REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : [Analyse fonctionnelle et équations différentielles]

Par :

Tayeb Sihem et Hamouma Marwa

Sur le thème

Formule de Poisson-Jensen et Applications

Soutenu publiquement le 18/ 07/ 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mme Sabit Souhila	MCA	Université de Tiaret	Président
Mme Cheriet Nour el imane	MCB	Université de Tiaret	Encadreur
Mme Elong Ouissam	MCB	Université de Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Remerciements Tout d'abord nous remercions ALLAH pour nous avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour nous avoir donné courage et volonté pour pouvoir réaliser ce modeste travail.

Nous remercions Dr. Cheriet nour el imene Khadidja pour sa patience et ses conseils pour la réalisation de ce mémoire. Que nos profondes reconnaissances vont vers lui

Nous adressons nos sincères remerciements aux membres du jury, le président Sabit Souhila et l'examinateur Elong Ouissem qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'université de Tiaret, en particulier les enseignants du département de mathématique qui nous ont suivi tout au long de nos cinq années d'études à L'université. Par ailleurs, nous remercions aussi tous nos collègues de la promotion 2021.

Dédicace

Enfin, mon rêve de fin d'études est devenu une réalité .
Je dédie ce mémoire
À mon père et ma mère pour leur amour inestimable, leurs sacrifices, leur confiance, leur soutien et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

À mes frères et mes soeurs Noureddine, Houssam, Hanine, Habiba. Je vous aime.

À mon ange et ma plus belle soeur Chaimaa, Je dédie ce modeste travail..ton départ me déchire le coeur. que Dieu te fasse miséricorde et t'accepte dans son vaste paradis.

À mes tantes et mes oncles, pour leurs mots d'encouragement et leur gentillesse.

À mes grands parents pour vos attentions particulières, vos prières et votre amour inconditionnel. que Dieu vous donne bonne santé

À mon fiancé pour tout l'encouragement, le respect et l'amour que tu m'as offert.

À mes amies qui m'ont toujours aidée et encouragée, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnée durant mon chemin d'études
À toi mon amie Sihem J'ai beaucoup apprécié ton implication. Nous avons formé une bonne équipe. Je suis impatiente de travailler à nouveau avec toi..

Marwa.

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance , Je dédie ce modeste travail à ceux qui , quels que soient les termes embrassés , je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincére.

- À l'homme , mon précieux offre du dieu , que doit ma vie , ma réussite et tout mon respect : mon chér père Ahmed .
- À la femme qui a souffert sans me laisser souffrir ,qui a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère Zoubir Zohra .
- À mon partenaire de vie , pour l'amour et la confiance qu'il m'a donné et qu'il n'a pas cessé de me conseiller , encourager et soutenir tout au long de mes études, avec ses voeux de réussite : mon très cher mari Abd el illah Mebarki .
- À ma fruit d'amour , ma joie de tous les instants et le bonheur de toute la famille : ma petite fille Djinane el Rahmen .
- À ma belle mère Fatima et mon cher père Mebarki Said, je vous remercie , pour tout le soutien , la sympathie et votre amour.
- À mes chérs fréres et mes belles soeurs et leurs enfants pour leurs encouragement tout au lonq de mes années d'études .
- À toute ma famille et les amies que j'ai connu jusqu'à maintenant, Merci pour votre amour et votre encouragement.
- Sans oublier mon binôme qui est mon amie proche "Marwa" pour son soutien moral , sa patience et sa comprehension tout au long de ce travail.

Sihem

Table des matières

Introduction Générale

La formule de Jensen (d'après le mathématicien Johan Jensen) est un résuttat très puissant dans l'analyse complexe. Jensen à donné une formule reliant les modules des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe dans un cercle au module de la fonction sur le cercle. Cette dernière peut être vue comme une généralisation des propriétés des valeurs moyennes des fonctions harmoniques.
La formule de Poisson nous donne une propriété pour les fonctions harmoniques à partir des propriétés des fonctions analytiques. C'est Rolf Nevanlinna qui a donné naissance à la formule de Poisson-Jensen en combinant les deux formules, où chacune forme un cas particulier.

La formule de Poisson-Jensen Joue un rôle important dans la théorie de Nevanlinna.

Ce mémoire comprend trois chapitres :

Le premier chapitre : présente toutes les notations, les définitions basiques et les résultats dont on aura besoin par la suite.

Le deuxième chapitre : contient l'énoncé de la formule de Poisson-Jensen, et sa démonstration détaillée.

Le dernier chapitre : contient deux applications.

- Dans la première application, on donne une reformulation de la formule à l'aide de trois fonctions "$m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$" définies par Nevanlinna, cette théorie a fait une révolution dans la théorie de la distribution des zéros et l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes.

– Dans la deuxième application, on donne une preuve au théorème fondamental de l'algèbre.

