REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse fonctionnelle et application

Par :

Bendjeriou Hiabet-Errahemane
Ghammar Nacéra
Guerbouz Cherifa Amina

Sur le thème

L^2 continuité des opérateurs de Weyl

Soutenu publiquement le 18 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr AISSANI Mouloud	MCB	Université Tiaret	Président
Mme ELONG Ouissam	MCB	Université Tiaret	Encadreur
Mme CHERIET N. El Imene Khadidja	MCB	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

\AM@currentdocname .png

.png

Table des matières

Remerciements

On remercie Dieu le puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.
Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de

notre encadreur Mme Elong Ouissam,

on la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous remercions également Mr Aissani Mouloud et Mme Cheriet Nour El Imene Khadidja d'avoir accepté de participer à ce jury.

Nous devons un remerciement à toute l'équipe d'enseignement pour leurs qualités scientifique et pédagogiques.

Nous tenons à remercier chaleureusement, tous nos proches et tous ceux qui, de près ou de loin, nous ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

Dédicaces

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

• A l'homme, mon précieux offre du Dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père B. Mohamed.

• A la femme qui a souffert sans laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère O. Maissa.

• A mes très chers frères Aouad, Benouda, Rayan et Anes, qui n'ont pas cassé de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leur offre la chance et le bonheur.

• A mon adorable petite soeur Miral, qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.

• A mes grands-mères, mes oncles et mes tantes. Que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

• A tous mes cousins, les voisins et les amies : Ikram, Karima, Narimane et Djamila. Merci pour leurs amours et leurs encouragement.

• Sans oublier mon trinôme Amina et Nacéra pour leur soutien moral, leur patience et leur compréhension tout au long de ce projet.

Hibat-Errahmane.

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

A mes chers parents♡ GUERBOUZ BENAOUDA ♡BELMIRAD AICHA♡, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études

À

A mes chères soeurs♡Chaima♡Fatima♡Marwa♡ pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral A mes chers frères♡Hamada♡Benaissa♡Abdelghani♡et toute ma famille♡GUERBOUZ♡ BELMIRAD♡RIAZI ♡ pour leur appui et leur encouragement,

À

Mon fiancé

♡RIAZI BADI♡ que je vais lui remercier énormément pour son soutien ♡

À

Tous Mes Amis

surtout ♡ Nour-Elyaqin ♡ Souha ♡Hiba♡Linda ♡ Badra ♡Sabrina♡♡Karima♡Chaima♡Nacéra♡Djamila♡Marwa♡ pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire

♡ Cherifa Amina♡

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

• A mon père Ghammar Mohamed qui m'a toujours transmis l'amour du travail et le sens du perfectionnisme et qui m'a toujours encadré avec beaucoup d'amour et d'attention.

• A ma mère chèrie M. Khadidja qui par ses sacrifices consentis et son affection profonde m'a toujours guidé sur voie du succès.

• Mes très chères frères : Miloud, Adel, Abd elkader, Mostapha et Youcef.

• Mes chères soeur :Souad, Amel et leurs maris.

• Mon cher mari Ahmed aniss qui ma soutenu duvant les ètapes de la rèalisation de ce travail.

• Ma bien-aimée chère fille Hanaa Afaf, qui quand je l'embrasse j'oublie ma fatigue et qui sait toujours apporter le bonheur à la famille, que Dieu la préserve et la protège .

• Tout ma famille Ghammar et Hadj kaddour et Chaib et Mostpha pour leur appui et leur encouragement.

• Les parents de mon mari comme mes parents, M. et Mme Hadj kaddour, je leur souhaite santé et longe vie, et ma belle s ?ur, à qui je souhaite la réussite dans ses études et sa vie.

• Sans oublier mon trinôme Amina et Hiba et je leur remercie pour leur collaboration et leur comprèhension. Qui Dieu le tout les puissant protège.

Ghammar Nacéra

INTRODUCTION

La quantification est la théorie mathématique qui a pour but d'essayer de construire un morphisme entre le monde classique et le monde quantique. Plus précisément la quantification est le passage du mécanique classique au quantique et l'opération inverse est qualifiée de limite semi-classique. Par exemple, le moment cinétique d'un électron liée à un atome ou molécule est quantifié.

Pas longtemps après l'invention de la mécanique quantique Herman Weyl a introduit en 1928 une nouvelle quantification qui permet d'associer un opérateur W_σ agissant sur $\mathbb{R}^n$ à une fonction σ qui est appelée *symbole* de W_σ définie sur l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$.

Une des premières questions à traiter par Weyl est celle du caractère auto-adjoint. Un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert est par définition l'observable de la mécanique quantique.

De nos jours la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est devenue un outil d'analyse très puissant, en particulier en équations aux dérivées partielles, en analyse sur les variétés et même en géométrie algébrique complexe.

A partir de ces considérations générales, nos travaux exposés dans ce mémoire abordent essentiellement le calcul de Weyl. Décrivons un peu plus précisément les résultats que nous avons établi.

Notre premier chapitre est un rappel des notions mathématiques, nous donnons des notation de dérivation plus élevées et les formules de Leibniz et Taylor, après nous définissons les espaces fonctionnels et quelques notions sur les opérateurs.
Le 2ème chapitre est consacré à l'étude des classes des symboles et leurs propriétés utiles, après nous donnons une idée sur la somme asymptotique. On expose au chapitre 3 les propriétés fondamentales de la transformation de Weyl. La dernière partie discute la continuité de l'opérateur sur L_2.
Dans le chapitre 4, on énonce une inégalité de Gårding, puis on étudie une preuve utilisant une approximation du flot pseudo-différentiel.

FIGURE 1 – Hermann Klaus Hugo Weyl

Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955) est un mathématicien et un physicien théoricien des plus influents du XX éme siécle. Weyl étudia de 1904 à 1908 à Gottingen et à Munich. Son doctorat fut soutenu à Göttingen sous la direction de Hilbert et Minkowski. En 1913, Weyl publia Die Idee der Riemannschen Fläche (Le concept de surface de Riemann).

De 1923 à 1938, Weyl étudia les groupes compacts, en termes de représentation matricielle.Weyl continua à travailler à l'Institute for Advanced Study (IAS) jusqu'à sa retraite en 1952 et il mourut à Zurich, Suisse. Principales découvertes : Multiples travaux dans les domaines suivants : équations intégrales, analyse harmonique, théorie analytique des nombres, fondements des mathématiques, relativité, électromagnétisme, mécanique quantique, théorie des groupes de Lie, théorie de jauge, spineurs, géométrie différentielle, surface de Riemann.

Chapitre 1

Définitions et propriétés de base

Dans ce chapitre nous donnerons les diverses notations utilisées dans notre travail.

Comme nous avons indiqué dans l'introduction, nous introduisons dans ce chapitre les éléments nécessaires à notre étude de la Transformation de Weyl.

1.1 Notations et préliminaires

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On introduit les notation suivantes :
Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, on note le produit scalaire :

$$x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n,$$

et on note $\xi\xi = |\xi|^2$.
On désigne par $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice.
$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, est la longueur du multi-indice α et on note par :

$$\alpha! = (\alpha_1!)(\alpha_2!)...(\alpha_n!),$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n},$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} x_1 ... \partial_n^{\alpha_n} x_n},$$

où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ est la dérivée partielle par rapport à la variable x_j, $1 \leq j \leq n$.
$D_j = -i\partial_j$ et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$.
Si α, β sont deux multi-indices on a :
$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i, \forall i = 1, 2, ..., n.$
Pour $a, b \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{cases} \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}; si\ a \geq b. \\ 0; sinon. \end{cases}$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on note

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

On a donc

$$\begin{cases} \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}; si\, \alpha \geq \beta. \\ 0; sinon. \end{cases}$$

1.2 Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.1. *$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2.2. *$C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire :*

$$C^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha f \in C(\Omega)\}.$$

Définition 1.2.3. *$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.2.4. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ désigne le sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ formé par des fonctions à support compact.*

Définition 1.2.5. *(Les espaces L^p)*
$L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} =_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

$L^2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire donné par :

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v}(x)dx, \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.2.6. *(Espace de Hilbert)*
Une espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme $||.||$ découle d'un produit scalaire ou Hermitien $< .,. >$ par la formule :

$$||x|| = \sqrt{< x, x >}.$$

Soit H un espace de Hilbert et soit H_0 un sous espace vectoriel dense dans H.

