REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : *Analyse fonctionnel et équation différentielle*

Par :
M'boudi Amira
Nasri Asmaa

Sur le thème

Différents Types de Semi-groupes et Applications aux Équation d'évolution.

Soutenu publiquement le 18 / 07 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr Senouci Abdelkader	Pr	Université Tiaret	Président
Mme Elong Ouissem	Mcb	Université Tiaret	Encadreur
Mr Hedia Benauda	Pr	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement.

*Avant de commencer la présentation de ce travail, nous tenons à remercier sincèrement et profondément en premier lieu notre Dieu *ALLAH* le tout puissant.*

Nous devons exprimer notre gratitude à Mr le professeure ***Hedia .B**** *d'avoir accepté de nous encadrer avec enthousiasme et beaucoup d'attention, ainsi que pour sa gentillesse, sa disponibilité, et ses conseils qui nous ont permis d'avancer,non seulement dans le cadre du mémoire, mais aussi dans nos études.*

Nous tenons à remercier aussi les membres de jury :

⋆ ***Pr : Senouci Abdelkader*** *, d'avoir accepté la présidence du jury .*

⋆ ***Dr : Elong Ouissem*** *, d'avoir accepté l'examinateur de ce travail .*

M'boudi Amira .

Nasri Asmaa.

Dédicaces

A mon père,

A ma très chère mère,

A tous mes frères et sœurs,

A toute la famille et tous mes amis,

A tous mes professeurs de l'école

Primaire à la fin de cette thèse.

M'boudi Amira

Dédicaces

Je dédie cette thèse à ma chère Maman , mon cher père à mes frères et mes

sœurs ... à toute la famille et amis proches et lointains.

Nasri Asmaa.

Table des matières

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

E espace de Banach.

$\mathcal{C}(J, E)$ espace de fonction continue dans l'espace de Banach E avec $J = [a, b]$.

L^1 L'espace des fonctions intégrables.

$B(E)$ Algèbre de Banach des opérateur linéaire borné dans E.

$\mathcal{L}(E)$ Ensemble des application linéaire de E dans E.

A Opérateur linéaire non borné.

$D(A)$ Domaine de l'opérateur A.

$\overline{D(A)}$ Adhérence de l'ensemble $D(A)$.

I Identité.

$\rho(A)$ Ensemble de résolvant de l'opérateur A.

$\sigma(A)$ Spectre de l'opérateur A.

$R(., A)$ Application résolvant de l'opérateur A.

R_λ Transformation de Laplace.

A_λ Approximation de Hille-Yosida.

$< ., . >$ Produit scalaire.

Introduction

Dans ce travail on va étudie le problème de Cauchy abstrait régit par un équation d'évolution

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), t \in [0, T]$$

où $A : D(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ inclus dans un espace de Banach X et $f : [0, T] \times X \longrightarrow X$ avec la condition initiale $y(0) = y_0 \in X$.
On va introduire dans ce travail deux type de solution (solution mild, solution intégrale) et on va montrer l'existence de ces solutions.
Si $\overline{D(A)} = X$ alors A est un générateur de C_0-semi-groupe grace au théorème de Hille-Yosida , dans ce cas ($\overline{D(A)} = X$) le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)) & t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

a été étudie par plusieurs auteurs.
Ce mémoire est composé d'une introduction et trois chapitres principaux :

1. **Le premier chapitre :** est consacré aux rappels fondamentaux et outille nécessaires pour réaliser le travail. Ils concernent les semi-groupes,les théorèmes de point fixe, les critères de compacité dans ($\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}(J, E)$ et L^p).
2. **Le second chapitre :** est consacré aux théorème de Hille-Yosida [1948] qui est plus adapté que le théorème de Cauchy Lipschitz pour la résolution des problèmes d'évolution dans un espace de Banach,et le théorème de Lummer Phillips dans [1952] donnent une preuve pour le cas général d'un C_0-semi-groupe.
3. **Troisième chapitre :** On définit plusieurs types de solutions pour le problème de Cauchy et nous utilisons quelques théorèmes du points fixe pour prouver l'existence de ces solutions.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons les principaux outils qui seront utiles dans toute la suite de ce travail.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1. ***(Norme)*** *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on appelle norme sur E toute application $\|.\|_E$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i) $\forall x \in E$: $\|x\|_E > 0$ *et* $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $\|\alpha x\|_E = |\alpha| \|x\|_E$ *(homogénéité).*

(iii) $\forall x, y \in E$: $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, \|.\|_E)$ est dit espace vectoriel normé (e.v.n).

Remarque 1.1. *Tout espace vectoriel normé est un espace métrique muni de la distance*

$$d(x, y) = \|x - y\|_E \qquad x, y \in E.$$

Définition 1.2. ***(Convergence)*** *La topologie sur E est la topologie d'espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset E$ converge (fortement) vers x de E pour la norme $\|.\|_E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - x\|_E \leq \varepsilon$$

Autrement dit

$$\|x_n - x\|_E \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Définition 1.3. ***Suite de Cauchy***

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|_E)$, on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant N_\varepsilon, q \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.4. ***Espace de Banach***

On dit qu' un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy d'élément de E est convergente dans (E, d). Un espace vectoriel normé qu' est complet s'appelle espace de Banach.

Exemple 1.1. *$\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de l'intervalle $J = [a, b]$ a valeur dans $\mathbb{R}$, avec la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in J} |f(x)|$ est un espace de Banach.*
Pour $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ on pose

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Si on prendre p=1 alors $(\mathcal{C}, \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Banach.
Contre exemple :
Soit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -1, & si\ x \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ f(x) = nx, & si\ x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ f(x) = 1, & si\ x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

est de Cauchy mais ne converge pas dans l'espace $(\mathcal{C}(J, \mathbb{K}), \|.\|_1)$.

1.2 Critères de compacité

1.2.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

1.2.1.1 La compacité dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$

Dans toute la suite $J = [a, b]$ est un intervalle et E est un espace de Banach.

Définition 1.5. *Un ensemble A d'un espace de Banach E est dit relativement compact si $\overline{A}$ est compact.*

Définition 1.6. *Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur $f : E \to F$ est compact si l'image de tout borné A de E est relativement compact de F (i.e) $\overline{f(A)}$ est compact.*
f est complètement continu s'il est continu et compact.

Remarque 1.2. *Une application f compact peut ne pas être continue.*

Contre exemple

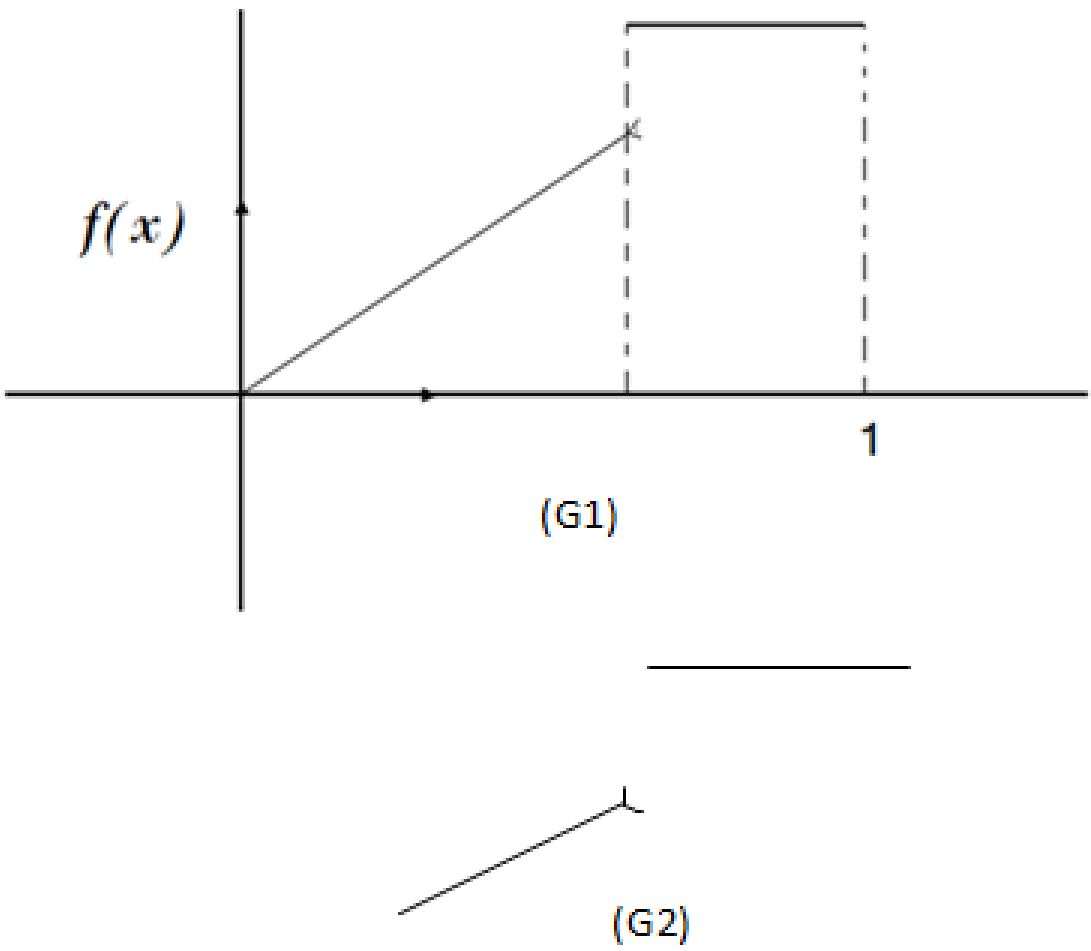

FIGURE1.1

f n'est pas continue mais elle est compact car : $f([0,1])$ est compact et $[0,1]$ est borné.

alors $\overline{f([0,1])}$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$ (voir (G2)).

