REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité Analyse :Fonctionnelle et Applications

Par :

Tazi Karima Benadda Asmaa Bensenouci Zoubida

Sur le thème

L'intégrale au sens de Bochner

Soutenu publiquement le 27 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Larabi Abderrahman	MCA	Université de Tiaret	Président
Mr Guedda Lahcene	Pr	Université de Tiaret	Encadreur
Mr Hallouz Ahmed	MCB	Université de Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Je ne trouve pas les termes à exprimer pour donner la valeur exacte qui corresponde au poids de mon professeur, choisir la mesure principale de mesurer me parait tés difficile trouver aussi les mots pour exprimer ma plus profonde gratitude à mon professeur monsieur **Lahcen Guedda** est plus difficile , malgré ça je dois le remercier pour son soutien continu, sa patiente , sa disponibilité, son encouragement constant, il nous a encadré et aidé par des bons conseils lors de la rédaction de ce mémoire, un grand honneur pour moi d'avoir un tel encadreur ayant un bon esprit et une très bonne culture scientifique.

Je remercie de tout mon cœur les professeurs qui font partie de ce jury notamment Mr **Larabi Abderahmane** …et **Mr Hallouz Ahmed.**Sans tout fois ignorer la capacité et le poids du travail qu'il fournissent et sans cacher que nous avons vraiment la grande chance d'être face à eux.

Dédicace

Je dédie ce travail qui été pour moi un long tissu réalisé par les deux personnes qui ont veillé pour sauver mon avenir, pour réaliser mes rêves et qui ont toujours vécu les soucis pour me voir toujours en haut à mon cher père et ma très chère mère

Ainsi que mon mari qui m'a soutenu durant les étapes de la réalisation de ce travail ,

Mon fils ton sourire illumine ma vie et la rend plus joyeuse et pleine de sens ,

Mes frères et mes sœurs, mes neveux et mes nièces, ma grand-mère et toute ma famille et ma belle famille, mes copines et à tout ceux qui ont mis la main de participation à ce travail.

Bensenouci Zoubida

Dédicace

A ma mère pour ses encouragements et ses sacrifices.

A mon père pour son soutien.

A mon frère Abdelhak,

A tous mes amis

A tous ceux qui m'aiment

Je dédie ce travail.

Tazi Karima

Dédicace

Je Dédie ce travail

A mon chère père

Ma chère mère

Mon mari

Mes frères et mes sœurs

Et toute la famille et ma fille « Allaa »

Benadda Asma

Table des matières

Introduction **3**

1 Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue **4**
1.1 Espaces mesurables 4
1.2 Définitions et exemples de mesures 6
1.3 Complétion des mesures 9
1.4 Théorie générale de l'inégration : 9
1.5 Intégration des fonctions mesurables positives 16
1.5.1 Définitions et théoréme de convergence monotone . . . 16
1.5.2 Propriétés de l'intégrale 18
1.6 **Fonctions intégrables á valeures dans $\mathbb{R}$** 20

2 Intégrale de Bochner **23**
2.1 Intégral de Bochner 23

3 Intégrale de Pettis **34**
3.1 **Intégrale de Pettis** 34

Introduction

L'intégration au sens de Bochner est utilisé dans plusieurs branches mathématiques comme la théorie de probabilités, Analyse fonctionnelle, équations différentielles dans des espaces vectoriels, théorie de semi-groupes pour opérateurs linéaires, ...A la fin du dix-neuviéme siècle, la théorie d'intégration de Riemann devient insuffisantes et ses limitations étaient apparentes alors plusieurs mathématiciens cèlèbres comme (Jardan, Borel, Young, ...) se mettent en devoir de la généraliser. C'est ainsi que la communauté mathématique adopta la théorie de Lebesgue, exposée dans une note fondatrice de 1901, puis développée dans le Cours Peccot en introduisant concept de mesure par Borel vers 1895. La théorie de la mesure et l'itégration de Lebesgue seront ensuite perfectionnées et généralisées par de nombreux mathématiciens du vingtiéme siècle, en particulier Carathéodory, Vitali, Radon, Riesz, Hausdorff, Kolmogorov et Besicovich (par ordre chronologique approximatif). Le cadre classique le plus simple pour définir une intégrale est celui des fonction en escalier sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrabilitié au sens de Riemann impose des conditions relativement fortes : Une fonction $f :\to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\beta > 0$ donné, on peut subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles sur lesquels l'oscillation de la fonction f dépasse β soit arbitrairement petite. Plus tard, Lebesgue montrera qu'une fonction : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, au sens où on peut l'inclure dans une union d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est arbitrairement petite.

Ces condition peuvent sembler assez faibles, puisqu'elles autorisent par exemple une fonction qui ne serait discontinue qu'en une quantité dénombrable de points. Mais il est facile de construire des fonctions bornées ne remplissant pas ces condition : le contre-exemple connu est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, ou sa restriction à un segment. Dans de nombreux problémes d'analyse, on rencontre des fonction qui ne sont pas forcément Riemann-intégrables. Dans la théorie de Lebesgue, la classe des fonctions intégrables est beaucoup plus grande. par exemple, toute fonction bornée est Lebesgue intégrable.En outre,

sa théorie généralise bien celle de Riemann.
C'est par ce probléme que Lebesgue motive sa construction dans sa note de 1901.L'intégrale de Riemann permet d'intégrer des fonction des fonctions discontinues, mais ne permet pas d'intégrer n'importe quelle fonction dérivée,même bornée c'est à dire si donc f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il n'est pas garanti que l'identité

$$(1) \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

ait un sens. En fait, divers auteurs (Volterra, Köpcke, Brodén, Schoenflies) ont construit des classes de fonction qui sont dérivables, avec une dérivée bornée mais non Riemann-intégrable. Alors que sous des hypothèses simples, dans la théorie de Lebesgue, la dérivation et l'intégration deviennent des opération inverses. C'est ainsi que l'identité (1) est automatiquement dés que f est continue, dérivale sur $[a, b]$ et de dérivée bornée.

Sachant qu'une limite de fonctions Riemann-intégrables n'est pas forcément Riemann-intégrable, même si ces fonctions sont uniformément bornées alors on ne peut pas échanger les opérations limite et intégrale. par contre Lebesgue parvient à définir un concept de fonctions intégrables qui est invariant par passage à la limite. Par conséquent, sous des hpothéses simples, l'échange intégrale-limite est presque automatique.
L'intégration par rapport à une mesure est une opération qui associe à une fonction f à valeurs réelles, une valeur dans $\mathbb{R}$.Une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ se présente sous forme $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, ou chaque f_i est une fonction. Intégrer une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ revient alors à intégrer chaque composante f_i et à former le vecteur composé de ces intégrales. En revanche, on se pose la question, qu'on est-il pour une fonction à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie ? La définition de l'intégrale de Lebesgue comme borne supérieure d'intgrales de fonction simples ne peut s'étendre directement aux intégrales à valeurs vectorielles car elle utilise la propriété d'ordre de $\mathbb{R}$.
Partant de la théorie de l'intégration de Lebesgue pour des fonctions scalaire, on développe dans ce mémoire, la théorie correspondante pour des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach.

Chapitre 1

Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue

Dans cette section, nous introduisons les principaux outils qui seront utiles dans toute la suite de ce travail.

1.1 Espaces mesurables

Définition 1.1.1 *Une **topologie** sur X est une fammille τ de parties de X telles que :*
1) $\varnothing \in \tau,\ X \in \tau$
2) *Si* $O_1 .... O_n \in \tau$, *alors* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \tau$
3) *Si* $(O_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque d'éléments de* τ *alors* $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \tau$
Les éléments de τ s'appellent les ouverts de X. On dit que (X, τ) est un espace topologique

Définition 1.1.2 (**Les voisinages**)
Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $a \in X$. On dit qu'une partie V de X est voisinage du point a s'il existe un ouvert U contient a et inclut dans V. On note $\mathcal{V}(a)$ la famille de tous les voisinages du point a.

Définition 1.1.3 (**L'adhérence**)
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit A une partie de X et $x \in X$.On dit que x est adhérant à A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A.
On note $\bar{A}$ l'ensemble de tout les points adhérunt à A.

Définition 1.1.4 (***Densité***)
Une partie A de X est dite dense si $\bar{A} = X$ avec $\bar{A} = X$ est l'adhérence de A.

Définition 1.1.5 (***Dénombrabilité***)
Un ensemble A est dit dénombrable s'il est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$.

Définition 1.1.6 (Séparabilité) *Un espace X est dit séparable s'il contient une partie dense et dénombrable.*

Exemple 1.1.1 *:* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est séparable car il contient $\mathbb{Q}$ qui est dense et dénombrable.*

Définition 1.1.7 *Soit X un ensemble. On appelle* ***tribu*** *ou* σ***-algèbre*** *sur X une famille $\mathcal{M}$ de parties de X possédant les Propriétés suivantes :*

1) $X \in \mathcal{M}$
2) *si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^c \in \mathcal{M}$ (ou $A^c = X \backslash A$ est le complémentaire de A dans X)*
3) *si $A_n \in \mathcal{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$*

Les élements de $\mathcal{M}$ sont appelés ***les parties mesurables*** *de X. On dit que $(X, \mathcal{M})$ est* ***un espace mesurable****.*

Conséquence*.*
1) $\varnothing \in \mathcal{M}$ *car* $X \in \mathcal{M}$
2) *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ (car $(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n)^C = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n^C$)*
3) *$\mathcal{M}$ est stable par intersection ou union finie.*
4) *Si A et B sont mésurables, alors la différence non symétrique $A \backslash B = A \cap B^C \in \mathcal{M}$.*

Evidemment, tout ensemble X possède des tribus, par exemple :
$\mathcal{M} = \varnothing, X$ *la plus petite.*
$\mathcal{M} = P(X)$ *la plu grande.*

Pour construire des tribus "intéréssantes" sur X, on utilise souvent le résulta suivant :

Lemme 1.1.1 *Soit $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de tribus sur X, Alors $\mathcal{M} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu sue X.*

Définition 1.1.8 *Soit F une famille de partie de X. On note*

$$\sigma(F) = \bigcap_{\mathcal{M}\, tribu\, sur\, X, \mathcal{M} \supset F} \mathcal{M}$$

Alors, $\sigma(F)$ est une tribu sur X appelée ***tribu engendrée par*** *F.*

Tribu borélienne.

