Ministère De L'enseignement Superieur Et De La Rechreche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques

présenté par

***Bouaricha Nacira**

***Bensalem Zohra**
***Bellahrache Amel**

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle et application

sujet de Mémoire
Étude de l'existence des solutions d'un problème aux limites à dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable.

Mémoire de fin D'étude Pour Obtenir

Le diplome de Master

présenter et Soutenue publiquement le 13/07/2021

devant le jury composé de

***MOKHTARI MOKHTAR**	**MCA**	**Président**
***SOUID MOHAMMED SAID**	**MCA**	**Encadreur**
*** BOUAZZA ZOUBIDA**	**MAA**	**Examinateur**

Remerciement

✓ Nous rendons grâce au **Dieu** de nous avoir donné la force, patience, le courage et la volonté pour achever ce travail.

✓ Je tiens à remercier vivement **Mr. Souid Mohammed Said** pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de m'encadrer, pour sa disponibilité tout au long de lélaboration de ce mémoire, pour son aide, ses critiques et ses suggestions, qui ont été pour moi d'un grand apport.

✓ Mes remerciement les plus sincères aux membres du jury qui m'ont fait honneur de juger mon travail plus précisément pour examinatrice **Mme. Bouazza Zoubida** président du jury et pour **Mr. Mokhtari Mokhtar** .

✓ Sans oublier l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes cycles d'études.

✓ Finalement, je remercie tous ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce mémoire.

★ *A vous tous, un grand Merci*

Dédicace

★ *Je dédie ce modeste travail*

★ *Avant tout, je remercie le grand dieu qui nous a aidés à élaborer ce modeste travail*

★ *Ma chère maman que dieu la bénisse et la protège dans sa vie je dédie mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir se que je suis, merci mes parents.*

★ ***À mes chères soeurs*** *:Narimane, Chahrazed, Norhane*

★ ***À mes chèr fréres :****Ali, djamel aldine*

★ ***À mon fiancé :*** *Mohamed*

★ ***À mes chèrs amis :****Zahra, Naima, Malika*

★ ***À ma très chère binôme :*** *Amel, zohra*

Et tous mes enseignants, je leurs exprime ma profonde gratitude.

A tous les étudiants de promotion de AFA .

Et toute personne qui me connait.

Bouaricha nacira

Dédicace

★ .

★ *Je remercie tout d'abord,* ***Allah****, le toute puissant et clément de m'avoir aidé à réaliser se travail.*

Je dédie ce mémoire : ★ *A mes chers parents ma mère et mon père pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

★ ***A mes frères :****Mohamed, Younes.*

★***A mes soeurs :****Asma, Zineb, Azza, fatima, karima, khadidja .*

★***A mon encadreur Souid Mohammed Said*** *qui mérite tous mon respect et tribut.*

Bellahrache amel

Dédicace

★ *Ma grande gratitude premièrement à ma mère et mon père, qui m'ont toujours soutenu avec patience et dévouement durant toutes mes années de formation.*

★ ***A mes soeurs :****Aicha, rawia.*

★ ***A mes frères :****Ali, Khaled .*

★ ***A mes amies :****Karima, Fatima .*

★ *Tous mes oncles et mes tantes, mes cousins et cousines.*

Bensalem zohra

Table des matières

1 Préliminaire **10**

1.1 Quelques théorèmes du point fixe 11

1.2 Fonction de Green 12

1.2.1 L'existence et unicité de la fonction de Green . . . 13

1.3 Répartition 14

2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable **16**

2.1 Introduction 16

2.2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre constant 17

2.2.1 Quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre constant . . 17

2.3 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable 19

2.3.1 Quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable . . 19

3 Application **22**

3.1 Introduction 22

3.2 **Existence de solutions** 23

3.3 Exemple 36

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'éxistence et d'unicité des solutions à un problème aux limites pour les équations différentielles non linéaire à dérivée fractionnaire d'ordre variable au sens de Riemann-Liouville.
L'idée principale ici est de transforme l'ordre fractionnaire d'une variable en un ordre constante en utilisant la fonction constante par morceaux.

La technique utilisée c'est de ramener l'étude de notre problème à la recherche d'un point fixe d'un opérateur intégral convenablement construit. Nos résultats sont basés sur les théorèmes du point fixe de Schauder et la contraction principale de Banach.
Ce **mémoire** est composé de trois chapitres.

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous donnons notations, définitions, quelques concepts sur la répartition, fonction constante par morceaux et la fonction de Green, et dans la dernière section on donne quelques théorèmes du point fixe (Le théorème du point fixe de Banach et Schauder).

Le deuxième chapitre est consacré à les définitions de l'intégrale et la dérivée fractionnaire d'ordre constant et d'ordre variable de Riemann-Liouville et ses propriétés.

Dans **le troisième chapitre** nous présentons une application pour illustrant l'éxistence et l'unicité des solutions du problème aux limites pour les équations différentielles non linéaire à dérivée fractionnaire d'ordre variable au sens de Riemann-Liouville suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{u(t)}x(t) + f(t, x(t), I_{0^+}^{u(t)}x(t)) = 0, \;\; t \in J := [0, T] \\ x(0) = 0, \;\; x(T) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $0 < T < +\infty$, $1 < u(t) \leq 2$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $D_{0^+}^{u(t)}$, $I_{0^+}^{u(t)}$ sont la dérivée fractionnaire et intégrale de Riemann-Liouville d'ordre variable $u(t)$.
Enfin on termine ce mémoire par une conclusion du travail efectuée.