Chapitre 1

Outils principaux

Notre objectif dans ce chapitre est de donner les notations, les définitions basiques et les résultats dont on aura besoin dans les autres chapitres

1.1 Topologie de $\mathbb{C}$

Les concepts d'analyse dans le cadre de $\mathbb{R}$, comme la convergence des suites ou la continuité et la dérivabilité des fonctions, reposent toutes sur la notion de proximité ou distance des points de $\mathbb{R}$. Ces concepts sont reliés à la topologie de l'ensemble sur lequel on travaille.

1.2 Isomorphisme

Un isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui préserve la structure, et dont la réciproque préserve aussi la structure. Plus généralement, en théorie des catégories, un isomorphisme entre deux objets est un morphisme admettant un " morphisme inverse ".

1.3 Métrique sur $\mathbb{C}$

Puisque $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, on utilise sur $\mathbb{C}$ la distance Euclidienne. Donc, pour les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ on définit la distance par :

$$d(z_1; z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2| \tag{1.1}$$

$(\mathbb{C}; |.|)$ est un espace métrique complet (espace de Banach).

Avec la notation (1.1) l'équation du cercle de centre a et de rayon r est définie par $|z-a| = r$.

Autrement dit l'ensemble des points sur ce cercle est $C(a;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$.

1.4 Ensembles ouverts, fermés et compacts

- **Voisinage :**

  L'ensemble $V(a;\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \epsilon\}$ est appelé un ϵ-voisinage du point $a \in \mathbb{C}$, et $\widehat{V}(a;\epsilon) = \{V(a;\epsilon)\backslash\{a\}\}$ est appelée voisinage "privé de a".

- **Points intérieurs, extérieurs et frontières :**

  Soit $S \subset \mathbb{C}$.

  - On dit que a est un point intérieur de S s'il existe un voisinage $V(a;\epsilon) \subset S$.
  - On dit que b est un point extérieur de S si b est un point intérieur de $\mathbb{C} \setminus S$.
  - On dit que $c \in \partial S$ est un point frontière de S si tout voisinage de c rencontre S et $\mathbb{C}\backslash S$.

- **Disque ouvert :**

  L'ensemble $D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ est appelé disque ouvert
  (boule ouverte) de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Tout disque ouvert est un voisinage de tout ces points.

  Disque unité :

  $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est appelé disque unité de $\mathbb{C}$.

- **Ensemble ouvert :**

  Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert dans $\mathbb{C}$ si pour tout $z \in U$ il existe $r > 0$ tel que $D(z;r) \subset U$.

  Si $U \subset \mathbb{C}$ et $\partial U \bigcap U = \varnothing$ alors U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

  Tout disque ouvert $D(a;r)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

  Les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} : Rez > a\}$ et $\{z \in \mathbb{C} : Imz > b\}$ sont aussi des ouverts de $\mathbb{C}$.

- **Ensemble fermé :**

  Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé dans $\mathbb{C}$ si son complémentaire $\mathbb{C} \backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

  Si $F \subset \mathbb{C}$ et$\partial F \subset F \neq \varnothing$ alors F est un fermé de $\mathbb{C}$.

  Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points de frontière.

  $\bar{D}(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, appelé le disque fermé.

  La couronne $A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z - a| \leqslant R\}$ est un fermé dans $\mathbb{C}$.

  On peut aussi lier la notion d'ensemble fermé à la convergence des suites : un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est fermé si et seulement si toute suite convergente (z_n) de F admet une limite dans F, $z_n \to z \in F$.

- **Adhérence ou Fermeture d'un ensemble :**

  Soit $S \subset \mathbb{C}$ alors l'ensemble $\bar{S} = S \bigcup \partial S$ est appelé l'adhérence ou la fermeture de S.

  L'adhérence de disque ouvert $D(a; r)$ est le disque fermé $\bar{D}(a; r)$.

- **Ensemble borné :**

  Un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| < M$ pour tout $z \in S$. On dit aussi que S est borné si $S \subset D(0; r)$ pour un certain $r > 0$. L'ensemble $|z| < 4$ est borné, mais $\{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\}$ ne l'est pas.

- **Ensemble compact :**

  Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact dans $\mathbb{C}$ s'il est borné et fermé dans $\mathbb{C}$. L'ensemble $|z| \leqslant 4$ est compact, mais $|z| < 4$ ne l'est pas.

- **Ensemble connexe par arcs :**

  Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrement dans S.

- **Ensemble connexe :**

  Un ensemble ouvert $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il ne peut être pas la réunion de deux ouverts disjoints non vides.

Toute partie de $\mathbb{C}$ connexe par arcs est connexe.

Le disque unité ouvert $|z| < 1$ et la couronne $1 < |z| < 2$ sont connexes car ils sont connexes par arcs.