Définition 1.1.9 *Soit E un espace métrique (plus généralement topologique) et O la famille des ouverts de E, On appelle tribu de borel ou tribu borelienne et on la note $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la famille O.*
Autrement dit, $\mathcal{B}(E) = \sigma_E(O)$.
Considérons plus en détail le cas de la tribu de borel sur $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient tous les ouverts et tous les fermées de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient les union dénombrables de fermées (ensemble F_σ).
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient les inersections dénomrable d'ouverts (ensembles G_σ).
On peut montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a la puissance du continu. En conséquence, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq P(\mathbb{R})$.

Proposition 1.1.1 *la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.*
Preuve : *Soit $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par les intervalle $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$, Par constriction $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
D'autre part $\forall a \in \mathbb{R}$ on a $[a, +\infty[= \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, +\infty[\in \mathcal{M}$. Par complémentaire, $]-\infty, a[= [a, +\infty[^c \in \mathcal{M}$. Par intersection, si $a < b$,

$$]a, b[=]-\infty, b[\bigcap]a, +\infty[\in \mathcal{M}$$

On sait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de la formes $]-\infty, a[,]a, b[,]a, +\infty[$, donc $\mathcal{M}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.1.1 *$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalle $]a, +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationels $(a_n)_{n \in N}$ décroissante vers a et $]a, +\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, +\infty[$*

1.2 Définitions et exemples de mesures

Définition 1.2.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. on appelle* ***mesure positive sur*** *X une application $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ vérifiant*

1) $\mu(\varnothing) = 0$;

2) ***Additivité dénombrable*** *: si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurable deux à deux disjoints alors,*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

et on dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est ***un espace mesuré****.*

Commentaires*.*

-On dira souvent "mesure" au lieu de "mesure positive".

-La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire pour éviter des situations triviales.

En effet $\forall\, A \in \mathcal{M}$,on a $A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ...$,donc $\mu(A) = \mu(A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varnothing)$.

Proposition 1.2.1 (propriétés élémentaires d'une mesure positive)

1) ***Monotonie*** *:Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alor $\mu(A) \leqslant \mu(B)$*

2) ***sous-additivité*** *:Si $A_n \in \mathcal{M}\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ alors ;*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

3) *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

4) *Si $A_n \in \mathcal{M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \supset A_{n+1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$, avec $\mu(A_0) < \infty$ alors*

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration :

1) *On a $B = A \cup (B\backslash A)$, union disjointe d'éléments de $\mathcal{M}$ donc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \geqslant \mu(A)$. Si $\mu(A) < \infty$, on déduit que $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$*

2) *Posons $B_0 = A_0$ et $\forall\, n \geqslant 1$, $B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.*

3) *Posons $B_0 = A_0$ et $\forall n \geqslant 1$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$. Alors les B_n sont deux à deux disjoints et $\forall\, n \in \mathbb{N}\, A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.*

4) *Posons $B_n = A_0 \backslash A_n \forall n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissant avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En outre, $\mu(B_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ car $\mu(A_0) < \infty$. (par 3), on a donc*

$$\mu(A_0) - \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$$

Exemples(Exemple élémentaires de mesures).

1) ***Mesure de comptage*** *sur un ensemble X sur $(X, P(X))$, on définit la mesure de comptage $\mu(A)$, $A \subset X$ par*

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & , si\, A\, fini \\ \infty & , si\ non \end{cases}$$

cette mesure est surtout utilisée sur des ensembles "discrets" $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^d, ...)$.

2) ***Mesure de Dirac*** *en un point.*

Soit $(X, \mathcal{M})$ un ensemble mesurable, avec $X \neq \varnothing$ et soit $x \in X$. On définit $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ par

$$\mu(A) = 1_A = \begin{cases} 1 & si\ x \in A, \quad A \in \mathcal{M} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

On note souvent $\mu = \delta_x$

Remarque *: La condition $\mu(A_0) < \infty$ du 4 de la proposition (1.2.1) est nécessaire. En effet, considérons $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de compatage et considérons$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$, alors $A_n \supset A_{n+1}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$, mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = +\infty$.*

Théorème 1.2.1 (***Mesure de Lebesgue sur*** $\mathbb{R}$) : *Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ, telle que*

$$\lambda([a, b]) = b - a, \forall\, a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

Remarque *:*

*La mesure de Lebesgue est **diffuse** :$\lambda(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$*

En effet, $x = \bigcap_{n=1}^{\infty}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, donc par la propositoin (1.2.1), on a :

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On dit aussi qu'elle ne charge pas les points(au contraire de la mesure de Dirac).

Conséquences :

$\lambda(]a, b[) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$ *si* $a \leqslant b$

Les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

1.3 Complétion des mesures

Définition 1.3.1 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré.*
1) *On dit que* $A \subset X$ *est* ***négligeable*** *(pour la mesure* μ*) si* $A \in \mathcal{M}$ *et* $\mu(A) = 0$.
2) *On dit que la mesure* μ *est complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est encore négligeable.*

Proposition 1.3.1 (complétion des mesures) *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $\mathcal{M}^*$ *l'ensemble de toutes les parties* E *de* X *telles qu'il existe* $A, B \in \mathcal{M}$ *avec* $A \subset E \subset B$ *et* $\mu(B \backslash A) = 0$.
On définit alors $\mu^*(E) = \mu(A)$*. Ainsi,* $\mathcal{M}^*$ *est une tribu sur* X *et* μ^* *une mesure complète sur* $\mathcal{M}$ *qui prolonge* μ.

Remarque 1.3.1 *Si* $E \in \mathcal{M}$*, et comme* $E \subset E \subset E$*, alors* $E \in \mathcal{M}^*$ *et* $\mu^*(E) = \mu(E)$

Définition 1.3.2 *. On appelle* ***tribu de Lebesgue*** *sur* $\mathbb{R}$*, et on note* $\mathcal{L}(\mathbb{R})$*, la tribu qui compléte la tribu de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour la mesure de Lebesgue* λ.
On appelle encore ***mesure de Lebesgue*** *la mesure complétée*

$$\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$$

Théorème 1.3.1 (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$***.)*** *Il existe une unique mesure positive sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, notée* λ*, telle que pour tout pavé* $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}$*, on ait :*

$$\lambda(P) = \prod_{i=0}^{d} (b_i - a_i)$$

1.4 Théorie générale de l'inégration :

Maintenant que l'on a étudié la théorie générale de la mesure, et on admettant l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$*, On va pouvoir définire, comme conséquence, une théorie de l'intégration, On construira donc une intégrale à valeure dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, puis on comparera avec l'intégrale de Riemann. Enfin, On donnera des théorèmes de continuité et dérivabilité sur les intégrales dépendant d'un paramètre avant d'étudier la fonction* Γ *d'Euler.*

Définition 1.4.1 *:Soit $(X,\mathcal{M})$ et $(Y,\mathcal{N})$ deux espace mesurable .On dit qu' une application $f : X \to Y$ est **mesurable** (pour les tribus $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$) si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \ \ \forall B \in \mathcal{N}$$

Cela rappelle la notion de fonction continue dans les espaces topologique.

Définition 1.4.2 *.Soit $(X,\mathcal{M})$et $(Y,\mathcal{S})$ deux espace topologique On dit qu'une application $f : X \to Y$ est **continue** si*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \ \ \forall \ B \in \mathcal{S}$$

Les fonctions mesurables sont aux espace mesurables ce que les fonctions continues sont aux espace topologique.

Remarques *:*

1) *Si $(X,\mathcal{M})$ est un espace mesurable, si Y est un ensemble quelconque et $f : X \to Y$, alors on peut toujours munir Y d'une tribu $\mathcal{N}$ telle que f soit mesurable.*
   *Evidemment, on peut prendre $\mathcal{N} = \{\varnothing, Y\}$ (et c'est la plus petite tribu possible). Un meilleur choix est de poser $\mathcal{N} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$. Alors $\mathcal{N}$est une tribu et c'est la plus grande tribu sur Y qui rend f mesurable. On dit que $\mathcal{N}$ est la **tribu image** de $\mathcal{M}$ par f.*
2) *Si X est un ensemble quelconque, si $(Y,\mathcal{N})$ est un espace mesurable, et $f : X \to Y$, alors on peut toujours munir X d'une tribu $\mathcal{M}$ telle que f soit mesurable. Evidemment, on peut prendre $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$(et c'est la plus grande tribu possible).Un meilleur tribu sur X qui rend f mesurable. On dit que $\mathcal{M}$ est **la tribu engendrée** par$f$.*

Lemme 1.4.1 *.*
Soient $(X,\mathcal{M})$ et $(Y,\mathcal{N})$ deux espace mesurables et $f : X \to Y$. On suppose que $\mathcal{N}$ est engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Y, $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \ \forall B \in \mathcal{F}$.

Preuve. *La condition est evidemment nécessaire. Supposons donc que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{F}$,et considérons la tribu image de $\mathcal{M}$ par$f$:*

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$$

Alors $\tilde{\mathcal{N}}$ contient $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{N}$,et en particulier, f est mesurable.
Cas particulier. *Si X et Y sont deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, une application $f : X \to Y$ mesurable est appelée **borélienne**. Par le lemme, $f : X \to Y$ est borélienne si et seulement si, pour tout ouvert $V \subset Y, f^{-1}(V)$ est borélien. Si $Y = \mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $f : X \to Y$ est borélienne. Si et seulement si $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est borélienne pour tout $a \in \mathbb{R}$.*

Exemple 1.4.1 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable, et soit* $A \subset X$*. On définit la fonction indicatrice de* A *par*

$$1_A : X \to \mathbb{R}$$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ x \in A \\ 0 \ \ si \ non \end{cases}$$

alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, (1_A^{-1})(\ ]a, +\infty[\ ) = \begin{cases} \varnothing \ si \ a \geq 1 \\ A \ si \ 0 \leq a < 1 \\ X \ si \ \ a<0 \end{cases}$$

Ainsi, 1_A *est mesurable si et seulement si* A *est mesurable* $(A \in \mathcal{M})$

Stabilité de classe des fonctions mesurables

Lemme 1.4.2 *Si* f *:*$(X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_2, \mathcal{M}_2)$ *et* $g : (X_2, \mathcal{M}_2) \to (X_3, \mathcal{M}_3)$ *sont mesurables, alors* $g \circ f : (X_1, \mathcal{M}_1) \to (X_3, \mathcal{M}_3)$ *est mesurable.*

Démonstration. Evident car $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)),\ \forall A \subset X_3$