Mots clés : problème aux limites, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre variable, fonction de Green, espace de Banach, point fixe, fonction constant par morceaux.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.
Soit $C = (J =: [0, T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| : t \in J\}.$$

Définition 1.1. *Soit E un espace de Banach et $F : E \to E$ un opérateur.*

1. *F est dit* ***continu*** *si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Fx_n)_{n\in N}$ converge vers Fx.*

2. *F est dit* ***compact****, si pour tout borné B de E, $F(B)$ est relativement compact.*

3. *F est dit* ***complètement continu*** *si F est continue et si l'image*

de tout borné B de E est relativement compact.

Définition 1.2. *Soit M un sous ensemble de $C(J,\mathbb{R})$.*

1. *M est dit **équicontinu** si est seulement si :*
   pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in J$:
   $\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon$, pour tout $f \in M$.
2. *M est dit **uniformément borné** si et seulement si :*
   il existe $c > 0 : \|f(t)\| \leq c$ pour tout $t \in J$ et pour tout $f \in M$.

Théorème 1.1. *([14])**(Ascoli Arzela)** Soit $C(J,\mathbb{X})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J,\mathbb{X})$ est relativement compact si :*

- M est uniformément borné.

- M est équicontinu.

1.1 Quelques théorèmes du point fixe

Introduction

Les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'un opérateur F admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles et intégrales.

Définition 1.3. *Soit F un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = F(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur F.*

Théorème 1.2. *[6, 4]* ***(Théorème du point fixe de Banach)****.*
Soit (X, d)un espace métrique complet. Une application $F : X \to X$ est une contraction avec la constante de Lipschitz $k(k \in]0, 1[)$. Alors F a un point fixe unique $x \in X$.

Le théorème du point fixe de Schauder suivant est le plus utilisé dans les applications.

Théorème 1.3. *[6, 4]****(Théorème de point fixe de Schauder)****.*
Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé, borné et non vide. Et soit $F : K \to K$ un opérateur complètement continue. Alors F admet au moins un point fixe.

1.2 Fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a, b])$ où $p \in C^1[a, b], a < b$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tels que pour tout $i = 1, 2$:
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. On considère les équation différentielles ordinaires :
(**H**) $(py')' + qy = 0$,
(**NH**) $(py')' + qy = f$,
ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

Définition 1.4. *On appelle fonction de **Green** associé au problème homogène* $(H) - (CB)_h$ *une fonction* $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés :*

(a) G *est continue sur* $[a,b] \times [a,b]$.

(b) G *est symétrique :* $G(t,s) = G(s,t), \forall (t,s) \in [a,b]^2$.

(c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *est continue pour tout* $t \neq s$.

(d) La fonction partielle $t \to G(t,s)$ *est solution de l'équation (H) pour tout* $t \neq s$.

(e) La fonction partielle $t \to G(t,s)$ *vérifie les condition* $(CB)_h$ *pour tout* $s \in [a,b]$.

1.2.1 L'existence et unicité de la fonction de Green

Théorème 1.4. *Supposons que le problème homogène* $(H) - (CB)_h$ *n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépendant pas de* f*, et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *de problème non homogène* $(NH)-$

$(CB)_h$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds.$$

Démonstration : Voir [5]

1.3 Répartition

Définition 1.5. *([23]-[8]) Un intervalle généralisé est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ qui est soit un intervalle (c'est-à-dire un ensemble de la forme : $[a_1, a_2], (a_1, a_2), [a_1, a_2)$ où $(a_1, a_2])$, un point $\{a_1\}$, où l'ensemble vide $\emptyset$.*

Définition 1.6. *([23]-[8]) Si I est un intervalle généralisé. Une partition de I est un ensemble fini $\mathcal{P}$ d'intervalles généralisés contenus dans I, tels que pour tout x dans I se trouve exactement dans l'un des intervalles généralisés E dans $\mathcal{P}$.*

Exemple : L'ensemble $p = \{\{1\}, (1,6), [6,7), \{7\}, (7,8]\}$ d'intervalles généralisés est une partition de [1,8].

Définition 1.7. *([23]-[8]) Soit I un intervalle généralisé, soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $\mathcal{P}$ une partition de I. g est dite constante par morceaux par rapport à $\mathcal{P}$ si pour chaque $E \in \mathcal{P}$, g est constante sur E.*

Exemple : La fonction $f : [1, 6] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 1 \leq x < 3, \\ 1, & x = 3, \\ 5, & 3 < x < 6, \\ 2, & x = 6. \end{cases} ,$$

est constante par morceaux par rapport à la partition $\{[1, 3), \{3\}, (3, 6), \{6\}\}$ de $[1, 6]$.

Chapitre 2

L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

2.1 Introduction

L'idée du calcul fractionnaire est de remplacer les nombres naturels dans l'ordre des dérivées par des nombres rationnels. Bien que cela semble une considération élémentaire, il a une correspondance passionnante expliquant certains phénomènes physiques.
Le calcul fractionnaire d'ordre variable est une extension d'ordre constant. Au cours des dernières années, de nombreuses contributions à l'existence de solutions aux problèmes d'ordre constant fractionnaire sont assez larges, au contraire quelques articles traitent de l'existence de solutions aux problèmes d'ordre variable (par exemple, voir [10, 15, 17, 20, 19, 21]).

2.2 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre constant

Dans cette section, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Définition 2.1. *([9]) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([\mathtt{a}, \mathtt{b}], \mathbb{R}_+)$ est défini par :*

$$I_a^{(\alpha)} h(t) = \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,\ t > a$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma.