– **Région simplement connexe :**

Une région connexe par arcs $S \subset \mathbb{C}$ est dite simplement connexe si tout chemin fermé sur S peut être réduit continûment à un point. Intuitivement, on peut rétrécir le chemin fermé jusqu'à ce qu'il ne forme plus qu'un point, il n'y a pas d'obstacle (c'est-à -dire de trou).

Le disque $|z| < 1$ est simplement connexe, mais la couronne $1 < |z| < 2$ ne l'est pas.

Le plan privé d'un point $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ est connexe mais n'est pas simplement connexe. Autrement dit, une région simplement connexe n'a pas de "trous". Si la région possède des trous on l'appelle multi-connexe. La couronne est un exemple de région multi-connexe.

– **Domaine :**

Un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ qui est non vide, ouvert et connexe est appelé un domaine ou bien une région ouverte. D est un domaine si et seulement s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides et disjoints.

Le disque unité $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : Imz < 0\}$ et la couronne $\{1 < |z| < 2\}$ sont des domaines, mais $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\}$ n'est pas un domaine car il n'est pas connexe.

1.5 $\mathbb{C}$-Différentiabilité

On rappelle qu'une fonction à valeur complexe $f : S \to \mathbb{C}$ est une règle qui associe à chaque nombre complexe $z \in S$ un nombre complexe w. Ce nombre w est appelé la valeur de f au point z, dénotée par $f(z)$.

$$w = f(z).$$

La partie S est appelée l'ensemble de définition de f.

La fonction $f(z) = z^2$ prend une seule valeur pour chaque z. On appelle une telle fonction univaluée (univoque). Cependant, la fonction $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ a deux images à chaque valeur de z autre que $z = 0$. On appelle ce type de fonctions, fonctions multivaluées (multivoques).

Dans la théorie des variables complexes, nous pouvons traiter une fonction multivaluée comme une collection de fonctions univaluées. Chacune de ces fonctions univaluée est appelée branche. Dans l'exemple ci-dessus, $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ a deux branches.

Différentiabilité

Soient $D \subset C$ un ouvert et $f : D \to C$ une fonction complexe. On dit que f est $\mathbb{C}$ différentiable en $z_0 \in D$ si

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

pour vu que la limite existe.

Fonctions holomorphes ou analytiques

Définition 1.5.1. *Soit $w = f(z)$ on dit que la fonction f :*

- *f est holomorphe ou analytique en un point z_0 d'un domaine D si elle est dérivable aussi bien au point z_0 lui-même que dans un certain voisinage de ce point. On dit aussi que f est analytique en z_0 si elle est développable en une série entière au voisinage de z_0.*

- *est analytique dans un domaine D si elle est analytique en tout point de D.*
- *est entière si elle est analytique en tout point $z \in \mathbb{C}$.*
- *possède une singularité ou bien un point singulier en z_0 si f n'est pas analytique au point z_0.*
- *possède une singularité isolée en z_0 si f n'est pas analytique au point z_0 et il existe un $r > 0$ tel que f soit analytique dans le disque épointé $D^{\cdot}(z_0; r)$.*

Remarque 1.5.1. *La fonction $f(z) = |z|^2$ est différentiable seulement au point $z_0 = 0$. Mais cette fonction n'est pas analytique au point $z_0 = 0$ car il n'existe pas de voisinage de $z_0 = 0$ où la fonction est différentiable. On a donc : analycité$\Rightarrow$ différentiabilité mais la réciproque est fausse.*

1.6 Intégrale de Cauchy

Chemin

Définition 1.6.1. *Soit $\gamma : I = [a;b] \to \mathbb{C}$ une application définie par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.*

- *L'ímage $\gamma(I)$ est appelée **chemin** et γ est un **paramétrage** du chemin.*
- *$\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont l'origine et l'extrémité du chemin respectivement.*
- *Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un chemin fermé ou bien est un **lacet**.*
- *Un lacet γ est dit simple si $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ quand $t_1 \neq t_2$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.*
- *γ est dit chemin différentiable si $x(t)$ et $y(t)$ sont continûment différentiables sur $[a;b]$.*
- *On dit que γ est un chemin différentiable par morceaux, s'il existe une subdivision de $[a;b]$ $(a_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b)$ tel que γ est un chemin différentiable sur chaque intervalle $[t_i; t_{i+1}]$.*

Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 1.6.2. *Soit γ un lacet dans un domaine D qui ne passe pas par z_0. On définit l'indice du point z_0 par rapport à γ et on note $I(\gamma, z_0)$ par :*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}. \tag{1.2}$$

L'indice est une quantité qui mesure le nombre de tours algébrique réalisé par le lacet autour du point z_0 et donc $I(\gamma; z_0)$ est un nombre entier.

