REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à:

FACULTÉ DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de:

MASTER

Spécialité: Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Présenté par:

Latab Abdelkader
Lafer Ahmed
Naroun mohamed

Sur le thème

La dérivée et l'intégrale fractionnaires Généralisées et applications

Soutenu publiquement le 13 /07/ 2021 à Tiaret devant le jury composé de:

Mr. LARABI Abderrahmane	MCA	Université de Tiaret	Président
Mr. MAAZOUZ Kadda	MCB	Université de Tiaret	Encadreur
Mme. SABIT Souhila	MCB	Université de Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

*Tout d'abord, nos remerciements vont à **ALLAH** qui nous a éclairé le chemin du savoir et de nous avoir donné le bon sens et la grande volonté pour réaliser ce modeste travail.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur, **M.MAAZOUZ Kadda**, qui a supervisé notre travail tout en nous laissant une grande marge de liberté, nous le remercions pour son encadrement, sa disponibilité et la pertinence de ses remarques tout au long de la réalisation de ce projet.*

*Nous remercions également le président du jury **M.LARABI Abderrahmane** , et l'examinateur **Mme.SABIT Souhila** d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

Nous voulons, à cette occasion avec le plus grand honneur, remercier sincèrement tous nos enseignants. Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères gratitudes aux personnes qui ont vraiment contribué à l'élaboration de la présente de cet mémoire.

Nous espérons que ce travail aura la valeur souhaitée.

Merci à tous !

Je dédie ce travail à

Tous d'abord Je dédie ce modeste travail à : mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que Dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

Mes frères.
Mes chères et adorables sœurs.
Toute ma famille de loin ou de près.
Mes amies Amine, Islem, Said, Mokhtar, Farouk.
Merci d'être toujours là pour moi

Tous mes amis .
Tous mes collègues de ma promotion.
Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant mes études.

Abdelkader...

Je dédie ce travail à

Avec un grand honneur, je tiens à dédier ce modeste travail à : Mes très chers parents pour tout dévouement et bienveillance durant mes années d'étude. Que Dieu les gardes.

Que ces pages soient pour eux un témoignage de grande affection en signe de respect et profonde reconnaissance pour toutes les sacrifices qu'ils ont bien voulu consentir pour moi.

Mon frère .

Mes amis Abdelkader, Mohamed ainsi que toute ma promotion.

Tous ceux qui m'ont porté de l'aide, conseils et de bonheur de prés ou de loin durant toutes ces longues années.

Ahmed...

*————— *Je dédie ce travail à* —————*

Avec un grand honneur, je tiens à dédier ce modeste travail à : Mes très chers parents Que dieu les gardes.

Mes frères et mes sœurs et mes amis ainsi que toute ma promotion.

Mohamed...

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous introduisons une récente intégral et dérivée fractionnaire généralisée au sens de Katugampola, nous discutons de certaines propriétés et résultats du calcul fractionnaire, on donne une application de principe du point fixe ainsi que quelques unes de ses extensions et généralisations qui s'impliquent dans la résolution des équations différentielles. Nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions de ce problème par le théorème du point fixe.

ABSTRAT

In this thesis we introduce a new generalized fractional integral and derivative in the sens of Katugampola, we discuss some properties and result of fractional calculus, we give a fixed point principle application as well as some of its extensions and generalized which are involved in solving differential equations. We prove existence and uniqueness of this problem by the fixed point theorem.

INTRODUCTION

Récemment, le calcul fractionnaire était un sujet purement mathématique. Les problèmes aux limites pour les équations différentielles fractionnaires constituent une classe très importante d'applications en physique et en mathématiques appliquées.
Nous introduisons une récente intégrale fractionnaire qui généralise six intégrales fractionnaires existantes, à savoir, Riemann-Liouville, Hadamard, Erdélyi-Kober, Katugampola, Weyl et Liouville sous une forme. Tel que la généralisation prend la forme

$$\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{a^+;\eta,k}f\right)(x) = \frac{\rho^{1-\beta}x^k}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho\eta+\rho-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau \quad 0 \leq a < x < b \leq \infty.$$

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Nous rassemblement dans le premier chapitre quelques notations utiles et quelques définitions d'intégral et de dérivée fractionnaire généralisée, au plus des lemmes, théorèmes et propriétés qui seront utilisés dans les derniers chapitres.

Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques lemmes et théorèmes très importants pour l'existence et l'unicité des solution de problème thermistor fractionnaire au sens de Caputo-Katugampola, en utilisant la théorie du point fixe pour la solution de ce problème, et deux exemples résolus du même problème.

Dans le troisième chapitre, nous traitons l'existence d'une solution pour deux problèmes au limites non linéaire et implicite, nous avons organisé ces travaux comme suit : premièrement nous donnons quelques lemmes et théorèmes utiles dans nos principaux résultats d'existence des solutions, et dans le dernier nous donnons deux exemples illustratifs.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions l'existence des solutions pour un problème des valeurs aux limites des équations différentielles implicites, qui impliquent une dérivée fractionnaire généralisée, et on commence par des lemmes et propositions utiles, et finalement on a deux exemples dirigés de même problème.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

On note par $C(]a,h],\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur $]a,h]$ dans $\mathbb{R}^n$ avec la norme

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{t\in]a,h]} \|\mathbf{x}(t)\|_E,$$

et $AC(]a,h],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions absolument continues sur $]a,h]$ dans $\mathbb{R}$. On définit ici l'espace pondéré des fonctions mesurables $\mathbf{x}$ par

$$C_{\alpha,\rho}]a,h] = \left\{ \mathbf{x} \in C(]a,h]) : \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\alpha} \mathbf{x}(t) \in C(]a,h]), \alpha > 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|\mathbf{x}\|_{C_{\alpha,\rho}} = \sup_{t\in]a,h[} \left\| \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\alpha} \mathbf{x}(t) \right\|.$$

Considérons l'espace $X_c^p(a,b), (c \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ des fonctions mesurables f sur $[a,b]$ avec $\|f\|_c^p < \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Définition 1.1. *[6] Soit $f \in X_c^p(a,b), \alpha > 0; \rho, \eta, k \in \mathbb{R}$. L'intégrale fractionnaire généralisée à gauche est définie par :*

$$\left({}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{a^+;\eta,k}f\right)(x) = \frac{\rho^{1-\beta}x^k}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau, \quad (0 \leq a \leq x \leq b \leq \infty). \tag{1.1}$$

Définition 1.2. *[5] L'intégrale et la dérivée fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, (Re(\alpha) > 0)$ au sens de Riemann-Liouville sont définis par*

$$(I^\alpha_{a^+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,$$

et

$$(D^\alpha_{a^+}f)(x) = (\frac{d}{dx})^n(I^{n-\alpha}_{a^+})(x), \quad x > a,$$

avec $n = [Re(\alpha)]$, et $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \quad \alpha > 0.$$

Définition 1.3. *[5] L'intégrale et la dérivée fractionnaires de Hadamard sont définis par :*

$$I^\alpha_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\log\frac{x}{\tau}\right)^{\alpha-1}f(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

et

$$D^\alpha_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x \left(\log\frac{x}{\tau}\right)^{n-\alpha+1}f(\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

pour $x > a \geq 0$, et $Re(\alpha) > 0$.

Définition 1.4. *[5] L'intégrale fractionnaire généralisée (Katugampola) à gauche ${}^{\rho}I^\alpha_{a^+}f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(Re(\alpha) > 0)$ est définie par :*

$$({}^{\rho}I^\alpha_{a^+}f)(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho-1}f(\tau)}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}d\tau, \tag{1.2}$$

pour $x > a$.
La dérivée fractionnaire généralisée correspondante à l'intégrale (1.2) est définie par :

$$\begin{aligned}\left({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x) &= \left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)\\ &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x^{1-\rho}\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_a^x \frac{\tau^{\rho-1}f(\tau)}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{\alpha-n+1}}d\tau, \end{aligned} \tag{1.3}$$

pour $0 < a \leq x$.

Lemme 1.1. *[5] D'après (1.2) nous avons*

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta-1}(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha+\beta-1} \quad ,\alpha \geq 0, \beta > 0.$$

Définition 1.5. *[4] Soit* $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$ *et* $n = [\alpha]$. *La dérivée fractionnaire généralisée au sens de Caputo d'ordre l'arbitraire* α *de* $f(x)$ *est définie par :*

$${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}f(x) = \frac{(\rho+1)^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \left(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1}\right)^{n-\alpha-1}\tau^{\rho}f^{(n)}(\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

Pour $x > a$, *si le membre droit existe et si* $0 < a < 1$, (1.4) *se réduit à*

$${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha}f(x) = \frac{(\rho+1)^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho}}{(x^{\rho+1}-\tau^{\rho+1})^{\alpha}}f^{'}(\tau)d\tau. \tag{1.5}$$

Définition 1.6. *[7] La dérivée fractionnaire généralisée au sens de Caputo Katugampola est définie via la dérivée(1.3) comme suivante :*

$${}^{c}D^{r,\beta}\theta(x) = \left({}^{r}D_{a^+}^{\beta}\left[\theta(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\theta^{(k)}(a)}{k!}(s^r-a^r)^k\right]\right)(x), \tag{1.6}$$

avec $n = [Re(\beta)]$.