Définition 2.2. *([9]) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([a, b], \mathbb{R}_+)$, est donnée par :*

$$(D_{a+}^{\alpha} h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h(s) ds$$

où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

2.2.1 Quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre constant

Proposition 2.1. *([9]) Soient α, $\beta > 0$. Alors on a*

(1) $I^{\alpha} : \mathtt{L}^1(\mathbb{J}, \mathbb{R}_+) \to \mathtt{L}^1(\mathbb{J}, \mathbb{R}_+)$ *et si* $h \in \mathtt{L}^1(\mathbb{J}, \mathbb{R}_+)$ *alors*
$I^{\alpha} I^{\beta} h(t) = I^{\beta} I^{\alpha} h(t) = I^{\alpha+\beta} h(t).$

(2)

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} h(t) = h(t).$$

.

(3) $I_a^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$.

(4) ${}^c D_a^{\alpha}$ *est non inverse à droit de* I_a^{α} *c-à-d* $I_a^{\alpha\, c} D_a^{\alpha} \neq I_d$ *mais* ${}^c D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} = I_d$.

(5) La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est linéaire.

Lemme 2.1. *([9]) Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle :*

$$D_a^{\alpha} h = 0$$

admet les solutions :

$$h(t) = w_1(t-a)^{\alpha-1} + w_2(t-a)^{\alpha-2} + ... + w_n(t-a)^{\alpha-n}$$

$w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, *où* $n - 1 < \alpha \leq n$.

Lemme 2.2. *([9]) Soit $a > 0$, $h \in L(a, b)$, $D_a^{\alpha} h \in L^1(a, b)$, alors*

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} h(t) = h(t) + w_1(t-a)^{\alpha-1} + w_2(t-a)^{\alpha-2} + ... + w_n(t-a)^{\alpha-n}$$

$w_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, *où* $n - 1 < \alpha \leq n$.

2.3 L'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

Définition 2.3. *([10]-[15]) Soit* $-\infty < a < b < +\infty$ *et* $u(t) : [a,b] \mapsto (0,+\infty)$ *l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable* $u(t)$ *de la fonction* $h(t)$ *est définie par :*

$$I_{a^+}^{u(t)} h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} h(s) ds, \ \ t > a, \tag{2.1}$$

Définition 2.4. *([10]-[15]) Soit* $-\infty < a < b < +\infty, n \in \mathbb{N}, u(t) : [a,b] \mapsto (n-1,n)$ *la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable* $u(t)$ *de la fonction* $h(t)$ *est définie par :*

$$D_{a^+}^{u(t)} h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^{n-u(t)} h(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-s)^{n-u(s)-1}}{\Gamma(n-u(s))} h(s) ds, \ \ t > a. \tag{2.2}$$

2.3.1 Quelques propriétés de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable

Lemme 2.3. *([21]) Soit* $0 \leq \delta < 1$, $u : J \to (1,2]$ *une fonction continue, alors pour*
$y \in C_\delta(J,\mathbb{R}) = \{y(t) \in C(J,\mathbb{R}), \ \ t^\delta y(t) \in C(J,\mathbb{R}) \ /t \in \min\limits_{t\in J} |u(t)|\}$,
l'intégrale fractionnaire d'ordre variable $I_{0^+}^{u(t)} y(t)$ *existe pour tout point sur* J.

Lemme 2.4. *([21]) Soit* $u : J \to (1,2]$ *une fonction continue, alors*

$I_{0^+}^{u(t)} y(t) \in C(J,\mathbb{R})$ *pour tout* $y \in C(J,\mathbb{R})$.

Remarque 2.1. *([18]-[20]) En général, pour touts fonctions* $u(t)$, $v(t)$, *nous remarquons que la propriété de semi groupe n'est pas vérifiée : i,e*

$$I_{a^+}^{u(t)} I_{a^+}^{v(t)} h(t) \neq I_{a^+}^{u(t)+v(t)} h(t).$$

Exemple 2.3.1. *Soit*

$$u(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in]1,3], \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 2, & t \in]1,3], \end{cases}$$

et $\quad h(t) = t, \quad t \in [0,3].$

$$\begin{aligned}
I_{0^+}^{u(t)} I_{0^+}^{v(t)} h(t) &= \int_0^1 \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds \\
&+ \int_1^t \frac{(t-s)^{u(s)-1}}{\Gamma(u(s))} \int_0^s \frac{(s-\tau)^{v(\tau)-1}}{\Gamma(v(\tau))} h(\tau) d\tau ds, \\
&= \int_0^1 \frac{(t-s)^1}{\Gamma(2)} \int_0^s \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau ds \\
&+ \int_1^t \frac{(t-s)^0}{\Gamma(1)} [\int_0^1 \frac{(s-\tau)^0}{\Gamma(1)} \tau d\tau + \int_1^s \frac{(s-\tau)^1}{\Gamma(2)} \tau d\tau] ds, \\
&= \int_0^1 \frac{(t-s)s^2}{2\Gamma(2)} ds + \int_1^t \frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} + \frac{5}{6} ds,
\end{aligned}$$

et

$$I_{0^+}^{u(t)+v(t)}h(t) \;=\; \int_0^t \frac{(t-s)^{u(s)+v(s)-1}}{\Gamma(u(s)+v(s))}h(s)ds,$$

on sait que,

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)}I_{a^+}^{v(t)}h(t)|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)s^2}{2\Gamma(2)}ds + \int_1^2 \frac{s^3}{6} - \frac{s}{2} + \frac{5}{6}ds, \\ &= \frac{5}{24} + \frac{17}{24} = \frac{22}{24}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{u(t)+v(t)}h(t)|_{t=2} &= \int_0^1 \frac{(2-s)^{2+1-1}}{\Gamma(2+1)}sds + \int_1^2 \frac{(2-s)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)}sds, \\ &= \frac{11}{24} + \frac{5}{24} = \frac{16}{24}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$I_{0^+}^{u(t)}I_{0^+}^{v(t)}h(t)|_{t=2} \neq I_{0^+}^{u(t)+v(t)}h(t)|_{t=2}.$$

Chapitre 3

Application

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est présenter une application pour illustrant l'éxistence et l'unicité des solutions de problème aux limites pour les équations différentielles non linéaires à dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre variable de la forme :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{u(t)}x(t) + f(t, x(t), I_{0^+}^{u(t)}x(t)) = 0, \ \ t \in J := [0, T] \\ x(0) = 0, \ \ x(T) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < T < +\infty$, $1 < u(t) \leq 2$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $D_{0^+}^{u(t)}$, $I_{0^+}^{u(t)}$ sont la dérivée fractionnaire et intégrale de Riemann-Liouville d'ordre variable $u(t)$.

