictement monotone . Plus précisément, on définit les fonctions g-convexes via la formule :

$$M_{[g]}(x,y) := g^{-1}[(1-t)g(x)+tg(y)],$$

qui est associée à la fonction continue strictement monotone g. En tant qu'applications des fonctions g-convexes, nous prouvons quelques inégalités appelées en générale dans la littérature mathématique inégalité de type Hermite-Hadamard.

4.1 Ensemble g-convexe

Introduisons maintenant une nouvelle classe d'ensemble g-convexe.

Définition 4.1. *[8, p,2] Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dite g-convexe par rapport à une fonction g continue strictement monotone si :*

$$M_{[g]}(x,y) := g^{-1}[(1-t)g(x)+tg(y)] \in A, \ \forall x,y \in A, t \in [0,1].$$

4.2 La fonction g-convexe

Définition 4.2. *[8, p,2] La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite g-convexe par rapport à la fonction continue, strictement monotone de g si :*

$$f(M_{[g]}(x,y)) \leq (1-t)f(g(x)) + tf(g(y)), \qquad \forall x,y \in I \ et \ t \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Notez que la fonction f est dite strictement g-convexe sur A si l'inégalité ci-dessus est vraie comme une inégalité stricte pour chaque $x,y \in A$ et pour chaque $t \in (0,1)$.

Exemple 4.1. *1. Si on prend $t = \frac{1}{2}$ dans (3.1), alors nous avons*

$$f(g^{-1}(\frac{g(x)+g(y)}{2})) \leq \frac{1}{2}[f(g(x)) + f(g(y))], \qquad \forall x,y \in A. \tag{4.2}$$

2. Si on prend $t = x^p$, $p > 0$, alors (3.1) s'écrit.

$$f(((1-t)g(x)^p + tg(y)^p)^{\frac{1}{p}}) \leq (1-t)f(g(x)) + tf(g(y)), \ \forall x,y \in [a,b], t \in [0.1]. \tag{4.3}$$

Remarque 4.1. *Si (4.2) est inversée, alors la fonction f est dite g-concave.*

On présente avec démonstrations les inégalités liant les intégrales fractionnaires pour les différentes classes de fonction appelées en général inégalités de type Hermite-Hadamard.

Définition 4.3. *[21] Soient $\alpha > 0$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et g une fonction croissante sur $[a,b]$ ayant une dérivée continue g' sur $[a,b]$. Les intégrales fractionnaire gauche et droite d'ordre α d'une fonction f par rapport à une autre fonction g sur $[a,b]$ sont définies par :*

$$(J^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [g(x)-g(t)]^{\alpha-1} g'(t)f(t)dt, \tag{4.4}$$

et

$$(J^{\alpha}_{b-,g}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b [g(x)-g(t)]^{\alpha-1} g'(t)f(t)dt. \tag{4.5}$$

Propriétés 4.1. *[21] Soient $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$.*

1. Si $f(x) = [g(x)-g(a)]^{\beta-1}$, alors :

$$(J^{\alpha}_{a+,g}f)(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}[g(x)-g(a)]^{\alpha+\beta-1}.$$

2. *Si* $f(x) = [g(b) - g(x)]^{\beta-1}$*, alors :*

$$(J^{\alpha}_{b-,g} f)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}[g(b) - g(x)]^{\alpha+\beta-1}.$$

Démonstration. On pose $f(x) = [g(x) - g(a)]^{\beta-1}$, nous avons

$$J^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [g(x) - g(t)]^{\alpha-1} f(t) g'(t) dt.$$

Avec le changement de variable $s = \dfrac{g(t) - g(a)}{g(x) - g(a)}$, nous avons

$$\begin{cases} t = a \Rightarrow s = 0 \\ t = x \Rightarrow s = 1. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}_{a+} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} [g(x) - g(a)]^{\alpha-1} s^{\beta-1} [g(x) - g(a)]^{\beta-1} [g(x) - g(a)] ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} [g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= \frac{[g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)} [g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} [g(x) - g(a)]^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