Dans l'espace des fonctions continues, un critère trés utile pour étudier la compacité d'un ensemble et fourni par le théorème d'Ascoli-Arzela pour énonce ce théorème, on rappelle d'abord la notion d'équicontinuité d'une famille des fonctions continues.

Définition 1.7. *Soit E un espace de Banach et soit A un sous ensemble de $\mathcal{C}(J,E)$.*

1. ***Équicontinue :*** *l'ensemble A est équicontinue si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \textit{telle que}$$
$$\forall t_1, t_2 \in J, |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|x(t_1) - x(t_2)\| < \epsilon \quad \forall x \in A$$

$$\textit{avec} \quad x : J \mapsto \mathbb{E}$$
$$t \mapsto x(t)$$

2. ***Borné :*** *l'ensemble A est borné s'il existe un constant $M > 0$ telle que*

$$\|x(t)\| \leq M \textit{ pour tout } t \in J \textit{ et tout } x \in A.$$

Théorème 1.1. *(Ascoli Arzela) Pour qu'une famille $\mathcal{A}$ de fonction continue définie sur $J = [a, b]$ à valeur dans un espace de Banach $\mathbb{R}$ soit relativement compact il faut et il suffit que cette famille soit bornée et équicontinue.*

1.2.1.2 La compacité dans $\mathcal{C}(J, E)$

Théorème 1.2. *(Ascoli Arzela) Pour qu'une famille $\mathcal{A}$ de fonctions continues définie sur $J = [a, b]$ à valeur dans espace de Banach E soit relativement compacts il faut et il suffit que cette famille soit bornée, équicontinue et l'ensemble $\mathcal{A} = \{f(x), f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact pour tout $x \in J$.*

1.2.2 Théorème de Fréchet-Kolmogorov

1.2.2.1 Critère de compacité dans L^p

1.2.2.2 Espace L^p

Définition 1.8. *Soit n un entier tel que $n \geq 1$ on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue, et on définit pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace*

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C}/f \textit{ mesurable}, \ \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \Big\},$$

que l'on munit de la norme $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.
Pour $y \in L^p([0,T])$*, la norme et donnée par*

$$\|y\|_{\mathrm{L}p} = \begin{cases} \left(\int_0^T |y|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & pour \quad 1 \leq p < \infty. \\ sup\ ess_{t\in[0,T]}|y(t)|, & pour \quad p = \infty. \end{cases}$$

Notations 1.1. — *Nous notons par même symbole un élément de* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *est un de ses représentants, pour* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $h \in \mathbb{R}^n$ *on note* $\tau h(f)$ *la classe de la fonction* $x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x-h)$.

— *Une norme sur* $\mathbb{R}^n$ *étant fixée on note* B_r *la boule fermée centrée à l'origine et de rayon* r.

Théorème 1.3 (Fréchet-Kolmogorov). *Soit* $1 \leq p < \infty$*, un sous-ensemble* A *de* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *est relativement compact si et seulement si :*

1. *A est borné.*
2. $\lim\limits_{h\to 0} \|\tau h(f) - f\|_p = 0$ *uniformément sur* A*, en d'autre termes : pour chaque réel* $\varepsilon > 0$*, il existe un réel* $r > 0$ *telle que : pour chaque* $f \in A$ *et chaque* $h \in \mathbb{R}^n$ *satisfaisant* $\|h\| \leq r$ *on a* $\|\tau h(f) - f\|_p \leq \varepsilon$.
3. $\lim\limits_{R\to +\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|\geq R\}} |f(x)|^p dm_n(x) = 0$ *uniformément sur* A*, en d'autres termes : pour chaque réel* $\varepsilon > 0$ *: il existe un réel* $R' > 0$ *tel que : pour chaque* $f \in A$ *et chaque* $R \geq R'$ *; on a* $\int_{\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|\geq R\}} |f(x)|^p dm_n(x) \leq \varepsilon$.

1.3 Notions générales sur les semi-groupes

Soit E un espace de Banach de norme $\|.\|$ et notons par $B(E)$ l'algèbre de Banach des opérateur linéaires bornés de E dans E du norme $\|N\|$

$$\|N\|_{B(E)} = \sup_{|x|=1} \|Nx\|, \|x\| \leq 1, \forall N \in B(E).$$

$B(E)$ est un espace de Banach.

Définition 1.9. *[2]* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est une famille d'opérateurs linéaires bornées de* E *dans lui même.* $(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné, si sont vérifiés les axiomes suivantes :*

(i) $T(0) = Id_E$ *(Où I est l'opérateur identité de E).*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s); \qquad \forall t, s \geq 0.$

Un semi-groupe d'opérateur linéaire borné $(T(t))_{t\geq 0}$ sur E est dit uniformément continu sur E si :

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{B(E)} = 0.$$

Il est facile de voir que si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu alors :

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \|T(s) - T(t)\|_{B(E)} = 0.$$

Autrement l'application $t \to T(t)$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $B(E)$.

1.3.1 Générateur Infinitésimal

Définition 1.1. *[2] On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ defini comme suit :*

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}, \qquad \forall x \in D(A),$$

et

$$D(A) = \{x \in E \ \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{Tx - x}{t} \quad existe\},$$

où $D(A)$ est appelé le domaine de A.

D'après la définition il est claire que le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu est un opérateur linéaire.

Corollaire 1.1. *[2] Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateur linéaire borné uniformément continu alors :*

1. *Il existe un constante $w \geq 0$ telle que $\|T(t)\| \leq e^w$.*
2. *$t \to T(t)$ est différentiable on norme et*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Lemme 1.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ alors $\exp(tA)$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur E dont le générateur infinitésimal est A.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ et t $\in [0,+\infty[\to S(t) \in \mathcal{L}(E)$ une application définie par :

$$S(t) = \exp(tA) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \;\forall t \geq 0,$$

la série $\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}$ converge pour la topologie de la norme de $\mathcal{L}(E)$. De plus, il est évident que $S(0)=I$ et $S(t+s)=S(t)\ S(\mathrm{s})$, quels que soint t,s ≥ 0.
compte tenu de l'inégalité :

$$\|S(t) - I\| \leq e^{t\|A\|} - 1, \forall t \geq 0,$$

il résulte :

$$\lim_{t\to 0+} \|S(t) - I\| = 0$$

,

donc la famille $S(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu. D'autre part, puisque

$$\begin{aligned}
\|\frac{S(t)-I}{t} - A\| &= \|\frac{1}{t}(e^{tA} - I - tA)\| \\
&= \|\frac{1}{t}(\sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA)\| \\
&= \|\frac{1}{t}(I + tA + \sum_{k\geq 2} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA)\| \\
&\leq \frac{1}{t} \sum_{k\geq 2} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \frac{1}{t}(1 + t\|A\| + \sum_{k\geq 2} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 - t\|A\|) \\
&= \frac{1}{t}(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\|) = \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t\|A\|}\|A\| - \|A\|.
\end{aligned}$$

tend vers zero quand $t \to 0^+$
Nous obtenons :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t) - I}{t} = A,$$

le semi-groupe $S(t)_{t\geq 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A. □

1.3.2 Semi-groupes fortement continus

Dans la suite nous présenterons les semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach E.

Définition 1.10. *[2] Un semi-groupe $T(t)_{t\geq 0}$ d'opérateur linéaire borné sur E est dit un semi-groupe d'opérateur linéaire fortement continu sur E, si*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in E \quad (i.e) \quad \lim_{t\longrightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Un semi-groupe fortement continu sur E est appelé aussi semi-groupe de classe C_0 sur E ou tout simplement un C_0-semi-groupe sur E.