Remarque 1.1. *Soit* $0 < a < b < \infty$, $\ x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction intégrable, et soit* $\alpha \in]0, 1[$ *et* $\rho > 0$ *sont des nombres réels constants. La dérivée fractionnaire généralisée d'ordre* α *au sens de Caputo est définie par*

$$\begin{aligned}{}^{c}D^{r,\beta}\theta(x) &= {}^{r}D_{a^+}^{\beta}[\theta(x)-\theta(a)]\\ &= \frac{r^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\left(x^{1-r}\frac{d}{dx}\right)\int_a^x (x^r-s^r)^{-\beta}s^{r-1}[\theta(s)-\theta(a)]ds.\end{aligned}$$

Théorème 1.1 (Propriété de l'inverse). *[3] Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in X_c^\rho(a,b)$ *,*$\rho > 0$*. Alors pour* $a > 0$*,* $\rho > 0$*.*

$$\left({}^\rho D^\alpha_{a^+}{}^\rho I^\rho_{a^+}\right) f(x) = f(x). \tag{1.7}$$

Théorème 1.2 (Théorème d'index). *[3] Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $0 < Re(\alpha) < 1$ *et* $0 < Re(\beta) < 1$*. Si* $0 < a < b < \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *alors pour* $f \in X_c^\rho(a,b)$*,* $\rho \geq 0$*,* ${}^\rho I^\alpha_{a^+}{}^\rho I^\beta_{a^+} f = {}^\rho I^{\alpha+\beta}_{a^+} f$ *et* ${}^\rho D^\alpha_{a^+}{}^\rho D^\beta_{a^+} f = {}^\rho D^{\alpha+\beta}_{a^+} f$*.*

Théorème 1.3 (Composition.). *[3] Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $0 < Re(\alpha) < Re(\beta) < 1$*. Si* $0 < a < b < \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *,alors pour* $f \in L^P(a,b), \rho > 0$*.*

$$ {}^\rho D^\alpha_{a^+}{}^\rho I^\beta_{a^+} f = {}^\rho I^{\beta-\alpha}_{a^+} f \quad et \quad {}^\rho D^\alpha_{b^-}{}^\rho I^\beta_{b^-} f = {}^\rho I^{\beta-\alpha}_{b^-} f.$$

Théorème 1.4 (Propriété de linéarité). *[3] Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $0 < Re(\alpha) < 1$*. Si* $0 < a < b < \infty$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *,alors pour* $f; g \in X_c^p(a,b)$ *et* $\rho > 0$*,*

$$ {}^\rho I^\alpha_{a^+}(f+g) = {}^\rho I^\alpha_{a^+} f + {}^\rho I^\alpha_{a^+} g, \tag{1.8}$$

et

$$ {}^\rho D^\alpha_{a^+}(f+g) = {}^\rho D^\alpha_{a^+} f + {}^\rho D^\alpha_{a^+} g. \tag{1.9}$$

Théorème 1.5 (Alternative non linéaire de Leray-Schauder). *[7] Soit* $\mathbf{Q}$ *un ensemble non vide convexe d'un espace de Banach* $\mathbf{E}$ *. Soit* U *un sous ensemble ouvert non vide de* U *avec* $0 \in U$ *et* $N : \bar{U} \longrightarrow \mathbf{Q}$ *un opérateur compact continu.Alors*

1 .N admet un point fixe, ou

2. Il existe $y \in \partial U$ *et* $\lambda \in]0,1[$ *avec* $y = \lambda N(y)$*.*

Théorème 1.6 (Point fixe de Schauder). *[7] Soit* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach et* $\mathbf{Q}$ *un sous ensemble non vide, borné convexe et fermé de* $\mathbf{E}$ *et* $T : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ *un opérateur continu et compact, alors* T *admet au moins un point fixe dans* $\mathbf{Q}$*.*

Théorème 1.7 (Arzela-Ascoli). *[7]Pour* $A \subset C([0,1])$*,* A *est compact si, et seulement si,* A *est fermé, borné, et équicontinu.*

Définition 1.7. *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach. On dit que* $T : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$ *est une application contractante s'il existe* $k \in]0,1[$ *tel que*
$\|T(x) - T(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E$, *pour tout* x, y *dans* $\mathbf{E}$.

Théorème 1.8. (*du point fixe de Banach*)*[7] Soit* $\mathbf{E}$ *un espace de Banach,* N *un sous ensemble fermé de* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{Q} : N \longrightarrow N$ *est contraction. Alors* $\mathbf{Q}$ *admet un unique point fixe.*

Théorème 1.9 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii)**.** *[7] Soit* E *un sous-ensemble borné fermé convexe et non vide d'un espace de Banach* $\mathbf{X}$ *et soit* A, B *deux opérateurs tels que* $Ax + By \in E$ *pour chaque* $x, y \in E$. *Si* A *est une contraction et* B *est complètement continu, alors il existe* $z \in E$ *tel que* $Az + Bz = z$.

Théorème 1.10. *[4] Soit* $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ *et soit* $\rho \in \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $\rho \geq c$. *Alors L'opérateur* ${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}$ *est borné dans* $X^p_c(a, b)$ *et*

$$\|{}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t} f\|_{X^p_c} \leq \mathbf{k}\|f\|_{X^p_c},$$

avec

$$\mathbf{k} = \frac{b^{\alpha(\rho+1)-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} u^{c-\alpha(\rho+1)-1} \left(\frac{u^{\rho+1} - 1}{\rho + 1}\right)^{\alpha-1} du; \quad \rho \neq -1.$$

Corollaire 1.1. *[4] Soit* $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty$ *et soit* $\rho \in \mathbb{R}$ *tel que* $\rho \geq \frac{1}{p}$. *Alors L'opérateur* ${}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t}$ *est borné dans* $L^p(a, b)$ *et*

$$\|{}^{\rho}_{a}I^{\alpha}_{t} f\| \leq \mathbf{k}\|f\|_p.$$

Avec $\mathbf{k}$ *est donné dans le Théorème 1.10 avec* $c = \frac{1}{p}$.

Théorème 1.11. *[3] Soit* $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) \geq 0, n = [Re(\alpha)]$ *et* $\rho > 0$, *alors pour* $x > a$

$$1. \lim_{\rho \to 1} \left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.10}$$

$$2. \lim_{\rho \to 0^+} \left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log \frac{x}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{1.11}$$

$$3. \lim_{p \to 1} \left({}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \tag{1.12}$$

$$4. \lim_{p \to 0^+} \left({}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \left(\log \frac{x}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \tag{1.13}$$

Lemme 1.2. *[2] Soit $\upsilon > 0$ et $\rho > 0$. Alors l'équation différentielle*

$$^{\rho}D^{\upsilon}\sigma(t) = 0$$

admet une solution

$$\sigma(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \left(\frac{t^{\rho} - a^{\rho}}{\rho}\right)^{\upsilon - i}, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., m-2, \quad m = [\upsilon] + 1.$$

Lemme 1.3. *[2] Soit $\upsilon > 0$ et $\rho > 0$. Alors*

$$^{\rho}I^{\upsilon}\left(^{\rho}D^{\upsilon}\sigma(t)\right) = \sigma(t) + a_0 + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \left(\frac{t^{\rho} - a^{\rho}}{\rho}\right)^{\upsilon - i},$$

pour certains

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, ..., m-2, \quad m = [\upsilon] + 1.$$

CHAPITRE 2

L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DES SOLUTIONS AU SENS CAPUTO-KATAGAMBOLA

2.1 L'existence des solutions

[7] Dans cette section nous indiquerons et prouverons les résultats principaux pour l'existence et l'unicité de solution de (2.1).

$$\begin{cases} {}^{c}D^{r.\beta}y(x) = \frac{\lambda\psi(x,y(x))}{(\int_a^b \psi(t,y(t)dt)^2}, r > 0, 0 < \beta < 1, x \in J = [a,b]\,, a \geq 0, \\ y(a) = y_a \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Lemme 2.1. *Le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante :*

$$y(x) = y_\alpha + \frac{r^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x^r - s^r)^{\beta-1} s^{r-1} h(s) ds$$

telle que

$$h(x) = \frac{\lambda\psi(x,y(x))}{(\int_a^b \psi(t,y(t)dt))^2}.$$

Preuve :

Par souci de brièveté nous posons :

$$N_x^\beta(s) = \frac{r^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)}(x^r - s^r)^{\beta-1}s^{r-1} \quad ,\text{et} \quad \psi(x) = \psi(x, y(x)).$$

Il est facile de vérifier que

$$\int_a^x N_x^\beta(s)ds \leq \int_a^b N_b^\beta(s)ds = N^*.$$

Avant de commencer d'établir le résultat fondamental, on va transformer le Problème (2.1) au problème du point fixe, pour l'opérateur $\tau : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ défini par :

$$\tau_y(x) = y_\alpha + \lambda \int_a^x \frac{\psi_y(s)N_x^\beta(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2}ds, \tag{2.2}$$

et on pose $S_\delta = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : ||y|| \leq \delta\}$.
Nous allons développer résultat du l'existence par l'application du Théorème 1.5 .

Théorème 2.1. *Supposons que :*
(A_1) : ψ *est continue,*
(A_2) : $|\psi_{y_2}(x) - \psi_{y_1}(x)| \leq k|y_2 - y_1|, k > 0$ *, pour tout* $x \in J$ *et* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$*,*
(A_3) : $0 < c \leq \psi_y(x)$*, pour tout* $x \in J$ *et* $y \in \mathbb{R}$*.*
Alors le Problème(2.1) admet au moins une solution.

Preuve : La preuve est donnée par des étapes.
1. τ transforme tout ensemble borné à un ensemble borné dans $C(J, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
|\tau_y(x)| \leq \;& |y_\alpha| \; + \lambda \int_a^x \frac{|\psi_y(s)|N_x^\beta(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2}ds \\
\leq \;& |y_\alpha| \; + \frac{\lambda}{(c(b-a))^2} \int_a^x (|\psi_y(s) - \psi_0(s)| + |\psi_0(s)|)N_x^\beta(s)ds \\
\leq \;& |y_\alpha| \; + \frac{\lambda(k||y|| + \max_{a \in J} |\psi_0(s)|)}{(c(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s)ds \\
\leq \;& |y_\alpha| \; + \frac{\lambda(k||y|| + \psi_0^*)}{(c(b-a))^2} \int_a^b N_b^\beta(s)ds, (\psi_0^* = \max_{a \in J} |\psi_0(s)|) \\
\leq \;& |y_\alpha| \; + \frac{\lambda(k\delta + \psi_0^*)N^*}{(c(b-a))^2},
\end{aligned}$$

donc

$$||\tau_y|| < \infty.$$

2. τ est continue
Soit $\{y_n\}$ une suite convergente vers y. Alors pour tout $x \in J$, on a

$$\begin{aligned}
&|\tau_{y_n}(x) - \tau_y(x)| \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left| \frac{\psi_{y_n}(s)}{(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2} - \frac{\psi_y(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} \right| ds \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left[\frac{|\psi_{y_n}(s) - \psi_y(s)|}{(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2} + \left| \frac{\psi_y(s)}{(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2} - \frac{\psi_y(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} \right| \right] ds \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left[\frac{k|y_n(s) - y(s)|}{(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2} + \left| \frac{(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2 - (\int_a^b \psi_y(t)dt)^2}{(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} \right| |\psi_y(s)| \right] ds \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left[\frac{k|y_n(s) - y(s)|}{(c(b-a))^2} + \frac{k||y|| + \psi_0^*}{(c(b-a))^4} \left| (\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt)^2 - (\int_a^b \psi_y(t)dt)^2 \right| \right] ds \\
&\leq \frac{\lambda}{(c(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) \Bigg[k|y_n(s) - y(s)| \\
&+ \frac{k||y|| + \psi_0^*}{(c(b-a))^2} \left| \left(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt - \psi_y(t)dt \right) \left(\int_a^b \psi_{y_n}(t)dt + \psi_y(t)dt \right) \right| \Bigg] ds \\
&\leq \frac{\lambda}{(c(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) \left[k|y_n(s) - y(s)| + \frac{2(k||y|| + \psi_0^*)^2}{(c^2(b-a))} \int_a^b |\psi_{y_n}(t)dt - \psi_y(t)|dt \right] ds \\
&\leq \frac{\lambda k}{(c(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) \left(1 + \frac{2(k||y|| + \psi_0^*)^2}{c^2} \right) |y_n(s) - y(s)| ds \\
&\leq \frac{\lambda k(c^2 + 2(k||y|| + \psi_0^*)^2)}{(c^2(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) |y_n(s) - y(s)| ds \\
&\leq \frac{\lambda k(c^2 + 2(k||y|| + \psi_0^*)^2) N^*}{(c^2(b-a))^2} |y_n(s) - y(s)|.
\end{aligned}$$

Alors

$$||\tau_{y_n}(x) - \tau_y(x)|| \leq \frac{\lambda k(c^2 + 2(k||y|| + \psi_0^*)^2) N^*}{(c^2(b-a))^2} ||y_n - y||.$$

Puisque $y_n \to y$, on a $||\tau_{y_n} - \tau_y|| \to 0$. Comme $n \to \infty$, par conséquent, τ est continue.