De la même manière pour la deuxième. □

Théorème 4.1. *[21] Soit f une fonction continue sur Ω et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$, nous avons*

$$J^{\alpha}_{a+,g}(J^{\beta}_{a+,g} f)(t) = (J^{\alpha+\beta}_{a+,g} f)(t)$$

et

$$J^{\alpha}_{b-,g}(J^{\beta}_{b-,g} f)(t) = (J^{\alpha+\beta}_{b-,g} f)(t).$$

Démonstration. Nous avons par définition et le changement de variable $z = \dfrac{g(u)-g(\tau)}{g(t)-g(\tau)}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
J^{\alpha}_{a+,g}(J^{\beta}_{a+,g}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (g(t)-g(u))^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^u (g(u)-g(\tau))^{\beta-1}g'(\tau)f(\tau)d\tau\right) \\
&\quad \times g'(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^u (g(t)-g(u))^{\alpha-1}(g(u)-g(\tau))^{\beta-1} \\
&\quad \times f(\tau)g'(\tau)d\tau g'(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\int_\tau^t (g(t)-g(u))^{\alpha-1}(g(u)-g(\tau))^{\beta-1} \\
&\quad \times g'(u)dug'(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (g(t)-g(\tau))^{\alpha+\beta-1}f(\tau)g'(\tau)d\tau \\
&\quad \times \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (g(t)-g(\tau))^{\alpha+\beta-1}f(\tau)g'(\tau)d\tau \\
&= (J^{\alpha+\beta}_{a+,g}f)(t).
\end{aligned}
$$

□

Théorème 4.2. *Soit $f \in SX(h, g(I))$ et $a, b \in I$ avec $a < b$,h super-additive et $f \in L_1[0.1]$ Alors l'inégalité*

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(g(b)-g(a))^{\alpha}} = \left[J^{\alpha}_{g,a_+}f(x) + J^{\alpha}_{g,b\_}f(x)\right] \le \frac{h(1)}{\alpha}[f(g(a)) + f(g(b))]. \tag{4.6}$$

a lien.

Démonstration. Analogue voir [21] □

Lemme 4.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) avec $a < b$.Si $f' \in L_1[a, b]$ et g une fonction croissante positive sur [a,b], alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires :*

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(g(a)) + f(g(b))}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(g(b)-g(a))^{\alpha}}[J^{\alpha}_{a_+,g}f(b) + J^{\alpha}_{b_-,g}f(a)] \\
&= \frac{g(b)-g(a)}{2}\int_0^1 [(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}]f'[g(ta + (1-t)b)]dt. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Démonstration. D'une maniére analogue. Voir [16] □

Théorème 4.3. *[16] Soit $f \in (h, g(I))$,$a, b \in I$ et $f \in L_1[a, b]$ et g une fonction croissante positive ,alors on a l'inégalité pour les fonction h-convexe via les intégrale fractionnaire :*

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\alpha)}{(g(b)-g(a))^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \\ &\leq [f(g(a)) + f(g(b))] \int_0^1 t^{\alpha+1} [h(t) + h(1-t)] \, dt \\ &\leq \frac{2[f(g(a)) + f(g(b))]}{(\alpha p - p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^1 (h(t))^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Démonstration. Voir [16]. □

Conclusion

Toutes les inégalités dans le troisième chapitre, on prend $h(t) = t,\ \frac{1}{t},\ 1$ et t^s pour $s \in (0,1)$,on obtient des résultats pour les classe fonctions convexes non négatives, $\mathbf{Q}(I), P(I), K_s^2$. Et dans le dernier chapitre

1. Si nous considérons $g(x) = x$ dans l'équation (4.1), nous avons

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{a+,x}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \\ &= {}^{RL}J^{\alpha}_{a+,x}f(x). \end{aligned}$$

   l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville .

2. En choisissant $g(x) = \ln x$ et en substituant par l'équation (4.1), nous avons

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{a+,\ln x}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{t}(\ln x - \ln t)^{\alpha-1}f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\ln\frac{x}{t})^{\alpha-1}f(t)\frac{dt}{t} \\ &= {}^{H}J^{\alpha}_{a+,\ln x}f(x). \end{aligned}$$

   L'intégrale fractionnaire de Hadamard .