Remarque 1.3. *Les semi-groupes uniformément continus sont C_0-semi-groupes mais la réciproque est fausse.*

Théorème 1.4. *[2] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu alors la fonction $t \to T(t)x$ est continue de $[0, +\infty[$ dans E, $T(t)x \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$.*

Lemme 1.2. *[2] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-goupe alors il existe deux constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que : il existe $\eta > 0$ telle que $\|T(t)\|$ est borné.
Supposons le contraire.
$\forall \eta > 0, \forall M \geq 1, \exists t \in [0, \eta]$ tell que : $\|T(t)\| > M$.
On prend $\eta = \frac{1}{n}$ et $M = n$ $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ donc il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ telle que $\|T(t_n)\| > n$.
Donc la suite $(T(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais $(T(t))_{t\geq 0}$ étant on semi-groupe de classe C_0, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} T(t_n)x = x, \forall x \in E$.
Il vient que la famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est ponctuellement bornée, et autrement dit : $\forall x \in E$ l'ensemble $\{T(t_n)x, n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
D'après le théorème de Banach-Steinhaus cette famille est bornée (uniformément bornée par rapport à la topologie $B(E)$) ce qui contredit.
Par conséquent $\exists \eta > 0$ et $M \geq 1$ telle que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0, \eta]$.
Posons $w = \eta^{-1} \log M \geq 0$ et soit $t \geq 0$
alors : il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et $r \in [0, \eta[$ tell que $t = n\eta + r$.
Donc

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| = \|T(n\eta + r)\| &= \|T(\eta)^n T(r)\| \\
&\leq \|T(\eta)^n\| \|T(r)\| \\
&\leq M.M^n \quad \forall t \in [0, \eta]
\end{aligned}$$

on a : $n = \frac{t-r}{\eta} \leq \frac{t}{\eta}$

donc

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &\leq M.M^{\frac{t}{\eta}} \quad \forall t \in [0, \eta] \\ &= Me^{wt}.\end{aligned}$$

d'où le résultat . □

Théorème 1.5. *[2] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateur linéaire borné sur E de générateur A. Alors :*

a) $\lim\limits_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in E$

b) Pour $x \in E$ et tout $t \geq 0$, $\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ et on a :

$$A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x.$$

c) Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in D(A), T(t)x \in D(A)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) Pour tout $t \geq s \geq 0$, et tout $x \in D(A)$ on a :

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Démonstration. a) L'égalité enoncée découle de l'inégalité :

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\| &= \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds\| \\ &\leq \sup_{s\in[t,t+h]} \|T(s)x - T(t)x\|\end{aligned}$$

et de la continuité de la fonction $t \to T(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans E, pour tout $x \in E$.

b) Pour tout $x \in E$ et tout $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}(\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)ds) \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds.
\end{aligned}$$

en utilisant le résultat a) $\longrightarrow_{h\to 0^+} T(t)x - x$, d'où le b).

c) Pour tout $x \in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(h)-I}{h} T(t)x &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)(T(h)-I)}{h} x \\
&= T(t)Ax \quad (\star).
\end{aligned}$$

Ce qui montre alors que $T(t)x \in D(A)$ et que $AT(t)x = T(t)Ax$.
L'égalité $(\star)$ implique aussi que $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ c'est à dire que la dérivée à droite de $T(t)x$ existe et vaut $T(t)Ax$.
Pour prouver (c), il reste à montrer que pour tout $t \geq 0$, la dérivée à gauche de $T(t)x$ existe et vaut aussi $T(t)Ax$.
Pour tout $h > 0$ et tout $t \geq h$, et tout $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} + T(t-h)Ax - T(t-h)Ax - T(t)Ax \\
&= T(t-h)[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax] + T(t-h)[Ax - T(h)Ax]
\end{aligned}$$

comme $x \in D(A)$ et $\|T(t-h)\|$ est bornée pour $h \in [0,t]$ et que $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} T(t-h)[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax] \\
&\quad + \lim_{h\longrightarrow 0^+} T(t-h)[Ax - T(h)Ax] \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

d'où l'assertion c) .

d) S'obtient par intégration entre s et t.

□

1.3.3 Semi-groupe intégré

Définition 1.2. *[3] Soit E un espace de Banach. On appelle semi-groupe intégré d'opérateur linéaire borné sur E, une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset B(E)$ vérifiant les propriétés suivant :*

1. *$S(0) = 0$.*
2. *Pour tout $x \in E$, $S(t)x$ est une fonction continue de $t \in [0, +\infty[$ à valeur dans E.*
3. *Pour tout $t \geq 0, s \geq 0$, $S(s)S(t) = \int_0^s (S(t+\tau) - S(\tau))d\tau$.*

Définition 1.3. *[3] Un semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est dit exponentiellement borné, s'il existe deux constantes $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \quad \textit{pour} \quad t \geq 0.$$

Définition 1.4. *[3] Un opérateur A est appelle le générateur de semi-groupe intégré si :*

1. *Il existe $w \in \mathbb{R}$ telle que : $]w, +\infty[\subset \rho(A)$.*
2. *Il existe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ exponentiellement bornée fortement continue d'opérateur linéaire borné telle que :*
   (a) *$S(0) = 0$.*
   (b) *$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt \quad pour \quad tout \quad \lambda > w$.*

Proposition 1.1. *[3] Soit A le générateur de semi-groupe intégré $S(t)_{0\leq t}$ alors pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$ on à :*

$$\int_0^t S(s)xds \in D(A) \quad et \quad S(t)x = A(\int_0^t S(s)xds) + tx,$$

de plus, pour tout $x \in D(A)$, $t \geq 0$

$$S(t)x \in D(A) \quad et \quad AS(t)x = S(t)Ax.$$

et

$$S(t)x = tx + \int_0^t S(s)Axds.$$

Corollaire 1.2. *Soit A le générateur de semi-groupe intégré $\{S(t)\}_{0\leq t}$ alors : pour tout $x \in E$ et $t \geq 0$, on a $S(t)x \in \overline{D(A)}$.*
De plus, pour tout $x \in E$, $S(.)x$ est différentiable à droite en $t \geq 0$ si et selement si $S(t)x \in D(A)$ dans ce cas

$$S'(t)x = AS(t)x + x.$$

Un cas particulier important est celui où le semi-groupe intégré est localement lipschitzien continu.

Définition 1.5. *[3] Un semi-groupe intégré est appelé continu localement lipschitzien si pour tout $\tau > 0$, il existe une constante $k(\tau) > 0$ telle que :*

$$\|S(t) - S(s)\| \leq k(\tau)|t - s| \quad pour \quad tout \quad t, s \in [0, \tau]$$

Dans ce cas, d'après la définition il est clair que $S(t)_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné.

Définition 1.6. *[3] On dit que l'opérateur linéaire A satisfiant les conditions de Hille-Yosida si il existe $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ telle que $]w, +\infty[\subset \rho(A)$ et*

$$\sup\{(\lambda - w)^n \|(\lambda I - A)^{-n}\|, n \in \mathbb{N}, \lambda > w\} \leq M. \tag{1.1}$$

Théorème 1.6. *[3] Les assertion suivant sont équivalents :*

i) A est le générateur d'un semi-groupe localement lipschitzien continu.

ii) A satisfait les conditions de Hille-Yosida.

1.4 Les opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

Soit X un espace de Banach.

Définition 1.7. ***(dissipatif)****[4] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X est dissipatif si :*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$$

.

Définition 1.8. ***(m-dissipatif)*** *[4] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X est m-dissipatif si :*

1. *A est dissipatif.*
2. $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ *telle que* $\lambda x - Ax = f$.

Proposition 1.2. *[4] Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur dissipatif, alors*

1. $(\lambda I - A)$ *est injectif, pour tout* $\lambda > 0$ *et on à :* $\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|$ *pour tout* $y \in Im(\lambda I - A) = (\lambda I - A)D(A)$.
2. *Il existe* $\lambda_0 > 0$ *tell que* $(\lambda_0 I - A)$ *soit surjectif si et seulement si* $(\lambda I - A)$ *est surjectif pour tout* $\lambda > 0$, *dans ce cas* $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.
3. *A est fermé si et seulement si :* $I_{\mathbb{R}}(\lambda_0 I - A)$ *est fermé pour un certain* $\lambda_0 > 0$ *(et donc* $Im(\lambda I - A))$ *est fermé pour tout* $\lambda > 0$.

Proposition 1.3. *[4] Il est facile de voir que :*

1. *Si* λ *est dissipatif alors* μA *dissipatif pour tout* $\mu > 0$.
2. *Si A est m-dissipatif, alors* $Im(\lambda I - A) = X$ *pour tout* $\lambda > 0$.

1.5 Quelques Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outiles très utiles en mathématique et dans la résolution des équations différentielles et intégrales.
En effet, les théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour les quelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné.
On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 1.11 (Point fixe). *Soit une fonction* $f : E \longrightarrow F, x^* \in E$ *est appelé un point fixe si* $f(x^*) = x^*$.