3. τ transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C(J,\mathbb{R})$.
Soit $y \in S_\delta$. Pour tout $x_1, x_2 \in J$avec $x_1 < x_2$, on obtient :

$$\begin{array}{ll}
|\tau_y(x_1) - \tau_y(x_2)| & \\
\leq & \lambda \displaystyle\int_a^{x_2} \frac{|\psi_y(s)|N_{x_2}^\beta(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} ds - \lambda \int_a^{x_1} \frac{|\psi_y(s)|N_{x_1}^\beta(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} ds \\
\leq & \displaystyle\frac{\lambda}{(c(b-a))^2} \left(\int_a^{x_2} |\psi_y(s)|N_{x_2}^\beta(s)ds - \int_a^{x_1} |\psi_y(s)|N_{x_1}^\beta(s)ds \right) \\
\leq & \displaystyle\frac{\lambda}{(c(b-a))^2} \left(\int_a^{x_1} (N_{x_2}^\beta(s) - N_{x_1}^\beta(s))|\psi_y(s)|ds + \int_{x_1}^{x_2} |\psi_y(s)|N_{x_1}^\beta(s)ds \right) \\
\leq & \displaystyle\frac{\lambda(k||y|| + \psi_0^*)}{(c(b-a))^2} \left(\int_a^{x_1} (N_{x_2}^\beta(s) - N_{x_1}^\beta(s))ds + \int_{x_1}^{x_2} N_{x_2}^\beta(s)ds \right) \\
\leq & \displaystyle\frac{\lambda(k\delta + \psi_0^*)}{(c(b-a))^2} \left[2(x_2^r - x_1^r)^\beta + (x_1^r - a^r)^\beta - (x_2^r - a^r)^\beta \right].
\end{array}$$

Puisque $x_1 \to x_2$, le membre droit tend vert zéro, et nous concluons que $\tau(s)$ est relativement compact.
4. Limite bornée.
Nous montrons qu'il existe un ensemble ouvert $S \subset C(J,\mathbb{R})$ avec $y \neq \mu\tau(y)$ ou $\mu \in]0,1[$ et $y \in \partial S$. Soit $y \in \mu\tau(y)$, avec $\mu \in]0,1[$. Alors pour tout $x \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|y(x)| &\leq |y_a| + \lambda \int_a^x \frac{|\psi_y(s)|N_x^\beta(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} ds \\
&\leq |y_\alpha| + \frac{\lambda(k||y|| + \max_{a\in J}|\psi_0(s)|)}{(c(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s)ds \\
&\leq |y_\alpha| + \frac{\lambda(k||y|| + \psi_0^*)}{(c(b-a))^2} \int_a^b N_b^\beta(s)ds \\
&\leq |y_\alpha| + \frac{\lambda(k\delta + \psi_0^*)N^*}{(c(b-a))^2} := L,
\end{aligned}$$

donc

$$||y|| \leq L.$$

Soit

$$S = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : ||y|| < L+1\}.$$

On choisis un ensemble équivalent à S, il existe $y \in \partial S$, tel que $y = \mu\tau(y)$, pour $\mu \in]0,1[$. Par conséquence du Théorème 1.5 de l'alternative non linéaire du point fixe de Leray-Schouder, τ a un point fixe $y \in S$ qui est la solution du problème (2.1) .
La deuxième méthode est basée sur le Théorème 1.6.

Théorème 2.2. *Supposons* (A_1, A_2) *et* (A_3) *de Théorème 2.1 si*

$$\frac{|y_a|(c(b-a))^2 + \lambda\psi_0^* N^*}{(c(b-a)^2 - \lambda K N^*} < \delta, \tag{2.3}$$

alors le problème (2.1) admet au moins une solution.
Preuve : Encore, on fait la preuve en quelques étapes.
1. Nous avons déjà prouvé que τ est continue.
2. $\tau(S_\delta) \subset S_\delta$.
Pour chaque $t \in J$, et $y \in S_\delta$, on a

$$\begin{aligned} |\tau_y(x)| &\leq |y_a| + \lambda \int_a^x \frac{|\psi_y(s)| N_x^\beta(s)}{(\int_a^b \psi_y(t)dt)^2} ds \\ &\leq |y_\alpha| + \frac{\lambda(k||y|| + \psi_0^*)}{(c(b-a))^2} \int_a^b N_b^\beta(s) ds \\ &\leq |y_\alpha| + \frac{\lambda(k\delta + \psi_0^*) N^*}{(c(b-a))^2} \end{aligned}$$

grâce à (2.3), on a

$$|\tau_y(x)| \leq \delta.$$

Par suite $\tau(S_\delta) \subset S_\delta$.
3. $\tau(S_\delta)$ est relativement compact.
$\tau(S_\delta)$ est uniformément bornée ($\tau(S_\delta) \subset S_\delta$), et en vertu de l'étape 3 de la preuve du Théorème 2.1, on déduit que $\tau(S_\delta)$ est relativement compact. par conséquence le Théorème 1.6 garantit que le problème (2.1) admet une solution .
On utilise le Théorème 1.8 pour démontrer l'unicité de la solution.

Théorème 2.3. *Supposons* (A_1) *et* (A_2) *du Théorème 2.1 et la condition*
$(A_4) : 0 < c_1 \leq \psi(x, y) < c_2$.
De plus, si

$$N := \frac{k\lambda(c_1^2 + c_2^2)N^*}{(c_1^2(b-a))^2} < 1, \tag{2.4}$$

le problème (2.1) admet une unique solution .

Preuve : Montrons que τ définie par (2.2) est une contraction. Soit $y_1, y_2 \in C(J, \mathbb{R})$ pour tout $x \in J$, on a

$$\begin{aligned}
&|\tau_{y_2}(x) - \tau_{y_1}(x)| \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left| \frac{\psi_{y_2}(s)}{(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2} - \frac{\psi_{y_1}(s)}{(\int_a^b \psi_{y_1}(t)dt)^2} \right| ds \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left[\frac{|\psi_{y_2}(s) - \psi_{y_1}(s)|}{(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2} + \left| \frac{\psi_{y_1}(s)}{(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2} - \frac{\psi_{y_1}(s)}{(\int_a^b \psi_{y_1}(t)dt)^2} \right| \right] ds \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left[\frac{k|y_2(s) - y_1(s)|}{(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2} + \left| \frac{(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2 - (\int_a^b \psi_{y_1}(t)dt)^2}{(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2 (\int_a^b \psi_{y_1}(t)dt)^2} \right| |\psi_{y_1}(s)| \right] ds \\
&\leq \lambda \int_a^x N_x^\beta(s) \left[\frac{k|y_2(s) - y_1(s)|}{(c_1(b-a))^2} + \frac{c_2}{(c_1(b-a))^4} \left| (\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt)^2 - (\int_a^b \psi_{y_1}(t)dt)^2 \right| \right] ds \\
&\leq \frac{\lambda}{(c_1(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) \Bigg[k|y_n(s) - y(s)| \\
&+ \frac{c_2}{(c_1(b-a))^2} \left| \left(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt - \psi_{y_1}(t)dt \right) \left(\int_a^b \psi_{y_2}(t)dt + \psi_{y_1}(t)dt \right) \right| \Bigg] ds \\
&\leq \frac{\lambda}{(c_1(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) \left[k|y_2(s) - y_1(s)| + \frac{2c_2^2}{(c_1^2(b-a))} \int_a^b |\psi_{y_2}(t)dt - \psi_{y_1}(t)|dt \right] ds \\
&\leq \frac{\lambda k}{(c_1^2(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) \left(1 + \frac{2c_2^2}{c_1^2} \right) |y_2(s) - y_1(s)| ds \\
&\leq \frac{\lambda k(c_1^2 + 2c_2^2)}{(c_1^2(b-a))^2} \int_a^x N_x^\beta(s) |y_2(s) - y_1(s)| ds \\
&\leq \frac{\lambda k(c_1^2 + 2c_2^2)^2)N^*}{(c_1^2(b-a))^2} |y_2(s) - y_1(s)|.
\end{aligned}$$

Donc

$$||\tau_{y_2}(x) - \tau_{y_1}(x)|| \leq N||y_2 - y_1||.$$

Selon (2.4),τ est une contraction, par conséquent le Théorème 1.8 assure que le problème (2.1) admet une unique solution.

2.2 Exemples :

Donnons deux exemples pour illustrer des résultats.

Exemple 2.1. *Considérons le problème fractionnaire*

$$ {}^cD^{\frac{2}{3},\frac{1}{2}}y(x) = \frac{\frac{4}{\pi+x} + \frac{2}{5}\sin 2|y(x)|}{\left[\int_0^1 \left(\frac{2}{\pi+t} + \frac{1}{5}\sin 2|y(t)|\right) dt\right]^2}, x \in [0, \frac{\pi}{2}], \tag{2.5} $$

$$ y(0) = \frac{\pi}{6}. \tag{2.6} $$

Soit

$$ \psi(x,y) = \frac{2}{\pi+x}\frac{1}{5}\sin 2y, x \in [0, \frac{\pi}{2}], y \in \mathbb{R}^+. $$

Il est évident que ψ est continue , pour chaque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$ on a

$$ \begin{aligned} |\psi(x,y_2) - \psi(x,y_1)| &= \frac{1}{5}|\sin 2y_2(t) - \sin 2y_1(t)| \\ &\leq \frac{2}{5}|y_2 - y_1|. \end{aligned} $$

Donc l'hypothèse (A_2) vaut pour $k = \frac{2}{5}$ on peut vérifier ça

$$ \psi(x,y) \geq \frac{4}{3\pi}. $$

Alors par Théorème 2.1, nous concluons que le problème (2.5) a au moins une solution sur $C([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$.