Exemples 1.6.1. *Pour $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, soient $\gamma_1(t) = e^{2it}$, $\gamma_2(t) = e^{-3it}$, $\gamma_3(t) = 3 + e^{it}$. Calculons $I(\gamma_k, 0)$, $k = 1, 2, 3$.*
Notons γ_i, $i = 1, 2, 3$, ne passe pas sur $z = 0$ car $|\gamma_i(t)| \geqslant 1$:
(1) $I(\gamma_1, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{2ie^{2it}}{e^{2it}} dt = 2$. En effet γ_1 fait 2 révolutions autour de $z = 0$.
(2) $I(\gamma_2, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{-3ie^{-3it}}{e^{-3it}} dt = -3$. Dans ce cas γ_2 fait 3 révolutions au sens négatif.
(3) $I(\gamma_3, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{3+e^{it}} dt = 0$, car $z = 0$ n'est pas à l'intérieur de γ_3.

Proposition 1.6.1. *Pour $r > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$, soit γ un lacet défini par $\gamma(t) = re^{kit}$, alors*

$$I(\gamma, z_0) = \begin{cases} k & \text{si } z_0 \text{ est à l'intérieur de } \gamma \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ n'est pas à l'intérieur de } \gamma \end{cases}.$$

Formule d'intégration de Cauchy

Théorème 1.6.1 (Formule de Cauchy)**.** *Soit f une fonction holomorphe (ou analytique) sur un ouvert simplement connexe D de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in D$ et soit $\gamma : [a,b] \to D$ un lacet de D avec $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, alors :*

$$f(z_0).I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{1.3}$$

1.7 Séries de Taylor et de Laurent

– **Séries de Taylor**

Théorème 1.7.1. *(**Théorème de Taylor**). Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique (holomorphe) dans le domaine D. Alors f est développable en une série entière*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1.4}$$

avec

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw, k = 0, 1, 2... \tag{1.5}$$

où $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}$ est le plus grand cercle de centre a et de rayon R orienté positivement inclus dans D.

Démonstration : Soit z tel que $|z-a| < R$ et w tel que $|w-a| = R$. D'après la formule intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

Le facteur $1/(w-z)$ peut être exprimer comme une série géométrique en fonction de $(z-a)/(w-a)$ où $|(z-a)/(w-a)| < 1$ par

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z-a}{w-a})^k$$

qui converge uniformément vers $\frac{1}{w-z}$ et donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_R} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}} dw \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw](z-a)^k.$$

Mais d'après la formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, on a

$$C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_R}\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw, k = 0, 1, 2...$$

Ce qui complète la démonstration du théorème.

– **Séries de Laurent**

Le développement en série de Taylor représente une fonction qui est analytique dans l'intérieur de son cercle de convergence. Il est fréquent de rencontrer des fonctions qui sont analytiques dans certains domaines perforés comme une couronne. Dans ces cas, la représentation en série de Taylor n'est pas la forme correcte pour décrire le développement en série de puissance infinie de ces types de fonctions complexes.

Considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-a)^{-k} = b_1(z-a)^{-1} + b_2(z-a)^{-2} + ...$$

Pour trouver la région de convergence de cette série, on pose $w = \frac{1}{z-a}$. La série devient une série de Taylor avec la variable w. Le rayon de convergence est

$$R' = \lim_{k\to\infty}|\frac{b_k}{b_{k+1}}|$$

et la série converge dans la région $|w| < R'$ équivalente à la région $|z-a| > \frac{1}{R'} = r$. Plus généralement, considérons une série avec des puissance positives et négatives de $(z-a)$ de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-a)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k \tag{1.6}$$

Cette série est appelée une série de Laurent de centre $z = a$. La série contenant les puissances négatives est appelée la partie principale de la série de Laurent, et celle des puissances positives est appelée partie analytique de la série de Laurent. Posons

$$R = \lim_{k\to\infty}|\frac{a_k}{a_{k+1}}|,$$

et

$$r = \lim_{k\to\infty}|\frac{b_{k+1}}{b_k}|$$

La série de Laurent (6) converge dans la couronne

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |(z-a)| < R\}.$$

Théorème 1.7.2. *(**Théorème de Laurent**) Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction analytique dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$. Alors f est développable en une série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1.7}$$

pour tout $z \in D$ et

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw, k = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{1.8}$$

où C est un contour simple orienté positivement inclue dans D et contenant $z = a$ dans son intérieur.