L'analyse essentielle aux problème (3.1), basé sur la différence essentielle entre le calcul fractionnaire d'ordre variable (dérivé et intégral) et le calcul d'ordre fractionnaire d'ordre constant (dérivé et intégral).

D'après notre analyse, nous donnons la définition du solutions au problème (3.1), en utilisant les théorèmes de point fixe : Schauder et Banach pour prouver l'existence et l'unicité des solutions pour problème (3.1), nous avons trouvé les résultats d'existence et l'unicité des solutions (théorème (3.1) et (théorème3.2). Enfin, un exemple est présenté pour illustrer notre résultat.

Le contenu de ce chapitre est basé sur l'article [3].

3.2 Existence de solutions

Supposons les hypothèses suivantes :

(H1) : Soit $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P} = \{J_1 := [0, T_1], J_2 := (T_1, T_2], J_3 := (T_2, T_3], ...J_n := (T_{n-1}, T]\}$ une partition du intervalle J et soit $u(t) : J \to (1, 2]$ une fonction constante par morceaux par rapport à $\mathcal{P}$, i.e.,

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i I_i(t) = \begin{cases} u_1, & si\ t \in J_1, \\ u_2, & si\ t \in J_2, \\ . \\ . \\ . \\ u_n, & si\ t \in J_n, \end{cases}$$

où $1 < u_i \leq 2$ sont des constantes, et I_i est l'indicateur de l'intervalle $J_i := (T_{i-1}, T_i], i = 1, 2, ..., n$, avec $T(0) = 0, T(n) = T$ tel que,

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & si\ t \in J_i, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

(H2) : Soit $t^\delta f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $(0 \leq \delta < 1)$, il existe des constants $c_j > 0, j = 1, 2, 3$ et $0 < \gamma < 1,\ 0 < \eta < 1$, tel que,
$t^\delta |f(t, y, z)| \leq c_1 + c_2 |y|^\gamma + c_3 |z|^\eta$ pour tout $y, z \in \mathbb{R}$ et $t \in J$.

(H3) : Il existe des constantes, $K,\ L > 0,\ 0 \leq \delta < 1$, tel que,
$t^\delta |f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq K|y_1 - y_2| + L|z_1 - z_2|$, pour tout $y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in J$.

On note par $E_i = C(J_i, \mathbb{R})$, l'espace de Banach des fonctions continues de J_i dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|x\|_{E_i} = \sup_{t \in J_i} |x(t)|,$$

où $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Afin d'obtenir nos principaux résultats, nous commençons tout d'abord à l'analyse essentielle du problème aux limites
D'après (2.2), l'équation du problème aux limites (3.1) peut être écrite comme :

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \frac{(t-s)^{1-u(s)}}{\Gamma(2-u(s))}x(s)ds + f(t, x(t), I_{0^+}^{u(t)}x(t)) = 0, \quad t \in J. \tag{3.2}$$

D'après $(H1)$, l'équation(3.2) dans l'intervalle pour $t \in J_i,\ i = 1, 2, ..., n$ peut être écrit comme suite :

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\int_0^{T_1} \frac{(t-s)^{1-u_1}}{\Gamma(2-u_1)}x(s)ds + ... + \int_{T_{i-1}}^t \frac{(t-s)^{1-u_i}}{\Gamma(2-u_i)}x(s)ds\Big) + f(t, x(t), I_{0^+}^{u_i}x(t)) = 0. \tag{3.3}$$

Maintenant, nous présentons une définition du solutions au problème aux limites (3.1), qui est fondamentale dans notre travail.

Définition 3.1. *On dit que le problème aux limites (3.1) a une solution, s'il existe des fonctions $x_i, i = 1, 2, ..., n$, tel que, $x_i \in C([0, T_i], \mathbb{R})$ satisfaite l'équation (3.3) et la condition $x_i(0) = 0 = x_i(T_i)$.*

D'après l'analyse ci-dessus, l'équation du problème aux limites (3.1) peut être écrite comme l'équation (3.2), qui peut s'écrire dans l'intervalle $J_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ comme (3.3).
Pour $0 \leq t \leq T_{i-1}$, nous prenons $x(t) \equiv 0$, alors (3.3) s'écrit comme suit :

$$D_{T_{i-1}^+}^{u_i}x(t) + f(t, x(t), I_{T_{i-1}^+}^{u_i}x(t)) = 0, \quad t \in J_i.$$

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(t) + f(t, x(t), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(t)) = 0, \quad t \in J_i \\ x(T_{i-1}) = 0, x(T_i) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour l'existence de solutions du problème (3.4), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant :

Lemme 3.1. *La fonction $x \in E_i$ est une solution du problème (3.4) si et seulement si x satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds, \tag{3.5}$$

où $G_i(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G_i(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(u_i)} \Big[(T_i - T_{i-1})^{1-u_i} (t - T_{i-1})^{u_i - 1} (T_i - s)^{u_i - 1} - (t-s)^{u_i - 1} \Big], \\ \hfill T_{i-1} \le s \le t \le T_i, \\ \frac{1}{\Gamma(u_i)} (T_i - T_{i-1})^{1-u_i} (t - T_{i-1})^{u_i - 1} (T_i - s)^{u_i - 1}, \\ \hfill T_{i-1} \le t \le s \le T_i, \end{cases}$$

où $i = 1, 2, ..., n$.