Exemple 2.2.

$$ {}^cD^{2,\frac{1}{2}}y(x) = \frac{\frac{2+x}{2+2x^2} + \frac{|y(x)|}{6+2|y(x)|}}{\left[\int_0^1 \left(\frac{2+t}{2+2t^2} + \frac{|y(t)|}{6+2|y(t)|}\right) dt\right]^2}, x \in [0,1], \tag{2.7} $$

$$ y(0) = 2. \tag{2.8} $$

Soit

$$ \psi(x,y) = \frac{2+x}{1+x^2} + \frac{y}{3+y}, x \in [0,1], y \in \mathbb{R}^+, $$

il est claire que la fonction ψ est continue, pour chaque $x \in [0,1]$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned}
|\psi(x,y_2) - \psi(x,y_1)| &= |\frac{y_2}{3+y_2} - \frac{y_1}{3+y_1}| \\
&\leq \frac{|3y_2 - 3y_1|}{(3+y_2)(3+y_1)} \\
&\leq \frac{1}{3}|y_2 - y_1|
\end{aligned}$$

donc l'hypothèse (A_2) vaut pour $k = \frac{1}{3}$ on peut facilement voir ça

$$\frac{3}{2} \leq \psi(x,y) \leq \frac{7}{2}.$$

Donc nous obtenons

$$N^* = \frac{2^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

et

$$N = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left((\frac{3}{2})^2 + 2(\frac{7}{2})^2\right) N^*}{\left((\frac{3}{2})^2\right)^2} = \frac{214}{243} \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1.$$

Par conséquent du Théorème 2.3 le problème (2.7) admet une unique solution dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

CHAPITRE 3

L'EXISTENCE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME AUX LIMITES, AU SENS DE KATUGAMPOLA

Dans ce chapitre, nous traitons l'existence des solutions pour deux problèmes aux limites, non linéaire et implicite, des équations différentielles fractionnaires comme suivant :

$$\begin{cases} {}^\rho D^v w(t) + \phi(t, w(t)) = 0, \quad t \in J = [a, b], 1 < v < 2, \rho > 0, \\ w(a) = w(b) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} {}^\rho D^v w(t) + \Psi(t, w(t), {}^\rho D^v w(t)) = 0, \quad t \in J = [a, b], 1 < v < 2, \rho > 0, \\ w(a) = w(b) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où ${}^\rho D^v$ est la dérivée fractionnaire de Katugampola d'ordre $v, \phi : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Psi : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données et $0 \leq a < b < \infty$.

3.1 Résultats principaux

[2] Pour l'existence des solutions des problèmes (3.1)et (3.2) nous avons besoins des lemmes auxiliaires suivants.

Lemme 3.1. *Soient* $1 < v < 2, \rho > 0,$*et* $\chi \in C(J, \mathbb{R})$ *une fonction continue. Alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^{\rho}D^{\nu}\omega(t) = -\chi(t) \quad t \in J, 1 < \upsilon < 2, \rho > 0 \\ \omega(a) = \omega(b) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

admet une unique solution donnée par

$$\omega(t) = \int_a^b G(t,s)\chi(s)ds$$

où $G(t,s) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} \begin{cases} \left[\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1}(b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} - (t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}\right] s^{\rho-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1}(b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}s^{\rho-1}, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{3.4}$$

Preuve. Soit ω une solution de (3.3). D'après les lemmes 1.2 et 1.3 on obtient

$$\omega(t) = -\frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} \int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}s^{\rho-1}\chi(s)ds + a_0\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\upsilon-1} + a_1\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\upsilon-2}.$$

Après avoir appliquer les conditions aux limites, nous obtenons $a_1 = 0$, et

$$a_0 = \frac{1}{(b^\rho - a^\rho)^{\upsilon-1}\Gamma(\upsilon)} \int_a^b (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}s^{\rho-1}\chi(s)ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} \omega(t) = \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}[&\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} \int_a^b (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}s^{\rho-1}\chi(s)ds \\ &- \int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}s^{\rho-1}\chi(s)ds]. \end{aligned}$$

On peut écrire $\omega(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}[\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} \int_a^t (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}\chi(s)ds \\
&- \int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}\chi(s)ds \\
&+ \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} \int_t^b (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}\chi(s)ds] \\
&= \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}[\left(\int_a^t \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} - (t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}\right) s^{\rho-1}\chi(s)ds \\
&+ \int_t^b \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}\chi(s)ds].
\end{aligned}$$

Ça donne $G(t,s)$ de (3.4).

Lemme 3.2. *La fonction $G(t,s)$ donnée par (3.4) avec $1 < a < 2, \rho > 0$ satisfait les propriétés suivantes*

1. $G(t,s) \geq 0$, *pour* $\quad t,s \in J$,
2. $\sup\limits_{t\in J} G(t,s) = \sup\limits_{s\in J} G(s,s) \leq \dfrac{b^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)} \left[\rho(b^\rho - a^\rho)\right]^{\upsilon-1}$.

Preuve. On peut écrire la fonction $G(t,s)$ définie par (3.4) comme suite :

$$G(t,s) = \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} \begin{cases} \left[\left(\dfrac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} - \left(\dfrac{t^\rho - s^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-1}\right] (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}, & a \leq s \leq t \leq b \\ \left(\dfrac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}, & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases}$$

On définit

$$G(t,s) = \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} \begin{cases} G_1(t,s), & a \leq s \leq t \leq b \\ G_2(t,s), & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases}$$

On démontrons que $G(t,s) \geq 0$.
Il est évident pour $G_2(t,s) \geq 0$, et pour $t,s \in [a,b]$ on a

$$\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} = \left[1 - \frac{b^\rho - t^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right]^{\upsilon-1},$$

$$\left(\frac{t^\rho - s^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-1} = \left[1 - \frac{b^\rho - t^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right]^{\upsilon-1},$$

et de

$$b^\rho - a^\rho \geq b^\rho - s^\rho$$

ensuite

$$\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} - \left(\frac{t^\rho - s^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-1} \geq 0,$$

ce qui implique que $G_1(t,s) \geq 0$. Nous avons donc établi que $G(t,s) \geq 0$.
Pour montrer que $G(t,s) \leq G(s,s)$ pour chaque $s, t \in J$ et $t \leq s$ on a

$$\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} = \frac{\rho(\upsilon-1)t^{\rho-1}}{(b^\rho - a^\rho)}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-2}(b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}s^{\rho-1} \geq 0.$$

Ainsi G est croissante sur $a \leq t \leq s \leq b$, donc on obtient

$$G(t,s) \leq G(s,s) \quad pour \quad tout \quad s,t \in [a,b], \quad avec \quad t \leq s. \tag{3.5}$$

Pour tout $s, t \in J$ et $s \leq t$ on obtient :

$$\frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} = \rho(\upsilon-1)\left[\frac{(t^\rho - a^\rho)^{\upsilon-2}}{(b^\rho - a^\rho)^{\upsilon-1}} - \frac{(t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-2}}{(b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}}\right](b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}(ts)^{\rho-1}$$

$$= \rho(\upsilon-1)\left[\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{t^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-2} - \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-1}\right]$$

$$\times\frac{(t^\rho - s^\rho)^{\upsilon-2}}{(b^\rho - a^\rho)^{\upsilon-1}}(b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1}(ts)^{\rho-1}.$$

Il est évident que

$$\frac{t^\rho - a^\rho}{t^\rho - s^\rho} \geq 1, \frac{b^\rho - a^\rho}{b^\rho - s^\rho} \geq 1$$

et donc

$$\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{t^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-2} \leq 1, \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-1} \geq 1.$$

Alors

$$\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{t^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-2} - \left(\frac{b^\rho - a^\rho}{b^\rho - s^\rho}\right)^{\upsilon-1} \leq 0.$$

Ce qui implique

$$\frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} \leq 0,$$

et G est décroissante sur $a \leq s \leq t \leq b$. Donc on obtient

$$G(t,s) \leq G(s,s) \quad pour \quad tout \quad s,t \in [a,b], avec \quad s \leq t. \tag{3.6}$$

D’après (3.5) et (3.6) on déduit que

$$G(t,s) \leq G(s,s) = \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)} \left(\frac{s^\rho - a^\rho}{b^\rho - a^\rho}\right)^{\upsilon-1} (b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1}. \tag{3.7}$$

Maintenant, il reste à montrer que $G(t,s) \leq \dfrac{b^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)} \left[\rho(b^\rho - a^\rho)\right]^{\upsilon-1}$. D’après (3.7) on trouve

$$\begin{aligned}
\sup_{s,t\in[a,b]} G(t,s) &\leq \sup_{s\in[a,b]} G(s,s) \\
&\leq \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}(b^\rho - s^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1} \\
&\leq \frac{\rho^{1-\upsilon}}{\Gamma(\upsilon)}(b^\rho - a^\rho)^{\upsilon-1} s^{\rho-1} \\
&\leq \frac{b^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)}[\rho(b^\rho - a^\rho)]^{\upsilon-1}.
\end{aligned}$$

Donc nous avons terminé la preuve.

3.1.1 L'existence des solutions pour un problème non linéaire

Dans cette partie on s'intéresse à l'existence de solution du problème (3.1).

Définition 3.1. *On dit que la fonction* $\omega \in C^1(J, \mathbb{R})$ *est une solution de (3.1) si* ω *satisfait l'équation* ${}^\rho D^\upsilon \omega(t) = -\phi(t, \omega(t))$ *sur* $[a, b]$, *et la condition* $\omega(a) = \omega(b) = 0$.
Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.1. *On suppose que*
$(C1)$ ϕ *est continue.*
$(C2)$ *Il existe une constante* $K > 0$ *tel que*

$$|\phi(t, \omega_2) - \phi(t, \omega_1)| \leq K|\omega_2 - \omega_1|$$

pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [a, b]$.
Si

$$\gamma := \frac{(b-a)Kb^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)}[\rho(b^\rho - a^\rho)]^{\upsilon-1} < 1.$$

Donc il existe une unique solution du problème (3.1).