Définition 1.2.7. *(Adjoint d'un opérateur)*
L'adjoint de l'opérateur A est l'unique opérateur noté A^* vérifiant :

$$\forall u \in H_0, < Au, v >=< u, A^* v > .$$

L'existence étant assurée par le théorème de Reisz.

Définition 1.2.8. *(Opérateur autoadjoint)*
Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Un opérateur $A : H \to H$ de domaine dense dans H est dit autoadjoint s'il vérifie $A^* = A$.

Formule de Leibniz :
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour toutes fonctions u et v de classe $C^{|\alpha|}$ on a

$$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u \, \partial^{\alpha-\beta} v.$$

Lemme 1.2.1. *Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{s}{2}} dx$$

est convergente si et seulement si $s > n$.

Formule de Taylor :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment différentiable sur un voisinage de x, alors on a la formule de Taylor suivante avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) \int_0^1 (1-t)^m \partial^\alpha f(a)(a + t(x-a))dt.$$

Opérateurs différentiels

Définition 1.2.9. *Un opérateur différentiel linéaire de degré m est donné par une expression de la forme :*

$$p(x, D) = P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

où $a_\alpha \in C^\infty$ sont appelés coefficients de l'opérateur,$\alpha \in \mathbb{N}^n$, un multi-indice.

Définition 1.2.10. *Soit P un opérateur différentiel d'ordre m, on définit son symbole comme étant la fonction de 2 variables définie par :*

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Espace de Schwartz :

Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction u appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si u est de classe C^∞ et que de plus toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

C'est-à-dire :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)/\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < +\infty\}.$$

Proposition 1.2.1. *(Propriétés fondamentales)*

1. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*
2. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$,*
3. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est invariant par dérivation et par multiplication par des polynômes,*
4. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$|\partial^\alpha \varphi|_k \leq |\varphi|_{k+|\alpha|}; \forall\varphi \in \mathcal{S},$$

(c'est la continuité de la dérivation)

1.3 Transformation de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors la Transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx.$$

On note souvent $\hat{f}$ ou Ff la transformée de Fourier de f.

Formule de Parseval

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx.$$

Formule d'inversion

La transformation de Fourier F est un isomorphisme sur $S(\mathbb{R}^n)$ et on a $\forall f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\hat{f}} = \check{f}$$

avec $\check{f} = f(-x)$.

Proposition 1.3.1. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\hat{f}$ est une fonction continue bornée et qui tend vers 0 à l'infini.*

Formule de Plancherel

L'application $F : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ peut se prolonger d'une façon unique comme opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Inégalité de Peetre

$\langle x + y\rangle^s \leq C_s\langle x\rangle\langle y\rangle^{|s|}, \ x, y \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}, C_s > 0.$

Chapitre 2

Les symboles

Dans notre étude sur l'opérateur de Weyl, on va commencer dans ce chapitre par introduire les classes des symboles comme étant un outil de base.
On définit les symboles et on donne quelques propriétés utiles et quelques théorèmes essentiels.

Définition 2.0.1. *Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est un symbole d'ordre m si : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0$ tels que :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

On note $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des symboles d'ordre m où tout simplement S^m.

Et on notera de plus

$$S^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m,$$

$$S^{+\infty} = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m.$$

2.1 Exemples

Exemple 2.1.1. *Soit $a \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ une fonction (positivement) homogène de degré m (c'est à dire : $\forall \lambda > 0, a(x, \lambda\xi) = \lambda^m a(x,\xi)$), pour $\xi \neq 0$ et a est à support compact par rapport à x. Alors a est un symbole d'ordre m.*

En effet,

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\left(x,(1+|\xi|)\frac{\xi}{(1+|\xi|)}\right)\right| \\
&\leq \left|\partial_x^\alpha (\partial_\xi^\beta (1+|\xi|)^m a\left(x,\frac{\xi}{(1+|\xi|}\right)\right| \\
&\leq \left|\partial_x^\alpha \sum_{\gamma\leq\beta} \partial_\xi^\gamma (1+|\xi|)^m \partial_\xi^{\beta-\gamma} a\left(x,\frac{\xi}{(1+|\xi|)}\right)\right| \\
&\leq \left|(\sum_{\gamma\leq\beta} \partial_\xi^\gamma (1+|\xi|)^m \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a\left(x,\frac{\xi}{(1+|\xi|)}\right)\right| \\
&\leq (1+|\xi|)^{m-|\beta|}\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\left(x,\frac{\xi}{(1+|\xi|)}\right)\right| \\
&\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.2. *Soit a une fonction définie par :*

$$a(x,\xi) = \sum_{|a|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

où $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; a_α bornée ainsi que toutes ses dérivées. Alors a est un symbole d'ordre m de l'opérateur différentiel défini dans le premier chapitre.

En effet, pour $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\partial_\xi^\beta \xi^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)}\xi^{\alpha-\beta}, & si\ (\alpha\geq\beta) \\ 0\ , & sinon. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\left|\partial_\alpha^\beta \xi^\alpha\right| \leq a!(1+|\xi|^{|\alpha|-|\beta|}).$$

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right| \\
&= \left|\sum_{|\alpha|\leq m} \partial_x^\alpha a_\alpha(x)\partial_\xi^\beta \xi^\alpha\right| \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq m} C\alpha!(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|} \\
&\leq (m+1)CK!(1+|\xi|)^{|m|-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $a \in S^m$.

Exemple 2.1.3. *La fonction $a(x,\xi) = e^{ix\xi}$ n'est pas un symbole.*

En effet, soient $x,\xi \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$x = (x_1,x_2)$ et $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ et $\alpha = (0,0), \beta = (1,0)$, alors :

$\left|\partial_{\xi_1}^\beta a(x,\xi)\right| = \left|\partial_{\xi_1}^\beta e^{ix\xi}\right| = \left|\partial_{\xi_1}^\beta e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\right| = \left|ix_1 e^{ix\xi}\right| = |ix_1| = |x_1|\,.$

Théorème 2.1.1. *Définissons sur S^m les semi-normes :*

$$|a|^m_{\alpha,\beta} = \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leq m \\ (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}}} \left[(1+|\xi|)^{-m+|\beta|} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|\right].$$

Alors S^m est un espace de Fréchet pour la famille de semi norme : $|\alpha|^m_{\alpha,\beta}$.

Remarque 2.1.1. *La convergence $a_n \to a$ dans S^m signifie :*
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |a_n - a|^m_{\alpha,\beta} \to 0, n \to +\infty$.

Proposition 2.1.1.

1. *Si $a \in S^m$ alors : $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}$.*
2. *Si $a \in S^m$; $b \in S^m$ alors : $ab \in S^{m+m'}$.*
3. *Si $m \leq m'$ alors : $S^m \subset S^{m'}$, avec injection continue.*

Preuve.

1. Ona :

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} a(x,\xi)\right]\right| &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} a(x,\xi)\right| \\ &= \left|\partial_x^{\alpha+\alpha'} \partial_\xi^{\beta+\beta'} a(x,\xi)\right| \\ &\leq C_{\alpha'',\beta''}(1+|\xi|)^{m-(|\beta|-|\beta'|)} \\ &\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{(m-|\beta|-|\beta'|)}.\end{aligned}$$

Donc $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}$.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, pour tout multi-indices δ, γ il existe deux nombres réels $C_{\delta,\gamma}$et $C'_{\delta,\gamma}$ telles que :

$$\partial_x^\delta \partial_\xi^\gamma a(x,\xi) \leq C_{\delta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|}$$
$$\partial_x^\delta \partial_\xi^\gamma b(x,\xi) \leq C'_{\delta,\gamma}(1+|\xi|)^{m'-|\gamma|}.$$

Alors on calcule : $\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a(x,\xi)b(x,\xi))\right|$.