1.8 Zéros et singularités d'une fonction complexe

Définition 1.8.1 (Zéro d'une fonction complexe)**.** *Si f est définie dans un domaine D, on dit que $z = a$ est un zéro de f si $f(a) = 0$. De plus on dit que $z = a$ est un zéro isolé de f s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout z tel que $0 < |z-a| < \epsilon$.*
Soit $f : D \to \mathbb{C}$ est analytique et supposons que $z = a$ est un zéro isolé de f. On a vu que d'après le théorème de Taylor f est développable dans un voisinage de $z = a(|z-a| < R)$ en une série entière de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Définition 1.8.2 (Singularités d'une fonction complexe)**.** *Rappelons qu'une fonction f admet une singularité en $z = a$ si f n'est pas différentiable en $z = a$. On dit que $z = a$ est une singularité isolée si f est analytique dans le disque pointé $0 < |z-a| < \epsilon$ pour un certain $\epsilon > 0$. Soit $z = a$ une singularité isolée d'une fonction complexe f. Alors f est développable en une série de Laurent valide dans un disque pointé $0 < |z-a| < R$ et sa série de Laurent est définie par*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-a)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1.9}$$

la première somme étant la partie principale de la série de Laurent

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k} \tag{1.10}$$

et la deuxième somme est la partie analytique de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k. \tag{1.11}$$

Théorème 1.8.1. *Soit $z = a$ une singularité isolée de f. On dit que la singularité est :*

- ***(1) artificielle*** *(apparente, fausse) si la partie principale est nulle, $c_{-k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$*
- ***(2) un pôle*** *d'ordre $n \geq 1$ si les coefficients $c_{-k} = 0$ pour tout $k > n$, et $c_{-n} \neq 0$. Donc la partie principale contient seulement un nombres finis de termes non nuls. Si $n = 1$, alors on dit que $z = a$ est simple pôle.*
- ***(3) essentielle*** *si la partie principale contient un nombres infinis de termes non nuls.*

Remarque 1.8.1. *Toute singularité isolée doit être l'une des trois singularités :*

- *(1) Artificielle,*
- *(2) Pôles d'ordre n,*
- *(3) Essentielle.*

Résumé des singularités en fonction de la série de Laurent

- **Singularité** : Série de Laurent dans $0 < |z-a| < R$
- **Artificielle** : $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$
- **Pôle d'ordre n** : $\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$
- **Pôle simple** : $\frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$
- **Essentielle** : $\ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$

Exemples 1.8.1. *Analyser quelle type de singularité en $z = 0$ pour les fonctions suivantes. (a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, (b) $g(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, (c) $h(z) = \sin \frac{1}{z}$.*

La série de $\sin z$ *est*

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + ...$$

Donc on aura

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + ...,$ *donc* $z = 0$ *est une singularité artificielle.*

(b) $g(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 + ...,$ *donc* $z = 0$ *est un simple pôle.*

(c) $h(z) = \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + ...,$ *donc* $z = 0$ *est une singularité essentielle.*

Définition 1.8.3 (Fonction Méromorphes)**.** *En analyse complexe une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.*

Exemples 1.8.2. *Toutes les fonctions rationnelles comme* $\frac{z^3-2z+1}{z^5+3z-1}$ *sont méromorphes. Les fonctions* $\frac{\exp z}{z}$, $\tan(z)$ *et* $\frac{\sin(z)}{(z-1)^2}$ *sont méromorphes.*

Chapitre 2

Formule de Poisson-Jensen

Théorème 2.0.2. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| \leqslant R$ $(0 < R < \infty)$, et soient $a_j(j = 1, 2, ..., m)$ et $b_k(k = 1, 2, ..., n)$ les zéros et les pôles de $f(z)$ dans $|z| < R$ respectivement, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Si $z = r\exp(i\theta)$ est un point dans $|z| < R$ différent de a_j et b_k, alors*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\exp i\phi)|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi +$$
$$\sum_{j=1}^{m}\log|\frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z}| - \sum_{k=1}^{n}\log|\frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z}|. \quad (2.1)$$

2.1 Preuve de la formule de Poisson-jensen

Cas(i) : Supposons que $f(z)$ n'a aucun zéro ou pôle sur $|z| \leqslant R$, prenons $z = re^{i\theta}$ un point dans $|z| < R$ et on définit z^* par $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}}$, où z^* est un point dans $|z| > R$. En utilisant l'itégrale de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} \log f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} \frac{\log f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} \frac{\log f(\xi)}{\xi - z^*}d\xi. \end{aligned}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, on trouve que

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R} \log f(\xi)[\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z^*}]d\xi,$$

qui devient

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \log f(\xi)[\frac{R}{R - r\exp i(\theta-\varphi)} + \frac{r\exp i(\varphi-\theta)}{R - r\exp i(\varphi-\theta)}]d\varphi \quad (2.2)$$

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\xi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi, \quad (2.3)$$

où

$$\xi - z = R\exp i\varphi - r\exp i\theta,$$
$$\xi - z^* = R\exp i\varphi - \frac{R^2}{r}\exp i\theta.$$

Finalement, on prend la partie réelle et en utilisant l'identité $Re(\log f(z)) = \log|f(z)|$, on obtient la formule (2.1).