Preuve. On transforme le problème (3.1) en problème à point fixe . On considère l'opérateur $\psi : C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ défini par

$$\psi(\omega)(t) = \int_a^b G(t, s)\phi(s, \omega(s))ds. \tag{3.8}$$

Soit $G(t, s)$ la fonction de Green donnée par (3.4). Il est claire que le point fixe de ψ est une solution du problème (3.1). On montre que ψ est une contraction.
Soit $\omega_1, \omega_2 \in C([a, b], \mathbb{R})$. Pour $t \in [a, b]$ on obtient

$$\begin{aligned}
|(\psi\omega_2)(t) - (\psi\omega_1)(t)| &\leq \int_a^b G(t, s)|(\phi(s, \omega_2(s)) - \phi(s, \omega_1(s))|ds \\
&\leq K \int_a^b G(t, s)|\omega_2(s) - \omega_1(s)|ds \\
&\leq K \frac{b^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)}[\rho(b^{\rho - a^\rho})]^{\upsilon-1} \int_a^b |\omega_2(s) - \omega_1(s)|ds \\
&\leq \frac{(b-a)Kb^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)}[\rho(b^\rho - a^\rho)]^{\upsilon-1}\|\omega_2 - \omega_1\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc
$$\|\psi\omega_2 - \psi\omega_1\|_\infty \leq \gamma\|\omega_2 - \omega_1\|_\infty.$$
Comme $\gamma < 1$, l'opérateur ψ est contractant. D'après le théorème du point fixe de Banach, le problème (3.1) admet une unique solution.

Maintenant nous donnons un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Schauder.
Introduisons d'abord B_δ, le sous-ensemble fermé, borné et convexe de $C(J,\mathbb{R})$, défini par
$$B_\delta := \{\omega \in C(J,\mathbb{R}) : \|\omega\|_\infty \leq \delta\}.$$

Théorème 3.2. *On suppose que* $(C1)$ *et* $(C2)$ *de Théorème 3.1 sont vérifiés, et*
$$\frac{\gamma \max_{s\in J} |\phi(s,0)|}{K(1-\gamma)} < \delta \tag{3.9}$$
Alors le problème (3.1) admet au moins une solution.

Preuve. Soit l'opérateur ψ défini à partir de (3.8). On va montrer que ψ satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder. La preuve sera donnée dans ces étapes.

L'étape 1 : ψ est continue.
Soit $\{\omega_n\}$ une suite telle que $\omega_n \longrightarrow \omega$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$,
$$\begin{aligned}
|(\psi\omega_n)(t) - (\psi\omega_n)(t)| &\leq \int_a^b G(t,s)|(\phi(s,\omega_n(s)) - \phi(s,\omega(s))|ds \\
&\leq K\int_a^b G(t,s)|\omega_n(s) - \omega(s)|ds \\
&\leq \frac{(b-a)Kb^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)}[\rho(b^\rho - a^\rho)]^{\upsilon-1}\|\omega_n - \omega\|_\infty.
\end{aligned}$$
Puisque $\omega_n \longrightarrow \omega$, on obtient
$$\|\psi(\omega_n) - \psi(\omega)\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$
Par conséquent ψ est continue

L'étape 2 : $\psi(B_\delta) \subset B_\delta$.
Soit $\omega \in B_\delta$. On montre que $\psi\omega \in B_\delta$. Pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|(\psi\omega)(t)| &= \left|\int_a^b G(t,s)\phi(s,\omega(s))ds\right| \\
&\leq \int_a^b G(t,s)|\phi(s,\omega(s)) - \phi(s,0) + \phi(s,0)|ds \\
&\leq \int_a^b G(t,s)\left(|\phi(s,\omega(s)) - \phi(s,0)| + |\phi(s,0)|\right)ds \\
&\leq \int_a^b G(t,s)\left(K\|\omega\|_\infty + \max_{s\in J}|\phi(s,0)|\right)ds \\
&\leq \int_a^b G(t,s)\left(K\delta + \max_{s\in J}|\phi(s,0)|\right)ds \\
&\leq \frac{(b-a)b^{\rho-1}}{\Gamma(\upsilon)}\left[\rho(b^\rho - a^\rho)\right]^{\upsilon-1}\left(K\delta + \max_{s\in J}|\phi(s,0)|\right)
\end{aligned}$$

alors d'après (3.9), on a

$$\|\psi\omega\|_\infty \leq \delta,$$

ce qui signifie que $\psi(B_\delta) \leq B_\delta$.

L'étape 3 : $\psi(B_\delta)$ est un ensemble équicontinu de $C(J,\mathbb{R})$.
Soit $\omega \in B_\delta, t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
|(\psi\omega)(t_2) - (\psi\omega)(t_1)| &= \left|\int_a^b G(t_2,s)\phi(s,\omega(s))ds - \int_a^b G(t_1,s)\phi(s,\omega(s))ds\right| \\
&\leq \int_a^b |G(t_2,s) - G(t_1,s)||\phi(s,\omega(s))|ds \\
&\leq \left(K\delta + \max_{s\in J}|\phi(s,0)|\right)\int_a^b |G(t_2,s) - G(t_1,s)|ds.
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \longrightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, ψ est complètement continu. Par conséquent on déduit à partir de théorème du point fixe de Schauder que ψ a un point fixe ω qui est la solution du problème (3.1).

3.1.2 L'existence des solutions pour un problème implicite

dans cette partie nous intéressons à l'existence des solutions au problème (3.2).

Définition 3.2. *Une fonction $\omega \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution de (3.2) si y satisfait l'équation ${}^\rho D^v\omega(t) + \phi(t,\omega(t),{}^\rho D^v\omega(t)) = 0$ sur$[a,b]$, et la condition $\omega(a) = \omega(b)$.*

Théorème 3.3. *Supposons que*
(A1) Ψ est continue.
(A2) Il existe une constante $k^* > 0$ et $0 < l^* < 1$ tel que

$$|\Psi(t,\omega_2) - \Psi(t,\omega_2)| \leq k^*|\omega_2 - \omega_1| + l^*|\omega_2 - \omega_1|$$

pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, et $t_i n[a,b]$.
Alors le problème (3.2) admet au moins une solution.

Preuve. Nous démontrons que $\mathcal{N}$ satisfait les hypothèses de théorème du point fixe de Schauder. On transforme le problème (3.2) en un problème à point fixe. On considère l'opérateur
$\mathcal{N} : C([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow C([a,b],\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{N}(\omega(t)) = \int_a^b G(t,s)\sigma(s)ds, \tag{3.10}$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green donnée par (3.4) et $\sigma(s) = \Psi(s,\omega(s),\sigma(s))$. Il est clair que les points fixes de $\mathcal{N}$ sont des solutions du problème (3.2). Soit $\mathcal{D}_r$ un sous ensemble fermé et convexe de $C(J,\mathbb{R})$ défini comme :

$$\mathcal{D}_r = \{\omega \in C(J,\mathbb{R}) : \|\omega\|_\infty \leq r\}.$$

Le reste de la preuve sera donné en quatre étapes.
L'étape 1 : $\mathcal{N}$ est continue
Soit$\{\omega_n\}$ une suite telle que $\omega_n \longrightarrow \omega$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Pour tout $t \in J$, on a

$$(\mathcal{N}\omega_n)(t) - (\mathcal{N}\omega)(t) = \int_a^b G(t,s)(\sigma_n(s) - \sigma(s))ds,$$

où

$$\sigma_n(s) = \Psi(s,\omega_n(s),\sigma_n(s)),$$

et

$$\sigma(s) = \Psi(s, \omega(s), \sigma(s)).$$

Selon $(A2)$ nous avons

$$|\sigma_n(s) - \sigma(s)| \leq k^*|\omega_n(s) - \omega(s)| + l^*|\sigma_n(s) - \sigma(s)|,$$

donc

$$|\sigma_n(s) - \sigma(s)| \leq \frac{k^*}{1-l^*}|\omega_n(s) - \omega(s)|,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{N}\omega_n)(t) - (\mathcal{N}\omega)(t)| &= \int_a^b G(t,s)|\sigma_n(s) - \sigma(s)|ds \\
&\leq \frac{k^*}{1-l^*}\int_a^b G(t,s)|\omega_n(s) - \omega(s)|ds \\
&\leq \frac{(b-a)k^*b^{\rho-1}}{(1-l^*)\Gamma(\upsilon)}\left[\rho(b^\rho - a^\rho)\right]^{\upsilon-1}\|\omega_n(s) - \omega(s)\|_\infty.
\end{aligned}$$

puisque $\omega_n \longrightarrow \omega$ on a $\|(\mathcal{N}\omega_n) - (\mathcal{N}\omega)\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.
Donc $\mathcal{N}$ est continue.

L'étape 2 : $\mathcal{N}$ transforme tout borné à un borné de $C(J,\mathbb{R})$.
Soit $\omega \in \mathcal{D}_r$. Pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{N}\omega)(t)| &= \left|\int_a^b G(t,s)\sigma(s)ds\right| \\
&\leq \int_a^b G(t,s)|\sigma(s)|ds.
\end{aligned}$$

D'après (A2) on a

$$\begin{aligned}
|\sigma(s)| &= |\Psi(s,\omega(s),\sigma(s)) - \Psi(s,0,0) + \Psi(s,0,0)| \\
&\leq k^*|\omega(s)| + l^*|\sigma(s)| + |\Psi(s,0,0)| \\
&\leq \frac{k^*|\omega(s)| + |\Psi(s,0,0)|}{1-l^*} \\
&\leq \frac{k^*\|\omega\|_\infty + \max_{s\in J}|\Psi(s,0,0)|}{1-l^*} \\
&\leq \frac{k^*\|\omega\|_\infty + \Psi^*}{1-l^*},
\end{aligned}$$

où

$$\Psi^* = \max_{s \in J} |\Psi(s, 0, 0)|.$$

Alors

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{N}\omega)(t)| &\leq \frac{k^*\|\omega\|_\infty + \Psi^*}{1 - l^*} \int_a^b G(t, s) ds \\
&\leq \frac{k^*\|\omega\|_\infty + \Psi^*}{1 - l^*} (b - a) \sup_{s,t \in J} G(s, t) \\
&\leq \frac{(b - a)\left(k^* r + \Psi^*\right)}{(1 - l^*)\Gamma(\upsilon)} \left[\rho(b^\rho - a^\rho)\right]^{\upsilon - 1} := N.
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\|\mathcal{N}\omega\|_\infty \leq N,$$

Ce qui implique que $\mathcal{N}$ transforme les ensembles bornés en ensemble borné de $C([a, b], \mathbb{R})$.