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(a(x,\xi)b(x,\xi)\right)\right| &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|\partial_x^\alpha (\partial_\xi^{\beta-\gamma} a(x,\xi) \partial_\xi^\gamma b(x,\xi))\right| \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\delta} \left|\partial_x^{\alpha-\delta} \partial_\xi^{\beta-\gamma} a(x,\xi)\right| \left|\partial_x^\delta \partial_\xi^\gamma b(x,\xi)\right| \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} C_{\alpha-\delta,\beta-\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\beta-\gamma|} C'_{\delta,\gamma}(1+|\xi|)^{m'-|\gamma|} \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} C_{\alpha-\delta,\beta-\gamma} C'_{\delta,\gamma}(1+|\xi|)^{m+m'-|\beta|} \\ &\leq C(1+|\xi|)^{(m+m'-|\beta|)};\end{aligned}$$

où on a posé :

$$C = \sum_{\gamma\leq\beta}\sum_{\delta\leq\alpha} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} C_{\alpha-\delta,\beta-\gamma} C'_{\delta,\gamma}.$$

3. Soit $m \leq m'$ alors :
$$(1+|\xi|)^m \leq (1+|\xi|)^{m'}$$
$$(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \leq (1+|\xi|)^{m'-|\beta|}.$$
Donc $\alpha \in S^m$, on a :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m'-|\beta|}$.
Alors $a \in S^{m'}$.

Lemme 2.1.1. *: Si $a_1, ..., a_k \in S^0$, et $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$, alors $F(a_1, ..., a_k) \in S^0$.*

Preuve.

Comme $Re\ a_k$ et $Im\ a_k$ sont dans S^0, on peut supposer a_k sont à valeurs réelles et $F \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$.
Maintenant :
$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{x_j} a_k,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} F(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{\xi_j} a_k.$$
Nous allons démontrer par récurrence sur p des estimations du type
$$\left|\partial_\beta^\alpha a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$
Pour toute fonction de type $F(a)$ sont vraies pour $|\alpha| + |\beta| \leq p$.
Le cas $p = 0$ est clair. Par ailleurs, pour $|\alpha| + |\beta| \leq p+1$, la formule de Leibniz appliquée à
$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{x_j} a_k,$$
ou
$$\frac{\partial}{\partial_{\xi_j}} F(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial a_k} \partial_{\xi_j} a_k,$$
et l'hypothèse de récurrence appliquée aux dérivées de $\frac{\partial F}{\partial a_k}(a)$, permettent de conclure.

2.2 Approximation des symboles

Lemme 2.2.1. *Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^2)$ et posons :*
$$a_\varepsilon(x,\xi) = a(x, \varepsilon\xi).$$
Alors $a_\varepsilon$est bornée dans S^0 ou ε est un réel et $a_\varepsilon \to a_0$ dans S^m pour $m > 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve.

1. On montre que a_ε est borné dans S^0.

On a $a \in S^0(\mathbb{R}^2)$ alors :

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)\right| &\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\beta|} \\ \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)\right| &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\varepsilon\xi)\right| \\ &\leq C_{\alpha,\beta}\varepsilon^{|\beta|}(1+|\varepsilon\xi|)^{-|\beta|}. \end{aligned}$$

2. $a_\varepsilon \to a_0$ dans S^m.

Si $\beta \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi)\right| &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon(x,\xi) - a_0(x,\xi))\right| \\ &= \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)\right| \\ &= \left|\varepsilon^{|\beta|}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \\ &\leq \varepsilon^{|\beta|}\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\beta)\right|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^{m-|\beta|}\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi)\right| &\leq \varepsilon^{|\beta|}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \\ &\leq \varepsilon^{|\beta|}\,|a|^m_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0; \end{aligned}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Si $\beta = 0$ alors :

En utilisant la formule de Taylor, on obtient :

$$\partial_x^\alpha (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi) = \varepsilon\xi \int_0^1 \partial_\xi \partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi)dt$$

On pose :

$$f(t) = \partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi).$$

Alors :

$$f'(t) = \partial_\varepsilon \partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi),$$

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha (a_\varepsilon - a_0)(x,\xi) &= \varepsilon\xi \int_0^1 \partial_\xi \partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi)dt \\ &= \varepsilon\xi \int_0^1 f'(t)dt \\ &= \varepsilon\xi[f(1) - f(0)] \\ &= \partial_x^\alpha a(x,\varepsilon\xi) - \partial_x^\alpha a(x,0) \\ &= \partial_x^\alpha a_\varepsilon(x,\xi) - \partial_x^\alpha a_0(x,\xi). \end{aligned}$$

Par passage au module on obtient :

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha (a_\varepsilon - a_0)| &\leq \varepsilon |\xi| \int_0^1 \partial_\xi |\partial_x^\alpha a(x, t\varepsilon\xi)| \, dt \\
&\leq \varepsilon |\xi| C_\alpha \int_0^1 (1 + t\varepsilon |\xi|)^{-1} dt \\
&\leq \varepsilon |\xi| C_\alpha \int_0^1 \frac{1}{1 + t\varepsilon |\xi|} dt.
\end{aligned}$$

On pose $S = t\varepsilon |\xi|$ alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon |\xi| C_\alpha \int_0^1 \frac{1}{1 + t\varepsilon |\xi|} dt &\leq \varepsilon |\xi| C_\alpha \int_0 \varepsilon |\xi| \frac{1}{1+S} dS \\
&= \varepsilon |\xi| C_\alpha \log(1 + \varepsilon |\xi|) \\
&\leq C' \varepsilon^m |\xi|^m \longrightarrow 0_{\varepsilon \to 0}.
\end{aligned}$$

Alors $|a_\varepsilon - a_0|^m \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.

2.3 Somme asymptotique des symboles

Définition 2.3.1. *Soient $a_j \in S_j^m, (j \in \mathbb{N})$, pour une suite décroissante $m_j \to -\infty$(dans la pratique ce sera souvent $m_j = m - j$ ou $m_j = m - j/2$). On dit qu'une fonction $a \in C^\infty$ est somme asymptotique de (a_j) et on note :*

$$a \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

si :

$$\forall k \geq 0;\ a - \sum_{j=1}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}.$$

Théorème 2.3.1. *Soit $(a_j)_j \in \mathbb{N}$ une suite de symboles telle que pour tout j, $a_j \in S_j^m$ et :*

$$\lim_{j \to +\infty} m_j \longrightarrow -\infty.$$

Alors il existe un symbole a unique module $S^{-\infty}$ tel que :

$$a \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j,$$

et $a \in S^{\overline{m_0}}$ où

$$\overline{m_0} = \max_{j \geq 0} m_j.$$

2.4 Opérateurs pseudo-différentiels de $\mathcal{S}$

Un opérateur pseudo-différentiel s'écrit sous la forme :

$$Au(x) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$$

où $d\xi = (2\pi)^{-n}d\xi, a \in S^m$ et $u \in D(\mathbb{R}^n)$.

On veut donner un sens à cette expression, qui permettra de définir l'opérateur pseudo-différentiel A comme étant l'application : $u \longrightarrow Au$.

Pour cela, on va considérer l'expression $Au(x) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi$ comme une intégrale oscillante.

Définition 2.4.1. *On définit l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre m par :*

$$Au(x) = Op(a)u(x) = I_\chi(x)$$

Alors $u \to Au$ est un application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On appelle l'espace de ces opérateurs L^m.

Chapitre 3

Quantification de Weyl

En 1928 Weyl a proposé une nouvelle quantification, qui est invariante par le groupe linéaire symplectique et la quantifiée d'un symbole réel est un opérateur auto-adjoint.
Dans ce chapitre, on définit l'opérateur de Weyl, avec ses propriétés puis nous discutons la continuité sur L^2.

3.1 Action sur S

Définition 3.1.1. *Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. De manière formelle, la quantification de Weyl (noté W_σ) est donnée par :*

$$W_\sigma \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \sigma(\frac{x+y}{2}, \xi) \varphi(y) dy d\xi.$$

On peut la définir autrement

$$W_\sigma \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\sigma(x,y) \varphi(y) dy,$$

avec K_σ est le noyau de W_σ défini par :

$$K_\sigma(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \sigma(\frac{x+y}{2}, \xi) d\xi.$$

Une des premières difficultés de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels est de donner un sens à ce type de formule, bien sûr pour des symboles $\sigma \in S(\mathbb{R}^{2n})$ c'est plutôt facile à définir. Mais pour faire de la quantification il faut au moins autoriser des symboles polynomiaux en x et ξ.