Proposition 1.4.1 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable* (Y, τ) *un espace topologique* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *des applications mesurables, et* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ *une application continue.*
Pour tout $x \in X$*, on note* $h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x))$*. Alors* $h : X \to Y$ *est mesurable.*
On pourrait formuler cela comme : " Une combinaison continue de deux applications mesurables est mesurable"

Démonstration. Notons $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ *de sorte que* $F : X \to \mathbb{R}^2$ *Alors* $h = \Phi \circ F$*. comme est borélienne (car continue), il suffit de vérifier que* F *est mesurable . Soient* $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ *deux intervalles, et soit* R*=*$I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}_2$*. Alors* $F^{-1}(R) = f_1^{-1}(I_1) \bigcap f_2^{-1}(I_2) \in \mathcal{M}$*.*
comme la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^2$*est engendrée par les rectangles de la forme ci-dessus, on a que* F *est mesurable.*

Corollaire 1.4.1 *Soient* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *deux fonction mesurables, Alors* $f + g, fg, min(f, g)$ *et* $max(f, g)$ *sont mesurables.*

Démonstration. il suffit d'appliquer la proposition avec $Y = \mathbb{R}$ *et* $(x, y) = x + y\ \ , xy\ min(x, y)\ , max(x, y)$*.*

Corollaire 1.4.2 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors $f_+ = max(f,0), f_- = max(-f,0)$ et $|f| = f_+ + f_-$ sont mesurables.*

Corollaire 1.4.3 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable, et si $f(x) \neq 0, \forall x \in X$, alors g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ est mesurable*

Démonstration. Soit $Y = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ muni de la tribu Borélienne, et soit $\varphi : Y \to Y$ définie par $\varphi(y) = 1/y$. Comme $f : X \to Y$ est mesurable et φ est continue alors $g = \varphi \circ f : X \to Y$(ou $\mathbb{R}$) est mesurable.

Corollaire 1.4.4 *.*
1. *Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, si et seulment si $\Re(f) : X \to \mathbb{R}$ et $\Im(f) : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables.*
2. *Si $f, g : X \to \mathbb{C}$ sont mesurables, il en va de même de $f + g, fg$ et$|f|$*
3. *Si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, il existe une fonction $\alpha : X \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\forall x, |\alpha(x)| = 1 \, et \, f = \alpha|f|$*

Démonstration (du 3)Soit $A = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M}$. Soit $Y = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $\varphi(z) = z/|z|$, $\forall z \in Y$. On pose $\alpha : X \to \mathbb{C}$ une application mesurable (comme composition de deux fonction mesurable) définie par

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & si \quad x \notin A \end{cases}$$

La fonction α ainsi définie convient.
Rappels sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$
1.relation d'ordre : On munit $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, complétée de

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\infty < a < +\infty$$

$\overline{\mathbb{R}}$ *est donc totalement borné.*

Proposition 1.4.2 (Stabilité des fonctions mesurables par limite ponctuelle).*Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonction mesurable , alors*

$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \lim_{n\to\infty} sup\, f_n, \lim_{n\to\infty} inf\, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

sont mesurable. En particulier, si $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe $\forall x \in X$, alors $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.
Plus généralement, l'ensemble $\{x \in X \mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe$\}$ est mesurable.

Définition 1.4.3 *:Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable .On dit qu'une application mesurable* $f : X \to R$ *est* ***étagée*** *si* f *ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*
En notant $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *les valeurs de* f *et* $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ *pour* $i = 1, ..., n$, *on a donc*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \tag{1.1}$$

Exemple 1.4.2 *la fonction indicatrice des rationnel* $1_{\mathbb{Q}}$ *est une fonction étagée.*

L'écriture (2.1) est unique aux renumérotation prés. Les $\alpha_1, ...\alpha_n$ *sont deux à deux distincts et les* $A_1, ...A_n$ *sont deux à deux disjoints. Si* f *prent la valeur* 0, *on peux omettre le terme correspondant dans la somme (2.1) Les fonctions (mesurables) étagées sont exactement les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables. Si*

$$f = \sum_{k=1}^{N} \beta_k 1_{B_k}$$

avec $\beta_1, ...\beta_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}$ *non nécessairement distincts et* $B_1, ..., B_{\mathcal{N}} \in \mathcal{M}$ *non nécessairement disjoints, alors f ne pas prend qu'un nombre fini de valeurs et possède donc aussi une écriture canonique de la forme (2.1).*

Proposition 1.4.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable, Alors il existe une suite croissante de fonctions (mesurable) étagée qui converge ponctuellement vers* f.
Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on défini* $\varphi_n : [0, +\infty[\to [0. + \infty[$ *par*

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}E(2^n t) & si \quad 0 \leqslant t < n \\ n & si \qquad t \geqslant n \end{cases}$$

ou $E(x)$*désigne la partie entière de* x. *il est claire que* φ_n *est étagée telle que* $0 \leqslant \varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t), \forall t \in [0, +\infty]$. *On pose* $f_n = \varphi_n \circ f$, $n \in \mathbb{N}$, *alors* f_n *est étagée,* $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leqslant f_{n+1}$ *et* $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in X$. *En effet, si* $f(x) = +\infty$, *on a* $\forall n$, $f_n(x) = n$. *D'autre part, si* $f(x) < \infty$ *et* $n \geqslant f(x)$ *alors* $f(x) - 2^{-n} \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$.

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré*

Définition 1.4.4 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to [0, +\infty[$ *une fonction (mesurables) étagée. On appelle* ***intégrale de*** f *(pour la mesure positive* μ *) la quantité*

$$\int f d\mu = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)}_{\in[0,+\infty]}$$

où $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ *est l'écriture canonique de* f

Lemme 1.4.3 *Si* $\beta_1, ..., \beta_N \in [0, +\infty[$ *et* $B_1, ..., B_N \in \mathcal{M}$ *, et si*

$$f = \sum_{k=1}^{N} \beta_k 1_{B_K}$$

alors

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \mu(B_k)$$

Démonstration *: On suppose* $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_N \neq 0$.

- 1 ***er cas :*** *Les* $B_1, ..., B_N$ *sont deux à deux disjoints. Dans ce cas là, les* $\beta_1, ..., \beta_N$ *parcourent* $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$,
  et on a $A_i = \bigcup\limits_{k/B_k \subset A_i} B_k$ *et* $B_k \subset A_i \Longleftrightarrow \beta_k = \alpha_i$. *Ainsi,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{k/B_k \subset A_i} \mu(B_k))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k/B_k \subset A_i} \beta_k \mu(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \beta_k \mu(B_k)$$

- 2 ***eme cas (cas général) :*** *La* σ*-algèbre engendrée par les* $B_1, ..., B_N$ *est également engendrée par les ensembles* $C_1, ..., C_m$ *deux à deux disjoint. On définit*

$$\gamma_j = \sum_{k/B_k \supset C_j} \beta_k, j = 1, ..., m$$

  alors $f = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j I_{C_j}$ *avec* $C_1, ..., C_m$ *deux à deux disjoint . En outre,*

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k (\sum_{j/B_k \supset C_j} \mu(C_j))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu(C_j)(\sum_{k \diagup B_k \supset C_j} \beta_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \mu(C_j)$$

Notons ε_+ l'ensemble des fonctions (mesurables) étagées sur X à valeurs dans $[0, +\infty[$. L'application

$$i : \varepsilon_+ \to [0, +\infty]$$

$$f \mapsto \int f d\mu$$

possède les propriétés suivantes:

– *i)* ***Additivité :***

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \, \forall \, f, g \in \varepsilon_+$$

– *ii)* ***Homogénéité :***

$$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu \, \forall f \in \varepsilon_+ \, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

– *iii)* ***Monotonie :*** *Si f et $g \in \varepsilon_+$ et si $f \leqslant g$, alors*

$$\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$$

En effet,

– *i) si $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}$ et $g = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j I_{B_j}$, alors $f + g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j I_{B_j}$, et donc*

$$\int (f+g) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

$$= \int f d\mu + \int g d\mu$$

– *ii) C'est évident par définition de l'intégrale .*

– *iii) suit de i) car*

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \underbrace{\int (g-f) d\mu}_{\geqslant 0} \geqslant \int f d\mu$$

1.5 Intégration des fonctions mesurables positives

Dans toute la suite $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

1.5.1 Définitions et théoréme de convergence monotone

Définition 1.5.1 *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle* ***intégrale de*** *f (sur X , pour la mesure μ) , la quantité*:

$$\int f d\mu = sup\left\{\int h d\mu \mid h \in \varepsilon_+, h \leq f\right\} \in [0, +\infty]$$

si $E \subset X$ est une partie mesurable , on note aussi

$$\int_E f d\mu = \int f 1_E d\mu$$

si $f \in \varepsilon_+$, on retrouve bien la définition précédente de l'intégrale. Cette intégrale possède de la monotonie : $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$ si $f \leqslant g$.

Théorème 1.5.1 (de la convergence monotone - Beppo-levi)
Soit $f_n : X \to [0, +\infty]$ une suite croissante de fonction mesurables positives, et soit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ la limite ponctuelle des f_n. Alors, f est mesurable et

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration:
Comme $\int f_n d\mu \leqslant \int f_{n+1} d\mu$ du fait de la croissance de (f_n), la limite $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \in [0, +\infty]$ existe. Soit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, alors f est mesurable, et comme $\forall n$, $f_n \leqslant f$, on a

$$\int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu, \forall\, n \Longrightarrow \alpha \leqslant \int f d\mu$$

par ailleurs, soit $h \in \varepsilon_+$ telle que $h \leqslant f$ et soit $c \in]0, 1[$. On définit :

$$A_n = \{x \in X | f_n \geqslant ch(x)\}$$

alors $A_n \in \mathcal{M}$ (comme image inverse de $[0, +\infty]$ par $f_n - ch$ mesurable), et d'autre part $A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Or,

$$\int f d\mu \geqslant \int_{A_n} f_n d\mu \geqslant \int_{A_n} ch d\mu = c \int_{A_n} h d\mu$$

De plus, si $h = \sum_{j=1}^{m} \beta_j I_{\beta_j}$*, on a*

$$\int_{A_n} h d\mu = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j \cap A_n)$$

Comme on a une somme finie, on peut passer à la limite quand n *tend vers* $+\infty$ *et on a*

$$\int_{A_n} h d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \int h d\mu$$

Ainsi, $\alpha \geqslant c \int h d\mu$ *et ce* $\forall c \in]0,1[, \forall h \in \varepsilon_+$ *telle que* $h \leqslant f$ *. On prend d'abord le sup sur* $c \in]0,1[$ *, puis le sup sur* $h \in \varepsilon_+, h \leqslant f$ *et on trouve* $\alpha \geqslant \int f d\mu$.