Définition 1.12 (Application k-lipschtzienne). *Soient* (X, d) *et* (Y, d') *deux espaces métriques, une application* $f : X \to Y$ *est dite k-lipschitzienne s'il existe un constante* $k > 0$ *telle que :*

$$\forall x, y \in X, d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Si $k \in]0, 1[$ *alors* f *est dit application contractante.*

On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : théorème de point fixe de Banach pour les applications contractantes, puis le théorème de Schauder puis le théorème du point fixe de Leray-Schauder et Shaefer.

Théorème 1.7. ***(Principe de contraction de Banach)*** *Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $N : E \to E$ une application contractante avec le constante de contraction k alors N a un unique point fixe $x^* \in E$.*

Démonstration. Si x et x' sont deux points fixes de f, on a

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq kd(x, x').$$

Comme $k < 1$, on a $d(x, x') = 0$ donc $x = x'$, ce que f a au plus un point fixe.
Soit $x_0 \in E$ quelconque. on définit une suite (x_n) par récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1).$$

donc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \\ &\leq (k^n + ... + k^{n+p-1}) d(x_0, x_1). \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $k \in [0, 1[$, ceci montre que

$$d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty \text{ uniformément en } p \geq 0,$$

et donc que la suite (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge donc vers une limite $x \in E$. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant x_n, on trouve que $f(x) = x$. □

Théorème 1.8. ***(Schauder)*** *Soit E un espace de Banach, $D \subset E$ un ensemble non vide convexe borné et $N : D \longrightarrow D$ un opérateur completment continu et $N(D) \subset D$ alors : N admet au moine un point fixe.*

Théorème 1.9. ***(Alternative non linéaire de Leray Schauder)*** *Soient E un espace de Banach et $\Omega \subset E$ un convexe fermé, on suppose qu'il existe un ouvert U dans Ω telle que $0 \in U$, $A : \overline{U} \to \Omega$ un opérateur completement continu, alors on à l'alternative suivante :*

1. *A admet un point fixe sur $\overline{U}$, ou bien*

2. *Il existe* $U \in \partial U$ *telle que* $U = \lambda AU$ *pour* $\lambda \in [0,1]$ *où* ∂U *est la frontière de* U.

Théorème 1.10. ***(Shaefer)*** *Soit* X *un espace de Banach et* $N : X \mapsto X$ *un opérateur complètement continu si l'ensemble* $\xi = \{y \in X : y = \lambda Ny \text{ pour tout } \lambda \in [0,1]\}$ *est borné alors* N *admet un point fixe.*

Chapitre 2

Théorèmes de Hille-Yosida et Lummer-Phillips

Dans ce chapitre, on pressente deux théorèmes fondamentaux dans le théorie de semi-groupe le théorème de Hille-Yosida et le théorème de Lummer-Phillips.

2.1 Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida est un théorème abstrait de le théorie des opérateurs linéaires qui permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution. Nous donnons des conditions minimales pour comprendre l'énoncé de ce théorème.

Nous considérons l'espace de Banach E, A désignera un opérateur non-borné de E à domaine dense c'est à dire un opérateur linéaire d'un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E à valeurs dans E. Le graphe de A noté $G(A)$ est l'ensemble
$G(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset E \times E$.

Lemme 2.1. *[5] Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ alors :*

1. *Le domaine $D(A)$ de A est dense dans E,($\overline{D(A)} = E$).*
2. *A est un opérateur linéaire fermé, Autrement dit A est un opérateur linéaire dont le graphe $G(A)$ est un fermé de $E \times E$.*

Démonstration. 1) Soit $x \in E$ et soit (t_n) une suite réelle telle que $t_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} t_n = 0$ (par exemple $t_n = \dfrac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

Posons $x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

D'après l'assertion b) du théorème (1.5) il résulte que $x_n \in D(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et par l'assertion a) du théorème (1.5), on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds = x.$$

Ansi $\overline{D(A)} = E$, c'est à dire $D(A)$ est dense dans E.

2) i) La linéarité de A est évidente .

ii) Montrons que A est un opérateur fermé, c'est à dire montrons que le graphe : $G(A) = \{(x, Ax)/x \in D(A)\}$ de A est un fermé de $E \times E$.

Pour cela, soit $(x_n) \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ si $n \to +\infty$ et $Ax_n \longrightarrow y$ si $n \to +\infty$.

Montrons alors que $x \in D(A)$et que $Ax = y$.

Puisque $x_n \in D(A), \forall n \in \mathbb{N}$ alors d'après la formule d) de théorème (1.5), on a :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0. \tag{2.1}$$

Soit $t > 0$ alors pour tout $s \in [0, t]$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)(Ax_n - y)\| \\ &\leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \\ &\leq Me^{wt}\|Ax_n - y\|. \end{aligned}$$

Donc $(T(s)Ax_n)_n$ converge uniformément vers $T(s)y$, quand $n \longrightarrow +\infty$ sur $[0, t]$.

Il vient alors de l'égalité (2.1) et du théorème d'inversion limite et intégrale que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \ ds \ ,$$

donc

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \ ds \ \forall t > 0,$$

comme $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)yds = y$ alors :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe,}$$

d'où $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

□

Dans ce paragraphe, nous présentons l'un des résultats les plus important concernant les C_0-semi groupe. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida, qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi groupe. Nous allons commencer tout d'abord par introduire quelques notions et résultats intermédiaires.

Définition 2.1. ***(Résolvant)*** *[4] Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. On appelle ensemble résolvant de A, qu'on note $\rho(A)$ l'ensemble :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \longrightarrow E \quad est \quad bijectif\}.$$

Définition 2.2. *[4] Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. On appelle spectre de A, l'ensemble noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.*

Définition 2.3. *[4] Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire. Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire, $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de A au point λ.*

Théorème 2.1. *[2] Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0-semi groupe sur E, le générateur infinitésimal A et soient $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re(\lambda) > w$, alors :

1. *L'application $R_\lambda : E \longrightarrow E$ définie par :*

$$R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds,$$

   définit un opérateur linéaire borné sur E.

2. *$\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A)x = R_\lambda x$, $\forall x \in E$.*

Démonstration. 1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re(\lambda) > w$. Il est facile de voir que R_λ est un opérateur linéaire.

   De plus , pour tout $s \geq 0$ et $x \in E$, on à

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda s} T(s) x\| &\leq e^{-Re(\lambda)s} \|T(s)\| \|x\| \\ &\leq e^{-Re(\lambda)s} M e^{ws} \|x\| \\ &= M e^{-(Re(\lambda) - w)s} \|x\|. \end{aligned}$$

ce qui entraine alors que

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda x\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda s}T(s)x\|ds \\
&\leq M\|x\| \int_0^\infty e^{-(Re(\lambda)-w)s}ds \\
&= \frac{M}{Re(\lambda)-w}\|x\|, \quad \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que R_λ est un opérateur linéaire borné sur E et que

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{Re(\lambda)-w}.$$

2. Pour tout $x \in E$ et $h > 0$, on à :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds. \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds. \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds. \\
&= (\frac{e^{\lambda h}-1}{h})\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $h \longrightarrow 0^+$, on obtient que

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x,$$

Donc $R_\lambda x \in D(A)$ et que $AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \forall x \in E$ c'est à dire :

$$(\lambda I - A)R_\lambda x = x, \forall x \in E.$$

Soit $x \in D(A)$, alors d'après le théorème (1.5) assertion c) on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}T(s)x) &= -\lambda e^{-\lambda s}T(s)x + e^{-\lambda s}\frac{d}{ds}T(s)x \\
&= -\lambda e^{-\lambda s}T(s)x + e^{-\lambda s}T(s)Ax.
\end{aligned}$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
R_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)Axds \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-\lambda s}T(s)x)ds + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds \\
&= [e^{-\lambda s}T(s)x]_0^\infty + \lambda R_\lambda x \\
&= -x + \lambda R_\lambda x.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine alors que $\lambda R_\lambda x - R_\lambda Ax = x$, c'est à dire

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Donc $(\lambda I - A)R_\lambda = I_{D(A)}$ et $R_\lambda(\lambda I - A) = I_{D(A)}$.

□

Proposition 2.1. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe sur E de générateur infinitésimal A et soient $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|T(t)\| \geqslant Me^{wt}, \forall t \leq 0 \ .$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $Re(\lambda) > w$ et pour tout $x \in D(E)$ on à

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax.$$

Démonstration. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in D(A)$ on à :

$$\textstyle\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)xds \text{ si } t \to +\infty$$

et $A(\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds) = \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)Axds \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}T(s)Axds$ si $t \to +\infty$.
Comme A est un opérateur fermé, alors :

$$AR(\lambda, A)x = A\bigg(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds\bigg) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)Axds = R(\lambda, A)Ax.$$

D'où le résultat. □

2.2 Théorème de Hille-Yosida pour les C_0-semi groupes de contractions :

Définition 2.4. *[2] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe sur E.*

1. *$(T(t))_{t\geq 0}$ est dit uniformément borné s'il existe $M \geq 1$ telle que : $\|T(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$.*
2. *$(T(t))_{t\geq 0}$ est dit un C_0-semi groupe de constraction si $\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$.*

Théorème 2.2 (Hille-Yosida). *[2] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$ sur E si et seulement si :*

1. *$\overline{D(A)} = E$ et A est un opérateur fermé.*
2. *$]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on à : $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.*

Démonstration. (**condition nécessaire**)
Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contraction alors d'après le lemme (2,1), on à : $\overline{D(A)} = E$ et A est un opérateur fermé.
D'autre part, il vient du théorème (2.1) que pour $\lambda > w = 0$, on à : $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $x \in E$: $R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)xds$.
Ce qui entraine alors que

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)x\| &= \| \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)xds\| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|T(s)x\|ds \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|x\|ds \quad (car \quad \|T(s)\|, \leq 1 \forall s \geq 0) \\
&\leq \frac{\|x\|}{-\lambda}, \quad \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Donc $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ d'où la résultat .