Théorème 3.1.1. *Soient $\sigma \in S^m$ et $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Alors $W_\sigma \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et*
$W_\sigma : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ est continue.

Preuve.

Soient $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Remarquons d'abord que

$$(1-\Delta_y)^N e^{i(x-y)\xi} = (1+|\xi|^2)^N e^{i(x-y)\xi}, \quad x, y, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 en 0. En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\varepsilon\xi) e^{i(x-y)} \sigma\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\varphi(y)dyd\xi \\
= & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\varepsilon\xi)(1+|\xi|^2)^{-N}(1-\Delta_y)^N \left\{e^{i(x-y)\xi}\right\}\sigma\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\varphi(y)dyd\xi \\
= & \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \theta(\varepsilon\xi)(1+|\xi|^2)^{-N} e^{i(x-y)\xi}(1-\Delta)^N \left\{\sigma\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\varphi(y)\right\} dyd\xi.
\end{aligned}$$

On pose $P(D) = (1-\Delta_y)^N$ et en utilisant la formule de Leibniz on a :

$$P(D)\left\{\sigma\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\varphi(y)\right\} = \sum_\alpha C_\alpha (D^\alpha\sigma)\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)(p^(\alpha)(D)\varphi)(y).$$

Or $\exists C > 0$, telle que

$$\left|\theta(\varepsilon\xi)(1+|\xi|^2)^{-N}e^{i(x-y)\xi}(D^\alpha\sigma)\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)(P^{(\alpha)}(D)\varphi)(y)\right| \leq$$

$$C(1+|\xi|^2)^(-N)(1+|\xi|^2)^m|(P^{(\alpha)}(D)\varphi)(y)|.$$

Ceci nous mène à choisir $N > \frac{m+n}{2}$ (d'après le lemme 1.1.1) pour que

$$(1+|\xi|^2)^{-N}(1+|\xi|^2)^m|(P^{(\alpha)}(D)\varphi)(y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2n}).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée (T.C.D), on aura

$$|W_\sigma\varphi(x)| \leq C' \sum_\alpha |(P^{(\alpha)}(D)\varphi)|_{n+1}$$

$$\Rightarrow |W_\sigma\varphi|_0 \leq C''|\varphi|_{n+1+k},$$

avec C_α, C', C'' sont des réels positifs et $k \in \mathbb{N}$.

De plus on a :

$$x_j(W_\sigma\varphi)(x) = W_\sigma(x_j\varphi)(x) + i(W_{\partial\xi_j\sigma}\varphi),$$

$$\partial_j(W_\sigma\varphi)(x) = W_\sigma(\partial_j\varphi)(x) + (W_{\partial_j\sigma}\varphi)(x).$$

D'où $x^\alpha\partial^\beta W_\sigma\varphi$ une est combinaison linéaire de $\partial_x^\gamma\partial_\xi^\delta W_\sigma(x^{\alpha-\gamma}\partial^{\beta-\sigma}\varphi)$.

Par suite, $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a $x^\alpha\partial^\beta W_\sigma\varphi$ est bornée.

Remarque 3.1.1. *Si σ est réel, alors W_σ est formellement un opérateur autoadjoint.*

Pour fixer les idées, donnons maintenant quelques exemples.

Exemple 3.1.1. *1. Le quantifié de Weyl de la fonction $\sigma(x,\xi) = 1$ est l'opérateur identité.*

2. Si $\sigma(x,\xi) = |\xi|^2$ alors $W_\sigma = -\Delta$ où $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

On a :

$$W_\sigma \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \sigma(\frac{x+y}{2}, \xi) \varphi(y) dy d\xi,$$

et on a aussi $\sigma(x,\xi) = |\xi|^2$, alors :

$$\begin{aligned} W_\sigma \varphi(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} |\xi|^2 \varphi(y) dy d\xi \\ &= -(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2) e^{i(x-y)\xi} \varphi(y) dy d\xi \\ &= -(2\pi)^{-n} (\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \varphi(y) dy d\xi \\ &= -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 \varphi(x), \end{aligned}$$

alors $W_\sigma = -\Delta$.

3. Le quantifié de Weyl de la fonction $\sigma(x,\xi) = x_j$ est l'opérateur de multiplication par la variable x_j. En effet,

$$\begin{aligned} W_\sigma \varphi(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \sigma(\frac{x+y}{2}, \xi) \varphi(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} (\frac{x_j + y_j}{2}) \varphi(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \frac{x_j}{2} \varphi(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \frac{y_j}{2} \varphi(y) dy d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \frac{x_j}{2} \varphi(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \psi(y) dy d\xi \\ &= \frac{x_j}{2} \varphi(x) + \frac{x_j}{2} \varphi(x) \\ &= x_j \varphi(x). \end{aligned}$$

3.2 Opérations sur les symboles

On peut maintenant définir les symboles a^* et $a\#b$ de l'adjoint et du composé respectivement.

Théorème 3.2.1. *Soit $a \in S^m$ et $b \in S^l$ alors les intégrales oscillantes*

$$a^*(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i<y,\eta>} a(x-y, \xi-\eta) dy d\eta,$$

$$a\#b(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i<y,\eta>} a(x, \xi-\eta) b(x-y, \xi) dy d\eta.$$

définissent des symboles avec les développements asymptotiques suivants :

$$a^* \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a,$$

$$a\#b \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a D_{x}^{\alpha} b.$$

Preuve.

La forme quadratique $< y, \eta >$ est non dégénérée. Pour voir que la fonction $b_{x,\xi} < y, \eta >= a(x-y, \xi-\eta)$ est une amplitude, remarquons simplement que l'inégalité de Peetre donne les estimations :

$$\begin{aligned} |\partial_y^{\alpha} \partial_{\eta}^{\beta} a(x-y, \xi-\eta)| &\leq C_{\alpha\beta} \lambda^m(\xi-\eta) \\ &\leq C_{\alpha\beta} 2^{|m|} \lambda^{|m|}(\eta) \lambda^m(\xi) \\ &\leq C_{\alpha\beta} 2^{|m|} \lambda^m(\xi)(1+|y|^2+|\eta|^2)^{\frac{|m|}{2}}. \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, a partir du quelle $b_{x,\xi} \in A^{|m|}(\mathbb{R}^{2n})$ avec$|||b_{x,\xi}|||_{|m|+2n+1} \leq C_0 \lambda^m(\xi)$. Grâce à l'estimation donnée dans le théorème, il s'en suit que $\lambda^{-m} a*$ est bornée, et puisque $\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta}(a^*) = (\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a)^*$ et $\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a \in S^{m-|\beta|}$, on obtient la borne de $\lambda^{|\beta|-m} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} a^*$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ par le même argument, de sorte que $a^* \in S^m$. La preuve de $a\#b \in S^{m+l}$ est similaire, puisque la fonction $C_{x,\xi}(y,\eta) = a(x, \xi-\eta) b(x-y, \xi)$ satisfait $C_{x,\xi} \in A^| m|(\mathbb{R}^{2n})$ avec $|||C_{x,\xi}|||_{|m|+2n+1} \leq C_0 \lambda^{m+l}(\xi)$,

$$\partial^{\alpha}(a\#b) = \sum_{\beta} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\beta} \alpha)(\partial^(\alpha - \beta) b),$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n}$. Pour obtenir les développements asymptotiques, nous utilisons la formule de Taylor :

$$\bar{a}(x-y, \xi-\eta) = \sum_{|\alpha+\beta|<2k} \frac{(-y)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{(-\eta)^{\beta}}{\beta!} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \bar{a}(x,\xi) + r_k(x, \xi, y, \eta),$$

avec

$$r_k(x, \xi, y, \eta) = \sum_{|\alpha+\beta|=2k} 2k \frac{(-y)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{(-n)^{\beta}}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta),$$

et

$$r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) = \int_0^1 (1-t)^{2k-1} \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \bar{a}(x, ty, \xi, t\eta) dt.$$