L'étape 3 : $\mathcal{N}$ transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus de $C([a, b], \mathbb{R})$.
En particulier $\mathcal{N}$ transforme $\mathcal{D}_r$ en ensemble équicontinu de $C([a, b], \mathbb{R})$.
Soit $\omega \in \mathcal{D}_r$, et $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{N}\omega)(t_1) - (\mathcal{N}\omega)(t_2)| &= \left| \int_a^b G(t_2, s)\sigma(s) ds - \int_a^b G(t_1, s)\sigma(s) ds \right| \\
&\leq \int_a^b (G(t_2, s) - G(t_1, s)|\sigma(s)| ds \\
&\leq \frac{k^*\|\omega\|_\infty + \Psi^*}{1 - l^*} \int_a^b \left(G(t_2, s) - G(t_1, s)\right) ds.
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \longrightarrow t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. D'après le théorème de Arzelà-Ascoli, $\mathcal{N}$ est complètement continue.
L'étape 4 : Limite bornée.
Il reste à montrer que

$$\mathcal{S} = \{\omega \in C([a, b], \mathbb{R}) : \omega = \lambda \mathcal{N}(\omega), avec 0 < \lambda < 1\}$$

est borné. Soit $\omega \in \mathcal{S}$, et $\lambda \in (0,1)$ tel que $\omega = \lambda \mathcal{N}(\omega)$.
Pour tout $t \in J$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|\omega(t)| =& |\lambda \mathcal{N}(\omega)(t)| \\
=& \left| \lambda \int_a^b G(t,s)\sigma(s)ds \right| \\
\leq& \int_a^b G(t,s)|\sigma(s)|ds \\
\leq& \frac{(b-a)\left[\rho(b^\rho - a^\rho)\right]^{\upsilon-1} b^{\rho-1}}{(1-l^*)\Gamma(\upsilon)} (k^*\gamma + \Psi^*)
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\omega\|_\infty < \infty.$$

Ceci montre que $\mathcal{S}$ est borné. C'est la conséquence du théorème du point fixe de Schauder, on déduit que $\mathcal{N}$ a un point fixe qui est la solution du problème (3.2).

3.2 Exemples

On donne deux exercices avec des solution

Exemple 3.1. *On considère le problème aux limites non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{\frac{1}{3}}D^{\frac{3}{2}}\omega(t) + \dfrac{\sin \omega(t)}{4 + \cos \omega(t)} = 0 \quad t \in [0,\pi], \\ \omega(0) = \omega(\pi) = 0 \end{cases} . \tag{3.11}$$

Soit

$$\phi(t,\omega) = \frac{\sin \omega}{4 + \cos \omega},$$

il est clair que ϕ est continue pour tout $t \in [0,\pi]$, et $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ on trouve

$$
\begin{aligned}
|\phi(t,\omega_2)-\phi(t,\omega_1)| &= \left|\frac{\sin\omega_2}{4+\cos\omega} - \frac{\sin\omega_1}{4+\cos\omega_1}\right| \\
&= \frac{|4(\sin\omega_2-\sin\omega_1)+(\sin\omega_2\cos\omega_1-\sin\omega_1\cos\omega_2)|}{(4+\cos\omega_2)(4+\cos\omega_1)} \\
&\leq \frac{4|\sin\omega_2-\sin\omega_1|+|\sin(\omega_2-\omega_1)|}{(4+\cos\omega_2)(4+\cos\omega_1)} \\
&\leq \frac{1}{9}\left(4|\sin\omega_2-\sin\omega_1|+|\sin(\omega_2-\omega_1)|\right) \\
&\leq \frac{1}{9}\left(4|\omega_2-\omega_1|+|\omega_2-\omega_1|\right) \\
&\leq \frac{5}{9}|\omega_2-\omega_1|.
\end{aligned}
$$

Alors l'hypothèse (C2) est valable pour $k=\frac{5}{9}$. Puisque

$$
\gamma = \frac{5\pi^{\frac{1}{3}}}{9\Gamma(\frac{3}{2})}\left[\frac{1}{3}(\pi^{\frac{1}{3}})\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{10}{9\sqrt{3}} < 1,
$$

on déduit par le Théorème 3.1 que le problème (3.11) a une unique solution.

Exemple 3.2. *On considère le problème de valeur limite implicite suivant :*

$$
\begin{cases}
{}^{\frac{1}{3}}D^{\frac{3}{2}}u(t) + \frac{1}{3}\sin^2 u(t) + \dfrac{|{}^{\frac{1}{3}}D^{\frac{3}{2}}u(t)|}{2+|{}^{\frac{1}{3}}D^{\frac{3}{2}}u(t)|} = 0 \quad t \in [0,1]. \\
u(0) = u(1) = 0.
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

On définit la fonction continue Ψ par

$$
\Psi(t,u,v) = \frac{1}{3}\sin^2 u + \frac{v}{2+v}, t \in [a,b], u \in \mathbb{R} \quad v \in [0,\infty).
$$

Pour tout $t \in [0,1], \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R} \quad$ *et* $\quad v_1, v_2 \in [0, \infty[$, *on trouve*

$$\begin{aligned}
|\Psi(t,u_2,v_2)-\Psi(t,u_1,v_1)| &= \left|\frac{1}{3}\sin^2 u_2 + \frac{v_2}{2+v_2} - \frac{1}{3}\sin^2 u_1 - \frac{v_1}{2+v_1}\right| \\
&\le \frac{1}{3}|\sin^2 u_2 - \sin^2 u_1| + \left|\frac{v_2}{2+v_2} - \frac{v_1}{2+v_1}\right| \\
&\le \frac{1}{3}|\sin u_2 - \sin u_1||\sin u_2 + \sin u_1| \\
&\quad + 2\left|\frac{v_2 - v_1}{(2+v_2)(2+v_1)}\right| \\
&\le \frac{2}{3}|\sin u_2 - \sin u_1| + \frac{1}{2}|v_2 - v_1| \\
&\le \frac{2}{3}|u_2 - u_1| + \frac{1}{2}|v_2 - v_1|.
\end{aligned}$$

Alors $(A2)$ *est vrai pour* $k^* = \frac{2}{3} \quad$ *et* $\quad l^* = \frac{1}{2}$. *D'après le Théorème 3.3, on déduit que le problème(3.12) admet au moins une solution.*

CHAPITRE 4

L'EXISTENCE DES SOLUTION DU PROBLÈME AUX LIMITES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

[8] Dans ce chapitre , nous considérons le probleme de valeur aux limites suivant pour les équations différentielles implicites au sens de Katugampola de la forme :

$$\begin{cases} {}^{\rho}D^{\alpha}u(t) = \Psi(t, u(t), {}^{\rho}D^{\alpha}u(t)), t \in J = [a, b], 1 < \alpha < 2, \rho > 0, \\ c_1u(a) - d_1u'(a) = u_1, \\ c_2u(b) - d_2u'(b) = u_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

où ${}^{\rho}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire généralisée d'ordre $\alpha, \Psi : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction donnée, $c_1, c_2, d_1, d_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ et $0 \leq a < b < \infty$.

4.1 Principaux résultats

Le lemme suivant est essentiel pour énoncer et prouver notre résultat principal.

Lemme 4.1. *Soient $1 < \alpha < 2$, $\rho > 0$ et $\psi \in C(J, \mathbb{R})$ une fonction continue. Le problème de valeur limite*

$$\begin{cases} {}^{\rho}D^{\alpha}u(t) = \psi(t), \quad t \in J \\ c_1u(a) - d_1u'(a) = u_1. \\ c_2u(b) - d_2u'(b) = u_2, \end{cases} \tag{4.2}$$

a une solution unique donnée par

$$u(t) = \frac{c_2 u_1}{c_1} - u_2 + \phi_{a.b}\sigma_t + \int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds,$$

où

$$K_t^\alpha(s) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(t^\rho - s^\rho)^{\alpha-1}s^{\rho-1}, \quad \sigma_t = \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1},$$

$$\phi_{a,b} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{c_2 u_1}{c_1} - u_2 + \int_a^b K_t^\alpha(s)\psi(s)ds\right), \quad K(s) = c_2 K_b^\alpha(s) - d_2 b^{\rho-1}K_b^{\alpha-1}(s),$$

et

$$\delta = d_2(\alpha-1)b^{\rho-1}\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-2} - c_2\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}.$$

Preuve. Soit u satisfait (4.2) alors , du Lemmes 1.2 et (1.3) on a :

$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 + a_1\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right) + \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t^\rho - s^\rho)^{\alpha-1}s^{\rho-1}\psi(s)ds \\ &= a_0 + a_1\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right) + \int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds. \end{aligned}$$

Alors

$$u'(t) = a_1(\alpha-1)t^{\rho-1}\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-2} + t^{\rho-1}\int_a^t K_t^{\alpha-1}(s)\psi(s)ds.$$

Pour cela

$$u(a) = a_0, \quad \text{et} \quad u'(a) = 0.$$

Alors on a

$$c_1 u(a) - d_1 u'(a) = c_1 a_0 = u_1,$$

il s'ensuit que

$$a_0 = \frac{u_1}{c_1}.$$

Dans l'autre coté nous avons

$$c_2 u(b) = c_2 a_0 + c_2 a_1\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} + c_2\int_a^b K_b^\alpha(s)\psi(s)ds$$

et

$$d_2 u'(b) = d_2 a_1(\alpha-1)b^{\rho-1}\left(\frac{b^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-2} + d_2 b^{\rho-1}\int_a^b K_b^{\alpha-1}(s)\psi(s)ds.$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
c_2u(b)-d_2u'(b) &= c_2a_0+c_2a_1\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}-d_2a_1(\alpha-1)b^{\rho-1}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-2}\\
&+ \int_a^b\left[c_2K_b^{\alpha-1}(s)-d_2b^{\rho-1}K_b^{\alpha-1}(s)\right]\psi(s)ds=u_2\\
&= \frac{c_2u_1}{c_1}+c_2a_1\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}-d_2a_1(\alpha-1)b^{\rho-1}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-2}\\
&+ \int_a^b\left[c_2K_b^{\alpha-1}(s)-d_2b^{\rho-1}K_b^{\alpha-1}(s)\right]\psi(s)ds=u_2\\
&= \frac{c_2u_1}{c_1}-a_1\left(d_2(\alpha-1)b^{\rho-1}\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-2}-c_2\left(\frac{b^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}\right)\\
&+ \int_a^b\left[c_2K_b^{\alpha-1}(s)-d_2b^{\rho-1}K_b^{\alpha-1}(s)\right]\psi(s)ds.
\end{aligned}$$

De $c_2u(b)-d_2u'(b)=u_2$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{c_2u_1}{c_1}-u_2+\int_a^b\left[c_2K_b^{\alpha-1}(s)-d_2b^{\rho-1}K_b^{\alpha-1}(s)\right]\psi(s)ds\right)\\
&= \frac{1}{\delta}\left[\frac{c_2u_1}{c_1}-u_2+\int_a^b\left(c_2K_b^{\alpha-1}(s)-d_2b^{\rho-1}K_b^{\alpha-1}(s)\right)\psi(s)ds\right]\\
&= \frac{1}{\delta}\left(\frac{c_2u_1}{c_1}-u_2+\int_a^b K(s)\psi(s)ds\right)=\phi_{a,b}.
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{c_2u_1}{c_1}-u_2+\phi_{a,b}\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}+\int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds\\
&= \frac{c_2u_1}{c_1}-u_2+\phi_{a,b}\sigma_t+\int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds.
\end{aligned}$$

Ensuite , nous pouvons accomplir le but souhaité ,qui complète la preuve .