Cas(ii) : Dans le cas général et avec les notations de Théorème 2.0.2, posons

$$F(\xi) = f(\xi)\frac{\prod_{k=1}^{n}|\frac{R(\xi-b_k)}{R^2-\bar{b_k}\xi}|}{\prod_{j=1}^{m}|\frac{R(\xi-a_j)}{R^2-\bar{a_j}\xi}|}. \quad (2.4)$$

Alors $F(\xi)$ n'a ni zéro ni pôle dans $|\xi| < R$ et donc elle y est analytique. Choisissons une branche analytique de $\log F(\xi)$ dans $|\xi| < R$, et en utilisant la formule (2.3), on a

$$\log F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log F(R\exp i\phi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2}d\phi.$$

Prenant la partie réelle et en utilisant l'identité $Re(\log F(\xi)) = \log|F(\xi)|$, on obtient

$$\log|F(\xi)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(R\exp i\phi)|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2}d\phi. \quad (2.5)$$

D'après les équations (2.4) et (2.5), on trouve

$$\log|f(\xi)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(R\exp i\phi)|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2}d\phi +$$
$$\sum_{j=1}^{m}\log|\frac{R(\xi-a_j)}{R^2-\bar{a_j}\xi}| - \sum_{k=1}^{n}\log|\frac{R(\xi-b_k)}{R^2-\bar{b_k}\xi}|. \quad (2.6)$$

Ainsi, pour $\xi = R\exp i\varphi$ et $|a| < R$, on a

$$|\frac{R(\xi-a)}{R^2-\bar{a}\xi}| = 1$$

ce qui implique

$$\log|\frac{R(\xi-a)}{R^2-\bar{a}\xi}| = 0$$

pour $|\xi| = R$ et donc de la formule (2.5) on obtient : $\log|F(\xi)| = \log|f(\xi)|$. De cela et de la relation (2.6), on obtient

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\exp i\phi)|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\log|\frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a_j}z}| - \sum_{k=1}^{n}\log|\frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b_k}z}|.$$

Corollaire 2.1.1. *Supposons que $f(\xi)$ n'a ni pôles ni zéros dans $|\xi| \leqslant R$. Si $z = r\exp i\theta$ $(0 < r < R)$, alors on a*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\exp i\phi)|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi$$

Cette formule est appelée "Formule de Poisson".

Corollaire 2.1.2. *Sous les conditions du théoreme 2.4 et supposons que $f(0) \neq 0, \infty$, on a*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\exp i\phi)|d\phi - \sum_{j=1}^{m}\log\frac{R}{|a_j|} + \sum_{k=1}^{n}\log\frac{R}{|b_k|}.$$

Cette formule est appelée "Formule de Jensen (1899)".

Chapitre 3

Applications de la formule de Poissen-Jensen

3.1 Théorie de Nevanlinna.

La théorie de Nevanlinna était fondée par le mathématicien Finlandais Rolf Nevanlinna en 1929, cette théorie étudie la distribution des racines de l'équation $f(z) = a$ où f est une fonction entière ou méromorphes et a un nombre complexe. Son travail fait date dans l'histoire de la théorie des fonctions méromorphes, dans lequel il a introduit la fonction caractéristique $T(r)$ "fonction de croissance" d'une fonction méromorphe.

Cette nouvelle notion nous apprend que la théorie des fonctions entières peut s'étendre aux fonctions méromorphes, une remarquable extension pour des fonctions ayant des pôles, son idée principale était d'employer la formule de Jensen avec une légère modification, pour construire trois fonctions à valeurs réelles à fin de mesure le comportement de f , $m(r, f)$ la fonction (moyenne) de proximité qui mesure essentiellement la grandeur de f sur le cercle $|z| = r$, $N(r, f)$ la fonction de comptage de Nevanlinna, elle compte clairement la moyenne logarithmique de nombre des pôles de à l'intérieur du disque$|z| < r$. Nevanlinna a rendu compte que ceci lui permettait de mesurer effectivement la croissance de f. Enfin , il a définit la fonction caractéristique (de Nevanlinna)

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

Proposition 3.1.1. *Soit f une fonction méromorphe représentée par sa série de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n}^{+\infty} C_k z^k, \; C_n \neq 0, \; n \in \mathbb{Z},$$

à l'origine. Alors

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi + \sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} - \sum_{k=1}^{N} \log \frac{R}{|b_k|} - n \log R \tag{3.1}$$

où les a_j $(j = 1; 2; ...; m)$ (respectivement b_k $(k = 1; 2; ...; n)$ sont les zéros (respectivement les pôles) de $f(z)$ dans le disque $|z| < R$.