Pour r_k, qui est dans $A^{|m|+2k}$ dans (y, η), on intègre par parties :

$$\begin{aligned} &\int e^{-i<y,\eta>} \frac{(-y)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{(-n)^{\beta}}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha!} \int \frac{(-\eta)\beta}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)) dy d\eta \\ &= \frac{1}{\alpha!} \int e^{-i<y,\eta>} \sum_{\gamma} \binom{\alpha}{\gamma} ((D_{\eta})^{\gamma} \frac{(-\eta)\beta}{\beta!})((-D_{\eta})^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)) dy d\eta \\ &= \sum_{\gamma} \frac{(-i)^{|\gamma|} \gamma!}{\alpha! \beta!} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\gamma} \int e^{-i<y,\eta>} (-\eta)^{\beta-\gamma} (-D_{\eta})^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)) dy d\eta. \end{aligned}$$

Une seconde intégration par parties donne :

$$\sum_{\gamma} \frac{(-i)^{|\gamma|} \gamma!}{\alpha! \beta!} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\gamma} \int e^{-i<y,\eta>} (-D_y)^{\beta-\gamma} (-D_{\eta})^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)) dy d\eta$$

Rappelons la définition de $r_{\alpha\beta}$ que l'on a :

$$(-D_y)^{\beta-\gamma}(-D_\eta)^{\alpha-\gamma}r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta)$$
$$= \int_0^1 (1-t)^{2k-1}(-it)^{2k-2\gamma}\partial^{\alpha+\beta-\gamma}\tilde{a}(x-ty,\xi-t\eta)dt.$$

Puisque $\gamma \leq \alpha$ et $\gamma \leq \beta$, on a aussi $|\gamma| \leq k$ et $|\alpha+\beta-\gamma| \geq k$ ensuite $\partial_x^{|\alpha+\beta-\gamma|}\partial_\xi^{|\alpha+\beta-\gamma|}\bar{a} \in S^{m-k}$. Ainsi, les calculs donnés ci-dessus peuvent être reformulés

$$\int e^{-i<y,\eta>}r_k(x,\xi,y,\eta))dyd\eta = \int e^{-i<y,\eta>}s_k(x,\xi,y,\eta))dyd\eta$$

, où maintenant l'amplitude s_k satisfait $s_k \in A^{|m-k|}$ avec $|||s_k|||_{|m-k|+2n+1} \leq C_k\lambda^{m-k}(\xi)$. On obtient ainsi la borne de :

$$\lambda^{m-k}(\xi)\int e^{-i<y,\eta>}r_k(x,\xi,y,\eta))dyd\eta,$$

et en utilisant le même argument que ci-dessus, on obtient :

$$\int e^{-i<y,\eta>}r_k(x,\xi,y,\eta))dyd\eta \in S^{m-k},$$

juste en remarquant que $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta r_k$ est le reste de l'indice $2k$ dans le développement de Taylor de $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\bar{a}(x-y,\xi-\eta)$, pour lequel on a $\partial_x^\alpha\partial\beta\xi\bar{a} \in S^{m-|\beta|}$. Finalement, le développement asymptotique de $a\#b$ peut être obtenu de la même manière.

3.3 Continuité sur L^2

Dans cette section, nous montrons qu'un opérateur de Weyl est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ quand le symbole est une fonction de Schwartz ou il est borné.

Proposition 3.3.1. *Pour $a, b \in S^1(\mathbb{R}^{2n})$, les semi normes de $a\#b$ sont contrôlées comme suite : $\forall\alpha,\gamma \in \mathbb{N}^{2n}, \forall\rho \in \mathbb{R}^{2n}$,*

$$|\rho^\gamma\partial^\alpha(a\#b)(\rho) \leq \sum_{j=0}^{N-1}(\frac{\frac{n}{2}^j}{j!})|\rho^\gamma\partial^\alpha[a(\rho)(w(\vec{D},\vec{D}))^J b(\rho)]|$$

$$+C_{N,\gamma,\alpha}||<\rho>^{|\gamma|}<D>^{N+|\alpha|+2n+1}a||_{L^1}||<D>^{N+|\alpha|+|\gamma|+2n+1}b||_{L^1}.$$

Les normes du dernier terme pourraient être symétrisées entre a et b, elle peuvent être remplacées par des normes du type

$$\sum_{|\beta|\leq N+|\alpha|+2n+1}||<\rho>^\gamma\partial^\beta a||_{L^1}.$$

Pour $N = 0$, cette borne lit
$\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{N}^{2n}$,

$$|\rho^\gamma \partial^\alpha (a\#b)(\rho)| \leq C_{\gamma,\alpha} || < \rho >^{|\gamma|} < D >^{|\alpha|+2d+1} a||_{L^1} || < D >^{|\alpha|+|\gamma|+2n+1} b||_{L^1}.$$

Proposition 3.3.2. *Soit $a \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Alors il existe $C_a > 0$,*

$$\forall u \in S(\mathbb{R}^{2n}),\ ||W_a u||_{L^2} \leq C_a ||u||_{L^2}.$$

La constante C_a peut être estimée comme suit : il exist $C_d > 0$,

$$C_a = C_d \sum_{|\alpha| \leq 2d+1} ||\partial^\alpha a||_{L^1}.$$

Lemme 3.3.1. *Soient $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $b \in S^m$. Alors $a\#b \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Plus précisément, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$ et tout point $\rho \notin supp\, a$, on a l'estimation*

$$\partial^\alpha (a\#b)(\rho) = O\Big(\Big(\frac{1}{dist(\rho, supp\, a)}\Big)^\infty\Big).$$

Lemme 3.3.2. *Soient z_0,$z_1 \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $|z_0 - z_1| \geq 10$. Considérons a_0,$a_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, tels que $supp\, a_i \subset \{\rho \in \mathbb{R}^{2n}, |\rho - z_i| \leq 2\}$. Alors le produit de Moyal $a_0\#a_1$ satisfait les estimations*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \forall k \geq 0, \quad |\partial^\alpha (a_0\#b)(\rho)| \leq C_{\alpha,k} \frac{1}{(|z_1 - z_0|^2 + |\rho - \frac{z_1+z_0}{2}|^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Théorème 3.3.1. *(Théorème de Coltar-Stein) Soit $(A_j)_{j\geq 1}$ une famille d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H et supposons que les bornes suivantes sont vérifiées :*

$$sup_j \sum_k ||A_j^* A_k||^{\frac{1}{2}} \leq C, \text{ et } sup_j \sum_k ||A_j A_k^*||^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Alors la série $\sum_j A_j$ converge vers un opérateur A, qui satisfait $||A|| \leq C$.

Preuve.

On tronque la somme à $A = A^{(j)} = \sum_{j=1}^{j} A_j$, de sorte que la somme soit bien définie. A est un opérateur borné, donc A^*A est un opérateur autoadjoint positif, qui satisfait

$$||(A^*A)^m|| = ||A^*A||^m = ||A||^{2m}.$$

Nous voulons estimer la norme de $(A^*A)^m$. A partir de la décomposition de A, on écrit

$$(A^*A)^m = \sum_{j_1,j_2,j_3}^{j} A_{j_1}^* A_{j_2}^* A_{j_3}^* ... A_{j_{2m}} = \sum_{j_1,j_2,j_m}^{j} A_{j_1...j_{2m}},$$

l'astuce consiste à trouver deux bornes pour la norme $A_{j_1...j_{2n}}$

$$||A_{j_1..j_{2n}}|| \leq ||A_{j_1}^* A_{j_2}|| ||A_{j_3}^* A_{j_3}|| ... ||A_{j_{2m-1}}^* A_{j_{2m}}||,$$

$$||A_{j_1 \dots j_{2n}}|| \leq ||A^*_{j_1}||||A_{j_2}A^*_{j_3}||...||A_{j_{2m}}||.$$

En prenant la moyenne géométrique de ces deux bornes (et en remarquant que tous les $||A_j|| \leq C$ de nos hypothèses), on a :

$$||A_{j_1 \dots j_{2n}}|| \leq C||A^*_{j_1}A_{j_2}||^{\frac{1}{2}}||A_{j_2}A^*_{j_3}||^{\frac{1}{2}}||A^*_{j_3}A_{j_1}||^{\frac{1}{2}}...||A^*_{j_{2m-1}}A_{j_{2m}}||^{\frac{1}{2}},$$

par l'inégalité triangulaire, cela donne :

$$||(A^*A)^m|| \leq C \sum_{j_1,j_2,j_{2m}}^{j} ||A^*_{j_1}A_{j_2}||^{\frac{1}{2}}||A_{j_2}A^*_{j_3}||^{\frac{1}{2}}||A^*_{j_3}A_{j_4}||^{\frac{1}{2}}...||A^*_{j_{2m-1}}A_{j_2m}||^{\frac{1}{2}}.$$