A raison de simplicité, nous avons besoin de la proposition suivante qui est très utile dans ce qui suit.

Proposition 4.1. *Pour* $1 < \alpha < 2$ *, et* $t, s_{\in} J$ *on a*

(i) $\int_a^t K_t^\alpha(s)ds \leq \int_a^b K_b^\alpha(s)ds = \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha \rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$,

(ii) $\int_a^b K_b^{\alpha-1}(s)ds = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}$,

(iii) $\int_a^b |K(s)|ds \leq \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(|c_2|(b^\rho - a^\rho) + |d_2|\rho b^{\rho-1}) = K^*$.

Preuve. La preuve de (i) et (ii) est immédiate , il reste à prouver (iii) . En effet nous avons

$$\begin{aligned}
\int_a^b |K(s)|ds &= \int_a^b |c_2 K_b^{\alpha-1}(s) - d_2 b^{\rho-1} K_b^{\alpha-1}(s)|ds \\
&\leq \frac{|c_2|\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(b^\rho - a^\rho)^\alpha + \frac{|d_2| b^{\rho-1}\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1} \\
&\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(|c_2|\frac{b^\rho - a^\rho}{\alpha} + |d_2|\rho b^{\rho-1}) \\
&\leq \frac{(b^\rho - a^\rho)^{\alpha-1}\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(|c_2|(b^\rho - a^\rho) + |d_2|\rho b^{\rho-1}) = K^*.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous sommes en position de premier résultat qui est basé sur le Théorème (1.5).

Théorème 4.1. *On suppose que*

$(\mathcal{A}_1)$ *est continue,*

$(\mathcal{A}_2)$ *il existes des constantes* $K > 0$ *et* $0 < l < 1$ *tel que :*

$$|\Psi(t, u_2, v_2) - \Psi(t, u_1, v_1)| \leq K|u_2 - u_1| + l|v_2 - v_1|,$$

$\forall \quad u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R} \quad$ *et* $\quad t \in J.$

Alors le problème (4.1) a ou moins une solution .

Preuve Considérons l'opérateur $\chi : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ défini par

$$(\chi u(t)) = \frac{c_2 u_1}{c_1} - u_2 + \phi_{a,b}\sigma_t + \int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds$$

où

$$\psi(s) = \Psi(s, u(s), \psi(s))$$

Étape 1 : χ est continue.
Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $C(J, \mathbb{R})$ .alors pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
|(\chi u_n)(t) - (\chi u)(t)| &= \left| \frac{\sigma_t}{\delta} \int_a^b K(s)(\psi_n(s) - \psi(s))ds \right. \\
&+ \left. \int_a^t K_t^\alpha(s)(\psi_n(s) - \psi(s))ds \right| \\
&\leq \frac{\sigma_b}{|\delta|} \int_a^b |K(s)||\psi_n(s) - \psi(s)|ds \\
&+ \int_a^t |K_t^\alpha(s)||\psi_n(s) - \psi(s)|ds
\end{aligned}$$

où

$$\psi_n(s) = \Psi(t, u_n(s), \psi_n(s)).$$

En vertu de $(\mathcal{A}_2)$, nous avons

$$|\psi_n(s) - \psi(s)| \leq \frac{k}{1-l}|u_n(s) - u(s)|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
|(\chi u_n)(t) - (\chi u)(t)| &\leq \frac{k}{1-l} \left(\frac{\sigma_b K^*}{|\delta|} + \int_a^b K_b^\alpha(s)ds \right) |u_n(s) - u(s)| \\
&\leq \frac{k}{1-l} \left(\frac{\sigma_b K^*}{|\delta|} + \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(b^\rho - a^\rho)^\alpha \right) ||u_n - u||_\infty.
\end{aligned}$$

Puisque $u_n \to u$, on obtient $||(\chi u_n) - (\chi u)||_\infty \to 0$ comme $n \to \infty$ .donc χ est continue.

Étape 2 : χ transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans $C(J, \mathbb{R})$.
il suffit de monter qu'il existe une constante positive$m$ pour $r > 0$ telle que pour chacun $u \in D_r = \{u \in C(J, \mathbb{R}), ||u||_\infty \leq r\}$ on a $||\chi u||_\infty \leq m$. en effet pour chaque $t \in J$,et $u \in D_r$.
on a

$$\begin{aligned}
\|(\chi u(t))| &= |\frac{c_2 u_1}{c_1} - u_2 + \phi_{a,b}\sigma_t + \int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds| \\
&\leq |\frac{c_2 u_1}{c_1}| + |u_2| + |\phi_{a,b}|\sigma_b + \int_a^t K_t^\alpha(s)|\psi(s)|ds.
\end{aligned}$$

Selon $(\mathcal{A}_2)$ nous avons

$$\begin{aligned}
|\psi(s)| &= |\Psi(s,u(s),\psi(s)) - \Psi(s,0,0) + \Psi(s,0,0)| \\
&\leq \frac{k||u||_\infty + \sup_{s\in J}|\Psi(s,0,0)|}{1-l} \\
&\leq \frac{kr+\Psi^*}{1-l} \quad \text{ou} \quad \Psi^* = \sup_{s\in J}|\Psi(s,0,0)|.
\end{aligned}$$

Dans l'autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}
|\phi_{a,b}| &= |\frac{1}{\delta}\left(\frac{c_2u_1}{c_1} - u_2 + \int_a^b K(s)\psi(s)ds\right)| \\
&\leq \frac{1}{|\delta|}\left(\left|\frac{c_2u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \int_a^b |K(s)||\psi(s)|ds\right) \\
&\leq \frac{1}{|\delta|}\left(\left|\frac{c_2u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \frac{kr+\Psi^*}{1-l}\int_a^b |K(s)|ds\right) \\
&\leq \frac{1}{|\delta|}\left(\left|\frac{c_2u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \frac{(kr+\Psi^*)k^*}{1-l}\right) = \phi^*_{a,b}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|(\chi u(t))| &\leq \left|\frac{c_2u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \phi^*_{a,b}\sigma_b + \frac{kr+\Psi^*}{1-l}\int_a^t K_t^\alpha(s)ds \\
&\leq \left|\frac{c_2u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \phi^*_{a,b}\sigma_b + \frac{kr+\Psi^*}{1-l}\int_a^b K_b^\alpha(s)ds := m.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|\chi u\|_\infty \leq m.$$

Ce qui implique que χ transforme les ensembles bornés en ensembles bornés dans $C(J,\mathbb{R})$.
Étape 3 : associe des ensembles bornée à un ensemble équicontinu de $C(J,\mathbb{R})$.

Soit $u \in D_r$ (comme définie à **l'étape 2**), et $t_1, t_2 \in J$, avec $t_1 < t_2$, alors

$$
\begin{aligned}
|\chi u(t_2) - \chi u(t_1)| & \\
&\leq |\phi_{a,b}||\sigma_{t_2} - \sigma_{t_2}| + \left| \int_a^{t_2} K_{t_2}^{\alpha}(s)\psi(s)ds - \int_a^{t_1} K_{t_1}^{\alpha}(s)\psi(s)ds \right| \\
&\leq \phi_{a,b}^{*}|\sigma_{t_2} - \sigma_{t_2}| + \left| \int_a^{t_1} (K_{t_2}^{\alpha} - K_{t_1}^{\alpha})(s)\psi(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} K_{t_2}^{\alpha}(s)\psi(s)ds \right| \\
&\leq \phi_{a,b}^{*}|\sigma_{t_2} - \sigma_{t_2}| + \frac{(k||u||_{\infty} + \Psi^{*})}{1-l} \left| \int_a^{t_1} (K_{t_2}^{\alpha} - K_{t_1}^{\alpha})(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} K_{t_2}^{\alpha}(s)ds \right| \\
&\leq \phi_{a,b}^{*}|\sigma_{t_2} - \sigma_{t_2}| + \frac{(kr + \Psi^{*})\rho^{-\alpha}}{(1-l)\Gamma(\alpha+1)} \left[2(t_2^{\rho} - t_1^{\rho})^{\alpha} + (t_1^{\rho} - a^{\rho})^{\alpha} - (t_2^{\rho} - a^{\rho})^{\alpha}\right].
\end{aligned}
$$

Comme $t_2 \to t_1$, le coté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro .
En conséquence des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzélà-Ascoli , nous concluons que χ est complètement continue .

Étape 4 : Limites a priori . On montrer qu'il existe un ensemble ouvert $\mathcal{O} \subset C(J, \mathbb{R})$ avec $u \neq \lambda\chi(u)$ ou $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial\mathcal{O}$.
Soit $u \in C(J, \mathbb{R})$ et $u = \lambda\chi(u)$,avec $\lambda \in (0,1)$, alors pour chaque $t \in J$ on a

$$
\begin{aligned}
|u(t)| &= \lambda \left| \frac{c_2 u_1}{c_1} + u_2 + \phi_{a,b}\sigma_b + \int_a^t K_t^{\alpha}(s)|\psi(s)ds \right| \\
&\leq \left| \frac{c_2 u_1}{c_1} \right| + |u_2| + |\phi_{a,b}|\sigma_b + \int_a^b K_b^{\alpha}(s)|\psi(s)|ds. \\
&\leq \left| \frac{c_2 u_1}{c_1} \right| + |u_2| + \phi_{a,b}^{*}\sigma_b + \frac{kr + \Psi^{*}}{1-l} \int_a^b K_b^{\alpha}(s)ds.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\|u\|_{\infty} \leq m.$$

Soit

$$\mathcal{O} = \{u \in C(J, \mathbb{R}) : \|u\|_{\infty} < m+1\}.$$

En choisissant $\mathcal{O}$, il n'y a pas de $u \in \partial\mathcal{O}$, tel que $u = \lambda\chi(u)$, pour $\lambda \in (0,1)$.En conséquence du Théorème (4.1) et de l'alternative non linéaire du Théorème du point fixe de Leray-Shauder, χ a un point fixe $u \in \mathcal{O}$ qui est une solution de notre problem (4.1) .
Le deuxième résultat est basé sur le théorème 1.9.