3. Pour $g(x) = x$, $b = \infty$ et en substituant dans l'équation (4.1), on obtient

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{b-,x}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt \\ &=_x W^{\alpha}_{+\infty}f(x). \end{aligned}$$

   L'intégrale fractionnaire de Weyl .

Bibliographie

[1] Akdemir A. O., M. E. Özdemir and S. Varošanec, On some inequalities for concave functions, Math. Comp. Mode.,55(2012), 746-753.

[2] Alomari M., M. Darus and U. S. Kirmaci, Some inequalities of Hermite Hadamard Type for s-convex functions , Acta Math. Scientia, 31B4(2011), 164-1652.

[3] arXiv :1708.05109v1 [math.CA] 17 Aug 2017 J. VANTERLER DA C. SOUSA AND E. CAPELAS DE OLIVEIRA . ON THE ψ-Hifler Fractional Derivative .

[4] arXiv :1710.03712v3 [math.CA] 5 Nov 2018 J. Vanterler DA C. SOUSA and E. Capelas de oliveira. On The fractional integral and applications .

[5] Avci M., H. Kavurmaci, and M. E. Özdemir, New inequalities Of Hermite Hadamard type via convex functions in the second sense, Appl. Math. Comput., 217(2011), 5171-5176.

[6] Breckner W. W., Continuity of generalized convex and generalized concave set valued functions, Rev. Anal. Numr. Thor. Appr,22(1993), 39-51.

[7] Dragomir S. S and B. Mond, On Hadamard's inequality for a class of functions of Godunova and Levin, indian J. Math.,39(1)(1997),1-9.

[8] Dragomir, S.S. : Integral inequalities of Jensen type for k-convex functions. In : Proceedings of RGMIA, Res. Rep. Coll. 17 (2014).

[9] Dragomir S. S., J. E. Pečarić and L. E. Persson, some inequalities of Hadamard type, Soochow J. of Math, 21(1995), 335-341.

[10] Hudzik H and L. Maligranda, Some remarks on s-convex functions, Aequationes math, 48(1994), 100-111.

[11] Dragomir S. S.,On Hadamard's inequalities for convex functions, Mat. Balkanica, 6(1992),215-222.

[12] Journal of Fractional Calculus and applications , Vol 6(1) Jan . 2015 , pp 120-130 ISSN : 2090-5858 . HASHEM H.H.G . On The Solution Of A Generalized Fractional Order Integral Equation And Some Applications .

[13] Kavurmaci H., M. Avci and M. E. Özdemir, New Inequalities of Hermite Hadamard Type for Convex Functions with Applications, Jour. Ineq. Appl.,(2011)2011 :86,doi :10.1186/1029-242X-2011-86.

[14] M.Matloka. Hermite-Hadamard type inequalities for frctional integrals,RGMIA Res. Rep. Coll. 20(2017), Art. 69. 11 p.

[15] Mitrinović D. S., J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.

[16] M. Tunç, on new inequalities for h-convex functions via Riemann-Liouville fractional integration. Filimat 27(2013), no. 4, 559-565.

[17] Niculescu C. P and L. E. Persson, Convex functions and their Applications. A Contemporary Approach, CMS Books in Mathematics vol23, Springer Verlag, New York,2006.

[18] Sarikaya M. Z., A. Saglam and H. Yildirim, On some Hadamard type inequalities for convex functions, Jour. Math. Ineq.,2(3)(2008), 335-341.

[19] Sarikaya M. Z., A. Saglam, H. Yildirim, New inequalities of Hermite Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi - convex, arXiv :1005.0451.

[20] Sarikaya M. Z., E. Set and M. E. Özdemir, On some new inequalities of Hadaramard type involving Convex functions, Acta Math. Univ. Comenianae, LXXIX,2(2010), 265-272.

[21] S.G.Samko - A.A.Kilbas - O.I.Marichev . Fractinal Integrals And Derivatives , Theory And Applications (Polycopié du cours MAP 431), École Polytechnique, année2015 – 2016.

[22] S. Varošanec, on h-convexity, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 303-311

[23] Wu,S.,M,Uzair.,M,Aslam,On a new class of convex functions and integral inequalities,Journal of Inequalities and Applications(2019),1-14.