Si nous additionnons d'abord sur j_1 en utilisant l'hypothèse, nous produisons un facteur C. En suite nous additionnons sur $j\psi$ etc . Enfin, on additionne sur j_{2n}, ce qui produit un facteur j, cela donne finalement $||(A^*A)^m|| \leq cC^{2m-1}j$, et donc $||A|| \leq Cj^{\frac{1}{2m}}$. Puisque cette estimation est valable pour tout $m \geq 1$, nous obtenons $||A^{(j)}|| \leq C$, une borne indépendante de l'ordre de troncature j. Montrons maintenant la convergence forte lorsque $j \to \infty$, soit $\psi \in H$, et considérons $\varphi = A^*_{k_0}\psi$. On peut alors écrire formellement

$$\sum_{j \geq 1} A_j \varphi = \sum_{j \geq 1} A_j A^*_{k_0}\psi,$$

et cette série converge puisque

$$\begin{aligned} \sum_j ||A_jA^*_{k_0}\psi|| &\leq \sum_j ||A_jA^*_{k_0}||||\psi|| \\ &\leq \sum_j ||A_jA^*_{k_0}||^{\frac{1}{2}}||A_jA^*_{k_0}||^{\frac{1}{2}}||\psi|| \\ &\leq \sum_{j,j'} ||A_jA^*_{k_0}||^{\frac{1}{2}}||A_jA^*_{k_0}||^{\frac{1}{2}}||\psi|| \\ &\leq C^2||\psi||. \end{aligned}$$

Donc la limite $A_\varphi = lim_{j\to\infty}A^{(j)}\varphi$ converge pour tout $\varphi \in \{spanA^*_k(H), k \geq 1\}$. D'autre part, on a prouvé que $||A^{(j)}|| \leq C$ uniformément pour tout j, on en déduit donc que $||A\varphi|| \leq C||\varphi||$ pour tout $\varphi \in \{spanA^*_k(H), k \geq 1\}$. Il est alors possible d'étendre A à n'importe quel φ dans la fermeture de ce sous-espace, en gardant la même borne $||A\varphi|| \leq C||\varphi||$ quelle est le complément orthogonal de cette fermeture ? cette le sous- espace $\bigcap_k kerA_k$ pour les états de ce sous -espace, on prend $A\varphi = 0$. Enfin on a défini $A\varphi$ pour tout $\varphi \in H$ satisfaisant la borne annoncée.

Théorème 3.3.2. *(Théorème de Caldéron-Vaillancourt) Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^{2n})$. Alors l'opérateur W_a s'étend à un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément, il existe une constante $C_n > 0$ telle que*

$$||W_a||_{L^2 \to L^2} \leq C_n \sum_{|\alpha| \leq 6n+2} ||\partial^\alpha a||_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Preuve.

Nous divisions l'opérateur $W(a) = \sum_n W(a_n)$, si nous appelons $A_n = W(a_n)$ le théorème de Cotlar-Stein nécessite de calculer les normes des opérateurs

$$W(a_n)^* W(a_{n'}) = W(\bar{a}_n \# a_{n'}), et W(a_{n'}) W(a_n)^* = W(a_{n'} \# \bar{a}_n).$$

1- Pour $|n - n'| \leq 10R_n$ nous appliquons les bornes de la proposition 3.3.1 pour les semi-normes de $\bar{a}_n \# a_{n'}$, pour près de n nous avons

$$|\partial^\alpha (\bar{a}_n \# a_{n'})(\rho)| \leq C_{\gamma,\alpha} || < D >^{|\alpha|+2n+1} a_n||_L^\infty || < D >^{|\alpha|+2n+1} a_{n'}||_{L^\infty},$$

où nous avons utilisé le fait que les symboles a_n sont supportés de manière compacte près de n . Pour loin du support de a_n ou a'_n, le lemme 3.3.1 implique que

$$|\partial^\alpha (\bar{a_n} \# a_{n'})(\rho)| \leq C \frac{||a_n||_{c^{k+|\alpha|}} ||a_{n'}||_{c^{k+|\alpha|}}}{(dist(\rho, suppa_n) + (dist(\rho, suppa_{n'}))^k}.$$

On peut appliquer la proposition 3.3.2 en prenant $|\alpha| \leq 2d+1$ et $k = 2n+1$ pour avoir l'intégrabilité dans $\rho \in (\mathbb{R}^{2n})$.

Nous obtenons l'estimation,

$$||A_n^* A_{n'}||_{L^2 \to L^2} \leq C_n ||a_n||_{c^{4n+2}} ||a_{n'}||_{c^{4n+2}} \leq c_n ||a||^2_{c^{4n+2}}.$$

2- Lorsque $|n - n'| > 10R_n$, on utilise le lemme 3.3.2 pour montrer que le symbole du produit satisfait

$$|\partial^\alpha (\bar{a}_n \# a_{n'})(\rho)| \leq C_k \frac{||a_n||_{c^{k+|\alpha|}} ||a_{n'}||_{c^{k+|\alpha|}}}{(|n - n'|^2 + |\rho - \frac{n+n'}{2}|^2)^{\frac{k}{2}}},$$

(où les constantes dépendent implicitement de la coupure). Encore une fois, la proposition 3.3.2 utilisée pour tout $|\alpha| \leq 2n + 1$ et $k \geq 2n + 1$ conduit à

$$\begin{aligned} ||A_n^* A_{n'}||_{L^2 \to L^2} &\leq C_k \frac{||a_n||_{c^{k+2n+1}} ||a_{n'}||_{c^{k+2n+1}}}{< n - n' >^k} \\ &\leq C_{k,\chi} \frac{||a_n||^2_{c^{k+2n+1}}}{< n - n' >^k}, \quad k \geq 2d + 1. \end{aligned}$$

La même borne vaut pour les normes $||A_{n'} A_n^*||$. En prenant $k \geq 4n + 1$, on voit que les expressions $\sum'_n ||A_n^* A_{n'}||^{\frac{1}{2}}$ et $\sum_{n'} ||A_{n'} A_n^*||^{\frac{1}{2}}$ convergent :

$$sup_n \sum_{n'} ||A_n^* A_{n'}||^{\frac{1}{2}} \leq C_{d,\chi} ||a||_{C^{6n+2}}, sup_n \sum_{n'} ||A_{n'} A_n^*||^{\frac{1}{2}} \leq C_{d,\chi} ||a||_{C^{6n+2}}.$$

On peut donc appliquer le théorème de Cotlar -Stein 3.3.1, il montre que W_a est bien défini comme un opérateur borné sur L^2 avec une norme

$$||W_a||_{L^2 \to L^2} \leq C_n ||a||_{6n+2} = C_d \sum_{|\alpha| \leq 6n+2} ||\partial^\alpha a||_{L^\infty}.$$

3.4 Action sur H_s

Définition 3.4.1. *(Espace de Sobolev) : On note par H_s cet espace et pour $s \in \mathbb{R}$,*

$$H_s = \left\{ f \in S'; ||f||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} ((1 + |\xi|)^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

On pose $H_{-\infty} = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H_s$ et $H_\infty = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H_s$.
On dit que $''f \in H_s$ en x_0'' si $f \in H_s$ sur un voisinage de x_0.

Théorème 3.4.1. *: Soit $\sigma \in S^m$, $s \in \mathbb{R}$ alors $W_\sigma : H_s \longrightarrow H_{s-m}$ est bornée, c-à-d, $\exists C_s > 0$ telle que*

$$||W_\sigma f||_{s-m} \leq C_s ||f||_s; \forall f \in H_s.$$

Corollaire 3.4.1. *: Soit $\sigma \in S^m$ et $f \in H_s$ en x_0 alors $W_\sigma f \in H_{s-m}$ en x_0.*
Pour la réciproque on a la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *: Soit $\sigma \in S^m$ est un symbole elliptique alors pour $f \in S'$ on a*

1. *Si $f \in H_{-\infty}$ et $W_\sigma f \in H_s$ alors $f \in H_{s+m}$.*
2. *Si $W_\sigma f \in H_s$ en x_0 alors $f \in H_{s+m}$ en x_0.*

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, on démontre l'inégalité de Gårding.
On va donner le théorème nécessaire avec la preuve en utilisant la approximation du flot de a_j en quantification de Weyl.