□

Pour montrer que les conditions 1 et 2 du théorème (2.2) sont suffisantes pour que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$ on aura besoin de démontrer les lemmes suivants :

Lemme 2.2. *Soit A un opérateur linéaire sur E vérifiant les conditions du théorème (2.2). Alors* $\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in E$.
Soit $x \in D(A)$, *alors*

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\
&= \|R(\lambda, A)Ax\| \quad d'aprs \quad la \quad proposition \quad (2.1) \\
&\leq \|R(\lambda, A)\|.\|x\| \\
&\leq \frac{\|Ax\|}{\lambda} \longrightarrow 0, \quad si \quad \lambda \to +\infty.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in D(A)$.
Comme $\overline{D(A)} = E$ *et* $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1, (\lambda R(\lambda, A))$ *est un opérateur uniformément borné) alors il en résulte que* $\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in E$.

Définition 2.5. *Pour* $\lambda > 0$, *on appelle approximation de Yosida de l'opérateur linéaire A l'opérateur*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I. \tag{2.2}$$

Remarque 2.1. $(\lambda I - A)R(\lambda, A) = I$ *ce qui entrene que*

$$\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) = I,$$

donc

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - I,$$

d'où

$$\lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Lemme 2.3. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les conditions 1) , 2) du théorème (2.2) si* A_λ *est l'approximation de Yosida de A alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in D(A).$$

Démonstration. Soit $x \in D(A)$ d'après le lemme (2.2) on à :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

Il s'ensuit alors que : $\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$ (d'aprés le proposition (2.1)).

□

Lemme 2.4. *Soit A un opérateur linéaire sur E satisfaisant les conditions 1), 2) du théorème (2.2) et soit A_λ l'approximation de Yosida de A alors A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu de contractions $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. De plus, pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu > 0$,*
on à :

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Démonstration. De la formule (2.2) de la définition de A_λ , il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné sur E , donc d'aprés le lemme (1.1), A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$. De plus que pour tout $t \geq 0$ on à

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} \star e^{-t\lambda I}\| \\
&\leq e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\|, \quad (e^{-t\lambda I} = e^{-t\lambda} I) \\
&\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|} \\
&\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1 \quad car\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Il résulte alors que $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de contraction sur E.

Il est facile de voir à partir de la définition que pour tout $\lambda, \mu > 0$, A_λ et A_μ et e^{tA_λ} et e^{tA_μ} commutent entre eux . Il en résulte alors que pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \| \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x ds)\| \\
&\leq \int_0^1 \|\frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x)\| ds \\
&\leq \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x(A_\lambda - A_\mu)x\| ds \\
&\leq t\|(A_\lambda x - A_\mu)x\| \quad car\|e^{tsA_\lambda}\| \leq 1 \quad et \quad \|e^{t(1-s)A_\mu}\| \leq 1.
\end{aligned}$$

□

La suit de démonstration du théorème (2,2).

Démonstration. (**Conditions suffisantes**) Soit $x \in D(A)$ alors pour tous $\lambda, \mu > 0$ on a

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \tag{2.3}$$

$$\leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\| \tag{2.4}$$

il vient de l'inégalité (2.3) et du lemme (2.3) que pour tout $x \in D(A), e^{tA_\lambda x}$ converge quand λ tend vers $+\infty$ et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés .
Posons $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \forall x \in D(A)$ (critère de Cauchy uniforme dans $\mathcal{L}(X)$) .
Comme $D(A)$ est dense dans E et $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1, \forall t \geq 0$ (e^{tA_λ} est uniformément borné) alors

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \forall x \in E. \tag{2.5}$$

La limite dans la formule (2.4) est uniforme sur les intervalles bornés. De la formule (2.5) on voit que $T(0) = I, T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$ et $\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$. De plus $t \mapsto T(t)x$ est continue pour $t \geq 0$ car : limite uniforme de fonction continue $t \mapsto T(t)x$ ansi $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contraction sur E. Pour conclure, il nous reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.
Pour cela, soit $x \in D(A)$ en utilisant la formule (2.4) et le théorème (1.5) et compte tenu de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ vers $T(t)Ax$ sur les intervalles bornés on obtient

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \tag{2.6}$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \tag{2.7}$$

$$= \int_0^t \lim_{\lambda \to +\infty} e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \tag{2.8}$$

$$= \int_0^t T(s)Axds. \tag{2.9}$$

Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_{0\leq t}$ et soit $x \in D(A)$.
En divisant la formule (2.8) pour $t > 0$ et en faisant t tendre vers 0^+, on voit que $x \in D(A)$

et on a :

$$\begin{aligned} Bx &= \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds \\ &= Ax. \end{aligned}$$

Ce qui entraine alors que $D(A) \subseteq D(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$, comme B est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{0 \leq t}$ qui est de contraction alors D'après la condition nécessaire on a $1 \in \rho(B)$, d'autre part puisque A vérifie 2) du théorème (2.2) alors $1 \in \rho(A)$ mais puisque $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$ on a :

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = E \quad (car \quad I - A \quad est \quad surjectif),$$

ce qui entraine alors que $D(B) = (I - B)^{-1}E = D(A)$.
D'où $A = B$.

□

Comme conséquence de théorème (2.2) de Hille-Yosida, on obtient :

Corollaire 2.1. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contractions $(T(t))_{t \geq 0}$ et soit A_λ l'approximation de Yosida de A alors :*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda} x, \forall x \in E.$$

Démonstration. Il vient de la démonstration du lemme (2,4) que $(\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda x})_{t \geq 0}$ définit un C_0-semi-groupe de contractions $(S(t))_{t \geq 0}$ dont le générateur infinitésimal est A d'après le théorème d'unicité de l'engendrement nous permet donc de conclure que :

$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0.$$

□

Corollaire 2.2. *Soit $w \geq 0$. Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe d'approximation $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifiant $\|T(t)\| \leq e^{wt}, \forall t \geq 0$ si est seulement si :*

1. $\overline{D(A)} = E$ *et* A *est fermé.*
2. $]w, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > w$ *on a :* $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - w}, \forall t \geq 0.$

Démonstration. Découle de théorème (2.2) de Hille-Yosida appliqué au semi-groupe de contraction : $S(t) = e^{-wt}, T(t) \quad \forall t \geq 0$ et du générateur infinitésimal :

$$B = A - wI \text{ et pour } \lambda - w > 0.$$

□

2.3 Théorème de Lummer-Philips

Le théorème de Lummer-Philips, nommé après Gunter Lummer et Ralph Phillips est un résultat de le théorème de semi-groupe fortement continue qui donne une condition nécessaire et suffisante pour un opérateur linéaire dans un espace de Banach pour générer un semi-groupe de contraction.
Notons par X' le dual de l'espace de Banach X et pour $f \in X'$ et $x \in X$, on note $f(x)$ par $< f, x >$. Pour tout $x \in X$ on pose

$$F(x) = \{f \in X' :< f, x >= \|x\|^2 = \|f\|^2\},$$

par le théorème de Hahn-Banach $F(x) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$.

Lemme 2.5. *[1] Un opérateur linéaire* A *est dissipatif si et selement si pour tout* $X \in D(A)$ *il existe* $f \in T(x)$ *telle que* $Re < f, Ax > \leq 0$.

Théorème 2.3. ***(Lummer-Phillips)****[6] Soit* A *un opérateur à domaine* $D(A)$ *dense dans* X.

1. *Si* A *est dissipatif et s'il existe* $\lambda_0 > 0$ *telle que* $Im(\lambda_0 I - A) = X$ *alors* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contraction sur* X.
2. *Si* A *le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur* X *alors* $Im(\lambda_0 I - A) = X$ *pour tout* $\lambda_0 > 0$ *et* A *est un opérateur dissipatif de plus pour tout* $x \in D(A)$ *et tout* $f \in F$ *on a* $Re < f, Ax > \leq 0$.

Démonstration. Soit A un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans X.