Preuve :

On définit la fonction méromorphe h par

$$h(z) = z^{-n} f(z), z \in \mathbb{C}$$

On a $h(0) = C_n \notin \{0, +\infty\}$. Les fonctions h et f ont les mêmes pôle et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq R$. En appliquant la formule de Jensen, on trouve

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|R^{-n} f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{|b_k|}{R}$$

dóù

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi + \sum_{j=1}^{m} \log \frac{|a_j|}{R} - \sum_{k=1}^{n} \log \frac{|b_k|}{R} - n \log R$$

Définition 3.1.1. *Pour tout réel $x > 0$, on définit $\log^+ x$ par*

$$\log^+ x = \max\{0, \log x\}.$$

Lemme 3.1.1. *1)* $\log x \leq \log^+ x$.

2) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

Définition 3.1.2. ***Fonction de proximité :***

Soient f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = +\infty$. Alors, on définit $m(r; a; f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par

$$m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \textit{ si } a \neq +\infty$$

et par

$$m(r,+\infty,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta \ \textit{si } a=+\infty$$

Corollaire 3.1.1. *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=m(r,f)-m(r,\frac{1}{f})$$

Définition 3.1.3. ***la fonction N(r,f) :***

Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a=+\infty$. On définit N(r,a,f) la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z|\leq r$ et ce que l'on appelle la fonction de comptage, N(r,f) par :

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\mathrm{dt}+n(0,f)\log r$$

$$N(r,a,f)=N(r,\frac{1}{f-a})=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}\mathrm{dt}+n(0,a,f)\log r \ \textit{si } a\neq+\infty \tag{3.2}$$

$$N(r,+\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,+\infty,f)-n(0,+\infty,f)}{t}\mathrm{dt}+n(0,+\infty,f)\log r \ \textit{si } a=+\infty \tag{3.3}$$

ou

$n(t,a,f)$ *(a un nombre complexe) désigne le nombre des zéros de l'équation* $f(z)=a$ *dans le disque* $|z|\leq t$*, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité.*

$n(t,+\infty,f)$ *désigne le nombre des pôles de la fonction f(z) dans le disque*$|z|\leq t$*, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.*

Lemme 3.1.2. *Soit f une fonction méromorphe avec les a-points*$a_j(j=1,2,...,n)$*dans le disque* $|z|\leq R$ *telle que*$0<|a_1|\leq|a_2|\leq...\leq|a_n|\leq R$*,chacune est comptée selon sa multiplicité, Alors,*

$$\int_0^R\frac{n(t,a,f)}{t}\mathrm{dt}=\int_0^R\frac{[n(t,a,f)-n(0,a,f)]\mathrm{dt}}{t}=\sum_{j=1}^n\log\frac{R}{|a_j|} \tag{3.4}$$

Preuve :

En dénotant $r_j = |a_j|, j = 1, 2, ..., n$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{r_j} = \log \frac{R^n}{r_1 r_2 ... r_n} = n \log R - \sum_{j=1}^{n} \log r_j$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n-1} j(\log r_{j+1} - \log r_j) + n(\log R - \log r_n)$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} \log \frac{R}{|a_j|} = \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^{R} \frac{dt}{t} = \int_{0}^{R} \frac{n(t, a, f)}{t} \mathrm{dt}.$$

Corollaire 3.1.2. *soit f une fonction méromorphe représenté par sa sérié de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_k z^k, C_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$$

à l'origine, Alors

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi + N(R, f) - N(R, \frac{1}{f})$$

preuve :

En combinant entre (3.1) et (3.4), on trouve

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi - \int_0^R \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} \mathrm{dt}$$

$$+ \int_0^R \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} \mathrm{dt} - n \log R$$

d'où

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi - \int_0^R \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} \mathrm{dt} +$$

$$\int_0^R \frac{n(t, +\infty, f) - n(0, +\infty, f)}{t} \mathrm{dt} - (n(0, 0, f) - n(0, +\infty, f)) \log R$$

D'après les définitions (3.2) et (3.3), on obtient

$$\log|C_n| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \mathrm{d}\varphi + N(R, f) - N(R, \frac{1}{f})$$

Reformulation de la formule de Poisson Jensen

Corollaire 3.1.3. *Soit f une fonction méromorphe représenté par sa série de Laurent*

$$f(z)=\sum_{k=n}^{+\infty}C_k z^k, C_n\neq 0, n\in\mathbb{Z}$$

à l'origine, Alors,

$$\log|C_n|=m(r,f)-m(r,\frac{1}{f})+N(R,f)-N(R,\frac{1}{f}) \tag{3.5}$$

La fonction caractéristique de R . Nevanlinna

Définition 3.1.4. *Soit f une fonction méromorphe non constante, On définit la fonction caractéristique T(r,f) de la fonction f par*