Remarques:

- 1) *Si* f_n *est une suite* ***décroissante*** *de fonction mesurables positives, et si* $\int f_0 d\mu < \infty$*, alors on a*

  $$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

  où $f = \lim_{n\to\infty} f_n$

  Preuve, appliquer le théorème de Beppo-levi à la suit $g_n = f_0 - f_n$.
- 2) *On rappelle que si* $f : X \to [0,+\infty]$ *est mesurable, il existe une suite croissante* $f_n \leqslant f_{n+1} \in \varepsilon_+$ *telle que* $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x), \forall x \in X$*. Alors,*

  $$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

  L'intégrale des fonction mesurable positive vérifie :
- *i)****Additivité :***

  $$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu, \ \forall f,g \in \varepsilon_+.$$

  En effet, soient (f_n) *et* (g_n) *deux suite croissante dans* ε_+ *telle que* $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *et* $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$*. Alors* $f_n + g_n \in \varepsilon_+$ *et* $f_n + g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f + g$*. Or,* $\forall n$, $\int (f_n + g_n) d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu$ *, on obtient donc le résultat en passant à la limite grâce au théoréme de convergence monotone.*
- *ii)****Monotonie :****Si* $f \leqslant g$ *, alors*

  $$\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$$

Corollaire 1.5.1 *Soit* (f_n) *une suite de fonction mesurables positive et soit* $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ f : X \to [0, +\infty]$. *Alors* f *est mesurable et*

$$\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$$

c'est la propriété "d'additivité dénombrable".

Démonstration *Soit* $F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$ *, alors* $(F_N)_N$ *est une suite croissante de fonction mesurable positive, et* $\forall N \in \mathbb{N}$ *, on a*

$$\int F_N d\mu = \sum_{n=0}^{N} \int f_n d\mu$$

En prenant la limite quand $N \longrightarrow \infty$, *et en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient le résultat.*

1.5.2 Propriétés de l'intégrale

Définition 1.5.2 (Terminologie) *:Dans un espace mesuré* $(X, \mathcal{M}, \mu)$, *on dit qu'une propriété* $P(x)(x \in X)$ *est vraie* ***presque partout****(ou* μ*-presque par tout) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.*

Exemple *Si* $f, g :\to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *sont mesurable, alors* $\{x|f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}$ *et donc*

$$f = g \ \ presque \ \ partout \ \ \Longleftrightarrow \mu(\{x \in X|f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Remarque μ *n'est pas nécessairement compléte dans l'exemple précédent. Ainsi , si* μ *est compléte ou si* f, g *sont mesurable , alors*

$$f = g \ \ presque \ \ partout \ \ \Longleftrightarrow \ \mu(\{x \in X|f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Proposition 1.5.1 *Soit* $f : X \to [0, +\infty]$ *une fonction mesurable.*
– 1) $\forall\alpha > 0, \mu(\{x \in X|f(x) \geqslant a\}) \leqslant 1/a \int f d\mu$.
– 2) $\int f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ *presque partout.*
– 3) *Si* $\int f d\mu < \infty$ *, alors* $f < \infty$ *presque partout.*
– 4) *Si* f *et* $g : X \to [0, +\infty]$ *sont mesurables , alors*

$$f = g \ \ presque \ \ partout \Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$$

démonstration :

1) *Soit* A=$\{x \in X \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a,+\infty]) \in \mathcal{M}$. *On a* $f \geq a1_A$ *et ainsi,*

$$\int f d\mu \geq a\mu(A)$$

2) *Si* $f = 0$ *presque partout, alors si* $h \in \mathcal{E}_+$ *tel que* $h \leq f$, *on a* $h = 0$ *presque partout. En utilisant la définition de l'intégral dans* $\mathcal{E}_+$, *on en déduit que* $\int hd\mu = 0$ *d'où* $\int fd\mu = 0$.

Inversement, supposons que $\int fd\mu = 0$. *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note*

$$A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

Alors A_n *est mesurable (image réciproque de* $[\frac{1}{n},+\infty]$ *par* f*),*$A_n \subset A_{n+1}$ *et* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$. *Par ailleurs,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu(A_n) \leq n \int fd\mu = 0 \text{ par } 1)$$

Ainsi, on en déduit que

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0)$$

3) *Supposons que* $f(x) = +\infty$,$\forall x \in A$,*avec* $A \in \mathcal{M}$ *et* $\mu(A) > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \geq n1_A$ *et donc*

$$\int fd\mu \geq n\mu(A), \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $\int fd\mu = +\infty$.

4) *Supposons que* $f = g$ *presque partout, et notons* $h_+ = max(f,g)$ *et* $h_- = min(f,g)$ *(point par point) alors* $h_+ = h_-$ *sont mesurable,*$h_+ = h_-$ *presque partout et* $h_- \leq f, g \leq h_+$. *Or,*

$$\int h_+d\mu = \int h_-d\mu + \underbrace{\int h_+ - h_-d\mu}_{=0 \text{ avec } 2)} = \int h_-d\mu$$

Par monotionie,

$$\int fd\mu = \int gd\mu = \int h_+d\mu = \int h_-d\mu$$

.

Lemme 1.5.1 (de fatou-Corollaire du théorème de convergence monotone). *Soit* $(f_n)_{n'}$,$f_n : X \to)[0,+\infty]$ *une suite de fonctions mesurables. Alors*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_nd\mu$$

Théorème 1.5.2 (de la convergence dominée).
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré, et* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *une suite de fonctions mesurables. On suppose que :*

1) *la limite* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existe* $\forall x \in X$.

2) *il existe* $g : X \longrightarrow [0;+\infty[$ *intégrable telle que* $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$

Alors $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *est intégrable, et on a :*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

1.6 Fonctions intégrables á valeures dans $\mathbb{R}$

Dans toute cette partie, $(X, (\mathcal{M}), \mu)$ est un espace mesuré quelconque.

Définition 1.6.1 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que f **est intégrable** (ou **sommable**)par rapport à μ si*

$$\int |f| d\mu < \infty$$

Dans ce cas, on pose

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \tag{1.2}$$

où $f_+ = max(f, 0)$ et $f_- = max(-f, 0)$. On note $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace des fonction intégrables sur X.
Remarques.
1) *Si $f \geq 0$, on retrouve la définition précédent.*
2) *Si $\int |f| d\mu < \infty$, alors comme $f_+, f_- \leq |f|$, on a aussi les intégrales de f_+ et f_- qui sont finies, et la définition $(1, 2)$ fait sens.*

Proposition 1.6.1 *.*
a) *$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est linéaire.*
b) *$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu, \forall f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.*
c) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*
d) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et si $f = g$ presque partout, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

Démonstration.
a) *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$, alors $f + g$ est mesurable et $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc $f + g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$. En outre,*

$$(f + g)_+ - (f + g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

donc

$$(f + g)_+ + f_- + g_- = (f + g)_- + f_+ + g_+$$

Ainsi,

$$\int (f + g)_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- = \int (f + g)_- d\mu + \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu$$

ce sont des inégrales finies donc

$$\int (f+g)d\mu = \int (f+g)_+ d\mu - \int (f+g)_- d\mu$$

ce sont des inégrales finies donc

$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \int (f+g)_+ d\mu - \int (f+g)_- d\mu \\ &= (\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu) + (\int g_+ d\mu - \int g_- d\mu) \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

D'autre part, si$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* λf *est mesurable et* $\int |\lambda f| d\mu < +\infty$ *donc* $\lambda f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.
- *si* $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int (\lambda f)d\mu &= \int (\lambda f)_+ d\mu + \int (\lambda f)_- d\mu \\ &= \lambda \int f_+ d\mu + \lambda \int f_- d\mu \\ &= \lambda \int f d\mu\end{aligned}$$

- *si* $\lambda \leq 0$,

$$\begin{aligned}\int (\lambda f)d\mu &= \int (\lambda f)_+ d\mu + \int (\lambda f)_- d\mu \\ &= (-\lambda) \int f_- d\mu - (-\lambda) \int f_+ d\mu \\ &= \lambda \int f d\mu\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}|\int f d\mu| &= |\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu| \\ &\leq |\int f_+ d\mu| + |\int f_- d\mu| \\ &\leq \int |f| d\mu\end{aligned}$$

car$|f| = f_+ + f_-$

c) *Comme pour les fonctions mesurables positives.*

d) *Si* $f = g$ *presque partout, alors* $f_+ = g_+$ *presque partout, donc* $\int f d\mu = \int g d\mu$

Chapitre 2

Intégrale de Bochner

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ fixé, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$, pas nécessairement une probabilité, et on consédère l'espace de Banach B.

2.1 Intégral de Bochner

Définition 2.1.1 *(fonction simple). Une fonction simple $X : \Omega \to B$ est dite simple si elle peut s'écrire*

$$X = \sum_{i=0}^{n} x_i 1_{A_i}, \tag{2.1}$$

où $A_0, A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}, x_0, x_1, ..., x_n \in B,$ avec $\mu(A_i) < +\infty$
pour tout $i = 0, ..., n$ et les A_i deux à deux disjoints.
Notons que X est constante sur chaque $A_i (\forall \omega \in A_i, X(\omega) = x_i)$ et nulle en dehors de $\bigcup\limits_{0 \leq i \leq n} A_i$. La décomposition ci-dessus n'est en général pas unique(in n'impose pas aux x_i d'étre tous distincts).

Définition 2.1.2 *(intégral de Bochner d'une fonction simple). Si X est simple, on définit son intégrale de Bochner (sur Ω, relativement à μ) par*

$$\int_\Omega X d\mu := \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i), \tag{2.2}$$

où les x_i et les A_i sont ceux fournis par (2.1).