1. Supposons que A est dissipatif et qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tellque $Im(\lambda_0 I - A) = X$. Alors d'après l'assertion 2 de la propositions (1.2) $Im(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$, $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$, d'autre part $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est borné donc fermé ce qui entraine alors que $\lambda_0 I - A$ est aussi fermé et donc A est fermé. Il vient alors du théorème de Hille-Yosida que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions sur X.

2. Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X, alors d'après la théorème de Hille-Yosida on a $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et donc $Im(\lambda_0 I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. De plus pour $x \in D(A)$ et $f \in F(x)$ on a :

$$\begin{aligned} | < f, T(t)x > | &\leq \|f\| \|T(t)x\| \\ &\leq \|f\| \|T(t)\| \|x\| \\ &\leq \|f\| \|x\| = \|x\|^2 \end{aligned}$$

ce qui entraine alors que :

$$Re| < f, T(t)x - x > | = Re| < f, T(t)x > | - \|x\|^2 \leq 0$$

il s'en suit alors que :

$$Re < f, Ax >= Re| < f, \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} > | \leq 0$$

ce à étant pour tout $x \in D(A)$ et pour tout $f \in F(x)$.
On déduit alors du lemme (2.4) que A est un opérateur dissipatif ce qui achève la démonstration du théorème.

□

Chapitre 3

Quelques applications de la théorie des semi-groupe aux équations d'évolution

3.1 Notion de résolvant pour l'équation différentielle linéaire à valeur de $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Equations différentielles linéaires

Définition 3.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach. On appelle équation différentielle linéaire toute équation différentielle du type*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t). \tag{3.1}$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues.

Définition 3.2. *Soient (t_0, y_0) et $u \in \mathbb{R} \times E$, on appelle problème de Cauchy relatif au couple (t_0, y_0) et à l'équation (3.1) la recherche de solution de (3.1)*

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \mapsto E \quad \textit{telle} \quad \textit{que} \quad \varphi(t_0) = y_0.$$

Théorème 3.1. *Pour tout $t_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution y de (3.1) définie sur I telle que $y(t_0) = y_0$.*

3.1.2 Équation homogène

On appelle équation homogène (ou équation sans second membre) associée à l'équation (3.1) l'équation

$$y' = A(t)y. \tag{3.2}$$

Lemme 3.1. *L'ensemble S des solutions de l'équation (3.2) sur I est un espace vectoriel de dimension n.*

Définition 3.3. *On appelle système fondamental de solution de l'équation homogène (3.2) une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation.*
Soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ des solutions de l'équation (3.2) on dit qu'elle sont linéaires et indépendant si et seulement si :$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ / $\lambda_1\varphi_1(t)+\lambda_2\varphi_2(t)+...+\lambda_p\varphi_p(t) = 0_E$, $\forall t \in I$ alors : $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$.

Définition 3.4. *Cas où $E = \mathbb{R}^n$. Soit $(e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle matrice fondamentale de l'équation (3.2) relativement à la base $(e_i)_{i=1}^n$ la matrice dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes*

$$\text{soient } \begin{cases} \varphi_1 : I \longmapsto \mathbb{R}^n \\ \vdots \\ \varphi_n : I \longmapsto \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{solution linéaire indépendantes de l'équation.}$$

Donc on définit la matrice fondamentale $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ par la formule suivante

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 3.5. *La matrice fondamentale $\Phi(t)$ tel que $\Phi(t_0) = I_{\mathbb{R}^n}$ est appellèe résolvant de l'équation (3.2) et on la note $\Phi(t) = R(t, t_0)$.*

Proposition 3.1. *Toute matrice fondamentale est une solution de l'équation matricielle (3.2) .*

Proposition 3.2. *La solution φ de l'équation (3.2) telle que $\varphi(t_0) = y_0$ est égale à $R(t, t_0)y_0$.*

Démonstration. Soit : $t_0 \in I$, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ avec $\psi(t) = R(t, t_0)y_0$.

Montrer que ψ est une solution de (3.2)

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= (R(t,t_0)y_0)' \\ &= R'(t,t_0)y_0 \\ &= A(t)R(t,t_0)y_0 \\ &= A(t)\psi(t),\end{aligned}$$

et $\psi(t_0) = R(t_0,t_0)y_0 = I_{\mathbb{R}^n}y_0 = y_0$.

Donc ψ est une solution de (3.2) avec $\psi(t_0) = y_0$ alors d'après l'unicité en deduit que

$$\psi(t) = \varphi(t) = R(t,t_0)y_0.$$

□

Proposition 3.3. *Soient t, s, r 3 points de I alors :*

i) $R(t,t) = Id$, $\forall t \in I$.

ii) $R(r,s)R(s,t) = R(r,t)$ *pour tout* $(s,t,r) \in I^3$.

iii) $R(s,t)^{-1} = R(t,s)$, *pour tout* $(s,t) \in I^2$.

iv) $(t,t_0) \mapsto R(t,t_0)$ *est continue.*

v) La fonction $U : t \mapsto R(t_0,t)$ *est l'unique solution de l'équation différentielle* $U'(t) = A(t)U(t)$ *dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $U(t_0) = I$.

3.2 Solution d'une équation non homogène (Methode de variation de la constant)

Proposition 3.4. *Soit* $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ *une équation différentielle linéaire, la solution de cette équation telle que* $\Phi(t_0) = y_0$ *est :*

$$\Phi(t) = R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds,$$

avec $R(t,t_0)y_0$ *la solution de l'équation homogène et* $\int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds$ *est la solution particulière de l'équation.*

La solution générale de l'équation homogène est de la forme $R(t,t_0)c$ où c est un vecteur constante de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $\varphi(t) = R(t,t_0)c(t)$ pour que φ soit une solution de l'équation (3.1) il faut que

$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t)$.

On à

$$\varphi'(t) = R'(t,t_0)c(t) + R(t,t_0)c'(t),$$

où $R'(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= A(t)R(t,t_0)c(t) + R(t,t_0)c'(t)\\ &= A(t)\varphi(t) + B(t),\end{aligned}$$

avec $R(t,t_0)c'(t) = B(t)$ et $R(t_0,t)R(t,t_0)c'(t) = R(t_0,t)B(t)$ alors $c'(t) = R(t_0,t)B(t)$

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(t_0,t)B(s)ds$$

$$c(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(t)ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= R(t,t_0)c(t)\\ &= R(t,t_0)y_0 + R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t,t_0)B(s)ds\\ &= R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,s)B(s)ds\\ &= R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5. *Supposons que pour tout $(s,t) \in I^2$, on ait $A(s)A(t) = A(t)A(s)$. Alors la résolvante de l'équation (3.2) est donnée par*

$$R(t,t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(s)ds). \tag{3.3}$$

Cas particuliers importants :

1. *Si A est une fonction constante , i.e. si $\forall t \in I, A(t) = \tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ alors*

$$\forall (t, t_0) \in I^2, R(t, t_0) = \exp[(t - t_0).\tilde{A}].$$

2. *Naturellement, la commutativité du produit $A(t)A(s)$ est toujours vérifiée en dimension 1. On a donc l'expression systématique de la résolvante en dimension 1 sous la forme précédente. Autrement dit, la solution du problème de Cauchy $y' = a(t)y$ avec $y(t_0) = x$ où $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, est donnée par*

$$y(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)x.$$

3.3 Les équations d'evolution semi linéaires

Dans cette section nous donnons quelques applications de la théorie de semi-groupe à la résolution des équations d'evolutions, plus précisément on étudie le problème de Cauchy abstrait de la forme :

$$y'(t) = Ay(t) + f(t, y(t)), \qquad t \in [0, a], \tag{3.4}$$

avec la condition initiale

$$y(0) = y_0 \tag{3.5}$$

où $f : [0, a] \times E \mapsto E$ est une fonction donné a valeur dans l'espace de Banach E et $A : D(A) \subseteq E \mapsto E$ est un opérateur linéaire fermé de domaine danse dans E qui est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateur linéaire bornés.

3.4 Solution mild

On va introduire dans ce travail la solution mild de problème (3.4), (3.5) et on va montrer l'existence.

Définition 3.6. *[2] On dit que la fonction $y : [0, a] \mapsto E$ est une solution* ***mild*** *du problème*

(3.1) et (3.2) si y satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds, \qquad \forall t \in [0, a]. \tag{3.6}$$

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe engendré par A et y est une solution de (3.1) et (3.2), alors la fonction $g(s) = T(t-s)y(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$ et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}g(s) &= -AT(t-s)y(s) + T(t-s)y'(s) \\
&= T(t-s)(Ay(s) + f(s)) - AT(t-s)y(s) \\
&= T(t-s)f(s).
\end{aligned}$$

De plus, si $f \in \mathrm{L}^1([0, a], E)$ il vient que $T(t-s)f(s)$ est intégrable (au sens de Lebesgue) puisque :

$$\begin{aligned}
\|T(t-s)f(s)\|_E &\leq M\|f(s)\|_E \\
\int_0^t \|T(t-s)f(s)\|_E ds &\leq M \int_0^t \|f(s)\|_E ds \\
&\leq M\|f\|_{\mathrm{L}^1([0,a],E)}
\end{aligned}$$

par conséquent :

$$g(t) - g(0) = \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds$$

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds$$

et

$$g(0) = T(t-0)y(0) = T(t)y_0$$

$$g(t) = T(t-t)y(t) = y(t)$$

alors : $g(t) = y(t)$ et $g(0) = T(t)y$ donc

$$y(t) = T(t)y_0 + \int_0^t T(s-t)f(s, y(s))ds, \forall t \in [0, a].$$

On s'intéresse dans cette partie à montrer que le problème (3.1) et (3.2) admet une solution avec des conditions sur la fonction f.