Preuve

Soit $x \in E_i$ une solution du problème aux limites (3.4). Maintenant, en appliquant l'opérateur $I^{u_i}_{T^+_{i-1}}$ aux deux côtés de l'équation du problème

(3.4). D'après le lemme(2.1), on a

$$x(t) = w_1(t-T_{i-1})^{u_i-1} + w_2(t-T_{i-1})^{u_i-2} - \frac{1}{\Gamma(u_i)}\int_{T_{i-1}}^{t}(t-s)^{u_i} f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s))ds,$$

D'après $x(T_{i-1}) = 0$ et l'hypothèse de la fonction f, on obtient $w_2 = 0$.
Soit $x(t)$ vérifiée $x(T_i) = 0$, on obtient $w_1 = (T_i - T_{i-1})^{1-u_i} I^{u_i}_{T^+_{i-1}} f(T_i, x(T_i), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(T_i))$.
Alors nous avons :

$$\begin{aligned} x(t) &= (T_i - T_{i-1})^{1-u_i}(t-T_{i-1})^{u_i-1} I^{u_i}_{T^+_{i-1}} f(T_i, x(T_i), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(T_i)) \\ &- I^{u_i}_{T^+_{i-1}} f(t, x(t), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(t)), \quad t \in J_i, \end{aligned}$$

par la continuité de la fonction de Green nous avons :

$$x(t) = \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s))ds.$$

Inversement, soit $x \in E_i$ solution de l'équation intégrale (3.5), puis, par la continuité de fonction $t^\delta f$ et le lemme(2.2), nous pouvons facilement vérifiant que x est la solution du problème aux limites (3.4).
La proposition suivante sera nécessaire

Proposition 3.1. *([24]) Soit* $0 \leq \delta < 1$ *et supposons que* $t^\delta f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *est une fonction continue,* $u(t) : J \to (1, 2]$ *satisfait* $(H1)$, *alors la fonction de Green du problème aux limites* (3.4) *vérifiée les propriétés suivantes :*

(1) $G_i(t,s) \geq 0$ *pour tout* $T_{i-1} \leq t, s \leq T_i$,

(2) $\max_{t\in J_i} G_i(t,s) = G_i(s,s), s \in J_i,$

(3) $G_i(s,s)$ *a un maximum unique donné par :*

$$\max_{s\in J_i} G_i(s,s) = \frac{1}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1},$$

où $i = 1, 2, ..., n.$

Notre premier résultat d'existence est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.1. *Supposons les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites. Alors le problème aux limites (3.4) admet au moins une solution on* J.

Preuve

Transformez le problème (3.4) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$W : E_i \to E_i$$

Défini par :

$$Wx(t) = \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds, \quad t \in J_i. \tag{3.6}$$

On déduire, à partir des propriétés des intégrales fractionnaires et de la continuité de la fonction $t^{\delta} f$ que l'opérateur $W : E_i \to E_i$ défini dans (3.6) est bien défini.

On considère l'ensemble

$$B_{R_i} = \{x \in E_i, \|x\|_{E_i} \leq R_i\},$$

où

$$R_i = \max\Big\{\frac{3c_1}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1}\Big(\frac{T_i^{1-\delta} - T_{i-1}^{1-\delta}}{1-\delta}\Big),$$
$$\Big(\frac{3c_2}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1}\Big(\frac{T_i^{1-\delta} - T_{i-1}^{1-\delta}}{1-\delta}\Big)\Big)^{\frac{1}{1-\gamma}},$$
$$\Big(\frac{3c_3}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1}\Big(\frac{T_i^{1-\delta} - T_{i-1}^{1-\delta}}{1-\delta}\Big)\Big(\frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)}\Big)^{\eta}\Big)^{\frac{1}{1-\eta}}\Big\}.$$

Il est clair que B_{R_i} nons vide, bornée, fermé et convexe.

Maintenant, on démontre que W vérifié les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder. La preuve sera donnée en trois étapes.

Étape 1 : $W(B_{R_i}) \subseteq (B_{R_i})$

Pour $x \in B_{R_i}$, d'après la proposition(3.1) et (H2), on obtient

$$\begin{aligned}
& |Wx(t)| \\
= & \Big| \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds \Big|, \\
\leq & \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) |f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds|, \\
\leq & \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) s^{-\delta} (c_1 + c_2 |x(s)|^{\gamma} + c_3 |I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)|^{\eta}) ds \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(u_i)} \Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4} \Big)^{u_i - 1} \int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta} \Big(c_1 + c_2 |x(s)|^{\gamma} + c_3 \Big(\frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)} \Big)^{\eta} |x(s)|^{\eta} \Big) ds, \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(u_i)} \Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4} \Big)^{u_i - 1} \Big(\frac{T_i^{1-\delta} - T_{i-1}^{1-\delta}}{1 - \delta} \Big) \Big(c_1 + c_2 R_i^{\gamma} + c_3 \Big(\frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)} \Big)^{\eta} R_i^{\eta} \Big), \\
\leq & \frac{R_i}{3} + \frac{R_i}{3} + \frac{R_i}{3} = R_i.
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $W(B_{R_i}) \subseteq B_{R_i}$.