Bien sûr on voit immédiatement que cette définition pose un problème de cohérence lié à la décomposition (2.1). Réglons ce problème en montrant que si $X = \sum_{i=0}^{n} x_i 1_{A_i} = \sum_{i=0}^{m} y_j 1_{B_j}$, les B_j étant eux aussi deux à deux disjoints et de mesure fine, alors $\int X d\mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{m} y_j \mu(B_j)$. Posons

$$A_{n+1} := \Omega \backslash \bigcup_{i=0}^{n} A_i \quad B_{m+1} := \Omega \backslash \bigcup_{j=0}^{m} B_j.$$

Soit i un indice pour lequel $x_i \neq 0$. Alors on a

$$A_i = A_i \cap (\bigcup_{j=0}^{m+1} B_j) = \bigcup_{j=0}^{m+1} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{j=0}^{m} (A_i \cap B_j),$$

en remarquant que $A_i \cap B_{m+1} = \phi$ puisque si $\omega \in A_i \cap B_{m+1}$, on doit avoir à la fois $X(\omega) = x_i \neq 0$ car $\omega \in A_i$ et $X(\omega) = 0$ car $\omega \in B_{m+1}$, ce qui est contradictoire. De même si $y_j \neq 0$, $B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$. Remarquons aussi que si $A_i \cap B_j \neq 0$, nécessairement $x_i = y_j$ puisque X est constante valant x_i sur A_i et constante valant y_j sur B_j. Nous pouvons maintenant écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=0, x_i \neq 0}^{n} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=0, x_i \neq 0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i \cap B_j) &= \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} x_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} y_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=0, y_j \neq 0}^{m} y_j \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=0, y_j \neq 0}^{m} y_j \mu(B_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} y_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 . *On voit immédiatement que l'intégrale de Bochner des fonctions simples est linéaire :*

$$\int_\Omega (aX + bY) d\mu = a \int_\Omega X d\mu + b \int_\Omega Y d\mu, \tag{2.3}$$

pour tous réels a et b et toutes fonctions simples X et Y. Notons au passage que même si B n'est pas séparable, il n'y a pas de problème pour la mesurabilité de la somme $X+Y$ de deux fonction simple car on peut l'écrire comme une somme finie d'indicatrices d'élements de tribu $\mathcal{F}$. De plus pour toute fonction simple X, on a

$$||\int_{\Omega} X d\mu|| = ||\sum_{i=0}^{n} x_i \mu(A_i)|| \leq \sum_{i=0}^{n} ||x_i|| \mu(A_i) = \int_{\Omega} ||X|| d\mu. \tag{2.4}$$

Cette dernière intégrale est une intégrale au sens classique de Lebesgue de la fonction mesurable positive $||X|| : \Omega \to \mathbb{R}_+$.

Définition 2.1.3 *(Intégral de Bochner). Soit $X : \Omega \to B$ fortement mesurable. On dit que X est $\mu-$Bochner intégrable s'il existe une suite de fonctions simples X_n telle que*

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mu-p.p}{\longrightarrow}} X \tag{2.5}$$

et

$$\int_{\Omega} ||X_n - X|| d\mu \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \tag{2.6}$$

On pose alors

$$\int_{\Omega}^{Bochner} X d\mu = \int_{\Omega} X d\mu := \underset{n\to+\infty}{lim} \int_{\Omega} X_n d\mu. \tag{2.7}$$

Dans cette définition, l'intégrale utilisée dans (2.6) est une intégrale au sens de Lebesgue. En particulier si μ est une probabilité, on peut aussi l'écrire $E||X_n - X||$. L'intégrale $\int_{\Omega} X_n d\mu$ utilisée dans (2.7) est l'intégrale de Bochner d'une foction simple au sens de (2.2). "Nous n'utiliserons la notation plus lourde $\int_{\Omega}^{Bochner}$ que lorsqu'il s'agira de comparer intégrale de Bochner et intégrale de Pettis". Dans toute la suite de cette section, nous emploierons la notation simplifiée $\int_{\Omega} X d\mu$ pour l'intégrale de Bochner de X.
La définition (2.1.3) nécessite quelques justifications que nous détaillons maintenant. L'espace de Banach B étant complet, on établit l'existance de $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_{\Omega} X_n d\mu$ en vérifiant que la suite $(\int_{\Omega} X_n d\mu)_{n\geq 1}$ est de Cauchy comme suit :

$$\begin{aligned} ||\int_{\Omega} X_n d\mu - \int_{\Omega} X_m d\mu|| &= ||\int_{\Omega} (X_n - X_m) d\mu|| \quad par(2.3), \\ &\leq \int_{\Omega} ||X_n - X_m|| d\mu \quad par(2.4) \\ &\leq \int_{\Omega} ||X_n - X|| d\mu + \int_{\Omega} ||X - X_m|| d\mu \\ &< 2\varepsilon, \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \quad par(2.6). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la limite $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_\Omega X_n d\mu$ ne dépend pas du choix de la suite approximante X_n. Soit donc $(Y_n)_{n\geq 1}$ une autre suite de fonction simples telles que $Y_n \overset{\mu-p.p}{\longrightarrow} X$ et $||Y_n - X|| \longrightarrow 0$. Largument donné ci-dessus montre que $(\int_\Omega Y_n d\mu)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans B. Posons alors

$$x := \underset{n\to+\infty}{lim} \int_\Omega X_n d\mu, \quad y := \underset{n\to+\infty}{lim} \int_\Omega Y_n d\mu$$

et définissons la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples par $Z_{2k} := X_k$,
$Z_{2k+1} := X_{k+1}$. Comme la suite (Z_n) vérifie elle aussi la condition (2.6), la suite des intégrales $(Z_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans B donc a une limite z dans B. Cette suite d'integrales a une sous-suite convergeant vers x et une autre convergeant vers y donc z=x=y.

Lemme 2.1.1 . *Si B est séparable et μ finie, toute application fortement mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B, \mathcal{B})$ est limite $\mu - p.p.$ d'une suite (X_n) de fontions simples.*

preuve. *Puisque B est séparable, nous disposons d'une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ dense dans B. On a alors pour tout un recouvrement dénombrable de B par des boules fermées de rayon δ :*

$$B = \underset{i\in\mathbb{N}^*}{\cup} \overline{\Delta}(x_i, \delta)$$

On en déduit un recouvrement dénombrable de Ω par les ensembles $X^{-1}(\overline{\Delta}(x_i, \delta)) \in \mathcal{F}$. Par continuité séquentielle croissante de la mesure μ, on a

$$\bigcup_{i=1}^{N} X^{-1}(\overline{\Delta}(x_i, \delta)) \uparrow \Omega \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} X^{-1}(\overline{\Delta}(x_i, \delta))\right) \uparrow \mu(\Omega), \quad (N \uparrow +\infty).$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, et $\mu(\Omega)$ étant fini, on en déduit :

$$\forall \delta > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists N = N(\delta, \eta), \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} X^{-1}(\overline{\Delta}(x_i, \delta))\right) > \mu(\Omega) - \eta.$$

Prenant maintenant $\delta = 1/n$ et $\eta = 2^{-n}$, on obtient

$$\forall n \geq 1,\ \ \exists N_n,\ \ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N_n} X^{-1}(\overline{\Delta}(x_i, 1/n))\right) > \mu(\Omega) - 2^{-n}.$$

Posons

$$A_{1,n} := X^{-1}(\overline{\Delta}(x_1, 1/n)), ..., A_{k,n} := \bigcap_{i=1}^{k-1} A_{i,n}^c \cap X^{-1}(\overline{\Delta}(x_k, 1/n)), \;\; 2 \leq k \leq N_n.$$

Après effacement des $A_{k,n}$ vides, on construit ainsi une partition finie $\{A_{j,n};\ j \in J_n\}$ de $(\bigcup_{i=1}^{N_n} X^{-1}(\overline{\Delta}(x_i, 1/n))$. On choisit un ω_j dans chacun des $A_{j,n}$ non vides et on pose $y_j := X(\omega_j)$. Notons que par construction, $y_j \in \overline{\Delta}(x_j, 1/n)$. On définit alors la fonction simple X_n en posant :

$$X_n := \sum_{j \in J_n} y_j 1_{A_{j,n}}.$$

par construction $\mu\left(\{\omega \in \Omega;\ ||X(\omega) - X_n(\omega)|| > 1/n\}\right) < 2^{-n}$, d'où

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq m} \{\omega \in \Omega;\ ||X(\omega) - X_n(\omega)|| > 1/n\}\right) \leq \sum_{n \geq m} 2^{-n} = 2^{-m+1} \qquad (2.8)$$

Posons

$$D := \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{\omega \in \Omega;\ ||X(\omega) - X_n(\omega)|| > 1/n\}.$$

En utilisant la continuité séquentielle décroissante de la mesure finie μ, on en déduit de (2.8) que

$$\mu(D) = \lim_{m \to +\infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq m} \{\omega \in \Omega;\ ||X(\omega) - X_n(\omega)|| > 1/n\}\right) = 0.$$

Remarquons maintenant que

$$\omega \in D^c := \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \{\omega \in \Omega;\ ||X(\omega) - X_n(\omega)|| \leq 1/n\}$$

si et seulement si :

$$\exists m \geq 1;\ \forall n \geq m,\ \ ||X(\omega) - X_n(\omega)|| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi l'appartenance de ω à D^c implique la convergence de $X_n(\omega)$ vers $X(\omega)$. On en déduit que

$$E := \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) \textit{ ne converge pas vers } X(\Omega)\} \subset D,$$

d'où $\mu(E) = 0$, ce qui traduit exactement la convergence μ presque partout de X_n vers X.