Définition 3.7. *Soient $J = [a, b]$, E un espace de Banach et soit la fonction*

$$f : J \times E \mapsto E$$
$$(t, y) \mapsto f(t, y)$$

f est dite Carathéodory si :

i) pour tout $y \in E$

$$f(., y) : J \mapsto E$$
$$t \mapsto f(., y)(t) = f(t, y),$$

est une fonction mesurable.

ii) Pour tout $t \in J$:

$$f(t, .) : E \mapsto E$$
$$y \mapsto f(t, .)(y) = f(t, y),$$

est une fonction continue.

iii) Il existe $k > 0$ et $\varphi_k \in \mathrm{L}^1(J, \mathbb{R}^+)$ tell que pour tout $y \in \mathbb{R}$ avec $\|y\| \leq k$:

$$\|f(t, y)\|_E \leq \varphi_k(t) \text{ presque partout dans } J.$$

Alors l'application f est dite L^1-carathéodory.

Assumons que les hypothèses suivantes sont vérifièes

H_1) f est L^1-Carathéodory.

H_2) Il existe une constante $M \geq 1$ telle que : $\|T(t)\|_{B(E)} \leq M$.

H_3) Il existe une fonction $p \in \mathrm{L}^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que : $\|f(t, y) - f(t, \bar{y})\| \leq p(t)\|y - \bar{y}\|$ pour tout $y, \bar{y} \in (\mathcal{C}([0, a], E)$.

3.4.1 Existence de solution mild

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèses $H_1), H_2)$ et $H_3)$ sont satisfaites. Alors les problèmes (3.1) et (3.2) admet une solution "mild" unique.*

Démonstration. Soit $I = [0, a]$, on transforme le problème d'existence de solution en un problème du point fixe (Approche de la contraction de Banach) pour cela on considère l'opérateur

$$N : \mathcal{C}(I, E) \longrightarrow \mathcal{C}(I, E)$$
$$y \mapsto N(y(t)) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, y(s))ds.$$

Il est clair que les points fixe de l'opérateur N sont des solutions de problème (3.1) - (3.2). Montrons que N est un opérateur de contraction. En effet, soient $y, \bar{y} \in \mathcal{C}(I, E)$

$$N(y(t)) - N(\bar{y}(t)) = \int_0^t T(t-s)\big[f(s, y(s)) - f(s, \bar{y}(s))\big]ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}\forall t \in I \quad \|N(y)(t) - N(\bar{y})(t)\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)\|_{B(E)}.\|f(s, y(s)) - f(s, \bar{y}(s))\|ds \\ &\leq M \int_0^t p(s)\|y(s) - \bar{y}(s)\|ds \\ &\leq M \sup_{t \in J} \|y(t) - \bar{y}(t)\| \|p\|_{\mathrm{L}^1}\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{t \in I} \|N(y)(t) - N(\bar{y})(t)\| \leq M \sup_{t \in J} \|y(t) - \bar{y}(t)\| \|p\|_{\mathrm{L}^1}$$

alors

$$\|N(y) - N(\bar{y})\|_\infty < M\|p\|_{\mathrm{L}^1}\|y - \bar{y}\|_\infty.$$

considérons maintenant la norme $\|.\|_1$ définie sur $\mathcal{C}(I, E)$ par

$$\|y\|_1 = \sup_{t \in J} e^{-\tau P(t)}\|y(t)\|,$$

ou $P(t) = \int_0^t p(s)ds$ et $\tau > M$.

Les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont équivalentes

$$e^{-P(t)}\|y\|_\infty \leq \|y\|_1 \leq \|y\|_\infty.$$

On a

$$\begin{aligned} y(t) = e^{\tau P(t)} e^{-\tau P(t)} \|y(t)\| \Rightarrow \quad & y(t) \leq e^{\tau P(t)} e^{-\tau P(t)} \|y(t)\| \\ \Rightarrow \quad & \sup_{t \in J} \|y(t)\| \leq e^{\tau P(t)} \sup_{t \in J} e^{-\tau P(t)} \|y(t)\| \\ \Rightarrow \quad & e^{-\tau P(t)} \|y(t)\|_\infty \leq \|y(t)\|_1 \leq \|y(t)\|_\infty . \end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|N(y)(t) - N(\bar{y})(t)\|_\infty &\leq M \int_0^t p(s) \|y(s) - \bar{y}(s)\| ds \\ &\leq M \int_0^t p(s) e^{\int_0^t \tau p(s)} e^{\int_0^t -\tau p(s)} \|y(s) - \bar{y}(s)\| ds \\ &\leq M \int_0^t p(s) e^{\tau P(s)} \|y - \bar{y}\|_1 ds \\ &\leq M \|y - \bar{y}\|_1 \frac{1}{\tau} e^{\tau P(s)} |_0^t \\ &\leq \frac{M}{\tau} \|y - \bar{y}\|_1 (e^{\tau P(t)} - 1) \\ &\leq \frac{M}{\tau} \|y - \bar{y}\|_1 e^{\tau P(t)} . \end{aligned}$$

D'où

$$\|N(y)(t) - N(\bar{y})(t)\|_1 \leq \frac{M}{\tau} \|y - \bar{y}\|_1$$

donc N est un opératour de contraction pour tout $\tau > M$, alors l'opérateur N admet un point fixe que est la solution des problèmes (3.1) et (3.2).

□

3.5 La solution intégrale

Soient $J = [0, T]$ et $E = \mathbb{R}$.

On considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)) \quad t \in J, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

dans cette section, nous discutons l'existence de solution intégrale du problème (3.7) dans le cas où A est un opérateur satisfait les conditions de Hille-Yosida de domain nondense défini sur $\mathbb{R}$, générant un semi-groupe intégré $(S(t))_{0\leq t}$ sur $\mathbb{R}$.
Considérons d'abord l'équation suivante avec la condition initiale

$$\begin{cases} u' = Au(t) + h(t), \quad t \in J, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Théorème 3.3. *[10] Soit $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue alors : pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$, il existe une solution continue unique $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

i) $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ *pour tout* $t \in J$.

ii) $u(t) = u_0 + A\int_0^t u(s)ds + \int_0^t h(s)ds,\ t \in J$.

iii) $|u(t)| \leq Me^{wt}(|u_0| + \int_0^t e^{-ws}|h(s)|ds), t \in J$.

de plus, par la méthode de variation de la constante la fonction u est donné par :

$$u(t) = S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \in J. \tag{3.8}$$

Soit $B_\lambda = \lambda R(\lambda, A) := \lambda(\lambda I - A)^{-1}$ (voir [8]) alors pour tout $u \in \overline{D(A)}, B_\lambda u \longrightarrow u$ quand $\lambda \longrightarrow \infty$ et d'après les conditions de Hille-Yosida (avec $n = 1$) il est facile de voir que $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow+\infty} |B_\lambda u| \leq M|u|$, comme

$$|B_\lambda| = |\lambda(\lambda I - A)^{-1}| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - w},$$

donc $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow+\infty} |B_\lambda| \leq M$, égalment si u est donné par (3.8)
alors :

$$u(t) = S'(t)u_0 + \lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} \int_0^t S'(t-s)B_\lambda h(s)ds, t \in J.$$

Définition 3.8. *[3] On dit que le semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est compacte si l'opérateur $S(t)$ est compact pour tout $t > 0$.*

Nous considérons les hypothèses suivantes :

H_1) f est Carathéodory.

H_2) Il existe une fonction continue $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\|f(t,u)\| \leq p(t)(1 + \|y\|) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } u \in E.$$

Avec $\int_0^t e^{-ws}p(s)ds < \infty$.

H$_3$) L'opérateur $S'(t)$ est compact dans $\overline{D(A)}$ pour tout $t > 0$.

P$_1$) A satisfait les conditions de Hille-Yosida c'est a dire il existe $M \geq 0$ et $w \in \mathbb{R}$ telle que $]w, +\infty[\subset \rho(A)$ et

$$|(\lambda I - A)^{-n}| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n} \quad pour \quad n \in \mathbb{N} \quad et \quad \lambda > w,$$

avec $\rho(A)$ est lensemble résolvant de A.