Étape 2 : W est continu

Soit (x_n) une suite telle que $x_n \to x$ dans E_i, on démontre que

$$\|(Wx_n) - (Wx)\|_{E_i} \to 0$$

En effet pour $t \in J_i$, d'après la proposition (3.1) et (H3), on obtient

$$\begin{aligned}
& |(Wx_n)(t) - (Wx)(t)| \\
\leq\ & \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s)\Big|f(s,x_n(s),I_{T_{i-1}^+}^{u_i}x_n(s)) - f(s,x(s),I_{T_{i-1}^+}^{u_i}x(s))\Big|ds, \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1}\int_{T_{i-1}}^{T_i}\Big|f(s,x_n(s),I_{T_{i-1}^+}^{u_i}x_n(s)) - f(s,x(s),I_{T_{i-1}^+}^{u_i}x(s))\Big|ds, \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1}\int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta}\Big(K|x_n(s)-x(s)| + LI_{T_{i-1}^+}^{u_i}|x_n(s)-x(s)|\Big)ds, \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(u_i)}\Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i-1}\Big[K\|x_n - x\|_{E_i}\int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta}ds + L\|I_{T_{i-1}^+}^{u_i}(x_n - x)\|_{E_i}\int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta}ds\Big], \\
\leq\ & \frac{({T_i}^{1-\delta} - {T_{i-1}}^{1-\delta})(T_i - T_{i-1})^{u_{i-1}}}{4^{u_i-1}(1-\delta)\Gamma(u_i)}\Big(K + \frac{L(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i+1)}\Big)\|x_n - x\|_{E_i}.
\end{aligned}$$

$$\|(Wx_n) - (Wx)\|_{E_i} \to 0 \ \ pour \ \ n \to \infty.$$

Par conséquent, W est un opérateur continu sur E_i.

Étape 3 : W est compact

On démontre que $W(B_{R_i})$ est relativement compact, ce qui signifie que W est compact. Clairement $W(B_{R_i})$ est uniformément borné car à l'étape 1, nous avons $W(B_{R_i}) = \{W(x) : x \in B_{R_i}\} \subset B_{R_i}$ ainsi pour chaque $x \in B_{R_i}$ on a $\|W(x)\|_{E_i} \leq R_i$ ce qui signifie que $W(B_{R_i})$ est uniformément borné. Il reste à montrer que $W(B_{R_i})$ est équicontinu.

Pour $t_1, t_2 \in J_i,\ t_1 < t_2$ et $x \in B_{R_i}$, on a :

$$
\begin{aligned}
&|(Wx)(t_2) - (Wx)(t_1)| \\
= &\ \Big| \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t_2, s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds - \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t_1, s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds \Big|, \\
\leq &\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s)) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds|, \\
\leq &\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| |f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) - f(s, 0, 0) + f(s, 0, 0)| ds, \\
\leq &\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| |f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) - f(s, 0, 0)| ds \\
+ &\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| |f(s, 0, 0)| ds, \\
\leq &\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| \Big[s^{-\delta} \Big(K|x(s)| + L|I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)| \Big) \Big] ds \\
+ &\ f^\star \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| ds, \\
\leq &\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| \Big[s^{-\delta} \Big(K|x(s)| + L \frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)} |x(s)| \Big) \Big] ds \\
+ &\ f^\star \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| ds, \\
\leq &\ T_{i-1}^{-\delta} \Big(K + L \frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)} \Big) \|x\|_{E_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| ds \\
+ &\ f^\star \int_{T_{i-1}}^{T_i} |(G_i(t_2, s) - G_i(t_1, s))| ds,
\end{aligned}
$$

où $f^\star = \sup\limits_{s\in E_i} f(s,0,0)$, d'après la continuité de la fonction de Green G_i.
D'où $|(Wx)(t_2)-(Wx)(t_1)| \to 0$ quand $|t_2-t_1| \to 0$. Cela implique que $W(B_{R_i})$ et équicontinu.

En conséquence de étape 1 à étape 3 avec le théorème d'Ascoli-Arzéla, on résult que W est complètement continu.

En conséquence du théorème du point fixe de Schauder, le problème (3.4) admet au moins une solution $\widetilde{x}_i$ dans B_{R_i}.

Supposons

$$x_i = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{i-1}], \\ \widetilde{x}_i, & t \in J_i, \end{cases} \tag{3.7}$$

on sait que, $x_i \in C([0,T_i],\mathbb{R})$ défini par (3.7) satisfait l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\int_0^{T_1} \frac{(t-s)^{1-u_1}}{\Gamma(2-u_1)}x_i(s)ds+...+\int_{T_{i-1}}^{t} \frac{(t-s)^{1-u_i}}{\Gamma(2-u_i)}x_i(s)ds\Big)+f(s,\widetilde{x}_i(s),I_{0^+}^{u_i}\widetilde{x}_i(s)) = 0,$$

pour $t \in J_i$, ce qui signifie que x_i est une solution de (3.3) avec $x_i(0) = 0,\ x_i(T_i) = \widetilde{x}_i(T_i) = 0$.

En conséquence, nous obtenons que le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution définie par :

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), \quad t \in J_1, \\ x_2(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in J_1, \\ \widetilde{x}_2, \quad t \in J_2 \end{cases} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [0, T_{i-1}], \\ \widetilde{x}_i, \quad t \in J_i \end{cases} \end{cases}.$$

Le résultat suivant est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.2. *Supposons les hypothèses (H1) et (H3) sont satisfaites et si*

$$\frac{({T_i}^{1-\delta} - {T_{i-1}}^{1-\delta})(T_i - T_{i-1})^{u_i - 1}}{4^{u_i - 1}(1-\delta)\Gamma(u_i)}\Big(K + L\frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)}\Big) < 1, \qquad (3.8)$$

alors le problème (3.4) a une solution unique dans E_i.

Preuve

Nous utiliserons le principe de contraction de Banach pour prouver que W défini dans (3.6) a un point fixe unique.