Théorème 2.1.1 *(c.n.s de Bochner intégrabilité).*
Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B, \mathcal{B})$ *une application fortement mesurable. Si* X *est* $\mu-$*Bochner intégrable, alors* $\int_\Omega ||X||d\mu < +\infty$. *Lorsque* B *est séparable, cette condition équivaut à la* $\mu-$*Bochner intégrabilité de* X.
Preuve de : *(*X $\mu-$*Bochner intégrable)*$\Rightarrow \int_\Omega ||X||d\mu < +\infty$. *La* $\mu-$*Bochner intégrabilité de* X *nous fournit par la définition* (2.1.3) *une suite* (X_n) *de fonction simples telle que* $X_n \xrightarrow{\mu-p.p} X$ *et*$\int_\Omega ||X_n - X||d\mu \to 0$. *Ceci implique en particulier que pour* n_0 *assez grand*[1] $\int_\Omega ||X_{n_0} - X||d\mu < +\infty$. *Par inégalité triangulaire pour la norme de* B, *croissance et additivité de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives on en d'eduit*

$$\int_\Omega ||X||d\mu \leq \int_\Omega ||X_{n_0} - X||d\mu + \int_\Omega ||X_{n_0}||d\mu$$

Or X_{n_0} *étant simple, on a* $\int_\Omega ||X_{n_0}||d\mu = \sum\limits_{i\in I_0} ||x_{n_0,i}||\mu(A_{n_0,i})$, *pour un certain ensemble fini* I_0 *avec des* $A_{n_0,i} \in \mathcal{F}$ *de* $\mu-$*mesure finie. Donc* $\int_\Omega ||X_0||d\mu < +\infty$ *et finalement* $\int_\Omega ||X||d\mu < +\infty$.
Notons que nous n'avons pas supposé B *séparable dans cette première partie de la preuve. Pour la réciproque lorsque* B *est séparable, nous distinguerons deux cas selon que* μ *est finie (le seul cas dont nous ayons besoin dans ce cours) ou non.*
Preuve de :$(\int_\Omega ||X||d\mu < +\infty) \Rightarrow \mu-$*Bochner intégrable, cas* $\mu(\Omega) < +\infty$.
Par séparabilité de B, *le lemme* (2.1.1) *nous fournit une suite*(X_n) *de fonctions simples convergeant* μ *presque partout sur* Ω *vers* X. *Définissons alors*

$$Y_n(\omega) := \begin{cases} X_n(\omega) & si ||X_n(\omega)|| < 2||X(\omega)||, \\ 0 & si ||X_n(\omega)|| \geq 2||X(\omega)||, \end{cases} \tag{2.9}$$

Soit $\Omega' := \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) \to X(\omega)\}$ *et notons que* $\mu(\Omega'^c) = 0$.
Alors Y_n *converge vers* X *au moins sur* Ω', *donc* Y_n *converge vers* X $\mu-p.p.$ *sur* Ω. *En effet si* $\omega \in \Omega' \cap \{\ \|X\| > 0\}$, *on a* $2\|X(\omega)\| > \|X(\omega)\|$ *et comme* $X_n(\omega)$ *converge vers* $X(\omega)$, $\|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|$ *pour tout* n *supérieure à un certain* $N(\omega)$. *Donc pour* $n > N(\omega)$, $Y_n(\omega) = X_n(\omega)$ *et* $Y_n(\omega)$ *converge vers* $X(\omega)$ *comme* $X_n(\omega)$. *Si* $\omega \in \Omega' \cap \{X = 0\}$, *on a pour tout entier* $n\, \|X_n(\omega)\| \geq 2\|X(\omega)\| = 0$ *donc* $Y_n(\omega) = 0 = X(\omega)$ *pour tout* n *et la convergence de* $Y_n(\omega)$ *vers* $X(\omega)$ *est triviale.*
D'autre part, l'inégalité $\|Y_n - X\| \leq 3\|X\|$ *est vrai sur tout* Ω *car si* $\|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|$, $\|Y_n(\omega)\| = \|X_n(\omega)\| < 2\|X(\omega)\|$ *et si*

1. On ne peut pas exclure a priori que $\int_\Omega ||X_n - X||d\mu$ vaille $+\infty$ pour les premières valeurs de n, mais comme cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini, elle est forcément finie pour n assez grand.

$\|X_n(\omega)\| \geq 2\|X(\Omega)\|$, $\|Y_n(\omega)\| = 0$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite de fonctions mesurables positives $\|Y_n - X\|$ avec fonction dominante $3\|X\|$ qui est μ-intégrable sur Ω par hypothèse. On en déduit que $\int_\Omega \|Y_n - X\| d\mu$ tend vers 0 et comme Y_n tend aussi μ-p.p vers X, on conclut à la Bochner intégrabilité de X.

Preuve de :($\int_\Omega \|X\| d\mu < +\infty$)$\Rightarrow$ μ-Bochner intégrable, cas $\mu(\Omega) = +\infty$. On se ramène au cas précédent en découpant Ω en une famille dénembrable de traches de mesures finie et la tranche $\{X = 0\}$ qui peut être de mesure infinie. Plus précisément, définissons

$$D_0 := \{\|X\| > 1\}, \quad D_k := \{2^{-k} < \|X\| \leq 2^{-k+1}\} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

On alors une partition dénembrable de Ω constituée par $\{X = 0\}$ et les D_k. Chaque D_k est de μ-mesure finie en raison de la μ-intégrabilitée de $\|X\|$ et grâce à l'inégalité de Markove :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mu(D_k) \leq \mu(\{\|X\| > 2^{-k}\}) \leq 2^k \int_\Omega \|X\| d\mu < +\infty.$$

Notont μ_k la mesure de densité 1_{D_k} par rapport à μ et $\mathcal{F}_k$ la tribu trace de $\mathcal{F}$ sur D_k. En appliquant le cas $\mu(\Omega)$ fini avec l'espace mesuré ($D_k, \mathcal{F}_k, \mu_k$), on peut construire une suite $(Y_{k,n})_{n\geq 1}$de fonction de X de fonctions simples $D_k \to B$ telles que $Y_{k,n}$ converge μ_k-p.p. sur D_k vers la resrtiction de X à D_k et $\|Y_{k,n}(\omega) - X(\omega)\| \leq 3\|X(\omega)\|$ pour tout $\omega \in D_k$. On prolongement $Y_{k,n}$ à tout Ω en posant $Y_{k,n}(\Omega) := 0$ pour $\omega \in D_k$ et ce prolongement vérifier $Y_{k,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X1_{D_k}$ μ-p.p. et $\|Y_{k,n} - X\| \leq 3\|X\|1_{D_k}$ Finalement, on définit une nouvelle suite de fonctions simples Y_n en posant :

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} Y_{k,n}$$

et on voit que Y_n tend vers $X\mu$ p.p. (justifiez soigneusement ce point). De plus

$$\|Y_n - X\| = \sum_{k=1}^{n} \|Y_{k,n} - X\|1_{D_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \|3\|X\|1_{D_k} \leq 3\|X\|.$$

On peut finalement appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence vers 0 de $\int_\Omega \|Y_n - X\| d\mu$ et conclure à la Bochner intégrabilité de X.

Corollaire 2.1.1

1 .Si $X : \Omega \to B$ est μ-Bochner intégrable, on a

$$\|\int_\Omega X d\mu\| \leq \int_\Omega \|X\| d\mu < +\infty. \tag{2.10}$$

2 .Si B est séparable et $\int_\Omega \|X\| d\mu < +\infty$, alors X est μ-Bochner intégrable et verifier(1) *Preuve. Le deuxième point est évident à partire du premier et n'est listé ici que par commodité de référence, démontrons le premier point. Puisque X est à μ-Bochner intégrable, $\int_\Omega \|X\| d\mu < +\infty$ et nous avons au moins une suite (X_n) de fonctions simple convergente μ-p.p. vers X, à partire de cette suite, nous pouvons définir par (2.9) une suite (Y_n) de fonctions simples vérifiant*

a) $\int_\Omega X d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega Y_n d\mu$
b) $Y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$
c) $\|Y_n\| \leq 2\|X\|$.
Comme Y_n est simple, on a par (2.4),

$$\|\int_\Omega Y_n d\mu\| \leq \int_\Omega \|Y_n\| d\mu \tag{2.11}$$

Par a) on a

$$\|\int_\Omega X d\mu\| = \lim_{n\to+\infty} \|\int_\Omega Y_n d\mu\|. \tag{2.12}$$

par b) et c), on a via le théorème de convergence dominée

$$\int_\Omega \|Y_n\| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \|X\| d\mu. \tag{2.13}$$

En utilisant (2.12) et (2.13) pour passer à la limite dans (2.11), on obtient la premiere inégalité de (2.10).

Corollaire 2.1.2 *Soient B_1 et B_2 deux espace de Banach, B_2 étant séparable.*
Soit T un opérateure linéaire continu $B_1 \to B_2$ et $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B_1, \mathcal{B}_1)$ est μ-Bochner intégrable et

$$\int_\Omega T(X) d\mu = T(\int_\Omega X d\mu) \tag{2.14}$$

Notons que dans cet énoncé, B_1 n'est pas supposé séparable.
Preuve. X étant Bochner intégrable est mesurable $\mathcal{F} - \mathcal{B}_1$ et T est boréliènne

par ce que continue, donc mesurable $\mathbb{B}_1 - \mathcal{B}_2$. *Ainsi* $T \circ X$ *est mesurable* $\mathcal{F} - \mathcal{B}_2$
La μ*-Bochner intégrabilité de* $T(X)$ *découle facilement de celle de* X, *de la continuité de* T *et du théorème* (2.1.1) *en écrivant :*

$$\int_\Omega \|T(X)\|_{B_2} d\mu \leq \int_\Omega \|T\|_{\mathcal{L}(B_1 B_2)} \|X\|_{B_1} d\mu = \|T\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \int_\Omega \|X\|_{B_1} d\mu < +\infty.$$

la finitude de cette dernière intégrale provient de la première partie du théorème (2.1.1) apliquée avec X *et l'espace* B_1 *L'espace* B_2 *étant séparable, la finitude de* $\int_\Omega \|T(X)\|_{B_2} d\mu$ *implique la* μ*-Bochner intégrabilité de* $T(X)$, *par la deuxième partie du théorème* (2.1.1) *appliquée avec* $T(X)$ *et l'espace* B_2.