P$_2$) Le semi-groupe$(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement borné.
Il existe deux constantes $M \geq 0$ et $w \geq 1$ tellzs que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt} \quad \forall t \geq 0.$$

3.5.1 L'existence de solution intégrale

Dans la suite on va introduire la solution intégrale du problème (3.7) et on va montrer l'existence de cette solution, avant de commencer et de prouver, nous donnons la définition d'une solution intégrale.

Définition 3.9. *[10] On dit que la fonction $u : J \mapsto \mathbb{R}$ est une solution intégrale de (3.7) si :*

i) $u \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.

ii) $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ *pour tout* $t \in J$.

iii) $u(t) = u_0 + A\int_0^t u(s)ds + \int_0^t f(s, u(s))ds \quad t \in J$.

D'aprés la définition il s'ensuite que $u(t) \in \overline{D(A)}$ $t \geq 0$ en particulier $u_0 \in \overline{D(A)}$ de plus u satisfait l'équation suivant :

$$u(t) = S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds \quad t \in J$$

On remarque que, si u satisfait (3-8),
alors : $u(t) = S'(t)u_0 + \lim\limits_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t S'(t-s)B_\lambda f(s, u(s))ds, t \in J$.

Théorème 3.4. *[10] supposons que les hypothèses$(H_1)-(H_3)$ et et $(P_1), (P_2)$ sont satisfaites* *et :*

$$Me^{wt}\int_0^T e^{-w}p(s)ds < 1,$$

alors les problèmes (3,7) admet au moine une solution.

Démonstration. On transforme le problème (3.7) en un problème de point fixes (approche de Shaefer).
Considérons l'opérateur

$$Q : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$$

définie par

$$(Qu)(t) = S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \ \ t \in J.$$

Les points fixes de Q sont des solutions pour le problème (3.7) car :
u^* est un point fixe de Q, car :
si $Qu^* = u^*$ alors :

$$\begin{aligned} Qu^* = u^* &\Leftrightarrow \forall t \in J, Qu^*(t) = u^*(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in J, u^* = S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds \\ &\Leftrightarrow u^* \quad \textit{est} \quad \textit{une} \quad \textit{solution} \quad \textit{de} \quad \textit{problme} \quad (3.7). \end{aligned}$$

Par conséquent on ramène le problème d'étute d'existence de solution à un problème du point fixe.
Soit r un nombre réel positive avec

$$r \geq \frac{Me^{wT}(u_0+1)}{1 - Me^{wT}\int_0^t e^{-ws}p(s)ds}.$$

La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

étape 01) Q est continue.

Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_k \mapsto u$ dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ et pour tout $t \in [0,k]$ on a :

$$\begin{aligned} \|(Qu_k)(t) - (Qu)(t)\| &\leq \|\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)\big(f(s,u_k(s)) - f(s,u(s))\big)ds\| \\ &\leq Me^{wT}\int_0^t e^{-ws}\|f(s,u_k(s)) - f(s,u(s))\|ds. \end{aligned}$$

Si on pose $f_n(t) = f(t, u_n(t))$ alors $f_n(.) = f(., u_n(t))$ donc :

$$\begin{aligned} f_n :& J \mapsto \mathbb{R} \\ & t \mapsto (f_n(.))(t) = f_n(t) = f(t, u_n(t)) \end{aligned}$$

on a $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ ça provient du fait que $u_n \longrightarrow u$ et comme f est Carathéodory donc f est continue par rapport à la deuxième variable, et $\|f_n(t)\| \leq P(t)(1 + \|u\|)$ donc, on peut appliquer le théorème de la convergence dominé de Lebesgue. Alors $\|Q(u_k) - Q(u)\| \to 0$ quand $k \to +\infty$

étape 02) $Q(B_r) \subset B_r$ avec $B_r = \{u \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}), \|u\|_\infty \leq r\}$.

Soit $u \in B_r, t \in J$.

$$\begin{aligned} |Q(u)(t)| &= |S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds| \\ &\leq Me^{wT}u_0 + Me^{wT}(1+r)\int_0^t e^{-ws}p(s)ds \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} |Q(u)(t)| &\leq Me^{wT}(u_0 + (1+r)\int_0^t e^{-wT}p(s)ds) \\ &\leq r \qquad \left(car \quad r \geq \frac{Me^{wT}(u_0+1)}{1 - Me^{wT}\int_0^t e^{-ws}p(s)ds} \right) \end{aligned}$$

donc $|Q(u)| \leq r$ cela prouve que Q transforme la boule B_r dans lui même c'est à dire $(Q(u)(t)) \in B_r \Rightarrow Q(B_r) \subset B_r$, donc Q est bien définie.

Par l'étape 2 on a $Q(B_r) = \{Q(u), u \in B_r\} \subset B_r$ est borné. Alors $Q(B_r)$ est borné

.

étape 03) (equiconténuité) Soit $t_1, t_2 \in J$ et $u \in \mathcal{C}(J, \overline{D(A)})$ avec $t_1 > t_2$

$$\begin{aligned}
|Q(u)(t_2) - Q(u)(t_1)| &\leq |S'(t_2)u_0 - S'(t_1)u_0| + |\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t S(t_2 - s)B_\lambda f(s, u(s))ds \\
&\quad - \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t S(t_1 - s)B_\lambda f(s, u(s))ds| \\
&\leq |S'(t_2)u_0 - S'(t_1)u_0| + |\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^{t_1} [S'(t_2 - s) - S'(t_1 - s)] \\
&\quad B_\lambda f(s, u(s))ds| + |\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - s)B_\lambda f(s, u(s))ds|
\end{aligned}$$

comme $t_1 \longrightarrow t_2$ alors $|Q(u)(t_2) - Q(u)(t_1)| \longrightarrow 0$ puisque $S(t)$ est continue.

étape 04) Il reste maitenent à montrer que l'ensemble $\xi = \{u \in \mathcal{C}(J, \overline{D(A)}), u = \lambda N u$ pour tout $\lambda \in [0, 1]\}$ est borné.

Soit $u \in \xi$ alors $u = \lambda N u$ pour certaine λ tell que $\lambda \in [0, 1]$ donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$u(t) = \lambda(S'(t))u_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t S(t - s)f(s, u(s)ds)$$

d'aprés (H_2) pour chaque $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \|S'(t)u_0\| + \|\frac{d}{dt} \int_0^t S(t - s)f(s, u(s))ds\| \\
&\leq \|S'(t)u_0\| + \|\frac{d}{dt} \int_0^t S(t - s)p(s)(\|u\| + 1)ds\| \\
&\leq u_0 M e^{wT} + M e^{wT}(1 + \|u\|) \int_0^t e^{-ws} p(s)ds \\
&= M e^{wT}(u_0 + 1) + M e^{wT}\|u_0\| \int_0^t e^{-ws} ds
\end{aligned}$$

donc

$$\|u\| \leq \frac{M e^{wT}(u_0 + 1)}{1 - M e^{wT} \int_0^t e^{-ws} p(s)ds},$$

donc ξ est borné.

Alors Q admet un point fixe qui est la solution du problème (3.7).

$\square$

Bibliographie

[1] Haim .BRZIS. Analyse Fonctionnelle (théorie et applications, MASSON Paris New York Barcelone Milan (1987).

[2] A.Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, 1983 .

[3] Khalil Ezzinbi, The basic theory for partial functional differential equations and applications, 3rd cycle. Damas(Syrie) ,2004,pp.60.<cel-00376391> .

[4] J. Pierre Raymond, Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A_0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.

[5] L. Dan Lemle, Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et ap- plications, 2007.

[6] Ioan I. Vrabie, C0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[7] K. Jochen Engel, Rainer Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equa- tions, Alfred A.Knopf, 1995.

[8] H. Kellerman and M. Hieber, Integrated semigroups, Journal of Functional Analysis 84 (1989), no. 1, 160–180.

[9] T. A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Mathematische Nachrichten 189 (1998), 23–31.

[10] M. BELMEKKI, M. BENCHOHRA, AND S. K. NTOUYAS . EXISTENCE RESULTS FOR SEMILINEAR PERTURBED FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONDENSELY DEFINED OPERATORS . Article in Fixed Point Theory and Applications · January 2006 .

[11] J-P. Demailly Analyse numérique et équations différentielles ; collection Gre- noble Sciences,presses universitaires de Grenoble, Grenoble (1996).

Résumé

Nous etudions dans ce mémoire certaines propriétés des semi-groupe engendrés par des opérateurs linéaires non bornés et les opérateurs dissipatif et m-dissipatif . Notament les C_0-semi-groupes et les semi-groupes intégrés . Un resultat trés important concernant les C_0-semi-groupes, il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida (1948) et Philips dans (1952).
D'un autre côté nous présentons plusieurs résultats d'existence d'équations d'evolutions semi-linéaire. Ces resultats ont été obtenus par l'utilisation de points fixe.