Théorème 4.2. *Supposons que* $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_2)$ *et*

$$\theta = \frac{k\sigma_b K^*}{|\delta|(1-l)} < 1. \tag{4.3}$$

Alors le Problème(4.1) admet au moins une solution.

Preuve : Soit

$$\mathcal{M} = \{u \in C(J, \mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq r_1 + r_2 \leq r\},$$

où

$$r_1 = \left|\frac{c_2 u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \phi^*_{a,b}\sigma_b, \quad r_2 = \frac{(kr + \Psi^*)\rho^{-\alpha}}{(1-l)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Nous définissons deux opérateurs S_1 et S_2 par

$$S_1 u(t) = \frac{c_2 u_1}{c_1} - u_2 + \phi_{a,b}\sigma_t,$$

et

$$S_2 u(t) = \int_a^t K_t^\alpha(s)\psi(s)ds,$$

où

$$\psi(s) = \Psi(s, u(s), \psi(s)).$$

Étape 1 : Nous allons montrer que $S_1 u + S_2 v \in \mathcal{M}$.
Soit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{M}$, et $t \in J$, alors on a

$$\begin{aligned}
|S_1 u(t)| &\leq \left|\frac{c_2 u_1}{c_1}\right| + |u_2| + |\phi_{a,b}|\sigma_t \\
&\leq \left|\frac{c_2 u_1}{c_1}\right| + |u_2| + |\phi_{a,b}|\sigma_b \\
&\leq \left|\frac{c_2 u_1}{c_1}\right| + |u_2| + \phi^*_{a,b}\sigma_b \\
&\leq r_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|S_2u(t)| &\leq \int_a^t K_t^\alpha(s)|\psi(s)|ds \\ &\leq \frac{(kr+\Psi^*)}{1-l}\int_a^b K_b^\alpha(s)ds. \\ &\leq \frac{(kr+\Psi^*)(b^\rho-a^\rho)\rho^{-\alpha}}{(1-l)\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq r_2.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|S_1u+S_2v\|_\infty &\leq \|S_1u\|_\infty+\|S_2v\|_\infty \\ &\leq r_1+r_2 \\ &\leq r.\end{aligned}$$

On déduit que $S_1u+S_2v\in\mathcal{M}$.

Étape 2 : S_1 est une contraction sur $\mathcal{M}$.
Pour chaque $t\in J, u, v\in\mathcal{M}, \psi(s)=\Psi(s,u(s),\psi(s))$ et $\phi(s)=\Psi(s,u(s),\phi(s))$, on a

$$\begin{aligned}|S_1u(t)+S_2v(t)| &= \left|\frac{\sigma_t}{\delta}\int_a^b K(s)(\psi(s)-\phi(s))ds\right| \\ &\leq \frac{\sigma_b}{|\delta|}\int_a^b |K(s)||\psi(s)-\phi(s)|ds \\ &\leq \frac{k\sigma_b}{|\delta|(1-l)}\int_a^b |K(s)||u(s)-v(s)|ds \\ &\leq \frac{k\sigma_bK^*}{|\delta|(1-l)}|u(s)-v(s)|.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|S_1u+S_2v\|_\infty\leq\frac{k\sigma_bK^*}{|\delta|(1-l)}\|u-v\|_\infty.$$

De (4.3), on déduit que S_1 est une contraction.

Etape 3 : S_2 est compact.

Il est claire que S_2 est continu et uniformément borné sur $\mathcal{M}(\|S_2u\|_\infty < r_2)$.
Il reste à montrer que S_2 transforme un ensemble fermé à un ensemble equicontinu de $C(J,\mathbb{R})$.
Soit $u \in \mathcal{M}$ et $t_1, t_2 \in J$ avec $t_1 < t_2$, alors :

$$\begin{aligned}
|S_1u(t_1) + S_2u(t_2)| &= |\int_a^{t_2} K_{t_2}^\alpha(s)\psi(s)ds - \int_a^{t_1} K_{t_1}^\alpha(s)\psi(s)ds| \\
&= \left|\int_a^{t_1} (K_{t_2}^\alpha - K_{t_1}^\alpha)(s)\psi(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} K_{t_2}^\alpha(s)\psi(s)ds\right| \\
&\leq \frac{(k||u||_\infty + \Psi^*)}{1-l}\left|\int_a^{t_1} (K_{t_2}^\alpha - K_{t_1}^\alpha)(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} K_{t_2}^\alpha(s)ds\right| \\
&\leq \frac{(kr + \Psi^*)\rho^{-\alpha}}{(1-l)\Gamma(\alpha+1)}\left[2(t_2^\rho - t_1^\rho)^\alpha + (t_1^\rho - a^\rho)^\alpha - (t_2^\rho - a^\rho)^\alpha\right].
\end{aligned}$$

Il est évident que depuis $t_2 \to t_1$ nous obtenons $|S_1u(t_1) + S_2u(t_2)| \to 0$ donc S_2 est compact.
De Théorème (4.2) nous conclurons que notre problème (4.1) admet une solution dans $C(J,\mathbb{R})$.

4.2 Exemples

Exemple 4.1. *On considère le problème de frontière suivant*

$$\begin{cases}
{}^{\frac{1}{3}}D^{\frac{3}{2}}u(t) = \frac{|u(t)|}{5+|u(t)|} + \frac{1}{2}\tan|{}^{\frac{1}{3}}D^{\frac{3}{2}}u(t)|, \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}], \\
u(0) - u'(0) = \frac{3}{2}, \\
u(\frac{\pi}{3}) + u'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}.
\end{cases} \tag{4.4}$$

Soit la fonction Ψ *définie par*

$$\Psi(t, u, v) = \frac{u}{5+u} + \frac{1}{2}\tan v, \quad u, v \in \mathbb{R}^+, \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}].$$

Évidemment la fonction Ψ est continue , maintenant nous vérifions l'hypothèse $\mathcal{A}_2$. En effet, pour chaque $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ et $u, v \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}
|\Psi(t,u_2,v_2) - \Psi(t,u_1,v_1)| &= \left|\frac{u_2}{5+u_2} - \frac{u_1}{5+u_1} + \frac{1}{2}(\tan v_2 - \tan v_1)\right| \\
&\leq \left|\frac{5(u_2-u_1)}{(5+u_2)(5+u_1)}\right| + \frac{1}{2}|\tan v_2 - \tan v_1| \\
&\leq \frac{1}{5}|u_2-u_1| + \frac{2}{3}|v_2-v_1|.
\end{aligned}$$

Par conséquent $(\mathcal{A}_2)$ est valable pour $k = \frac{1}{5}$ et $l = \frac{2}{3}$ alors, d'après le Théorème 4.1, le problème (4.4) admet au moins une solution.

Exemple 4.2. *On considère le problème de frontière suivant*

$$\begin{cases}
{}^{\frac{2}{3}}D^{\frac{5}{2}}u(t) = \frac{|u(t)|}{3+\left|{}^{\frac{2}{3}}D^{\frac{5}{2}}u(t)\right|} + \frac{\left|{}^{\frac{2}{3}}D^{\frac{5}{2}}u(t)\right|}{3+|u(t)|}, \quad t \in [0,1], \\
u(0) - u'(0) = 1, \\
u(1) + u'(1) = \frac{1}{2}.
\end{cases} \tag{4.5}$$

On définit la fonction Ψ par

$$\Psi(t,u,v) = \frac{u}{3+v} + \frac{v}{3+u}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+, \quad t \in [0,1].$$

$$\begin{aligned}
|\Psi(t,u_2,v_2) - \Psi(t,u_1,v_1)| &= \left|\frac{u_2}{3+v_2} + \frac{v_2}{3+u_2} - \frac{u_1}{3+v_1} - \frac{v_1}{3+u_1}\right| \\
&\leq \left|\frac{3u_2 + u_2v_1 - 3u_1 - u_1v_2}{(3+u_2)(3+v_2)}\right| + \left|\frac{3v_2 + v_2u_1 - 3v_1 - u_2v_1}{(3+v_1)(3+u_1)}\right| \\
&\leq \frac{1}{9}(|3u_2 - 3u_1| + |3v_2 - 3v_1|) \\
&\leq \frac{1}{3}(|u_2-u_1| + |v_2-v_1|).
\end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{45}{8\sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{5}{2})}}{3 \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3}} = \frac{45 \times \sqrt{2}}{32\sqrt{3}\sqrt{\pi}} < 1.$$

Par Théorème 4.2, nous conclurons que le Problème (4.5) admet au moins une solution.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'éxistence et l'unicité des solutions de quelques problèmes aux limites , l'intégrale et la dérivée au sens de Caputo-Katugampola et Katugampola, nous les illustrons par des applications . Les resultats obtennus sont basés sur l'approche du point fixe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] X. Chen, H. Gu And X. Wang, *E*xictence and Uniqueness of Fractional Differential Equational Inovolving Katugampola Derivative, International Conference on Applied Mathemathics. Modeling. Sumulation and Optimization, 2019.

[2] J. Henderson and K. Maazouz, *E*xistence Results for Katugampola Fractional Differential Equations for Boundary Value Problems, PanAmerican Mathematical journal, Volume 30(2020), Number 3, 81-98.

[3] U.N.Katugampola, *A* New Approach to Generalized Fractional Derivatives , Bulletin of Mathematical. Analysis And Applications, Vollume 6 Issue 4, 1-15.

[4] U.N. Katugampola, *N*ew approach generalized fractional integral, Applied mathimatics and Computation, 2011,860-865.

[5] U.N.Katugampola, *E*xistence and Uniqueness Results for a Class of Generalized Fractional differential Equations, The auther(Bull. Math. Anal. App. 6(4)), 2014. 1-15.

[6] U.N.Katugampola , *N*ew Fractional Integral Unifying Six Existing Fractional Integrals, Departement of Mathematical Sciences,University of Delaware. Newrk, De 19716,U.S.A.

[7] K. Maazouz and J. Henderson, *E*xistence and Uniqueness of Solutions for a Caputo-Katugampola Fractional Thermistor Problem, Communications on Applied Nonlinear Analysis, Volume 28(2021), number 1, 43-56.

[8] K. Maazouz, D. Vivek, *E*xistence Results for BVP of a Class of Generalized Fractional-Order Implicit Differential Equations , Asia Pac.J.Math.2020 .