Pour $x(t), y(t) \in E_i$, par la proposition (3.1) et $(H3)$, on obtient que

$$|(Wx)(t) - (Wy)(t)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) ds - \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) f(s, y(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(s)) ds\Big|, \\
&\leq \int_{T_{i-1}}^{T_i} G_i(t,s) \Big| f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) - f(s, y(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(s))\Big|, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(u_i)} \Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i - 1} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \Big| f(s, x(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} x(s)) - f(s, y(s), I^{u_i}_{T^+_{i-1}} y(s))\Big|, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(u_i)} \Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i - 1} \int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta}\Big(K|x(s) - y(s)| + L I^{u_i}_{T^+_{i-1}} |x(s) - y(s)|\Big) ds, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(u_i)} \Big(\frac{T_i - T_{i-1}}{4}\Big)^{u_i - 1} K\|x - y\|_{E_i} \Big[\int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta} ds + L \frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)} \int_{T_{i-1}}^{T_i} s^{-\delta} ds\Big], \\
&\leq \frac{(T_i^{1-\delta} - {T_{i-1}}^{1-\delta})(T_i - T_{i-1})^{u_i - 1}}{4^{u_i - 1}(1-\delta)\Gamma(u_i)} \Big(K + L \frac{(T_i - T_{i-1})^{u_i}}{\Gamma(u_i + 1)}\Big) \|x - y\|_{E_i}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent d'après (3.8), l'opérateur F est une contraction. Ainsi que, par le principe de contraction de Banach, F a un point fixe unique $\widetilde{x}_i \in E_i$, qui est une solution unique du problème (3.4).

Supposons

$$
x_i = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{i-1}], \\ \widetilde{x}_i, & t \in J_i, \end{cases} \tag{3.9}
$$

on sait que $x_i \in C([0, T_i], \mathbb{R})$ défini par (3.9) satisfait l'équation

$$
\frac{d^2}{dt^2}\Big(\int_0^{T_1} \frac{(t-s)^{1-u_1}}{\Gamma(2-u_1)} x_i(s) ds + ... + \int_{T_{i-1}}^{t} \frac{(t-s)^{1-u_i}}{\Gamma(2-u_i)} x_i(s) ds\Big) + f(s, \widetilde{x}_i(s), I^{u_i}_{0^+} \widetilde{x}_i(s)) = 0,
$$

pour $t \in J_i$, ce qui signifie que x_i est une solution unique de (3.3) avec $x_i(0) = 0,\ x_i(T_i) = \widetilde{x}_i(T_i) = 0$.

Alors,

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), \quad t \in J_1, \\ x_2(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in J_1, \\ \widetilde{x}_2, \quad t \in J_2, \end{cases} \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [0, T_{i-1}], \\ \widetilde{x}_i, \quad t \in J_i, \end{cases} \end{cases} .$$

est une solution unique du problème aux limites (3.1).

3.3 Exemple

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{u(t)} x(t) + \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|x(t)|+|I_{0+}^{u(t)} x(t)|} = 0, \quad t \in J := [0, 2], \\ x(0) = 0, \ \ x(2) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit

$$f(t, y, z) = \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1 + |y| + |z|}, \ (t, y, z) \in [0, 2] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty);$$

et

$$u(t) = \begin{cases} 1.7, \quad t \in J_1 := [0, 1], \\ 1.8, \quad t \in J_2 :=]1, 2]. \end{cases} \tag{3.11}$$

On montre que $u(t)$ satisfait la condition (H1).

On a :

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{5}}|f(t,y_1,z_1)-f(t,y_2,z_2)| &= \left| t^{\frac{1}{5}} \left(\frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|y_1|+|z_1|} - \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|y_2|+|z_2|} \right) \right|; \\ &= \left| \frac{|y_2|+|z_2|-|y_1|-|z_1|}{(1+|y_1|+|z_1|)(1+|y_2|+|z_2|)} \right|; \\ &\leq ||y_2|-|y_1|| + ||z_2|-|z_1||\,; \\ &\leq |y_1-y_2| + |z_1-z_2|. \end{aligned}$$

D'où la condition (H3) est satisfaite avec $\delta = \frac{1}{5}$ et $K = L = 1$.

Par (3.11), l'équation du problème (3.10) est divisée en deux expressions comme suit :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{1.7}x(t) + \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|x(t)|+|I_{0^+}^{1.7}x(t)|} = 0, & t \in J_1, \\ D_{1^+}^{1.8}x(t) + \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|x(t)|+|I_{0^+}^{1.8}x(t)|} = 0, & t \in J_2. \end{cases}$$

Pour $t \in J_1$, le problème (3.10) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{1.7}x(t) + \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|x(t)|+|I_{0^+}^{1.7}x(t)|} = 0, & t \in J_1, \\ x(0) = 0, \ \ x(1) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Nous vérifions que la condition (3.8) est satisfaite

$$\frac{({T_1}^{1-\delta} - {T_0}^{1-\delta})(T_1 - T_0)^{u_1-1}}{4^{u_1-1}(1-\delta)\Gamma(u_1)} \left(K + L \frac{(T_1-T_0)^{u_1}}{\Gamma(u_1+1)} \right) = \frac{5}{4^{1.7}\Gamma(1.7)} \left(1 + \frac{1}{\Gamma(2.7)} \right)$$

$$\simeq 0.8587 < 1.$$

D'après le théorème (3.2), le problème (3.12) a une solution unique $x_1 \in E_1$.