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$$

Premier théorème fondamental de R.Nevanlinna

Théorème 3.1.1. *:*

Soit f une fonction méromorphe non constante et soit

$$f(z)-a=\sum_{i=n}^{+\infty}C_i z^i, C_n\neq 0, n\in\mathbb{Z}$$

La série de Laurent de (f-a) à l'origine, Alors, pour tout nombre complexe a, on a

$$T(r,\frac{1}{f-a})=T(r,f)-\log|C_n|+\varphi(r,a)$$

où

$$|\varphi(r,a)|\leq\log 2+\log^{+}|a|$$

Preuve :

Premièrment, on suppose que $a=0$. par le corollaire (3.1.2) et la définition (3.1.1) on obtient

$$\log|C_n|=T(r,f)-T(r,\frac{1}{f})$$

Par conséquent :

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \log|C_n|$$

c'est une affirmation avec $\varphi(r, 0) \equiv 0$

On traite maintenant le cas génerale où $a \neq 0$ .Soit $h(z) = f(z) - a$. Alors,

$$N(r, h) = N(r, f), N(r, \frac{1}{h}) = N(r, \frac{1}{f-a}) \tag{3.6}$$

et

$$m(r, \frac{1}{h}) = m(r, \frac{1}{f-a}) \tag{3.7}$$

comme

$$\log^{+}(h) = \log^{+}|f-a| \leq \log^{+}|f| + \log^{+}|a| + \log 2$$

et

$$\log^{+}(f) = \log^{+}|f-a+a| \leq \log^{+}|f-a| + \log^{+}|a| + \log 2$$

Líntégration de ces inégalités donne

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \log^{+}|a| + \log 2$$

et

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \log^{+}|a| + \log 2$$

posons

$$\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f)$$

. Alors, $\varphi(r, a)$ satisfait

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^{+} a + \log 2$$

Maintenant, appliquons la formule (3.5) á la fonction h, nous obtenons

$$\log|C_n| = m(r, h) - m(r, \frac{1}{h}) + N(R, h) - N(R, \frac{1}{h})$$

d'où

$$m(r, \frac{1}{h}) + N(R, \frac{1}{h}) = m(r, h) + N(R, h) - \log|C_n|$$

De (3.6)et (3.7), on trouve

$$T(r, \frac{1}{h}) = m(r, f) + N(r, f) - \log|C_n| + \varphi(r, a)$$

$$= T(r, f) - \log|C_n| + \varphi(r, a)$$

3.2 Le théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème fondamental de l'algèbre affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré k admet k racines comptées avec multiplicité. Il existe de nombreuses démonstrations plus ou moins équivalentes utilisant des outils d'analyse complexe. Par exemple, la formule de Jensen énoncée dans le deuxième chapitre fournit une preuve du théorème fondamental.

Preuve :

Le polynôme P est une série entière dont les coefficients sont nuls pour des indices suffisamment grands :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_k X^k$$

où a_k est non nul. On peut supposer a_0 non nul. L'application $z \mapsto P(z)$ est une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$. On a l'équivalent $P(z) \backsim a_k z^k$. Par des méthodes classiques de comparaison d'intégrales divergentes, il vient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta})| d\theta \sim k \log r$$

Un polynôme de degré k sur $\mathbb{C}$ a au plus k racines complexes comptées avec multiplicité. Comme $n(r)$ est croissant, $n(r)$ est constant égal à n_0 pour r suffisamment grand. La formule de Jensen donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta})| d\theta = \log|P(0)| + \int_0^r \frac{n(s)}{s} ds = n_0 \log r + Constante$$

En comparant les deux équivalents obtenus, on obtient $n_0 = k$. Par conséquent, le polynôme P possède k racines comptées avec multiplicité.

Conclusion

Dans ce mémoire :

1) on traité la formule de Poisson-Jensen, et sa démonstration détaillée.

2) la formule de Poisson-Jensen contient deux applications.

– Dans la première application, on donne une reformulation de la formule à l'aide de trois fonctions "$m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$" définies par Nevanlinna

– Dans la deuxième application, on donne une preuve au théorème fondamental de l'algèbre.

Bibliographie

[1] M.Andasmas, *Croissance et points fixes des solutions meromorphes de certain equations differentielles lineaires*,janvier (2015)

[2] M.Buck,*Nevanlinna theory*,J.K.Langely.April(2006)

[3] R.Bouabdelli, *Unicité des fonctions entières et équations differentielles linéaires*.université A.Ibn Badis.

[4] W. K. Hayman, *Meromorphic functions,* Clarendon Press, Oxford, 1964.

[5] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. de Gruyter, Berlin, 1993.

[6] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable, volume2*, selected russian publications in the mathematical sciences, 1965.

[7] Formule de Jensen, *http ://fr.m.wikipedia.org*

[8] B.Yallaoui et H.Benseridi,*Analyse complexe elementaire*,université F, Abbas.