Théorème 4.0.2. *Soit $\sigma \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ tel que $Re\,\sigma \geq 0$, alors pour tout $0 < \theta < 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$Re < W_\sigma u, u > +C||u||^2_{H^{\frac{m-\theta}{2}}} \geq 0.$$

Ce théorème est un résultat partial de l'inégalité de Gårding parce qu'on a besoin dans la preuve d'avoir $\theta < 1$ pour obtenir une décroissance exponentielle, mais l'inégalité de Gårding est encore vraie pour $\theta = 1$.
De plus a doit être ici un symbole scalaire, mais pour l'inégalité de Gårding générale, a peut être un symbole à valeurs dans $L(H)$, où H est un espace de Hilbert de dimension quelconque.

Preuve.

En utilisant quelque propriétés de quantification de Weyl, on peut se ramener à prouver

$$< \sigma^w u, u > +C|u|^2_{H^{(m-\theta)/2}} \geq 0,$$

où σ est un symbole réel.
En effet, on a vu que $W_\sigma = \sigma^w + W(\rho)$, $\rho \in S^{-1}_{1,0}$ et que l'adjoint de l'opérateur σ^w est $(\sigma^w)^* = (\bar{\sigma})^w$, ce qui nous donne

$$Re < \sigma^w u, u > = < (Re\sigma)^w u, u > .$$

En suite, en posant $\sigma_0 = < \xi >^{-m} a \in S^0_{1,0}$ et $\Lambda = W(< . >)$, on a par la formule de composition

$$\Lambda^{m/2} \sigma_0^w \Lambda^{m/2} = \sigma^w + R$$

avec

$$< Rw, w > \leq |Rw|_H - (m-2)/2 |w|_H^{(m-2)/2} \lesssim ||\sigma||_{C(d)} |w|^2_{H^{(m-2)/2}},$$

pour tout $w \in H^{(m-2)/2}$. Comme Λ est autoadjoint dans L^2, on a

$$< \sigma^w u, u > = < \sigma_0^w \Lambda^{m/2} u, \Lambda^{m/2} u > + < Ru, u > .$$

Donc on peut se ramener au cas $m = 0$.

Un résultat dit que si $(\phi_j)_{j\geq 0}$ et $(\psi_j^2)_{j\geq 0}$ sont deux décompositions de Littlewood-Paley telles que $\phi_j \equiv \phi_j \psi_j^2$, alors an a l'estimation

$$| < \sigma^w u, u > - \sum_{j\geq 0} < (\phi_j \sigma)^w \psi_j(D) u, \psi_j(D) u > | \leq C |u|^2_{H^{-1}},$$

où C dépend des normes de a. La caractérisation de H^s par la décompositions de Littlewood-Paley nous dit qu'il suffit de prouver

$$< a_j^w u_j, u_j > + C 2^{-j\theta} |u_j|^2_{L^2} \geq 0,$$

pour $\sigma_j = \psi_j(\xi)\sigma(x,\xi), u_j = \psi_j(D)u$, et pour un certain $C > 0$ ne dépendant pas de j et u. En ajoutant $2^{j\theta}$ à σ_j, on peut supposer

$$a_j \geq 2^{-j\theta}.$$

De plus, pour un j_0 fixé, les termes de basse fréquence peut être majorées par

$$\sum_{0\leq j\leq j_0} < \sigma_j^w u, u_j > \lesssim ||a||_0 2^{j_0\theta} |u|^2_{H^{-\theta/2}}.$$

En divisant a par $||\sigma||_{C(\theta)}$ pour un $C(\theta)$ assez grand, on peut finalement se ramener à montrer ce qui suit :

Soit $\sigma \in S^0_{1,0}$ un symbole réel et positif, $a_j = \psi_j a + 2^{-j\theta}$, tel que $||\sigma_j||_{C(\theta)} \leq 1$, alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $u \in L^2$ et pour tout $j \geq j_0$, on a

$$< \sigma_j^w u_j, u_j > \geq 0, u_j = \psi(D)u.$$

4.1 Reformulation avec le flot de σ_j^w

Le théorème de Calderón-Vaillancourt nous donne que σ_j^w est linéaire borné de $L^2 \to L^2$. Soit Φ la flot de σ_j^w :

$$\Phi(t) = exp(t a_j^w),$$

c'est à dire pour tout $w \in L^2$, $t \mapsto \Phi(t)w$ est la solution unique dans $C(\mathbb{R}, L^2)$ de

$$y' = \sigma_j^w y, y(0) = w.$$

On a ainsi que

$$\begin{aligned} |\Phi(t)w|_{L^2}^2 - |w|_{L^2}^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} |\Phi(s)w|_{L^2}^2 ds \\ &= \int_0^t 2 < a_j^w \Phi(s)w, \Phi(s)w > ds \\ &\leq 2t < \sigma_j^w \Phi(t)w, \Phi(t)w > \end{aligned}$$

puisque l'intégrande est croissante par rapport à s.
Le flot étant bijectif en t fixé, il existe w tel que $u_j = \Phi(t)w$ (et donc $w = \Phi(-t)u_j$).
L'intégralité précédente devient

$$|u_j|_{L^2}^2 - |\Phi(-t)u_j|_{L^2}^2 \leq 2t < \sigma_j^w u_j, u_j > .$$

Donc on il nous suffit de trouve $t > 0$ tel que

$$|u_j|_{L^2}^2 \geq |\Phi(-t)u_j|_{L^2}^2.$$

4.2 Approximation du Flot de a_j en quantification de Weyl

On va maintenant approximer le flot $\Phi(t)$ de σ_j^w : posons $S_0 = exp(-ta_j)$ et

$$\partial_t S_q = -a_j S_q - \sum_{\substack{q_1+q_2=q \\ q_1>0}} \sigma_j \diamond_{q_1} S_{q_2}, \ S_q(0) = 0.$$

On fixe $q_0 = 1 + c_d[\frac{\theta}{1-\theta}]$ pour un certain c_d dépendant uniquement de d qu'on fixera plus tard dépendent. En utilisant la même méthode que pour la preuve du lemme d'approximation en quantification semi-classique, on a :

Lemme 4.2.1. *Soit $\Sigma = \sum_{0 \leq q \leq q_0-1} S_q$, alors*

$$\partial_t \Sigma^w = -\sigma_j^w \Sigma^w + \rho(t)^w$$

où $\rho \in S^{-q_0}$ vérifie

$$|\rho(t)^w|_{H^s} \lesssim \sigma(t)|w|_{H^{s-q_0}},$$

avec

$$\sigma(t) = \sum_{0 \leq q \leq q_0-1} ||S_q(t)||_{q_0-q+C(d)},$$

pour un certain $C(d) > 0$ dépendant seulement de d.

Corollaire 4.2.1. *Il existe des constantes C, C' ne dépendant que de d telles que l'on ait*

$$|\Phi(-t)u_j| \leq |\Sigma(t)^w u_j|_{L^2} + C't^2 2^{-jq_0} |\sigma|_{L^\infty}(0,t)|||\Sigma||_{L^2 \to L^2|_{L^\infty}(0,t)|u_j|_{L^2}}$$

lorsque

$$Ct2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty(0,t)} < 1/2.$$

Preuve.