Pour $t \in J_2$, le problème (3.10) peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} D_{1^+}^{1.8} x(t) + \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{1+|x(t)|+|I_{0^+}^{1.8} x(t)|} = 0, \quad t \in J_2, \\ x(1) = 0, \;\; x(2) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Ainsi que

$$\frac{({T_2}^{1-\delta} - {T_1}^{1-\delta})(T_2 - T_1)^{u_2 - 1}}{4^{u_2-1}(1-\delta)\Gamma(u_2)} \Big(K + L \frac{(T_2 - T_1)^{u_2}}{\Gamma(u_2+1)} \Big) = \frac{5(2^{\frac{4}{5}} - 1)}{4^{1.8}\Gamma(1.8)} \Big(1 + \frac{1}{\Gamma(2.8)} \Big)$$

$$\simeq 0.5237 < 1.$$

Alors, la condition (3.8) est satisfaite.

D'après le théorème (3.2), le problème (3.13) admet une solution unique $\widetilde{x}_2 \in E_2$.

On sait que

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in J_1 \\ \widetilde{x}_2(t), \quad t \in J_2. \end{cases}$$

Alors, par la définition (3.1), le problème (3.10) admet une solution unique défini par :

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), \quad t \in J_1, \\ x_2(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in J_1, \\ \widetilde{x}_2(t), \quad t \in J_2. \end{cases} \end{cases}$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, le problème multiterme proposée a été étudiée avec succès, via deux théorèmes de point fixe : Schauder et Banach pour prouver l'existence et l'unicité des solutions pour problème (3.1). Un exemple numérique est donné à la fin pour étayer et valider la potentialité de tous les résultats obtenus. D'après notre analyse, il est clair que les résultats (théorème (3.1) et (théorème3.2) est une généralisation lorsque $u(t)$ est une fonction constante, c'est-à-dire $u(t) = c$ (c est une constante positive finie), alors $D_{a^+}^{u(t)}$, $I_{a^+}^{u(t)}$ sont l'intégrale et la dérivée fractionnaire usuelles de Riemann-Liouville. Par conséquent, tous les résultats de ce travail montrent un grand potentiel pour être appliqué dans diverses applications des sciences.

Bibliographie

[1] G. Aguilar, J.F. Analytical and numerical solutions of nonlinear alcoholism model via variable-order fractional differential equations. Phys. A **494** (2018), 52–57.

[2] Y. Bai, H. Kong, Existence of solutions for nonlinear Caputo-Hadamard fractional differential equations via the method of upper and lower solutions J. Nonlinear Sci. Appl., **10** (2017), 5744–5752

[3] Bouazza, Z. Etemad, S. ; Souid, M.S. Rezapour, Sh. Martinez, F. Kaabar, M.K.A. A study on the solutions of a multiterm FBVP of variable order. *J. Funct. Spaces.* **2021**, Article ID 9939147, 1-9.

[4] S. Djebali, Degré topologique : théorie et application aux EDO-EDP, Cours policopié, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2006).

[5] S. Djebali, Problèmes aux limites non linéaire associés aux EDO du second ordre, Cours de magister, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2001-2002).

[6] J. Dugundji and A. Granas, Fixed Point Theory, VolI, Monografie Matematyzne, (PWN), Warsaw, 1982.

[7] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[8] A. Jiahui, C. Pengyu, uniqueness of solutions to initial value problem of fractional differential equations of variable-order, Dynamic Systems and Applications, **28(3)**, (2019), 607-623.

[9] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differenatial Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[10] S. G. Samko, Fractional integration and differentiation of variable order, Anal. Math., **21**, (1995), 213-236.

[11] S. G. Samko, B. Boss, Integration and differentiation to a variable fractional order, Integr.Transforms Spec. Funct., **1**, (1993), 277-300.

[12] H. G. Sun, W.Chen, H.Wei, Y.Chen, A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems, Eur. Phys. J. Special Topics, **193**(2011) 185-192.

[13] H. G. Sun, W. Chen, Y.Q. Chen, Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling, Phys. A., **388** (2009) 4586-4592.

[14] : D. O'Regan, Y.Je Cho, and Yu-Qing Chen,Topological Degree Theory and Applications, Volume 10, by Taylor et Francis Group,LLC, 2006.

[15] D. Valerio, J. S. Costa, Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations, Signal Process, **91**, (2011), 470-483.

[16] J. Vanterler, C. Sousa, E. Capelas de Oliverira, Two new fractional derivatives of variable order with non-singular kernel and fractional differential equation, Comput. Appl. Math., **37** (2018), 5375–5394.

[17] J. Yang, H. Yao, B. Wu, An efficient numberical method for variable order fractional functional differential equation, Appl. Math. Lett., **76**, (2018), 221-226.

[18] S. Zhang, S. Sun, L. Hu, The existeness and uniqueness result of solutions to initial value problems of nonlinear diffusion equations involving with the conformable variable derivative , Rev. R. Acad. Cienc.Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM , (2018).

[19] S. Zhang, L. Hu, Unique existence result of approximate solution to initial value problem for fractional differential equation of variable order involving the derivative arguments on the half-axis, Mathematics , **7(286)**, (2019), 1-23.

[20] S. Zhang, Existence of solutions for two point boundary value problems with singular differential equations of variable order, Electronic Journal of Differential Equations, **245**, (2013), 1-16.

[21] S. Zhang, S. Sun, L. Hu, Approximate solutions to initial value problem for differential equation of variable order, Journal of Fractional Calculus and Applications, **9(2)**, (2018), 93-112.

[22] D. Tavares, R. Almeida, D. F. M. Torres, Caputo derivatives of fractional variable order Numerical approximations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **35** (2016), 69–87.

[23] S. Zhang, The uniqueness result of solutions to initial value problems of differential equations of variable-order, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Math, **112**, (2018), 407-423.

[24] S. Zhang, L. Hu, The existence of solutions and generalized Lyapunov-type inequalities to boundary value problems of differential equations of variable order , Aims Mathematics, **5(4)**, (2020), 2923-2943.