Voyons maintenant la vérification de (2.14). *Par* μ*-Bochner intégrabilité de* X, *nous disposons d'une suite de fonctions simples* $X_n : \Omega \to B_1$ *telle que*

$$\int_\Omega \|X_n - X\|_{B_1} d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.15}$$

et

$$\int_\Omega X_n d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega X d\mu \quad (\textit{convergence forte dans } B_1) \tag{2.16}$$

Par continuité de T, *on en déduit*

$$T(\int_\Omega X_n d\mu) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T(\int_\Omega X d\mu) \quad (\textit{convergence forte dans } B_2) \tag{2.17}$$

La fonction simple X_n *peut s'écrire*

$$X_n = \sum_{i \in I_n} x_{n,i} 1_{A_{n,i}},$$

avec I_n *fini, les* $A_{n,i}$ *deux à deux disjoints pour n fixé et* $\mu(A_{n,i}) < +\infty$. *Pour tout* $\omega \in \Omega$,

$$(T \circ X_n)(\omega) = T(X_n(\omega)) = T(\sum_{i \in I_n} x_{n,i} 1_{An,i}(\omega)) = \sum_{i \in I_n} 1_{An,i}(\omega) T(x_{n,i})$$

par linéarité de T *(les* $x_{n,i}$ *sont des vecteurs de* B_1 *et pour* ω *fixé les* $1_{A_{n,i}}(\omega)$ *sont des scalaires). Cette égalité vraie pour tout* $\omega \in \Omega$ *peut se réécrire sous la forme de l'égalité fonctionelle*

$$T(X_n) = \sum_{i \in I_n} T(x_{n,i}) 1_{A_{n,i}},$$

qui montre que $T(X_n)$ est une foncion simple $\Omega \to B_2$. En particulier l'intégrale de Bochner $\int_\Omega T(X_n)d\mu$ a bien un sens. Elle peut se calculer comme suit

$$\int_\Omega T(X_n)d\mu = \sum_{i\in I_n} T(x_{n,i})\mu(A_{ni}) = T(\sum_{i\in I_n} x_{n,i}\mu(A_{ni})) = T(\int_\Omega X_n d\mu). \tag{2.18}$$

La première et la troisième égalité ci-dessus expriment la définition de l'intégrale de Bochner d'une fonction simple, la deuxième égalité vient de la linéarité de T

Pour établire (2.14)*, nous allons passer à la limite dans l'égalité $\int_\Omega T(X_n)d\mu = T(\int_\Omega X_n d\mu)$ Par* (2.17) *le seconde membre converge vers $T(\int_\Omega X d\mu)$. Pour justifier la convergence du premièr membre vers $\int_\Omega T(X)d\mu$, on écrit les majorations suivantes :*

$$\begin{array}{rcll} \|\int_\Omega T(X_n)d\mu - \int_\Omega T(X)d\mu\|_{B_2} & = & \|\int_\Omega T(X_n - X)d\mu\|_{B_2} & (linearite\, de\, T) \\ & \leq & \int_\Omega \|T(X_n - X)\|_{B_2} d\mu & (corollaire\ (2.1.1.1)) \\ & \leq & \int_\Omega \|T\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \|X_n - X\|_{B_1} d\mu & (continuit\ de\ T) \\ & = & \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_\infty,\mathcal{B}_\in)} \int_\Omega \|X_n - X\|_{B_1} d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \end{array}$$

Remarque 2.1.2 *L'examen de la preuve ci-dessus montre que la séparabilité de B_2 n'a été utilisée que pour vérifier la μ-Bochner intégrabilité de $T(X)$.Par coséqent si B_2 n'est pas séparable* (2.14) *reste valide à condition de rajouter l'hypothèse de μ-Bochner intǵrabilité de $T(X)$.*

Théorème 2.1.2 *(convergence dominée). Soit B un espace de Banach séparable et (X_n) une suite de fonctions fortement mesurables $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (B, \mathcal{B})$ vérifiant :*

a) $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$

b) il existe une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$, μ-intégrable telle que $\|X_n\| \leq g\ \mu-$ p.p. Alors les X_n et X sont μ-Bochner intégrables et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X d\mu. \tag{2.19}$$

Noter que dans cet énoncé, on ne suppose pas que les X_n sont des fonction simple.

Preuve. Comme $\|X_n - X\| \leq g\ \mu - p.p, X_n$ et X sont μ-Bochner intégrable par μ-intǵrabilité de g et le théoréme (2.1.1)*. Par le corollaire* (2.1.1)*, on a*

$$\|\int_\Omega (X_n)d\mu - \int_\Omega (X)d\mu\| = \|\int_\Omega (X_n - X)d\mu\| \leq \int_\Omega \|X_n - X\|d\mu \tag{2.20}$$

Comme $\|X_n - X\| \leq 2g$ $\mu - p.p$, *par b) et a)et et* $\|X_n - X\|$ *tend vers* 0 μ *-p.p, par a) on peut appliquée le théoréme de la convergence dominée classique pour obtenir la convergence vers* 0 *de* $\int_\Omega \|X_n - X\| d\mu$. *En reportant cette convergence dans* (2.19) *on en déduit la convergence forte dans* B *de* $\int_\Omega X_n d\mu$ *vers* $\int_\Omega X d\mu$.

Remarque 2.1.3 *la séparabilité de* B *n'a été utilisée dans ce théorème que pour établire la* μ*-Bochner intégrabilité de* X_n *et* X. *Donc si* B *n'est pas séparable, on a aussi un théoréme de convergence dominée en rajoutant dans l'énoncé ci-dessus l'hypothèse de* μ*-Bochner intégrabilité des* X_n *et de* X.

Chapitre 3

Intégrale de Pettis

3.1 Intégrale de Pettis

Rappelons que la tribu cylindrique ζ sur l'espace de Banach B est la tribu engendrée par la topologie faible $\sigma(B, B')$ et que c'est aussi la plus petite tribu rendant mesurables tout les formes linéare continues sur B. Une application $X : \Omega \to B$ mesurable $\mathcal{F} - \zeta$ est dite faiblement mesurable .Dans ce qui suit, on note $\langle f, x\rangle := f(x), f \in B',\ x \in B$ la forme de dualité entre B et B'.

Définition 3.1.1 *Soit $X : \Omega \to B'$ faiblement mesurable. On dit que X est scalairement μ-intégrable si*

$$\forall f \in B', \quad \int_\Omega |\langle f, X\rangle| d\mu < +\infty \tag{3.1}$$

Pour construire l'intégrale de pettis de X, on commence par montrer que si X est scalairement intégrable, L'application $f \to \int_\Omega \langle f, X\rangle d\mu$ est un élément ξ du biduale topologique B'' de B . Si on peut identifier ξ avec un élément X de B, alors on dit que X est Pettis intégrable et son intégrale de Pettis est précisemént cet élément x de B.

Proposition 3.1.1 *Si X est scalairement μ-intégrable, l'application*

$$\xi :\to \mathbb{R}, \quad f \to \int_\Omega \langle f, X\rangle d\mu$$

est une forme linéaire continue sur B', donc un élément du biduale topologique B''

Remarque 3.1.1 *la linéarité de ξ découle immédiatement de la l'inéarité de la forme de dualité (par rapport à la première variable) et de celle de l'intégrale au sens de Lebesgue des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$. Si X est Bochner intégrable, l'appartenance de ξ à $B^{''}$ est immèdiate en écrivant pour toute $f \in B^{'}$,*

$$|\int_\Omega \langle f, X\rangle d\mu| \leq \int_\Omega |\langle f, X\rangle| d\mu \leq \int_\Omega \|f\|_{B'}\|X\|_B d\mu = \|f\|_{B'}\int_\Omega \|X\|_B d\mu \quad (3.2)$$

et en notant que par μ-Bochner intégrabilité de X, $\int_\Omega \|X\|_B d\mu$ est finie (et constante relativement à f). Comme sous-produit de (3.2), notons au passage que la $\mu-$Bochner intégrabilitié de X implique son intégrabilitie scalaire.

Preuve de la proposition 3.1.1. L'application ξ étant clairement une forme linéaire sur $B^{'}$, il s'agit de prouver sa continuité. Pour cela introduisons l'application linéaire

$$\psi : B^{'} \to L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \;\; f \mapsto \langle f, X\rangle.$$

Nous allons vérifier que ψ est continue grâce au théorème du graphe fermé. Cela revient à montrer si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans $B^{'}$ vérifiant

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{B^{'}}{\longrightarrow}} f \quad et \quad \psi(f_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{L^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathbb{F},\mu)}{\longrightarrow}} Z,$$

où $f \in B^{'}$ et $Z \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors $\psi(f) = Z$.
La convergence de f_n vers f dans $B^{'}$ implique en particulier

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f_n(X(\omega)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(X(\omega)).$$

autrement dit

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (\psi(f_n))(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\psi(f))(\omega). \quad (3.3)$$

D'autre part comme $\psi(f_n)$ converge vers Z au sens $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on peut en extraire une sous-suite $(\psi(f_{n_k}))$ qui converge vres Z μ-p.p. sur Ω. Au vu de (3.3), on en déduit que $Z = \psi(f)$ μ-p.p. sur Ω, autrement dit ces deux application sont égales en tant qu'éléments de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. La continuité de ψ est ainsi établie.
Cette continuité se traduit par l'inégalité

$$\forall f \in B^{'}, \quad \|\psi(f)\|_{L^1} \leq \|\psi\|_{\mathcal{L}(B^{'},L^1)}\|f\|_{B'}$$

ce qui s'écrit encore $\int_\Omega |\langle f, X\rangle| d\mu \leq \|\psi\|_{\mathcal{L}(B',L^1)} \|f\|_{B'}$, *d'où*

$$\forall f \in B^{'}, \ \ |\xi(f)| = |\int_\Omega \langle f, X\rangle d\mu| \leq \int_\Omega |\langle f, X\rangle| d\mu \leq C\|f\|_{B'},$$

ce qui établit la continuité de ξ.

Définition 3.1.2 (*intégrale de Pettis*)
Soit $X : \Omega \to B$ *scalairement* μ*-intégrable et* ξ *l'élément de* $B^{''}$ *associé à* X *par* $\langle \xi, f\rangle_{B'',B'} := \int_\Omega \langle f, X\rangle d\mu$. *On dit que* X *est Pettis intégrable si* $\xi \in J(B)$, *image canonique isométrique de* B *dans son bidual, autrement dit si*

$$\exists x_0 \in B, \forall f \in B^{'}, \ \langle f, x_0\rangle_{B', \, B} = \int_\Omega \langle f, X\rangle_{B',B} d\mu. \tag{3.4}$$

On définit alors l'intégrale au sens de Pettis de X *en posant*

$$\int_\Omega^{Pettis} X d\mu = \int_\Omega X d\mu := x_0. \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.2 *Autrement dit, lorsqu'elle existe, l'intégrale de Pettis* $\int_\Omega X d\mu$ *est l'unique vecteur* x_0 *de* B *vérifiant*

$$\forall f \in B^{'}, \ f(x_0) = \int_\Omega f(X) d\mu. \tag{3.6}$$

Notons que si un tel x_0 *existe, il est forcément unique puisque les formes linéaires continue sur* B *séparent les points : si* $f(x_1) = f(x_2)$ *pour toute* $f \in B^{'}$, *nécessairment* $x_1 = x_2$. *Par canstruction l'intégrale de Pettis commute avec les formes linéaires continues puisque lorsque* X *est Pettis intégrable,* (1.26) *peut se réécrire*

$$\forall f \in B^{'}, f(\int_\Omega X d\mu) = \int_\Omega f(X) d\mu. \tag{3.7}$$