On pose

$$u(t) = \Sigma(t)^w u_j + \int_0^t \Sigma(t-t')^w g(t')dt'.$$

Alors u satisfait l'équation

$$\begin{cases} u' = -\sigma_j^w u, \\ u(0) = u_j \end{cases}$$

si et seulement si

$$(Id + \rho_0)g(t) = -\rho(t)^w u_j,$$

où

$$(\rho_0 v)(t) = \int_0^t \rho(t-t')^w v(t')dt'.$$

En utilisant le fait que les fréquences de u_j sont localisées autour de 2^j, on obtient par récurrence la majoration

$$|\rho_0^k(\rho(.)^w u_j)(t)| \lesssim (t2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty}(0,t))^{k+1}|u_j|_{L^2}.$$

Donc si $Ct2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty(0,t)} < 1/2$ est vérifiée, $Id+\rho_0$ est inversible, ce qui nous donne la présentation

$$\Phi(-t)u_j = \Sigma(t)^w u_j - \int_0^t \Sigma(t-t')^w \sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}\rho_0^k(\rho(.)^w u_j)(t')dt'$$

d'où l'estimation voulue. Donc on peut se ramener à trouver un $t > 0$ satisfaisant $Ct2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty(0,t)} < 1/2$ tel que

$$||\Sigma(t)^w||_{L^2} + C't^2 2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty(0,t)}|||\Sigma||_{L^2}|_{L^\infty(0,t)} \leq 1.$$

4.3 Estimations Finales

Posons

$$t_* = j\tau_* 2^{j\theta}$$

où $\tau_* > 0$ ne dépend que de d est sera choisi plus tard. La raison pour laquelle on choisit t_* comme cela sera dans la section suivante. Le lemme suivant nous donne des estimations concernant les correcteurs S_q :

Lemme 4.3.1. *Il existe un polynôme P_j en j de degré $q+(|\alpha|+|\beta|)/2$ tel que pour tout $0 \leq t \leq t_*$ et $0 \leq q \leq q_0$, on a*

$$< \xi >^{q+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta S_q(t)| \leq P_j(1+t)^{q+(|\alpha|+|\beta|)/2} exp(-t2^{-j\theta}).$$

L'idée de la preuve de ce lemme est d'utiliser la formule de Faá di Bruno pour obtenir par récurrence des égalités de la forme

$$< \xi >^q D^\gamma S_q = e^{-ta_j} \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\gamma| \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \gamma}} C_* t^k (Da_j)^{k_0} P_*(\partial)(D^2 a_j)$$

où C_* sont des constantes, et

$$D^\gamma =< \xi >^{|\gamma|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta, \, \gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{N}^{2n};$$

$$\max(k_0, k) \leq 2q + |\gamma|, \, k - k_0/2 \leq q + |\gamma|/2;$$

$(Da_j)^{k_0} = \prod_{1 \leq i,j \leq d} (\partial_{x_i} a)^{\gamma_0^{(i)}} (< \xi > \partial_{\xi_j} \sigma)^{\gamma_0^{(j)}}$*, pour un certain $\gamma_0 \in \mathbb{N}^{2n}$ $|\gamma_0| = k_0$;et $P_*(\partial)(D^2\sigma)$ est un polynôme à coefficients constant en des dérivées de σ d'ordre au moins 2.*
Cette borne vient du fait que pour $a_j \geq 2^{-j\theta} + Ct^{-1}lnt$, les dérivées de a_j sont plus petites que 1 et de la minoration de σ_j par $2^{-j\theta}$, et pour$\sigma_j < 2^{-j\theta} + Ct^{-1}lnt$, on peut majorer par le lemme suivant les dérivées d'ordre 1 de σ_j.

Lemme 4.3.2. *Sur le domaine $\{\sigma_j < h\}$, on a $|Da_j| \leq 4h^{1/2}$ avec $D = (\nabla_x, < \xi > \nabla_\xi)$.*
Ce lemme nous donne la majoration

$$< \xi >^q |D^\gamma S_q| \leq C_q t^{k-k/2} (lnt)^{k_0/2} e^{-t2^{-j\theta}}$$

qui ne permet de conclure avec l'aide de $\max(k_0, k) \leq 2q + |\gamma|$, $k - k_0/2 \leq q + |\gamma|/2$; *et le choix de t_*.*

On est maintenant en mesure de finir la démonstration du théorème. l'estimation du lemme 4.4.1 et le fait que les fréquences de S_q soient localisées autour de 2^j nous donnent que

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq t_*} |S_q(t)^w|_{L^2 \to L^2} &\lesssim P_j 2^{-jq + j\theta(q + C(d))}, \\
|S_q(t_*)^w|_{L^2 \to L^2} &\lesssim P_j 2^{-jq + j\theta(q + C(d))} e^{-\tau_* j}, \\
\max_{0 \leq t \leq t_*} ||S_q(t)||_{q_0 + q + C(d)} &\lesssim P_j 2^{j\theta(q_0 + C(d))},
\end{aligned}$$

où P_j est un polynôme en j de degré inférieur à $q_0 + C(d)$. En fait, le facteur 2^{jq} est obtenu grâce à l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
(S_q(t)^w u)(x) &= (S_q(t)^w \Gamma^{-q} \Gamma^q u)(x) \\
&= ((S_q(t) < \xi >^{-q})^w \Gamma^q u)(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-y).\xi} S_q(\frac{x+y}{2}, \xi) < \xi >^{-q} (\Gamma^q u)(y) d\xi dy \\
&\lesssim 2^{-jq} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-y).\xi} S_q(\frac{x+y}{2}, \xi)(\Gamma^q u)(y) d\xi dy \\
&= 2^{-jq} ((S_q(t))^w \Gamma^q u)(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$|S_q(t)^w u|_{L^2} \lesssim 2^{-jq}||S_q||_C(d)|\Gamma^q u|_{H^{-q}} \lesssim 2^{-jq}||S_q||_{C(d)}|u|_{L^2}.$$

Comme $\theta < 1$, on somme par rapport à q et on obtient

$$\begin{aligned}\max_{0\leq t\leq t_*}|\Sigma(t)^w|_{L^2\to L^2} &\lesssim P_j 2^{j\theta C(d)},\\ |\Sigma(t_*)^w|_{L^2\to L^2} &\lesssim P_j 2^{j\theta C(d)}e^{-\tau_* j},\\ |\sigma|_{L^\infty(0,t)} &\lesssim P_j 2^{j\theta(q_0+C(d))}.\end{aligned}$$

On choisi d'abord τ_* assez grand dépendant seulement de d et θ, puis on choisi j_1 assez grand dépendant seulement de τ_*, d tel que pour $j \geq j_1$

$$||\Sigma(t_*)||_{L^2\to L^2} \leq C' P_j 2^{j\theta C(d)} e^{-\tau_* j} < 1/2.$$

Puis, en utilisant le choix de q_0, on choisi j_2 assez grand dépendant seulement de θ, d tel que pour $j \geq j_2$ on a

$$Ct_*^2 2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty(0,t_*)}|||\Sigma||_{L^2\to L^2}|_{L^\infty(0,t_*)} \leq C' P_j 2^{j\theta(q_0+C(d))-jq_0} < 1/2.$$

Enfin, on obtient$||\Sigma(t)^w||_{L^2} + C't^2 2^{-jq_0}|\sigma|_{L^\infty(0,t)}|||\Sigma||_{L^2}|_{L^\infty(0,t)} \leq 1$ *pour* $j \geq j_0 = \max(j_1, j_2)$.

Bibliographie

[1] H. Abels, Pseudodifferential and singular integral operators, *De Gruyter*, 2012.

[2] S. Alinhac & P.Gérard, Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, *CNRS editions*, 1991.

[3] A. Balazard-Kolein, Calcul fonctionnel pour des opérateurs h-admissibles à symbole opérateur et applications, Thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle, Université de Nantes 1985.

[4] F. Baratin, Introduction à l'étude des opérateurs Fourier intégraux : intégrale oscillante".exp.n 23, p. 1–11, 1971.

[5] H. Federico, Calcul Pseudo-différentiel et Intégralités de Garding, école Normale Supérieure.

[6] S. Nonnenmacher, Introduction to semiclassical Analysis, 2019.

[7] B.Texier, Approximation of pseudo-differential flows, *Indiana Univ. Math. J.* 65(1), 243–272, 2016.

[8] A. Unterberger, La série discréte de $SL(2, \mathbb{R})$ et les opérateurs pseudodifférentiels sur une demi-droite, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4 (1984).

[9] M. Wong, Weyl transforms, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1998.

[10] S. R. Xavier, Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators, *Studies in advanced mathematics*, 1991.