Proposition 3.1.2 *L'ensemble des fonctions Pettis intégrables* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to B$ *est un espace vectoriel et l'intégrale de Pettis est un opérateur linéaire de cet espace dans* B. *De plus pour toute* X *Pettis-intégrable,*

$$\|\int_\Omega^{Pettis} X d\mu\|_B \leq \int_\Omega \|X\|_B d\mu \leq +\infty. \tag{3.8}$$

preuve de (3.8) Soit $x_0 := \int_\Omega^{Pettis} X d\mu$*. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe* $f \in B^{'}$ *telle que* $f(x_0) = \|x_0\|_B$ *et* $\|f\|_{B'} = 1$*. Avec cette* f*, on a donc*

$$\begin{aligned}\|\int_\Omega^{Pettis} X d\mu\|_B = f(x_0) = \int_\Omega f(X) d\mu &\le \int_\Omega |f(X)| d\mu \\ &\le \int_\Omega \|f\|_{B'} \|X\|_B d\mu \\ &= \int_\Omega \|X\|_B d\mu \le +\infty.\end{aligned}$$

Proposition 3.1.3 *(comparaison des intégrales de Bochner et Pettis).*

– *a) Si* X *est* μ*-Bochner intégrable, elle est aussi* μ*-Pettis intégrable et*

$$\int_\Omega^{Bochner} X d\mu = \int_\Omega^{Pettis} X d\mu. \tag{3.9}$$

– *b) La réciproque est fausse.*

Preuve du a). Posons $x_0 := \int_\Omega^{Bochner} X d\mu$*. Si* X *est Bochner intégrable, elle est scalairement intégrable, cf. remarque 3.1.1. En appliquant le corollaire 2.1.2 avec* $T = f$ *et* $B_2 = \mathbb{R}$ *séparable, on a*

$$\forall f \in B^{'}, \quad \int_\Omega f(x) d\mu = f(\int_\Omega^{Bochner} X d\mu) = f(x_0).$$

Donc X *est* μ*-Pettis intégrable et* $\int_\Omega^{Pettis} X d\mu = x_0$*, ce qui justifie (3.9).*
Contre exemple pour le b). On prend $B = l^2(\mathbb{N}^*)$ *et un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sur lequel on peut définir un élément aléatoire*
$X = (X_i)_{i\ge1} : \Omega \to l^2(\mathbb{N}^*)$*vérifiant*

$$X(\Omega) = \underset{j\in\mathbb{Z}^*}{\cup} \{u_j\}, \quad u_j = (u_{j,i})_{j\ge1}, \quad u_{j,i} = jI_{\{|j|\}}(i)$$

et

$$P(X = u_j) = \frac{c}{j^2}, \quad \text{où} \quad c \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{j^2} = 1.$$

Nous allons montrer que X *n'est pas* P*-Bochner intégrable, mais qu'elle est* P*-Pettis intégrable.*
Pour le premier point, il suffit de vérifier que $\int_\Omega \|X\| dP = +\infty$*.Pour cela, introduisons* $Y_n := \pi_n(X) = (X_i)_{1\le i\le n}$*, où* π_n *est la projection orthogonale de* $l^2(N^*)$ *sur* $l^2(\{1, ..., n\})$*. On a alors clairement* $\|Y_n\| \le \|X\|$*. On va calculer*

$\int_\Omega \|Y_n\| dP$ *pour voir qu'elle tend vers* $+\infty$ *avec* n. *Ce calcul se réduit à celui de l'espérance d'une variable aléatoire positive discréte :*

$$\int_\Omega \|Y_n\| dP = \int_\Omega \|\pi_n(X)\| dP = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \|\pi_n(u_j)\| P(X = u_j). \tag{3.10}$$

Or

$$\|\pi_n(u_j)\| = (u_{j,1}^2 + ... + u_{j,n}^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} |j| & si \;\; n \geq |j|, \\ o & si \;\; n < |j|, \end{cases}$$

d'où en reportant dans (3.10)

$$\int_\Omega \|Y_n\| dP = \sum_{0<|j|\leq n} |j| \frac{c}{j^2} = 2c \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que $\int_\Omega \|X\| dP = +\infty$ *et donc que* X *n'est pas* P*-Bochner intégrable. Pour la Pettis-intégrabilité, notons* $f = (f_i)_{i\geq 1}$ *un élément quelconque du dual* $l^2(\mathbb{N}^*)' = l^2(\mathbb{N}^*)$ *en rappelant que pour l'espace de Hilbert* $l^2(\mathbb{N}^*)$, *la forme de dualité est donnée par* $\langle f, X\rangle = \sum_{i\geq 1} x_i f_i$. *En particulier on a pour tout* $j \in \mathbb{Z}^*, \langle f, u_j\rangle = j f_{|j|}$.
Vérifions d'abord que X *est* P*-scalairement intégrable. En effet*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\langle f, X\rangle| dP = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} |\langle f, u_j\rangle| P(X = u_j) &= 2c \sum_{j=1}^{+\infty} |f_j| \frac{1}{j} \\ &\leq 2c (\sum_{j=1}^{+\infty} f_j^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2})^{\frac{1}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Cette intégrabilité scalaire légitime l'écriture $\int_\Omega \langle f, X\rangle dP = \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} \langle f, u_j\rangle P(X = u_j)$, *et la sommabilité de la fammille de réels* $(\langle f, u_j\rangle P(X = u_j))_{j\in\mathbb{Z}^*}$. *Ceci nous autorise à sommer par paquets indexés par* $\{-j, j\}$, *d'où*

$$\int_\Omega \langle f, X\rangle dP = \sum_{j=1}^{+\infty} (j f_j - j f_j) \frac{c}{j^2} = 0.$$

Nous venons ainsi d'établir que

$$\forall f \in (l^2)', \;\; \int_\Omega \langle f, X\rangle dP = 0 = f(0).$$

Autrement dit, X est P-Pettis intégrable et $\int_{\Omega}^{Pettis} XdP = 0$.
Nous terminons ce chapitre avec une condition suffisante de Pettis intégrabilité qui nous sera utile pour l'étude des é.a. gaussiens. Nous l'énonçons avec une mesure de probabilité P pour la commodité de référence.

Théorème 3.1.1 *(condition suffisante de Pettis intégrabilité)*
Soient B un Banach séparable et X un élément aléatoire de B, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et scalairement intégrable(relativement à la mesure de probabilié P). Pour que X soit Pettis intégrable, il suffit que

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \inf_{f \in B'} P(|f(X)| \geq \varepsilon |\boldsymbol{E} f(X)|) > 0. \tag{3.11}$$

Preuve. On sait que la formule

$$\forall f \in B', \ \ \langle \xi, f \rangle_{B'', B'} := \int_{\Omega} \langle X, f \rangle_{B, B'} dP = \boldsymbol{E} f(X) \tag{3.12}$$

définit un élément ξ de B'' le bidual topologique de B. Il s'agit de montrer que ξ appartient à $J(B)$, où J est l'injection canonique de B dans B''.
Commençons par deux rappels d'analyse fonctionnelle.

1. *Si $\xi : B' \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue pour $\sigma(B', B)$ cf. Brézis, Prop.III.13. la réciproque étant évidente, on en déduit que B' muni de la topologie $\sigma(B', B)$ a pour daul topologique $J(B)$. Donc pour vréfier l'appartenance à $J(B)$ de ξ définie par (3.12), il suffit de vérifier que ξ est continue au point 0.*
2. *Si B est séparable, la boul unité fermée de B' est métrisable pour la topologie $\sigma(B', B)$, cf. Brézis Th. III.25.*
   En combinant les point 1 et 2, il nous suffit donc de vérifier que pour toute suite f_n dans la boule unité de B' qui converge vers 0 au sens $\sigma(B', B)$, $\boldsymbol{E} f_n(X)$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.
   Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans la boule unité de B' telle que

$$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\sigma(B', B)} 0 \quad et \quad \boldsymbol{E} f_n(X) \nrightarrow 0. \tag{3.13}$$

On peut alors trouver un $\delta > 0$ et une sous-suite (f_{n_k}) tels que

$$\forall k \geq 1, \quad |\boldsymbol{E} f_{n_k}(X)| \geq \delta. \tag{3.14}$$

Introduisons les événements

$$A_k := \{|f_{n_k}(X)| \geq \varepsilon |\boldsymbol{E} f_{n_k}(X)|\}, \qquad A := \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq j} A_k,$$

Où le réel $\varepsilon > 0$ est celui fourni par l'hypothèse (3.11). On a ainsi pour tout $k \geq 1$, $P(A_k) \geq c > 0$, avec

$$c := \inf_{f \in B'} P(|f(X)| \geq \varepsilon |\boldsymbol{E} f(X)|).$$

Posons $D_j := \underset{k \geq j}{\cup} A_k$. La suite $(D_j)_{j \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion et son intersection est A. par continuité séquentielle décroissante de P, $P(D_j) \downarrow P(A)$. Or pour tout $j \geq 1$, $P(D_j \geq P(A_j) \geq c)$. Par conséquent de P, $P(A) \geq C > 0$, donc A n'est as vide. Il existe donc au moins un $\omega_0 \in A$. Pour cet ω_0, on a

$$\forall j \geq 1,\ \exists k = k(\omega_0, j) \geq j, \quad |f_{n_k}(X(\omega_0))| \geq \varepsilon |\boldsymbol{E} f_{n_k}(X)| \geq \varepsilon \sigma.$$

Mais ceci contredit la convergence $\sigma(B', B)$ de f_n vers 0, donc (3.13) est fausse, ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.1.3 *La condition suffisante (3.11) se généralise immédiatement pour la Pettis-intégrabilité relativement à une mesure finie μ (en écrivant $\int_\Omega f(X(\omega)))d\mu(\omega)$ au lieu de $\boldsymbol{E} f(X)$. En effet la seule propriété de la mesure de probabilité P que nous avons utilisée est la continuité séquentielle décroissante qui reste vraie pour une mesure finie, mais plus pour une mesure infinie.*

Bibliographie

[1] *K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.*

[2] *Wheeden, R. L., Zygmund A., Measure and Integral, Marcel Dekker,Inc., New York, 1977.*

[3] *Mikusinski, J., The Bochner Integral*

[4] *Brezis, H. Analyse Fonctionelle", Massen, Paris, 1983.*

[5] *Rudin, W, : Real and Camplex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1974.*